arXiv:2512.15750v1 [math.CV] 11 Dec 2025

某类非线性微分方程的亚纯解

Sujoy majumder、Nabadwip Sarkar* 和 Debabrata pramanik

Abstract. 我们的论文着重研究非线性微分方程的解的存在性及其可能的形式

$$f^m + \left(Rf^{(k)}\right)^n = Qe^{\alpha},$$

其中，其中 k， m 和 n 是三个正整数， Q 和 R 是非零有理函数，并且 α 是一个多项式。我们针对 k、 m 和 n的所有正整数值，对该方程进行了系统研究，给出了整个解或亚纯解可能存在的完备条件。我们的结果在可解性判据以及可接受解的显式解析形式方面，较 Tang 和 Liao[16] 以及 Han 和 L¨u [7]，的结果都有实质性改进。这些发现为复分析中非线性微分多项式和费马型函数方程的更广泛研究作出了重要贡献。

1. 引言

众所周知，费马大定理表明，当 $n \geq 3$时，方程 $x^n + y^n = 1$ 不具有非平凡有理解（见 [17, 20]）。方程 $x^2 + y^2 = 1$ 确实具有非平凡有理解。下面的函数方程

$$f^n(z) + g^n(z) = 1, \tag{1.1}$$

其中 n 是正整数，可视为函数域上的费马丢番图方程。1927年，Montel [14] 证明，当 $n \geq 3$时，方程 (1.1) 没有超越整函数解。我们还在定理 4 [5], 中看到，当 $n > 2$时，方程 (1.1) 实际上没有非零整函数解。Gross [4, 定理 3] 证明，当 $n > 3$时，方程 (1.1) 没有非零亚纯解。对于 $n = 2$，Gross [5, 定理 4] 发现，方程 (1.1) 有如下形式的整函数解： $f(z) = \sin(h(z))$ 和 $g(z) = \cos(h(z))$，其中 $h(z)$ 是整函数。在定理 1中，Gross [4] 证明，方程 $f^2(z) + g^2(z) = 1$ 的所有亚纯解均为以下形式

$$f(z) = \frac{1-\alpha^2(z)}{1+\alpha^2(z)} \text{ and } g(z) = \frac{2\alpha(z)}{1+\alpha^2(z)},$$

其中 $\alpha(z)$ 是一个非常数亚纯函数。对于 $n = 3$，Baker [1, 定理 1] 证明，方程（1.1）的唯一非常数亚纯解为函数

$$f = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\wp^{(1)}(u)}{\sqrt{3}}\right\}/\wp(u) \text{ and } g = \frac{\eta}{2}\left\{1 - \frac{\wp^{(1)}(u)}{\sqrt{3}}\right\}/\wp(u)$$

对于非常数整函数 u 和一个三次单位根 η，其中 $\wp$ 表示满足 $(\wp^{(1)})^2 = 4\wp^3 - 1$ 的 Weierstrass 函数。

1970年，Yang [22]研究了以下 Fermat 型方程

$$f^m(z) + g^n(z) = 1 \tag{1.2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 39B32、34M05、30D35。
Key words and phrases: 微分方程，亚纯解，增长。**Corresponding Author*: Nabadwip Sarkar。由 $\mathcal{AMS}$-LaTeX 排版。

并得出，当 1.2 时，方程 ($\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$（参见定理 1 的证明）没有非常数整函数解。因此，显然当 1.2 时，方程 ($m>2$ 且 $n>2$ 时，方程 ($m=n=2$ 且 $g=f^{(1)}$ 的解的存在性。然而，对于 1.2，许多作者研究了方程 ([3, 7, 10, 11, 15, 16, 18, 19, 24])

证明复非线性微分方程没有亚纯解，或在存在此类解时求出该复非线性微分方程的所有亚纯解，是一个有趣且相当困难的问题，即使对于一个简单的微分方程也是如此。2004年，Yang 和 Li [24]研究了下列类型微分方程的亚纯解

$$f^2+b(L(f))^2=a,$$

其中， $L(f)$ 是关于 f 的线性微分多项式，而 a 和 b 是关于 f 的小亚纯函数。实际上，他们得到了以下结果。

定理 A。 [24, 定理 1] 设 $n(\geq 1)$ 为一个整数，且 a、b_0、b_1、...、b_{n-1} 为多项式， b_n 为非零常数。设 $L(f)=\sum_{k=0}^{n}b_kf^{(k)}$。若 $a\not\equiv 0$，则下列方程的超越亚纯解：

$$f^2+(L(f))^2=a,$$

必须具有以下形式 $f(z)=\frac{1}{2}(P(z)e^{R(z)}+Q(z)e^{-R(z)})$，其中 P、Q 和 R 是多项式，且 $PQ=a$。此外，若所有 b_k 都是常数，则 $\deg(P)+\deg(Q)\leq n-1$。而且，$R(z)=\lambda$ 是一个非零常数，并满足以下方程：

$$\sum_{k=0}^{n}b_k\lambda^k=\frac{1}{\iota},\quad \sum_{k=j}^{n}b_k{}^kC_j\lambda^{k-j}=0,\ j=1,\dots,p,$$

$$\sum_{k=0}^{n}b_k(-\lambda)^k=-\frac{1}{\iota},\quad \sum_{k=j}^{n}b_k{}^kC_j(-\lambda)^{k-j}=0,\ j=1,\dots,q.$$

在定理 2 [24], 中，Yang 和 Li 还证明，若 $b_1(\not\equiv 0)$ 是常数，且 a 是 f 的非恒定亚纯小函数，则微分方程 $f^2+b_1^2(f^{(k)})^2=a$ 没有超越亚纯解。

定理 B。 [24, 定理 3] 设 a_1、a_2 和 a_3 为非零亚纯函数。那么，微分方程

$$a_1f^2+a_2(f^{(1)})^2=a_3 \tag{1.3}$$

存在满足 $T(r,a_k)=S(r,f)$、$k=1$、2、3 的超越亚纯解的必要条件是 $\frac{a_1}{a_3}\equiv$ 为常数。

方程 (1.3) 在 a_1/a_3 为常数时可能存在一些整函数解。例如，函数 $f(z)=\frac{1}{2}(e^{z^2/2\iota}+e^{-z^2/2\iota})$ 满足 $z^2f^2(z)+(f_{(1)}(z))^2=z^2$。

在同一篇论文中，Yang 和 Li [24] 还提出了以下猜想。

猜想 A. [24, 猜想 1] 设 P_1、P_2 和 P_3 为非零多项式。则方程 $P_1f^2+P_2(f^{(1)})^2=P_3$ 在 P_1/P_3 为非零常数且 P_2/P_3 不是任何有理函数的平方时，没有超越亚纯解。

通过考虑以下例子，Tang 和 Liao [16] 证明猜想 A 一般而言并不成立。

例子 A. [16] 令 $P_1f^2+P_2(f_{(1)})^2=P_3$，其中 $P_1\equiv 1$, $P_2(z)=4z$ 且 $P_3\equiv 1$。显然，P_1/P_3 是一个非零常数，而 P_2/P_3 不是任何有理函数的平方。但是，$f(z)=\cos(\sqrt{z})$ 是 $P_1f^2+P_2(f^{(1)})^2=P_3$ 的一个超越整函数解。

2007年，Tang 和 Liao [16]首次研究了以下微分方程

$$f^2 + P^2(f^{(k)})^2 = Q, \tag{1.4}$$

其中 P 和 Q是非零多项式，并证明了

定理*C*. [16, 定理 1] 如果方程*(1.4)*有一个超越亚纯解f，那么 $P \equiv A$*(*常数*)*， $Q \equiv B$*(*常数*)*，$k = 2n+1$ 对于某个非负整数 n 以及*f(z)* $= b\cos(az+c)$，其中 a、 b和 c是满足 $Aa^k = \pm 1$和 $b^2 = B$的常数。

注A. [16, 注 1] 由定理*C*容易得出，若 P 或 Q 是非恒定多项式，或者 k 是偶整数，则方程*(1.4)*没有超越亚纯解。

其次，Tang和Liao [16] 研究了以下微分方程

$$f^2 + \frac{1}{P^2}(f^{(k)})^2 = Q, \tag{1.5}$$

关于超越亚纯解的存在性，其中 P 是一个非恒定多项式， Q 是一个非零有理函数。事实上，他们得到了以下结果。

定理*D*。 [16, 定理 3] 若方程 *(1.5)* 有一个超越亚纯解 f，则 k 是奇整数，且 Q 是多项式。此外，若 $k = 1$，则 $Q \equiv C$（常数），且该解具有如下形式： *f(z)* $= A\cos(p(z))$，其中 A 是一个常数，使得 $A^2 = C$ 且 $p^{(1)}(z) = \pm P(z)$。

2019年，Han 和 L¨u [7] 研究了以下微分方程

$$f^n(z) + (f^{(1)}(z))^n = e^{\alpha z+\beta}, \tag{1.6}$$

其中 $n(\geq 1)$ 是一个整数， α 和 β 是常数，并推导出了以下结果。

定理 E。 [7, 定理 2。1] 方程 f （*1.6*）的亚纯解必为整函数，并且满足以下结论。

(A) 对于 $n = 1$，*(1.6)* 的通解为 $f(z) = \frac{e^{\alpha z+\beta}}{\alpha+1} + ae^{-z}$，其中 $\alpha \neq -1$，以及$f(z) = ze^{-(z+\beta)} + ae^{-z}$。*(B)* 对于 $n = 2$，要么 $\alpha = 0$ 且 *(1.6)* 的通解为 $f(z) = e^{\frac{\beta}{2}}\sin(z+b)$，要么 $f(z) = de^{\frac{\alpha z+\beta}{2}}$。*(C)* 对于 $n \geq 3$，*(1.6)* 的通解为 $f(z) = de^{\frac{\alpha z+\beta}{n}}$。这里 a、 b、$d \in \mathbb{C}$，且当 $n \geq 1$时 $d^n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = 1$。

本文中，我们假设读者熟悉 Nevanlinna理论的标准符号和基本结果（参见 [8, 23]）。全文中，我们分别用 $\mu(f)$ 和$\rho(f)$ 表示 f 的下阶和 f 的阶。按照惯例，缩写 CM 表示“计重数”，IM 表示“不计重数”。设 f 和 g 是两个非常数亚纯函数，且 $a \in \mathbb{C}$。若 $g - a = 0$ 对于任意 $f - a = 0$均成立，则记作 $f = a \Rightarrow g = a$。

设 $R = \frac{P}{Q}(\not\equiv 0)$ 是一个有理函数，其中 P和 Q 是互素多项式。我们将 R的次数定义为 deg(R) $=$ deg(P) $-$ deg(Q)。若 $R \equiv 0$，则定义 deg(R) $=-\infty$。若 R_1 和 R_2 是两个有理函数，则

(i) deg(R_1R_2) $=$ deg(R_1) $+$deg(R_2)，(ii) deg $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ $=$deg(R_1) $-$ deg(R_2)，(iii) deg$(R^{(1)})$ $\leq$ deg$(R) - 1$，

(iv) 次数 $\left(\begin{smallmatrix} R^{(1)} \\ R \end{smallmatrix}\right) \leq -1$，(v) $\deg(R_1 + R_2) \leq \max\{\deg(R_1), \deg(R_2)\}$.

2. 主要结果

本节中，我们考虑以下更一般的微分方程

$$f^m + \left(Rf^{(k)}\right)^n = Qe^{\alpha}, \tag{2.1}$$

其中 k、m 和 n 是三个正整数，Q 和 R 是非零有理函数，α 是多项式。

容易验证，只要 α 不是常数，方程 (2.1) 就没有有理解。若 $m = n = 1$，则容易验证，$f(z) = e^{z^2}$ 是 $f(z)+R(z)f(k)(z) = Q(z)e^{\alpha(z)}$ 的一个解，其中 $k = 2$、$R(z) = z$、$Q(z) = 1 + 2z + 4z^3$ 且 $\alpha(z) = z^2$。因此，我们研究在 $m + n > 2$ 的情形下，方程 (2.1) 是否存在解。

自然会提出以下问题:

问题 2.1。 关于非恒定亚纯解的存在性，可以对 f 方程（2.1）在 $m + n > 2$时得出什么结论?

我们的首要目标是为问题2.1提供一个完整的解答。但是，在此我们在某些条件下给出问题 2.1 的部分答案。现在陈述我们的第一个结果。

定理 2.1。 令 R（$\not\equiv 0$）和 Q（$\not\equiv 0$）为有理函数，α 为多项式，并令 k、m和 n 为三个正整数，使得 $m \neq n$ 和 $m + n > 2$。令 f 为任意一个满足以下条件之一的超越亚纯函数:

(i) $\rho(f) = +\infty$; *(ii)* $\rho(f) \leq +\infty$, 其中 $\deg(\alpha) = 0$; *(iii)* $\deg(\alpha) < \mu(f)$, 其中 $\deg(\alpha) > 0$。

那么 f 不可能是方程（2.1）的解,

(A) 若 $m > n > 1$ 或 $n > m > 1$; *(B)* 若 $m > n = 1$ 或 $n > m = 1$ 且 $n \geq k + 1$。

当 α 为常数时，我们从定理2.1得到以下推论。

推论 2.1. 设 $R(\not\equiv 0)$ 和 $Q(\not\equiv 0)$ 为有理函数，且 k、m 和 n 为三个正整数，使得 $m \neq n$ 和 $m + n > 2$。如果下列方程

$$f^m + \left(Rf^{(k)}\right)^n = Q, \tag{2.2}$$

满足以下条件之一:

(i) $m > n > 1$ 或 $n > m > 1$; *(ii)* $m > n = 1$ 或 $n > m = 1$ 且 $n \geq k + 1$,

那么方程（2.2）没有超越亚纯解。

如果 $m = n$，那么方程（2.1）化简为

$$f^m + \left(Rf^{(k)}\right)^m = Qe^{\alpha}, \tag{2.3}$$

其中 $k(\geq 1)$ 和 $m(\geq 2)$ 是两个整数，Q 和 R 是非零有理函数，α 是一个多项式。现在我们陈述下一个结果。

定理 2.2. 设 $Q(\not\equiv 0)$ 和 $R(\not\equiv 0)$ 为有理函数，α 为多项式，且设$k(\geq 1)$ 和 $m(\geq 2)$ 为整数。那么，方程（2.3）没有无限阶亚纯解。

根据定理2.2，方程（2.3）的每个解都必须是有限级的。

我们的第二个目标是探究费马型函数方程（2.1）的解的所有可能刻画，这取决于 $m(\geq 2)$、R、 Q 和 α 的性质。

当 $R(\not\equiv 0)$ 是多项式且 $Q \equiv 1$ 时，我们得到以下结果，其中列出了方程（2.3）在 $m(\geq 2)$ 取不同值时的全部解。

定理 2.3。 设 $R(\not\equiv 0)$ 和 α 为多项式，且 $k(\geq 1)$ 和 $m(\geq 2)$ 为两个整数。下列方程的亚纯解 f 。

$$f^m + \left(Rf^{(k)}\right)^m = e^{\alpha}, \tag{2.4}$$

必须是整函数， R 化为一个非零常数，并且以下断言成立。*(A)* 当 $m = 2$ 时，方程（2.4）的通解为以下形式之一：

(A1) $f(z) = \frac{d^2-1}{2\iota d} e^{\frac{az+b}{2}}$，其中 $a(\neq 0)$ b、$d(\neq 0)$ 为常数，满足 $d^2(R(a/2)^k - \iota) = R(a/2)^k + \iota$；*(A2)* $f(z) = e^{\frac{a_1 z + a_2}{2}} \sin(b_1 z + b_2)$，其中 a_1、a_2、$b_1(\neq 0)$ b_2 为常数，满足 $R\left(\frac{a_1}{2} + \iota b_1\right)^k = \iota$ 且 $R\left(\frac{a_1}{2} - \iota b_1\right)^k = -\iota$。此外，若 $a_1 = 0$，则 k 为奇数；

（*B*）当 $m \geq 3$ 时，方程（2.4）的通解为 $f(z) = ce^{\frac{az+b}{m}}$，其中 $a(\neq 0)$ b， $c(\neq 0)$ 是满足 $c^m \left(R^m (a/m)^{km} + 1\right) = 1$的常数。

注 2.1。 显然，通过考虑一类更广泛的函数方程（2.3），其中包括 $k = 1$, $R \equiv 1$ 和 $\alpha(z) = az + b$ 的情形，定理 *E* 的适用范围在定理 2.3中得到了扩展。这会导出特定类型的函数方程（1.6）。因此，定理 2.3改进了定理 *E*。此外，定理 2.3表明，方程（2.4）没有非恒定有理解。

接下来，我们旨在探讨当$Q(\not\equiv 0)$ 和 $R(\not\equiv 0)$ 为有理函数时，方程（2.3）的解的所有可能刻画。因此，我们得到以下结果。

定理 2.4。 设 $Q(\not\equiv 0)$ 和 $R(\not\equiv 0)$ 是有理函数， α 是多项式，并设$k(\geq 1)$ 和 $m(\geq 2)$ 是两个整数。那么，方程（2.3）的超越亚纯解具有如下特征：

(A) $f = R_1 e^{\alpha/m}$，其中 α 是非常数，且 $R_1(\not\equiv 0)$ 是有理函数，满足$mk\,deg(\alpha^{(1)}) = deg(Q - R_1^m) - mdeg(RR_1)$ 且 $R_1^m + R^m e^{-\alpha}\left((R_1 e^{\alpha/m})^{(k)}\right)^m = Q$；*(B)* $f = \frac{d^2 Q_1 - Q_2}{2\iota d} e^{\alpha/2}$，其中 Q_1 和 Q_2 是有理函数，且 $d(\neq 0)$ 是常数，满足 $Q_1 Q_2 = Q$ 和 $d^2 Q_1 - Q_2 \not\equiv 0$ 且 α 是非常数；*(C)* $f(z) = \frac{Q_1 e^{a_1 z + b_1} - Q_2 e^{a_2 z + b_2}}{2\iota}$，其中 $R \equiv A$(常数)，满足 $Aa_1^k = \iota$, $Aa_2^k = -\iota$,Q_1 和 Q_2 均为常数，且 $Q_1 Q_2 = Q$, b_1 和 b_2 均为常数，满足$\alpha(z) = (a_1 + a_2)z + b_1 + b_2$。此外，若 α 是常数，即若 $a_1 + a_2 = 0$，则 k为奇数；*(D)* $f(z) = Q_1(z)e^{a_1 z + b_1} - Q_2(z\, e^{a_2 z + b_2})$，其中 $Q \equiv B$(常数)， Q_1, Q_2 和 R 均为非常数有理函数，满足 $Q_1 Q_2^{2\iota} = B$, $deg(R) = 0$ 且 $a_1(\neq 0)$ $a_2(\neq 0)$，b_1 和 b_2 均为常数，满足 $a_1^k + a_2^k = 0$ 且 $\alpha(z) = (a_1 + a_2)z + b_1 + b_2$。此外，若 α 为常数，则 k 为奇数；*(E)* $f(z) = Q_1(z)e^{tP(z)+c} - Q_2(z\, e^{P(z)})$，其中 P 是非恒定多项式， Q_1, Q_2 和 R均为非常数有理函数，满足 $k\,deg\left(P^{(1)}\right) = -deg(R)$, $Q_1 Q_2^{2\iota} = Q$, $deg(R) < 0$， c 和 t 均为常数，满足 $t^k = -1$ 且 $(t+1)P^{(1)} = \alpha^{(1)}$。若

α 是常数，则 $t=-1$ 且 k 为奇数。此外，若 R 的所有零点的重数至多为 $k-1$，则 Q_1, Q_2 和 Q 均为多项式。若 $k=1$，则 Q_1, Q_2 和 Q 均为非零常数，且 $R=\frac{1}{P^{(1)}}$。

以下例子展示了方程（2.3）存在超越亚纯解。

例 2.1。设 $m=2,\quad k=1,$

$$R(z)=\frac{z^2+1}{z+1},\ Q(z)=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\left(\frac{(z^2+1)(z^2+3)}{2(z+1)^3}\right)^2 \quad and\ \ \alpha(z)=z.$$

若 $R_1(z)=\frac{z-1}{z+1}$，则容易验证 $km\deg(\alpha^{(1)})=\deg(Q-R_1^m)-m\deg(RR_1)$且 $R_1^m+R^me^{-\alpha}\left((R_1e^{\alpha/m})^{(k)}\right)^m=Q$。此外，容易检验 $f=R_1e^{\frac{\alpha}{m}}$ 是 $f^m+(Rf^{(k)})^m=Qe^{\alpha}$ 的解。

例 2.2。设 $m=3,\quad k=1,$

$$R(z)=\frac{1}{z},\ Q(z)=\frac{z^9+3z^8+3z^7+4z^6+11z^5+3z^4+4z^3+1}{z^3}\ \ and\ \ \alpha(z)=z^3.$$

若 $R_1(z)=z+1$，则容易验证 $km\deg(\alpha^{(1)})=\deg(Q-R_1^m)-m\deg(RR_1)$且 $R_1^m+R^me^{-\alpha}\left((R_1e^{\alpha/m})^{(k)}\right)^m=Q$。此外，容易检验 $f=R_1e^{\frac{\alpha}{m}}$ 是 $f^m+(Rf^{(k)})^m=Qe^{\alpha}$的解。

当 α 为常数时，由定理 2.4可得以下推论。

推论 2.2。设 $Q(\not\equiv 0)$ 和 $R(\not\equiv 0)$ 为有理函数，且 $k(\geq 1)$ 和 $m(\geq 2)$ 为两个整数。那么，下列方程的超越亚纯解

$$f^m+\left(Rf^{(k)}\right)^m=Q$$

可刻画如下：

(A) $f(z)=\frac{Q_1e^{a_1z+b_1}-Q_2e^{-a_1z+b_2}}{2\iota}$，其中 k 为奇数，$R\equiv A$（常数），且 $Aa_1^k=\iota$、Q_1 和 Q_2 为常数，使得 $Q_1Q_2=Q$、b_1 和 b_2 为常数；*(B)* $f(z)=\frac{Q_1(z)e^{a_1z+b_1}-Q_2(z)e^{-a_1z+b_2}}{2\iota}$，其中 k 为奇数，$Q\equiv B$（常数），Q_1、Q_2 和 R为非常数有理函数，使得 $Q_1Q_2=B$，$deg(R)=0$，且 $a_1(\neq 0)$、b_1 和 b_2 为常数；*(C)* $f(z)=\frac{Q_1(z)e^{tP(z)+c}-Q_2(z)e^{-tP(z)+c}}{2\iota}$，其中 k 为奇数，P 为非恒定多项式，Q_1、Q_2和 R为非常数有理函数，使得 $k\deg\left(P^{(1)}\right)=\deg(R)$、$Q_1Q_2=Q$、$\deg(R)<0$，且 c 为常数。此外，若 R 的所有零点的重数至多为 $k-1$，则 Q_1、Q_2 和 Q 均为多项式。若 $k=1$，则Q_1、Q_2和 Q均为非零常数，且 $R=\frac{1}{P^{(1)}}$。

注记 2.2. 关于推论2.2，我们注意到，通过考虑更广泛的一类函数方程（包括以下情形），定理 *C* 和 *D* 的适用范围在推论 2.2 中得到了扩展

(i) $k=1$、$m=2$、$R=P$ 和 Q 是非零多项式；(ii) $k=1$、$m=2$、$R=1/P$ 和 $Q(\not\equiv 0)$ 是有理函数，其中 P 是非零多项式

这将导出特定类型的费马型函数方程。

由方程（2.1），容易验证 $\deg(\alpha)\leq\mu(f)$。因此，为了进一步研究，我们提出以下问题。

问题 2.2。 当 f 时，关于方程（2.1）的超越亚纯解 $0 < \deg(\alpha) = \mu(f)$ 的存在性可以得出什么结论?

问题 2.3. 当 2.2 式中 $n > m = 1$ 且 $n \leq k$时，关于超越亚纯解的存在性可以得出什么结论?

3. 若干引理

引理 *3.1.* [13] 设 f 是一个非常数亚纯函数，$P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$ 和 $Q(f) = \sum_{j=0}^{q} b_j f^j$ 是关于 f 的两个互素多项式，其中 a_k 和 b_j 是 f 的小函数，且满足 $a_p b_q \not\equiv 0$。若 $R(f) = P(f)/Q(f)$，则 $T(r, R(f)) = \max\{p, q\} T(r, f) + S(r, f)$。

引理3.2. [25,引理 2.4] 设 f 是一个非常数亚纯函数，且 k 和 p 是正整数。则

$$N_p\left(r, 0; f^{(k)}\right) \leq T\left(r, f^{(k)}\right) - T(r, f) + N_{p+k}(r, 0; f) + S(r, f).$$

引理3.3。 [2, 引理 2] 设 f 为满足$f^n P(f) = Q(f)$的超越亚纯函数，其中 $P(f)$和 $Q(f)$ 是关于 f 的微分多项式，其系数为与 f 相关的小邻域函数，且 $Q(f)$ 的次数至多为 n。则$m(r, P) = S(r, f)$。

引理3.4。 [8, 引理3.5] 设 F 在区域 D 内为亚纯函数，且 n 为正整数。则

$$\frac{F^{(n)}}{F} = f^n + \frac{n(n-1)}{2} f^{n-2} f^{(1)} + a_n f^{n-3} f^{(2)} + b_n f^{n-4} (f^{(1)})^2 + P_{n-3}(f),$$

其中 $f = F_{(1)}/F$, $a_n = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$, $b_n = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3)$ 以及 $P_{n-3}(f)$ 是一个具有常系数的微分多项式，对于 $n \leq 3$ 恒等为零，并且当 $n > 3$时其次数为 $n-3$。

为陈述下面的引理，我们需要引入记号 $M(r, f)$，表示整函数 f 的最大模，即 $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$。

设整函数 f 的泰勒展开为 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$。我们记

$$\mu(r, f) = \max_{n \in \mathbb{N},\, |z|=r} \{|a_n z^n|\} \text{ and } \nu(r, f) = \sup\{n : |a_n| r^n = \mu(r, f)\}.$$

这里只需回顾（见 [9]）

(1) $\nu(r, f)$ 是递增的、分段常数且右连续的，并且当 $r \to \infty$ 趋于 $+\infty$ 时也趋于 $+\infty$；

(2) 若 $\rho(f) < +\infty$，则 $\log \nu(r, F) = O(\log r)$。

引理 3.5. [9, 定理 21.3] 设 f 是一个超越整函数，且 $0 < \delta < 1/4$ 和 z 满足 $|z| = r$，并且 $|f(z)| > M(r, f)(\nu(r, f))^{-\frac{1}{4}+\delta}$成立。那么存在一个集合 $E \subset (0, +\infty)$，其对数测度有限，使得

$$\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r, f)}{z}\right)^m (1 + o(1))$$

对所有 $m \geq 0$ 和所有 $r \notin E$ 均成立。

引理 3.6. 设 $P_1(\not\equiv 0)$、$P_2(\not\equiv 0)$ 和 $Q(\not\equiv 0)$ 为有理函数，α 为多项式，且 k、m 和 n 为正整数。若 f 是下列微分方程的超越亚纯解

$$(P_1 f)^m + \left(P_2 f^{(k)}\right)^n = Q e^{\alpha}, \tag{3.1}$$

使得 $P_1e^{-\alpha/m}f$ 是超越的，则

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq 1. \tag{3.2}$$

证明。设 f 是方程（3.1）的一个超越亚纯解。从（3.1）容易验证，f 只有有限个极点。再由（3.1），得到

$$F^m+G^n=Q, \tag{3.3}$$

其中 $F=P_1e^{-\alpha/m}f$ 且 $G=P_2e^{-\alpha/n}f^{(k)}$。由给定条件，$F$ 是超越的，因此由（3.3），可推得 G 也是超越的。显然，F 和 G 都只有有限个极点。将引理 3.1 应用于（3.3），得到

$$mT(r,F)+S(r,F)=nT(r,G)+S(r,G). \tag{3.4}$$

Let

$$h=\frac{F^m-Q}{F^m}. \tag{3.5}$$

显然，h 是非常数。再次将引理 3.1 应用于（3.5），得到

$$T(r,h)+o(T(r,h))=mT(r,F)+S(r,F).$$

现在将（3.3）至（3.5），得到

$$\overline{N}(r,h)\leq\overline{N}(r,0,F^m)\leq N(r,Q)+\overline{N}(r,0,F^m)=\overline{N}(r,0,F)+S(r,F),$$

$$\overline{N}(r,0,h)=\overline{N}(r,Q,F^m)\leq\overline{N}(r,0,G^n)\leq\overline{N}(r,0,G)+S(r,G)$$

and

$$\overline{N}(r,1,h)\leq\overline{N}(r,F^m)+\overline{N}(r,Q)=\overline{N}(r,f)+S(r,F)=S(r,F).$$

因此，由第二基本定理可得

$$\begin{aligned} mT(r,F)=T(r,h)+S(r,h) &\leq \overline{N}(r,h)+\overline{N}(r,0,h)+\overline{N}(r,1,h)+S(r,h)\\ &\leq \overline{N}(r,0,F)+\overline{N}(r,0,G)+S(r,F)+S(r,G)\\ &\leq T(r,F)+T(r,G)+S(r,F)+S(r,G) \end{aligned}$$

因此由（3.4），我们得到 $\left(m-1-\frac{m}{n}\right)T(r,F)\leq S(r,F)$，这表明 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq 1$。□

4. 定理2.1的证明

证明。设 f 是方程（2.1）的一个超越亚纯解，且满足以下条件之一：

(i) $\rho(f)=+\infty$; (ii) $\rho(f)\leq+\infty$，当 $\deg(\alpha)=0$ 时；(iii) $\deg(\alpha)<\mu(f)$，当 $\deg(\alpha)>0$ 时。

注意，若 $\rho(f)=+\infty$，则显然有 $T(r,e^{\alpha})=S(r,f)$。此外，若 $0<\deg(\alpha)<\mu(f)$，则有 $0<\deg(\alpha)=\rho(e^{\alpha})<\mu(f)$，因此由定理 1.18 [23], 可得 $T(r,e^{\alpha})=S(r,f)$。因此，在这两种情况下，均有 $T(r,e^{\alpha})=S(r,f)$。另外，由（2.1）易于验证，$N(r,f)=O(\log r)$，即 f 只有有限多个极点。现在我们考虑以下几种情况。

情况 1. 令 $n>m>1$ 或 $m>n>1$。由（3.2）可得矛盾。因此，在这些情况下，f 不可能是方程（2.1）的解。

情况 2. 令 $m>n=1$。由（2.1）可得

$$f^m+Rf^{(k)}=Qe^{\alpha}. \tag{4.1}$$

由于 $N(r,\ f) = O(\log r)$，将引理 3.1 应用于（4.1），得到

$$\begin{aligned} mT(r,f) = T\left(r,f^m\right) + S(r,f) &= T\left(r, Rf^{(k)} - Qe^{\alpha}\right) + S(r,f) \\ &\leq T\left(r, f^{(k)}\right) + S(r,f) \\ &\leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m(r,f) + S(r,f) \\ &\leq T(r,f) + S(r,f), \end{aligned}$$

这是不可能的。

情形3. 设 $n > m = 1$ 且 $n \geq k+1$。那么由（2.1），可得

$$f + \left(Rf^{(k)}\right)^n = Qe^{\alpha}. \tag{4.2}$$

对（4.2）求一次导数，得到 $n(Rf_{(k)})^{n-1}(Rf^{(k)})^{(1)} = -(f - Qe^{\alpha})^{(1)}$，于是

$$n^n \left(f - Qe^{\alpha}\right)^{n-1} \left(\left(Rf^{(k)}\right)^{(1)}\right)^n = -\left(\left(f - Qe^{\alpha}\right)^{(1)}\right)^n. \tag{4.3}$$

设 z_0 是 $f - Qe^{\alpha}$ 的一个重数为 p_0 的零点，且满足 $R(z_0) \neq \infty$。显然， z_0 是$(f - Qe^{\alpha})^{(1)}$ 的一个重数为 $p_0 - 1$的零点。若 $p_0 < n$，则由（4.3）立即得到矛盾。因此， $p_0 \geq n \geq k+1$。显然，z_0 是 $f^{(k)} - (Qe^{\alpha})^{(k)}$ 的一个零点，因此$f - Qe^{\alpha} = 0 \Rightarrow f^{(k)} - (Qe^{\alpha})^{(k)} = 0$，但 R的极点除外。同样由（4.2）可知，$f - Qe^{\alpha}$ 和 $Rf^{(k)}$ 不计重数地共取零点。现在我们考虑以下两个子情形:

子情形3.1. 令$(Qe^{\alpha})^{(k)} \not\equiv 0$。假设$(Qe^{\alpha})^{(k)} = \tilde{Q}e^{\alpha}$，其中 $\tilde{Q}(\not\equiv 0)$是有理函数。由于 $f - Qe^{\alpha} = 0 \Rightarrow f^{(k)} - (Qe^{\alpha})^{(k)} = 0$ 除 R 和 $f - Qe^{\alpha}$的极点外， $Rf^{(k)}$ 与 $f - Qe^{\alpha} = 0 \Rightarrow \tilde{Q} = 0$ 除 R 的极点外不计重数共享零点，因此$f - Qe^{\alpha}$ 只有有限个零点。因此 $f^{(k)}$ 只有有限个零点。令$g = f - Qe^{\alpha}$。由引理3.6，可得

$$T(r,g) \leq T(r,g^{(k)}) + N_{k+1}(r,0;g) - \overline{N}(r,0;g^{(k)}) + S(r,g)$$

因此根据 小函数的第二基本定理（见 [21]）和引理3.1，可得

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq T(r,f^{(k)}) + N_{k+1}(r,0;g) - \overline{N}(r,0;g^{(k)}) + S(r,f) \\ &\leq \overline{N}(r,f^{(k)}) + \overline{N}(r,0;f^{(k)}) + \overline{N}(r,(Qe^{\alpha})^{(k)};f^{(k)}) + N(r,Qe^{\alpha};f) \\ &\quad -\overline{N}(r,(Qe^{\alpha})^{(k)};f^{(k)}) + S(r,f) \\ &\leq O(\log r) + S(r,f) = S(r,f), \end{aligned}$$

这是不可能的。

子情形3.2。 令 $(Qe^{\alpha})^{(k)} \equiv 0$。显然 α 是一个常数，而 $Q(\not\equiv 0)$ 是一个次数至多为 $k-1$ 的多项式。令 $g = f - Qe^{\alpha}$。于是 $g^{(k)} = f^{(k)}$，因此由 (4.2) 可得

$$\left(Rg^{(k)}\right)^n = -g. \tag{4.4}$$

首先假设 $k = 1$。对 (4.4) 求一次导数，得到

$$nR^{n-1}(g^{(1)})^{n-1}\left(R^{(1)}g^{(1)} + Rg^{(2)}\right) = -g^{(1)}. \tag{4.5}$$

注意到 g 是超越的，因此 $Rg^{(1)}$ 也是超越的。由于 $n \geq 2$，将引理3.3用于 (4.5)，得到 $m(r, R^{(1)}g^{(1)} + Rg^{(2)}) = S(r,g^{(1)})$，即 $T(r,R^{(1)}g^{(1)} + Rg^{(2)}) = S(r,g^{(1)})$，即 $T(r,(Rg^{(1)})^{(1)}) = S(r,Rg^{(1)})$，这与 $Rg^{(1)}$ 是超越的这一事实矛盾。

接下来，我们假设 $k \geq 2$。现在分以下两种子情形:

子情形 3.2.1. 设 R 是一个没有零点的有理函数。那么由 (4.4) 可容易推出， g 是一个超越整函数，因此 $M(r,g) \to \infty$，当 $r \to \infty$ 时成立。再次设 $M(r,g) = |g(z)|$，其中 $z_r = r\exp(i\theta)$ 且 $\theta \in [0,2\pi)$。因此，当 $0 < \delta < 1/4$ 时，不等式$|g(z_r)| > M(r,g)(\nu(r,g))^{-\frac{1}{4}+\delta}$成立。现在由引理 3.5，存在一个具有有限对数测度的子集 $E \subset [1,+\infty)$，使得对于满足 $|z_r| = r \notin E$ 且 $M(r,g) = |g(z_r)|$ 的 $z_r = r\exp(i\theta)(\theta \in [0,2\pi))$，我们得到

$$\frac{g^{(k)}(z_r)}{g(z_r)} = \left(\frac{\nu(r,g)}{z_r}\right)^k (1+o(1)) \text{ as } r \to \infty. \tag{4.6}$$

另一方面，由（4.4），可得

$$\left(\frac{g^{(k)}(z_r)}{g(z_r)}\right)^n = -\frac{\frac{1}{R^n(z_r)}}{g^{n-1}(z_r)}. \tag{4.7}$$

因此，利用（4.7）至（4.6），我们得到

$$\nu(r,g)^{nk}(1+o(1)) = -\frac{\frac{z_r^{nk}}{R^n(z_r)}}{g^{n-1}(z_r)}. \tag{4.8}$$

注意到 $\frac{z^{nk}}{R^n(z)}$ 是一个多项式。由于 $M(r,g^{n-1})$ 的增长速度快于任意多项式的最大模，由（4.8）容易推出 $\nu(r,g)^{nk}(1+o(1))$ 趋于 0，当 $r \to \infty$时；这与 $\nu(r,g)$ 趋于 $+\infty$ 当 $r \to \infty$时的事实矛盾。

子情形 3.2.2。设 R 为至少有一个零点的有理函数。显然 $R^{(1)} \not\equiv 0$。

若可能，假设 g 只有有限个零点。我们还知道 g 只有有限个极点。现在由（4.4），可得

$$-\frac{1}{R^n g^{n-1}} = \left(\frac{g^{(k)}}{g}\right)^n$$

因此，利用第一基本定理和引理 3.1，我们得到 $(n-1)T(r,g)+S(r,g) = S(r,g)$。由于 $n \geq k+1$，我们得到矛盾。因此， g 有无限多个零点。设 z_0是 g 的一个重数为 p_0 的零点，使得 $R(z_0) \neq 0,\infty$。由上文可知，$p_0 \geq n \geq k+1$，因此 z_0 也是 $g^{(k)}$ 的一个重数为 $p_0 - k \geq 1$的零点。显然， z_0 是 $(Rg^{(k)})^n$ 的一个重数为 $np_0 - nk$ 的零点，因此由 (4.4) 得到 $np_0 - nk = p_0$，即 $p_0(n-1) = nk$。如果 $p_0 \geq n+1$，那么由于 $n \geq k+1$，我们有 $nk \geq (n+1)(n-1) \geq (n+1)k$，这是不可能的。因此 $p_0 = n$，从而 $n = k+1$。因此由 (4.4)，我们得到

$$(Rg^{(k)})^{k+1} = -g. \tag{4.9}$$

显然，由式（4.9），我们可以假设 $g = h^{k+1}$，其中 h 是一个只有有限个极点的超越亚纯函数。由于 g 有无限多个零点，因此 h也有无限多个零点。因此，由式（4.9），可得

$$R(h^{k+1})^{(k)} = th, \tag{4.10}$$

其中 $t^{k+1} = -1$。现在根据定理 1 的证明，1 [12], 我们可以发现

$$\begin{aligned}(h^{k+1})^{(k)} &= (k+1)!h(h^{(1)})^k + \frac{k(k-1)}{4}(k+1)!h^2(h^{(1)})^{k-2}h^{(2)} + \cdots + (k+1)h^k h^{(k)} \\ &= (k+1)!h(h^{(1)})^k + \frac{k(k-1)}{4}(k+1)!h^2(h^{(1)})^{k-2}h^{(2)} + R_1(h),\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $R_1(h)$ 是关于 h 的一个微分多项式，且 $R_1(h)$ 的每一项都含有 h^m $(3 \le m \le k)$ 作为因子。因此，利用 (4.11) 到 (4.10)，我们得到

$$R\left((k+1)!(h^{(1)})^k + \frac{k(k-1)}{4}(k+1)!h(h^{(1)})^{k-2}h^{(2)} + \cdots + (k+1)h^{k-1}h^{(k)}\right) = t. \quad (4.12)$$

对（4.12）求一次导数，得到

$$(k+1)!R^{(1)}(h^{(1)})^k + (k+1)!\frac{k(k+3)}{4}R(h^{(1)})^{k-1}h^{(2)} + R_2(h) = 0, \quad (4.13)$$

其中 $R_2(h)$ 的每一项都含有 $R_2(h)$ 的因子 h^m $(1 \le m \le k)$。设 z_1 是 h 的一个重数为 p_1 的零点。若 $p_1 \ge 2$，则由（4.12）可知，z_1 必为 R 的极点，因此 h 只有有限多个重零点。设 z_1 是 h 的一个单零点，满足 $R(z_1) \ne 0$，∞ 且 $R^{(1)}(z_1) \ne 0$。于是由（4.12）和（4.13），分别有

$$(k+1)!R(z_1)(h^{(1)}(z_1))^k = t$$

and

$$(k+1)!R^{(1)}(z_1)(h^{(1)}(z_1))^k + (k+1)!\frac{k(k+3)}{4}R(z_1)(h^{(1)}(z_1))^{k-1}h^{(2)}(z_1) = 0.$$

经过简单计算可得

$$R^{(1)}(z_1)h^{(1)}(z_1) + \frac{k(k+3)}{4}R(z_1)h^{(2)}(z_1) = 0$$

因此 $h = 0 \Rightarrow R^{(1)}h^{(1)} + {}^{k}\!\not{(k+3)}_{4}\ Rh^{(2)} = 0$。定义

$$\beta = \frac{R^{(1)}h^{(1)} + \frac{k(k+3)}{4}Rh^{(2)}}{h}. \quad (4.14)$$

若可能，假设 $R^{(1)}h^{(1)} + {}^{k}\!\not{(k+3)}_{4}\ Rh^{(2)} \equiv 0$。那么 $\frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} = -\frac{4}{k}\not{(k+3)}\frac{R^{(1)}}{R}$，因此积分得到 $h^{(1)} = dR^{-\frac{4}{k}\not{(k+3)}}$，其中 d 是一个非零常数。由于 h 是超越的，我们得到矛盾。因此 $R^{(1)}h^{(1)} + {}^{k}\!\not{(k+3)}_{4}\ Rh^{(2)} \ne 0$，从而 $\beta \ne 0$。由于 h 只有有限多个重零点，且 $h = 0 \Rightarrow R^{(1)}h^{(1)} + {}^{k}\!\not{(k+3)}_{4}\ Rh^{(2)} = 0$，容易看出 $N(r,\beta) = S(r,h)$。此外，$m(r,\beta) = S(r,h)$。因此，$T(r,\beta) = S(r,h)$。现在由（4.14）可得

$$h^{(2)} = \frac{4}{k(k+3)R}(R^{(1)}h^{(1)} - \beta h). \quad (4.15)$$

因此，利用（4.15）至（4.13），得到

$$(k+1)!R(h^{(1)})^k + \frac{(k-1)(k+1)!}{(k+3)}\left(R^{(1)}h(h^{(1)})^k - \beta h^2(h^{(1)})^{k-2}\right) + R_3(h) = t, \quad (4.16)$$

其中 $R_3(h)$ 的每一项都含有 h^m $(2 \le m \le k)$ 这一因子。对（4.16）求一次导数，得到

$$R^{(1)}(h^{(1)})^k\left((k+1)! + \frac{(k-1)(k+1)!}{(k+3)}\right) + k(k+1)!R(h^{(1)})^{k-1}h^{(2)} + R_4(h) = 0, \quad (4.17)$$

其中 $R_4(h)$ 的每一项都含有 h^m $(1 \le m \le k)$ 这一因子。现在利用（4.15）至（4.17），得到

$$\left((k+1)! + \frac{4(k+1)!}{(k+3)} + \frac{4(k+1)!}{(k+3)}\right)R^{(1)}(h^{(1)})^k + R_5(h) = 0, \quad (4.18)$$

其中 $R_5(h)$ 的每一项都含有 h^m $(1 \le m \le k)$ 作为因子。若 z_1 是 h的单零点，则由（4.18）可得 $R^{(1)}(z_1) = 0$。最后，h 只有有限个零点，这就导致矛盾。□

5. 定理2.2的证明

证明。 设 f 是方程（2.3）的亚纯解，且满足 $\rho(f) = +\infty$。则由（3.2）可得 $m = 2$，因此由（2.3）得

$$(Rf^{(k)} + \iota f)(Rf^{(k)} - \iota f) = Qe^{\alpha}, \tag{5.1}$$

这表明 f 只有有限个极点。现在根据（7.4），我们可以假设

$$\begin{cases} Rf^{(k)} + \iota f = Q_1 e^{P_1}, \\ Rf^{(k)} - \iota f = Q_2 e^{P_2}, \end{cases} \tag{5.2}$$

其中 Q_1 和 Q_2 是满足 $Q_1Q_2 \equiv Q$， P_1 且 P_2 是满足 $P_1 + P_2 = \alpha$的整函数。由（7.5）解出 $f^{(k)}$ 和 f，可得

$$f^{(k)} = \frac{Q_1 e^{P_1} + Q_2 e^{P_2}}{2R} \tag{5.3}$$

and

$$f = \frac{Q_1 e^{P_1} - Q_2 e^{P_2}}{2\iota}. \tag{5.4}$$

由于 $P_1 + P_2 = \alpha$，由（7.7）可推得 P_1 和 P_2 是超越函数。显然 $P_{(1)1}$和 $P_2^{(1)}$ 也都是超越函数。现在对（7.7）求 k–次导数，得到

$$f^{(k)} = \frac{\left(Q_1(P_1^{(1)})^k + \tilde{P}_{k-1}(P_1^{(1)})\right) e^{P_1} - \left(Q_2(P_2^{(1)})^k + \tilde{Q}_{k-1}(P_2^{(1)})\right) e^{P_2}}{2\iota}, \tag{5.5}$$

其中 $\tilde{P}_{k-1}(P_{(1)1})$ 和 $\tilde{Q}_{k-1}(P_{(1)2})$ 是关于 $P_{(1)1}$和 $P_{(1)2}$的次数为 $k-1$的微分多项式，其系数依次为 Q_1， $Q_1^{(1)}$，…， $Q_1^{(k)}$和 Q_2， $Q_2^{(1)}$，…， $Q_2^{(k)}$。于是，由（7.6）和（5.5）可得

$$\left(RQ_1(P_1^{(1)})^k + R\tilde{P}_{k-1}(P_1^{(1)}) - \iota Q_1\right) e^{P_1} = \left(RQ_2(P_2^{(1)})^k + R\tilde{Q}_{k-1}(P_2^{(1)}) + \iota Q_2\right) e^{P_2}. \tag{5.6}$$

若有可能，设 $RQ_1(P_{(1)1})^k + R\tilde{P}_{k-1}(P_1^{(1)}) - \iota Q_1 \equiv 0$。那么

$$RQ_1(P^{(1)})^{k-1}P^{(1)} \equiv -R\tilde{P}_{k-1}(P^{(1)}) + \iota Q_1$$

因此，利用引理 3.3，可得 $m(r, P_{(1)}) = S(r, P_{(1)})$，即 $T(r, P^{(1)}) = S(r, P_{(1)})$，这是不可能的。因此 $RQ_1(P_1^{(1)})^k + R\tilde{P}_{k-1}(P_{(1)1}) - \iota Q_1 \not\equiv 0$。

同理可证 $RQ_2(P_2^{(1)})^k + R\tilde{Q}_{k-1}(P_2^{(1)}) + \iota Q_2 \not\equiv 0$。由于 $P_1 + P_2 = \alpha$，我们有 $P_{(}$
$_2^1 = -P_1^{(1)} + \alpha^{(1)})$。因此由（5.6），得到

$$\begin{aligned} &\left(RQ_1(P_1^{(1)})^k + R\tilde{P}_{k-1}(P_1^{(1)}) - \iota Q_1\right) e^{2P_1 - \alpha} \\ = \quad &RQ_2(-P_1^{(1)} + \alpha^{(1)})^k + R\tilde{Q}_{k-1}(-P_1^{(1)} + \alpha^{(1)}) + \iota Q_2 \end{aligned}$$

因此，根据引理 3.1，我们得到 $T(r, e^{2P_1 - \alpha}) = S(r, e^{2P_1 - \alpha})$，这就产生了矛盾。 □

6. 定理 2.3 的证明

证明。 设 f 是方程 (2.4) 的一个亚纯解。由定理 2.2，我们有$\rho(f) < +\infty$。我们将方程 (2.4) 改写如下

$$\left(e^{-\alpha/m} f\right)^m + \left(Re^{-\alpha/m} f^{(k)}\right)^m = 1, \tag{6.1}$$

这表明 f 没有极点。取 $F = e^{-\alpha/m} f$ 和 $G = Re^{-\alpha/m} f^{(k)}$。若 F 和G 都是非恒定函数，则按照引理3.6证明中的相同步骤，

我们可以证明 $2/m \geq 1$，即 $m \leq 2$。由于 $m \geq 2$，可得 $m = 2$。现在考虑以下几种情况。

情况 1. 令 $m \geq 3$。在这种情况下， F和 G 必须是常数。令 $F = c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $G = c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$。于是 $f = c_1 e^{\alpha/m}$和 $f^{(k)} = \frac{c_2}{R} e^{\alpha/m}$。此外，由（6.1），可得 $c_1^m + c_2^m = 1$。现在对 $f = c_1 e^{\alpha/m}$ k两边求导 次，得到

$$f^{(k)} = c_1 \left(\left(\alpha^{(1)}/m \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(\alpha^{(1)}/m \right) \right) e^{\alpha/m}, \tag{6.2}$$

其中 $\tilde{P}_{k-1}\left(\alpha^{(1)}/m\right)$ 是关于 $\alpha_1^{(1)}/m$ 的次数为 $k-1$ 的常系数微分多项式。由于 $f^{(k)} = \frac{c_2}{R} e^{\alpha/m}$，由（6.2）可得

$$c_1 R \left(\left(\alpha^{(1)}/m \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(\alpha^{(1)}/m \right) \right) = c_2, \tag{6.3}$$

这表明， R 化为一个常数，而 α 是次数至多为一的多项式。令$\alpha(z) = az+b$。于是（6.3）给出 $c_1 R(a/m)^k = c_2$，这表明 $a \neq 0$。由于 $c_1^m + c_2^m = 1$，可知 $c_1^m \left(R^m (a/m)^{km} + 1 \right) = 1$。最后，我们有 $f(z) = ce^{\frac{az+b}{m}}$，其中 R化为一个常数，且 $a(\neq 0)$ b、 $c(\neq 0)$是满足 $c^m \left(R^m (a/m)^{km} + 1 \right) = 1$的常数。

情况 2. 设 $m = 2$。根据定理 4 [5], ，我们发现方程 (6.1) 有如下形式的整函数解 $e^{-\alpha/2} f =$正弦 h和 $Re^{-\alpha/2} f^{(k)} =$余弦 h，其中 h是一个整函数。由于 $\rho(f) < +\infty$，可知 h 是一个多项式。因此

$$f = \frac{e^{P_1} - e^{P_2}}{2\iota} \tag{6.4}$$

and

$$f^{(k)} = \frac{e^{P_1} + e^{P_2}}{2R}, \tag{6.5}$$

其中 $P_1 = \frac{\alpha}{2} + \iota h$ 且 $P_2 = \frac{\alpha}{2} - \iota h$。现在对 (6.4) 求 k 次导数，我们 get

$$f^{(k)} = \frac{\left(\left(P_1^{(1)} \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(P_1^{(1)} \right) \right) e^{P_1} - \left(\left(P_2^{(1)} \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(P_2^{(1)} \right) \right) e^{P_2}}{2\iota}, \tag{6.6}$$

其中 $\tilde{P}_{k-1}(g)$ 是关于 g 的次数为 $k-1$ 且具有常系数的微分多项式。于是，由 (6.5) 和 (6.6) 得

$$\left(R \left(\left(P_1^{(1)} \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(P_1^{(1)} \right) \right) - \iota \right) e^{P_1} = \left(R \left(\left(P_2^{(1)} \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(P_2^{(1)} \right) \right) + \iota \right) e^{P_2}. \tag{6.7}$$

我们考虑以下两个子情形:

子情形 2.1. 设 $R\big((P_{(1)\,1})^k + \tilde{P}_{k-1}(P_{(1)\,1})\big) \not\equiv \iota$。于是 $R\big((P_2^{(1)})^k + \tilde{P}_{k-1}(P_{(1)\,2})\big) \not\equiv -\iota$，因此由 (6.7) 可得

$$\left(R \left(\left(P_1^{(1)} \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(P_1^{(1)} \right) \right) - \iota \right) e^{2\iota h} = R \left(\left(P_2^{(1)} \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(P_2^{(1)} \right) \right) + \iota. \tag{6.8}$$

如果 h 不是常数，那么由引理3.1 和（6.8），可得矛盾。因此 $e^{\iota h} = d$是一个常数。显然 $P_{(1\,1)} = P_2^{(1)} = \alpha_{(2)}^{(1)}$。现在由（6.8），可得 $d^2 \neq \pm 1$ 以及

$$R \left(\left(\frac{\alpha^{(1)}}{2} \right)^k + \tilde{P}_{k-1} \left(\frac{\alpha^{(1)}}{2} \right) \right) = \iota \frac{d^2+1}{d^2-1}, \tag{6.9}$$

这表明 R 化为一个常数，而 α 是一个一次多项式。令 $\alpha(z) = az+b$，其中 $a(\neq 0)$ b均为常数。于是（6.9）给出 $d^2(R(a/2)^k-\iota) = R(a/2)^k+\iota$。最后由（6.4），可得

$$f(z) = \frac{d^2-1}{2\iota d}e^{\frac{az+b}{2}},$$

其中 R化为常数， $a(\neq 0)$ b， $d(\neq 0) \in \mathbb{C}$使得 $d^2(R(a/2)^k-\iota) = R(a/2)^k+\iota$。

子情形 2.2。设 $R\big((P_1^{(1)})^k+\tilde{P}_{k-1}(P_{(1)1})\big) \equiv \iota$。则 $R\big((P_{(1)2})^k+\tilde{P}_{k-1}(P_{(1)2})\big) \equiv -\iota$。在这种情况下， R 也化为常数，且 P_1 和 P_2 都是一次多项式。因此

$$R\left(\frac{\alpha^{(1)}}{2}+\iota h^{(1)}\right)^k = \iota \tag{6.10}$$

and

$$R\left(\frac{\alpha^{(1)}}{2}-\iota h^{(1)}\right)^k = -\iota. \tag{6.11}$$

由 (6.10) 和 (6.11) 易于验证，$\deg(\alpha) \leq 1$ 且 $\deg(h) \leq 1$。若 $\deg(h) = 0$，则由 (6.10) 和 (6.11) 可立即得到矛盾。因此 $\deg(h) = 1$。再若 $\deg(\alpha) = 0$，则由 (6.10) 和 (6.11) 可推出 k 为奇数。设 $\alpha(z) = a_1z+a_2$ 且$h(z) = b_1z+b_2$，其中 a_1、a_2、$b_1(\neq 0)$ b_2均为常数。最后，由 (6.4) 得

$$f(z) = e^{\frac{a_1z+a_2}{2}}\sin(b_1z+b_2),$$

其中 R化为常数， a_1， a_2， $b_1(\neq 0)$ b_2为常数，且 $R\left(\frac{a_1}{2}+\iota b_1\right)^k = \iota$和 $R\left(\frac{a_1}{2}-\iota b_1\right)^k = -\iota$。此外，若 $a_1 = 0$，则 k为奇数。□

7. 定理2.4的证明

证明。设 f 是方程（2.3）的一个超越亚纯解。由（2.3）显然可得， f 只有有限个极点。此外，由定理 2.2，有 $\rho(f) < +\infty$。现在我们考虑以下两种情况。

情况 1。设 $e^{-\alpha/m}f$ 为有理函数。设 $e^{-\alpha/m}f = R_1$，其中 $R_1(\not\equiv 0)$ 为有理函数。于是

$$f = R_1e^{\alpha/m}. \tag{7.1}$$

由于 f 是超越的，因此 α 是非恒定多项式。由此 t

$$g = \frac{R_1^{(1)}}{R_1}+\frac{1}{m}\alpha^{(1)}.$$

现在利用引理3.4，将（7.1）代入，得到

$$f^{(k)} = \left(R_1e^{\alpha/m}\right)^{(k)} = \left(g^k+R_{k-1}(g)\right)R_1e^{\alpha/m}, \tag{7.2}$$

其中 $R_{k-1}(g_1)$ 是次数为 $k-1$的常系数微分多项式。因此，利用（7.1）和（7.2），将（2.3）代入，得到

$$(g^k+R_{k-1}(g))^m = \frac{Q-R_1^m}{(RR_1)^m}. \tag{7.3}$$

现在令 $|z| \to \infty$ 在（7.3）的两边，可以容易地得出

$$mk\deg(\alpha^{(1)}) = \deg(Q-R_1^m)-m\deg(RR_1).$$

最后，我们得到 $f = R_1 e^{\alpha/m}$，其中 $R_1(\not\equiv 0)$ 是一个有理函数，使得 $mk\deg(\alpha^{(1)}) = \deg(Q - R_1^m) - m\deg(RR_1)$ 且 $R_1^m + R^m e^{-\alpha}\left((R_1 e^{\alpha/m})^{(k)}\right)^m = Q$。

情况 2。设 $e^{-\alpha/m} f$ 为超越的。由（3.2），我们得到 $m = 2$ 因此由（2.3），可得

$$(Rf^{(k)} + \iota f)(Rf^{(k)} - \iota f) = Qe^{\alpha}. \tag{7.4}$$

因此，根据（7.4），不妨设

$$\begin{cases} Rf^{(k)} + \iota f = Q_1 e^{P_1}, \\ Rf^{(k)} - \iota f = Q_2 e^{P_2}, \end{cases} \tag{7.5}$$

其中 Q_1 和 Q_2 是满足 $Q_1 Q_2 \equiv Q$、P_1 以及 P_2 的非零有理函数，且 $P_1 + P_2 = \alpha$。由（7.5）解得 $f^{(k)}$和 f，可得

$$f^{(k)} = \frac{Q_1 e^{P_1} + Q_2 e^{P_2}}{2R} \tag{7.6}$$

and

$$f = \frac{Q_1 e^{P_1} - Q_2 e^{P_2}}{2\iota}. \tag{7.7}$$

Let

$$g_i = \frac{Q_i^{(1)}}{Q_i} + P_i^{(1)},$$

其中 $i = 1,$ 2. 现在利用引理 3.4，对于 $i = 1,$ 可得2

$$(Q_i e^{P_i})^{(k)} = R_i(g_i) Q_i e^{P_i}, \tag{7.8}$$

其中

$$\tilde{R}_i(g_i) = g_i^k + \frac{k(k-1)}{2} g_i^{k-2} g_i^{(1)} + a_k g_i^{k-3} g_i^{(2)} + b_k g_i^{k-4} (g_i^{(1)})^2 + \tilde{P}_{k-3}(g_i), \tag{7.9}$$

$a_k = \frac{1}{6}k(k-1)(k-2)$、$b_k = -\frac{1}{8}k(k-1)(k-2)(k-3)$ 和 $\tilde{P}_{k-3}(g_i)$ 是一个常系数微分多项式，它对 $k \leq 3$ 恒等于零，且当$k > 3$时次数为 $k - 3$。

现在对（7.7） k–次求导，得到

$$f^{(k)} = \frac{\tilde{R}_1(g_1) Q_1 e^{P_1} - \tilde{R}_2(g_2) Q_2 e^{P_2}}{2\iota}. \tag{7.10}$$

于是，由（7.6）和（7.10）可得

$$Q_1 \left(R\tilde{R}_1(g_1) - \iota\right) e^{P_1} = Q_2 \left(R\tilde{R}_2(g_2) + \iota\right) e^{P_2}. \tag{7.11}$$

我们考虑以下两个子情形:

子情形 2.1。设 $RR_1(g_1) - \iota \not\equiv 0$。于是由（7.11），可得 $RR_2(g_2) + \iota \not\equiv 0$ 且

$$Q_1 \left(R\tilde{R}_1(g_1) - \iota\right) e^{P_1 - P_2} = Q_2 \left(R\tilde{R}_2(g_2) + \iota\right). \tag{7.12}$$

若 $P_1 - P_2$ 不是常数，则将引理 3.1 应用于（7.12），便会得到矛盾。因此$P_1 - P_2 = d$ 是常数。由于 $P_1 + P_2 = \alpha$，有 $P_1 = \frac{1}{2}(\alpha + d)$ 和 $P_2 = \frac{1}{2}(\alpha - d)$。现在由（7.7）可得

$$f = \frac{d_1^2 Q_1 - Q_2}{2\iota d_1} e^{\alpha/2}, \tag{7.13}$$

其中 $d_1 = e^{d/2}$。由于 f 非常数，因此可知 $d_1^2 Q_1 - Q_2 \not\equiv 0$ 且 α 非常数。

~ ~**子情形 2.2**。令 $RR_1(g_1) - \iota \equiv 0$。于是由（7.11），我们还有 $RR_2(g_2) + \iota \equiv 0$。因此由（7.9），分别有

$$g_1^k + \frac{k(k-1)}{2} g_1^{k-2} g_1^{(1)} + a_k g_1^{k-3} g_1^{(2)} + b_k g_1^{k-4} (g_1^{(1)})^2 + \tilde{P}_{k-3}(g_1) \equiv \frac{\iota}{R} \tag{7.14}$$

and

$$g_2^k + \frac{k(k-1)}{2} g_2^{k-2} g_2^{(1)} + a_k g_2^{k-3} g_2^{(2)} + b_k g_2^{k-4} (g_2^{(1)})^2 + \tilde{P}_{k-3}(g_2) \equiv -\frac{\iota}{R}. \tag{7.15}$$

下面的子情形显然成立。

子情形 2.2.1. 设 R 是一个多项式。现在在等式两边作用 $|z| \to \infty$ 于（7.14），容易得出 R 是一个非零常数，记为 A。再在等式两边作用 $|z| \to \infty$ 于（7.14）和（7.15），可推得

$$(P_1^{(1)})^k \equiv \frac{\iota}{A} \text{ and } (P_2^{(1)})^k \equiv -\frac{\iota}{A}.$$

积分后，得 $P_1(z) = a_1 z + b_1$ 以及 $P_2(z) = a_2 z + b_2$，其中 $a_1^k = \frac{\iota}{A}$，$a_2^k = -\frac{\iota}{A}$，b_1 和 b_2 都是常数。显然 $\alpha = (a_1 + a_2)z + b_1 + b_2$。另一方面，由（7.6）和（7.7），容易看出 Q_1 和 Q_2 都是多项式。注意

$$\begin{aligned} \left(Q_1 e^{P_1}\right)^{(k)} &= \left(Q_1 (P_1^{(1)})^k + \tilde{P}_{k-1}(P_1^{(1)})\right) e^{P_1} \\ &= \left(Q_1^{(k)} + k a_1 Q_1^{(k-1)} + \cdots + k a_1^{k-1} Q_1^{(1)} + a_1^k Q_1\right) e^{P_1}, \end{aligned}$$

即，

$$Q_1 (P_1^{(1)})^k + \tilde{P}_{k-1}(P_1^{(1)}) = Q_1^{(k)} + k a_1 Q_1^{(k-1)} + \cdots + k a_1^{k-1} Q_1^{(1)} + a_1^k Q_1. \tag{7.16}$$

类似地，我们有

$$Q_2 (P_2^{(1)})^k + \tilde{Q}_{k-1}(P_2^{(1)}) = Q_2^{(k)} + k a_2 Q_2^{(k-1)} + \cdots + k a_2^{k-1} Q_2^{(1)} + a_2^k Q_2. \tag{7.17}$$

现在将 (7.16) 和 (7.17) 代入 (5.5)，再与 (7.6) 比较，可得 Q_1 和 Q_2 均为常数。最后由 (7.7)，我们可以假设

$$f(z) = \frac{Q_1 e^{a_1 z + b_1} - Q_2 e^{a_2 z + b_2}}{2\iota},$$

其中 $R \equiv A$（常数），满足 $A a_1^k = \iota$、$A a_2^k = -\iota$、Q_1，且 Q_2 为常数，满足 $Q_1 Q_2 = Q$、b_1；b_2 为常数，满足 $\alpha(z) = (a_1 + a_2) z + b_1 + b_2$。此外，若 α 为常数，即若 $a_1 + a_2 = 0$，则 k 为奇数。

子情形 2.2.2。令 R 为一个非常数有理函数，且不是多项式。若可能，设 $\deg(R) > 0$。注意，$P_{(1)_1} \not\equiv 0$ 和 $P_2^{(1)} \not\equiv 0$。现在在 ($|z| \to \infty$) 的两边分别令 7.14) 和 (7.15)，立即可得矛盾。因此 $\deg(R) \leq 0$。我们考虑以下子情形。

子情形 2.2.2.1. 令 $\deg(R) = 0$。现在在（ $|z| \to \infty$ ）两边取7.14和（7.15），我们推得 P_1 和 P_2 都是一次多项式。令

$$P_1(z) = a_1 z + b_1 \text{ and } P_2(z) = a_2 z + b_2,$$

其中 $a_1(\neq 0)$ $a_2(\neq 0)$ b_1，b_2为常数。由于 $P_1 + P_2 = \alpha$，我们有 $\alpha(z) = (a_1 + a_2)z + b_1 + b_2$。现在将（7.16）和（7.17）代入（5.5），然后与（7.6）比较，分别得到

$$R\left(Q_1^{(k)} + k a_1 Q_1^{(k-1)} + \cdots + k a_1^{k-1} Q_1^{(1)} + a_1^k Q_1\right) = \iota Q_1 \tag{7.18}$$

and

$$R\left(Q_2^{(k)}+ka_2Q_2^{(k-1)}+\cdots+ka_2^{k-1}Q_2^{(1)}+a_2^kQ_2\right)=-\iota Q_2. \tag{7.19}$$

将（7.18）和（7.19）相加，得到

$$\begin{aligned}&\frac{Q_1^{(k)}}{Q_1}+\frac{Q_2^{(k)}}{Q_2}+k\left(a_1\frac{Q_1^{(k-1)}}{Q_1}+a_2\frac{Q_2^{(k-1)}}{Q_2}\right)+\cdots\\&+k\left(a_1^{k-1}\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+a_2^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\right)+a_1^k+a_2^k\equiv 0.\end{aligned} \tag{7.20}$$

在等式 $|z|\to\infty$ 两边同时（7.20），我们推得 $a_1^k+a_2^k=0$。令 $a_2=ta_1$，其中 $t^k=-1$。现在由（7.20）得

$$\frac{Q_1^{(k)}}{Q_1}+\frac{Q_2^{(k)}}{Q_2}+ka_1\left(\frac{Q_1^{(k-1)}}{Q_1}+t\frac{Q_2^{(k-1)}}{Q_2}\right)+\cdots+ka_1^{k-1}\left(\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\right)\equiv 0. \tag{7.21}$$

现在我们要证明

$$\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\equiv 0. \tag{7.22}$$

若 $k=1$，则由（7.21），可得 $\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\equiv 0$，因此（7.22）成立。接下来令$k\geq 2$。若可能，假设 $\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\not\equiv 0$。则由（7.21）得

$$\frac{\frac{Q_1^{(k)}}{Q_1}+\frac{Q_2^{(k)}}{Q_2}}{\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}}+ka_1\frac{\frac{Q_1^{(k-1)}}{Q_1}+t\frac{Q_2^{(k-1)}}{Q_2}}{\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}}+\cdots+ka_1^{k-1}\equiv 0. \tag{7.23}$$

容易验证

$$\deg\left(\left(\frac{Q_1^{(k)}}{Q_1}+\frac{Q_2^{(k)}}{Q_2}\right)/\left(\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\right)\right)<0,$$

$$\deg\left(\left(\frac{Q_1^{(k-1)}}{Q_1}+t\frac{Q_2^{(k-1)}}{Q_2}\right)/\left(\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\right)\right)<0,\ \text{etc.}$$

现在在（$|z|\to\infty$ 两边同时7.23），得到 $a_1=0$，这不可能。因此

$$\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+t^{k-1}\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\equiv 0$$

对于 $k\geq 2$。因此，(7.22) 对 $k\geq 1$成立。由于 $t^k=-1$，由 (7.22) 可得

$$\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}+\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\equiv 0$$

因此，$(Q_1Q_2)^{(1)}\equiv 0$，即 $Q^{(1)}\equiv 0$。显然，Q 是一个常数。由于 R 是非恒定函数，由 (7.18) 和 (7.19)，我们得出 Q_1 和 Q_2 均为非恒定函数。最后，由 (7.7)，我们可以假设

$$f(z)=\frac{Q_1(z)e^{a_1z+b_1}-Q_2(z)e^{a_2z+b_2}}{2\iota},$$

其中 $Q\equiv B$（常数），Q_1、Q_2 和 R 是非常数有理函数，满足 $Q_1Q_2=B$、$\deg(R)=0$ 和 $a_1(\neq 0)$ $a_2(\neq 0)$；b_1 和 b_2 是常数，满足 $a_1^k+a_2^k=0$ 且$\alpha(z)=(a_1+a_2)z+b_1+b_2$。此外，若 α 是常数，则 k 为奇数。

子情形 2.2.2.2。令 $\deg(R) < 0$。现在将 $|z| \to \infty$ 作用于（7.14）和（7.15）两边，得到 $k\deg(P_1^{(1)}) = -\deg(R)$ 以及 $k\deg(P_{(1)2}) = -\deg(R)$. 将（7.14）和（7.15）相加，得到

$$\left(\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}\right)^k + \left(\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\right)^k + k\left(\left(\frac{Q_1^{(1)}}{Q_1}\right)^{k-1} P_1^{(1)} + \left(\frac{Q_2^{(1)}}{Q_2}\right)^{k-1} P_2^{(1)}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\left(P_1^{(1)}\right)^k + \left(P_2^{(1)}\right)^k\right) + \tilde{P}_{k-1}(g_1) + \tilde{P}_{k-1}(g_2) \equiv 0, \tag{7.24}$$

其中，$\tilde{P}_{k-1}(g_i)$ 是关于 g_i 的常系数微分多项式。我们看到，(7.24) 左端关于 z 的最高次幂出现在 $\left(P_1^{(1)}\right)^k + \left(P_2^{(1)}\right)^k$ 中。因此，由 (7.24) 可知，必有 $\left(P_1^{(1)}\right)^k + \left(P_2^{(1)}\right)^k \equiv 0$，即 $P_{(1)1} = tP_{(1)2}$，其中 $t^k = -1$。由于 $P_1^{(1)} + P^{(1)2} = \alpha^{(1)}$，因此有

$$(t+1)P_2^{(1)} = \alpha^{(1)}. \tag{7.25}$$

由于 $P_{(1)1} = tP_{(1)2}$，可得 $\deg(P_1) = \deg(P_2) \geq 1$，因此 $P_1^{(1)} \not\equiv 0$。于是，由 (7.25) 可知，若 α 是常数，则 $t = -1$，因此 k 为奇数。令 $P_2 = P$。由于 $P_{(1}^{1} = tP_2^{(1))}$，我们假设 $P_1 = tP + c$，其中 c 是常数。最后，由 (7.7)，我们可以假设

$$f(z) = \frac{Q_1(z)e^{tP(z)+c} - Q_2(z)e^{P(z)}}{2\iota}, \tag{7.26}$$

其中 P 是非恒定多项式，Q_1、Q_2 和 R 是非常数有理函数，满足 $k\deg\left(P^{(1)}\right) = -\deg(R)$，$Q_1Q_2 = Q$，$\deg(R) < 0$；$c$ 和 t 是常数，满足$t^k = -1$ 和 $(t+1)P^{(1)} = \alpha^{(1)}$。若 α 是常数，则 $t = -1$ 且 k 为奇数。

此外，假设 R 的所有零点的重数至多为 $k-1$。对 (7.26) k–次求导，得到

$$f^{(k)}(z) = \frac{\tilde{Q}_k(z)e^{tP(z)+c} - \tilde{R}_k(z)e^{P(z)}}{2\iota}, \tag{7.27}$$

其中 $\tilde{Q}_k(z)$ 和 $\tilde{R}_k(z)$ 是有理函数，满足

$$\tilde{Q}_k = Q_1^{(k)} + ktP^{(1)}Q_1^{(k-1)} + \ldots + \hat{Q}_k(P^{(1)})Q_1 \tag{7.28}$$

and

$$\tilde{R}_k = Q_2^{(k)} + kP^{(1)}Q_1^{(k-1)} + \ldots + \hat{Q}_k(P^{(1)})Q_2, \tag{7.29}$$

$\hat{Q}_k(P_{(1)})$ 是关于 $P^{(1)}$ 的微分多项式，其次数为 k，且具有常系数。

现在将 (7.28) 和 (7.29) 代入 (7.27)，再与 (7.6) 比较（取 $P_1 = tP + c$和 $P_2 = P$），分别得到

$$R\left(Q_1^{(k)} + ktP^{(1)}Q_1^{(k-1)} + \ldots + \hat{Q}_k(P^{(1)})Q_1\right) = \iota Q_1 \tag{7.30}$$

and

$$R\left(Q_2^{(k)} + kP^{(1)}Q_1^{(k-1)} + \ldots + \hat{Q}_k(P^{(1)})Q_2\right) = -\iota Q_2. \tag{7.31}$$

由于 R 的所有零点的重数至多为 $k-1$，由（7.30）和（7.31）可容易推出，Q_1 和 Q_2 都是多项式。因此，Q 也是多项式。如果$k = 1$，那么根据定理 B，可得 Q 是一个常数。显然，Q_1 和 Q_2 都是非零常数。此外，由（7.30）可得 $R = 1/P^{(1)}$。□

8. 应用：

费马型复微分方程

$$f^m + \left(Rf^{(k)}\right)^n = Qe^{\alpha},$$

在非线性微分多项式理论以及整函数和亚纯函数的增长分析中发挥着重要作用。这类方程自然出现在值分布问题的研究中，有助于刻画函数与其高阶导数之间的相互作用。它们也出现在复动力系统中，尤其用于描述指数驱动和受控增长轨迹。在数理物理中，这类方程作为非线性平衡律的复数类比，用于描述振荡和波动现象。此外，它们还应用于全纯曲线的几何理论和复微分几何，其中费马型微分约束决定了曲率和浸入性质。因此，理解整函数解的存在与否，有助于深入认识复微分系统的解析结构、唯一性行为和渐近性质。

道德标准合规声明：

利益冲突。 作者声明，本文发表不存在任何利益冲突。

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

References

[1] I. N. Baker, 关于一类亚纯函数， *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17（1966年）, 819-822。[2] J. Clunie, 关于整函数与亚纯函数， *J. London Math. Soc.*, 37（1962年）, 17-22。[3] Y. Gong 和 Q. Yang *Bull.*, 关于两 *Iran. Math. Soc.* **51** 2025 17 个费马型微分差分方程的整函数解, , （）。[4] F. Gross, 关于方程 $f^n + g^n = 1$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72（1966年）, 86-88。[5] F. Gross, 关于函数方程 $f^n + g^n = h^n$, *Amer. Math. Mon.*, 73（1966年）, 1093-1096。[6] F. Gross, 关于方程 $f^n + g^n = 1$ II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74（1968年）, 647-648。[7] Q. Han 和 F. Lü, 关于方程 $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z+\beta}$, *J. Contemp. Mathemat. Anal.*, 54（2019年）, 98-102。[8] W. K. Hayman,《亚纯函数》, 克拉伦登出版社, 牛津（ 1964 0115 06203, 0164038 ）。[9] G. Jank L. Volkmann Zbl . MR and ,《整函数与亚纯函数理论导论及其在微分方程中的应用》, Birkhauser, 巴塞尔-波士顿, 1985, MR 87h:30066。[10] Y. Li 和 K. Liu *Bull. Malays. Math. Sci.*, 费马型 *Soc.* **46** 2023 196 非线性系统的亚纯解, , （）, 。[11] Jr. Long 和 Dz. Qin *Appl.*, 关于若 *Math. J. Chin. Univ.* **39** 2024 69 88 干费马型微分差分方程的整函数解, , （）, -。[12] S. Majumder, J. Sarkar 和 N. Sarkar, 具有正规族特征的整函数与其 k阶导数共享两个值, *Mediterr. J. Math.*, 20（2023年）183。https://doi.org/10.1007/s00009-023-02381-7。[13] A. Z. Mohon'ko, 关于某些亚纯函数的Nevanlinna特征, 《函数论》。*Functional Analysis and Their Applications*, 14（1971年）, 83-87。[14] P. Montel, 《解析函数正规族讲义及其应用》, 第135-136页。Gauthier-Villars, 巴黎（1927年）。[15] X. Qi 和 L. Yang *Mediterr. J.*, 关于费 *Math.* **21** 2024 122 马型差分方程的亚纯解。, （）, 。[16] J. F. Tang 和 L. W. Liao, 某类非线性微分方程的超越亚纯解, *J. Math. Anal. Appl.*, 334（2007年）, 517-527。[17] R. Taylor 和 A. Wiles, 某些Hecke代数的环论性质, *Ann. Math.*, 141（1995）, 553-572。[18] J. Wang 和 H. X. Yi, 与小函数及其微分多项式共享该小函数的整函数的唯一性, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 35（2004年）, 1119-1129。

[19] Q. Wang, W. Chen 和 P. Hu，关于两个特定费马型微分差分方程的整函数解。 *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*，**43**，（2020），2951-2965。[20] A. Wiles，模椭圆曲线与费马大定理，*Ann. Math.*，**141**（1995），443-551。[21] K. Yamanoi，小函数的第二基本定理及相关问题，*Acta Math.*，**192**（2004），225-294。[22] C. C. Yang，P. Montel关于整函数定理的推广，*Proc. Amer. Math. Soc.*，**26**（1970年），332-334。[23] C. C. Yang 和 H. X. Yi，亚纯函数唯一性理论，Kluwer Academic Publishers（2003）。[24] C. C. Yang 和 P. Li，某类非线性微分方程的超越解，*Arch Math (Basel)*，**82**（5）（2004），442-448。[25] J. L. Zhang 和 L. Z. Yang ¨ *J. Inequal. Pure Appl.*，与 *Math.* **8** 1 2007 18 R. Bruck的一个猜想相关的一些结果，（）（），文章。

Department of Mathematics, Raiganj University, Raiganj, West Bengal-733134, India. *Email address*: sm05math@gmail.comDepartment of Mathematics, Raiganj University, Raiganj, West Bengal-733134, India.*Email address*: naba.iitbmath@gmail.com Department of Mathematics, Raiganj University, Raiganj, West Bengal-733134, India. *Email address*: debumath07@gmail.com