arXiv:2512.15752v1 [math.CV] 11 Dec 2025

精细 Bohr 型不等式的多维类比

Molla Basir Ahamed*、Sujoy Majumder 和 Nabadwip Sarkar

Abstract. 本文旨在为多圆盘 $\mathbb{D}^n$中有界全纯映射的经典Bohr不等式建立一个精确改进。我们还在多复变数的背景下证明了 Bohr 不等式的另外两个精确版本：一个是用函数的绝对值替代常数项，另一个是用函数绝对值的平方替代常数项。此外，我们还建立了已知结果的多维类比，这些结果涉及单位圆盘 $\mathbb{D}$中解析函数导数的模，并将导数替换为 $\mathbb{D}^n$中全纯函数的径向导数。所有建立的结果均证明是精确的。

Contents

1. 引言与预备知识 1 1.1. 经典Bohr不等式及其近期推论 2 1.2. 多复变数中的基本记号 5 2. 主要结果 6 3. 关键引理及其证明 8 4. 主要结果的证明 13 参考文献 22

1. 引言与预备知识

Harald Bohr 的经典定理 [19], 最初于一个世纪前进行了研究，至今仍持续推动着对如今所称的 Bohr 现象的深入研究。20 世纪 90 年代，由于成功将其推广到多复变数的全纯函数以及更为抽象的泛函分析背景，相关研究热情再次高涨。例如，1997 年，Boas 和 Khavinson [18] 引入并确定了 n维 Bohr 半径，该半径对应于在多圆盘上有界且界为 1 的全纯函数族（详见第 1.2节）。这项奠基性工作激发了数学各领域对 Bohr 型问题的浓厚研究兴趣。随后，关于多维幂级数的 Bohr 现象研究取得了更多成果。该领域的重要贡献包括 Aizenberg [8,10,12], Aizenberg 等人、[7,9,11], Defant 和 Frerick [23], 以及 Djakov 和 Ramanujan [28]。关于

2010数学主题分类：30A10, 30C45, 30C62, 30C75。关键词与短语：有界全纯函数，多维 Bohr。*通讯作者：Molla Basir Ahamed。由 $\mathcal{AMS}$-LaTeX 排版。

Bohr 不等式可参见 [6,14,24,31,33,42,47–49],Kresin 和 Maz'ya 的专著 [41], 及其中引用的参考文献。特别是， [41, 第 6 节4] 关于 Bohr 型定理的内容，凸显了将若干已有不等式推广到多复变数的全纯函数，以及更重要地推广到偏微分方程解的丰富机遇。

1.1. 经典Bohr不等式及其近期推论。 令 $\mathcal{B}$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ 中解析函数的类，其形式为$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$，并满足 $|f(\zeta)| < 1$属于 $\mathbb{D}$。在狄利克雷级数的研究中，Harald Bohr于1914年 [19] 发现了以下有趣的现象

定理A。 若 $f \in \mathcal{B}$，则下列最佳不等式成立：

$$M_f(r) := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \ \ for \ \ |\zeta| = r \leq \frac{1}{3}. \tag{1.1}$$

我们注意到，若 $|f(\zeta)| \leq 1$属于 $\mathbb{D}$，且对于某个属于 $\mathbb{D}$的点 ζ_0，有 $|f(\zeta_0)| = 1$，则 f必为模为1的常数；因此，我们只考虑非恒定函数$f \in \mathcal{B}$。不等式（1.1）及其最佳常数 $1/3$统称为经典Bohr不等式，而 $1/3$称为函数族 $\mathcal{B}$的Bohr半径。Bohr [19]最初仅对 $r \leq 1/6$证明了该不等式，后来 Wiener 证明了常数 $1/3$是最佳的。此后还出现了若干种其他证明（参见 [47]-[49], [53], [54], 以及综述章节 [6] 和 [30, 第 8]章）。这些研究中的许多工作运用了复分析、泛函分析、数论和概率论的方法，并进一步发展了关于 Bohr 的狄利克雷级数思想的新理论和应用。例如， [7,9,10,18,28,35]中给出了该结果的各种多维推广。

值得注意的是，如果将 Bohr不等式中的 $|a_0|$ 替换为 $|a_0|^2$，那么 Bohr半径将从 $1/3$ 提高到 $1/2$。此外，如果定理A中的 $a_0 = 0$ ，则精确的 Bohr半径还可进一步提高到$1/\sqrt{2}$ （例如，参见 [36], [47, 推论29], 以及近期工作 [50] 中的一般性结果）。这些改进依赖于如下精确系数估计：

$$|a_n| \leq 1 - |a_0|^2, \quad n \geq 1, \ f \in \mathcal{B}.$$

利用这些不等式， [36]中指出，在极值情形 $|a_0| < 1$下无法得到定理A的精确形式。尽管如此，对于 $\mathcal{B}$ 中的每个单独函数，定理A的精确版本已经得到证明（见 [14]）；对于若干类单叶函数，也得到了相应结果（见 [10,45]）。

令 $\mathbb{N}$ 表示正整数集合。还有一个 Rogosinski 半径的概念 [52]，其定义如下：如果在 $\mathbb{D}$上有 $|f(\zeta)| < 1$，那么对于每个 $N \in \mathbb{N}$，均有 $|S_N(\zeta)| \leq 1$，其中 $|\zeta| \leq 1/2$，且 $S_N(\zeta) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \zeta^n$。常数 $1/2$ 是精确的，并称为*Rogosinski* 半径。

在 [43], Liu 等人通过应用一组强化的系数不等式（见 [43,引理 4]），建立了精细 Bohr-Rogosinski 不等式。

定理 B。 *[43, 定理 1]* 设 $f \in \mathcal{B}$ 且 $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$. 对于 $n \geq N$，令 $t = \left[\frac{N-1}{2}\right]$。则

$$|f(\zeta)| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n + \operatorname{sgn}(t) \sum_{n=1}^{t} |a_n|^2 \frac{r^N}{1-r} + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r}\right) \sum_{n=t+1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 1$$

对于 $|\zeta| = r \leq R_N$，其中 R_N 是方程 $2(1+r)r^N - (1-r)^2 = 0$ 的正根。半径 R_N 是最佳的。此外，

$$|f(\zeta)|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n + \operatorname{sgn}(t) \sum_{n=1}^{t} |a_n|^2 \frac{r^N}{1-r} + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r}\right) \sum_{n=t+1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 1$$

对于 $|\zeta| = r \leq R'_N$，其中 R'_N 是方程 $2(1+r)r^N - (1-r)^2 = 0$ 的正根。半径 R'_N 是最佳的。

对于情形 $N = 1$，不难验证 $R_1 = \sqrt{5} - 2$ 和 $R'_1 = 1/3$。然而，若考虑 $\mathcal{B}$ 中的任意一个函数（在定理 B 且 $N = 1$ 的设定下），这两个常数都可以改进。在这方面，Liu 等人 [43] 得到了以下结果。

定理 em C. *[43, 定理 2]* 设 $f \in \mathcal{B}$ 且 $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$. 则

$$A(\zeta, r) := |f(\zeta)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r}\right) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 1$$

对于 $|\zeta| = r \leq r_{a_0} = \dfrac{2}{3 + |a_0| + \sqrt{5}(1 + |a_0|)}$。半径 r_{a_0} 是最佳的，并且满足 $r_{a_0} > \sqrt{5} - 2$。此外，

$$B(\zeta, r) := |f(\zeta)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r}\right) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 1$$

对于 $|\zeta| = r \leq r'_{a_0}$，其中 r'_{a_0} 是下式的唯一正根

$$(1 - |a_0|^3) r^3 - (1 + 2|a_0|) r^2 - 2r + 1 = 0.$$

半径 r'_{a_0} 是最佳的。此外，

$$\frac{1}{3} < r'_{a_0} < \frac{1}{2 + |a_0|}.$$

受 Kayumov 和 Ponnusamy [37], 的工作启发，文献 [44]研究了族 $\mathcal{B}$ 的 Bohr型不等式。这项研究考察了若干种形式，其中经典Bohr不等式中的泰勒系数被部分或全部替换为 f的高阶导数。这里我们仅回顾其中两个结果。

定理 D. *[44, 定理 2.1]* 假设 $f \in \mathcal{B}$ 且 $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$. 则下列最佳不等式成立：

$$|f(\zeta)| + |f'(\zeta)| r + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1 \quad \textit{for } |\zeta| = r \leq \frac{\sqrt{17} - 3}{4}.$$

定理 E. *[44, 定理 2.2，推论 2。3]* 假设 $N(\geq 2)$ 是一个整数，$f(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k$ 在 $\mathbb{D}$ 中解析，且 $|f(\zeta)|<1$ 在 $\mathbb{D}$ 中。于是

$$|f(\zeta)|+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\right||\zeta|^k\leq 1 \quad for\ |\zeta|=r\leq R_N,$$

其中，R_N 是该方程的最小正根

$$\psi_N(r)=(1+r)(1-2r)(1-r)^{N-1}-2r^N=0.$$

半径 R_N 是最优的。此外，

$$|f(\zeta)|^2+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\right||z|^k\leq 1 \quad for\ |\zeta|=r\leq R_N^*,$$

其中，R_N^* 是该方程的正根

$$(1+r)(1-2r)(1-r)^{N-1}-r^N=0.$$

半径 R_N^* 是最优的。

Liu等人 [43] 提出了定理 D 的一个改进版本，如下所示。

定理 F. *[43, 定理 7]* 假设 $f\in\mathcal{B}$ 且 $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$. 则

$$I(\zeta,r):=|f(\zeta)|+|f'(\zeta)|\,r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{r}{1-r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\leq 1$$

当 $|\zeta|=r\leq\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ 时，常数 $\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ 是最优的。此外，

$$J(\zeta,r):=|f(\zeta)|^2+|f'(\zeta)|\,r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{r}{1-r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\leq 1$$

当 $|\zeta|=r\leq r_0$，其中 $r_0\approx 0.385795$ 是方程的唯一正根

$$1-2r-r^2-r^3-r^4=0,$$

且 r_0 是最优的。

关于单个复变量中的 Bohr-Rogosinski 半径的其他结果，参见 例如 [2–4, 16, 22, 29, 32]。

研究多复变数中取值于多圆盘的函数的 Bohr-Rogosinski 半径将会很有意义。自然会提出以下问题：

问题 1.1. 我们能否建立定理 *B*、*C*、*E* 和 *F* 的多维版本？

本文旨在对这一问题给出肯定的回答。本文结构安排如下：首先，我们讨论多复变数中的一些基本记号和术语。第 2 节介绍主要结果。第 3 节给出若干关键引理，它们将在证明本文结果时发挥关键作用。最后，第 4 节给出主要结果的证明。

1.2. 多复变数中的基本记号。 对于 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ 和$w=(w_1,\ldots,w_n)$ 属于 $\mathbb{C}^n$，记 $\langle z, w\rangle = z_1w_1+\ldots+z_nw_n$ 和 $||z|| = \sqrt{\langle z,z\rangle}$。复数 z_1 的绝对值记为 $|z_1|$，对于 $z\in\mathbb{C}^n$，定义

$$||z||_\infty = \max_{1\le i\le n}|z_i|.$$

$\mathbb{C}^n$ 中的开多圆盘（或开多圆柱） $\mathbb{P}\Delta(a;r)\subset\mathbb{C}^n$ 具有如下形式:

$$\mathbb{P}\Delta(a;r)=\prod_{j=1}^{n}\Delta(a_j;r_j)=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_i-a_i|<r_i,\ i=1,2,\ldots,n\},$$

点 $a=(a_1,\ .....,\ a_n)\in\mathbb{C}^n$ 称为多圆盘的中心，$r=(r_1,\ .....,\ r_n)\in\mathbb{R}^n$ $(r_i>0)$ 称为多重半径。容易看出,

$$\mathbb{P}\Delta(0;1)=\mathbb{P}\Delta(0;1_n)=\prod_{j=1}^{n}\Delta(0_n;1_n).$$

$\mathbb{P}\Delta(a;r)$的闭包称为以 a 为中心、以r 为多重半径的闭多圆盘，记作 $\mathbb{P}\Delta(a;r)$。我们用 $C_k(a_k;r_k)$表示 $\Delta(a_k;r_k)$的边界，即 在 z_k平面上以 a_k 为中心、半径为 r_k 的圆。当然，$C_k(a_k,\ r_k)$可用通常参数化表示为

$$\theta_k\to\gamma(\theta_k)=a_k+r_ke^{i\theta_k},\ \text{where},0\le\theta_k\le2\pi.$$

乘积 $C^n(a;\ r):=C_1(a_1;\ r_1)\ \times\ldots\times C_n(a_n;\ r_n)$称为多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(a;r)$的决定集。

维数为 n 的多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 由 n 个非负整数 $\alpha_j,\ 1\le j\le n$ 组成；多重指标 α 的次数为总和 $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$，记作$\alpha!\ =\alpha_1!\ldots\alpha_n!$. 对于 $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ 和多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$，定义

$$z^\alpha=\prod_{j=1}^{n}z_j^{\alpha_j}\ \text{ and }\ |z|^\alpha=\prod_{j=1}^{n}|z_j|^{\alpha_j}.$$

对于两个多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 和 $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$，定义 $\nu^\alpha=\nu_1^{\alpha_1}\ldots\nu_n^{\alpha_n}$. 设 $f(z)$ 是区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数，且 $c=(c_1,\ldots,c_n)\in\Omega$。那么在以 c 为中心的多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(c;\ r)\subset\Omega$ 内，$f(z)$ 关于 $z_1-c_1,\ldots,z_n-c_n$ 有幂级数展开,

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n=0}^{\infty}a_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(z_1-c_1)^{\alpha_1}(z_2-c_2)^{\alpha_2}\ldots(z_n-c_n)^{\alpha_n}\\&=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha(z-c)^\alpha=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}P_{|\alpha|}(z-c),\end{aligned}$$

其在 $\mathbb{P}\Delta(c;\ r)$ 中绝对收敛，其中项 $P_k(z-c)$ 是次数为 k的齐次多项式。

我们的目标之一是建立定理 D、E 和 F 的多维类比。为此，我们设 f 是 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 中的全纯函数，并定义

欧拉算子 D 如下：

$$Df(z) := \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}.$$

该算子也称为欧拉导数、全导数或径向导数。

2. 主要结果

我们首先陈述定理 B 的多维版本。

定理 2.1. 设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$ 中的全纯函数，满足 $|f(z)| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$均成立。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$，且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$满足 $||z||_\infty = \mathbf{r}$。对于 $n \geq N$，令 $t = \left[\frac{N-1}{2}\right]$。则

$$\mathcal{A}_1(z, \mathbf{r}) := |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \operatorname{sgn}(t) \sum_{k=1}^{t} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \frac{\mathbf{r}^N}{1-\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right) \sum_{k=t+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leq 1$$

当 $n\mathbf{r} \leq R_{n,N}$时，其中 $R_{n,N}$是方程 $\psi_N(n\mathbf{r}) = 0$, $\psi_N(n\mathbf{r}) = 2(1+n\mathbf{r})(n\mathbf{r})^N - (1-n\mathbf{r})^2$的正根。半径 $R_{n,N}$ 是最佳可能的。此外，

$$\mathcal{A}_2(z, \mathbf{r}) := |f(z)|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \operatorname{sgn}(t) \sum_{k=1}^{t} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \frac{\mathbf{r}^N}{1-\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right) \sum_{k=t+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leq 1$$

对于 $n\mathbf{r} \leq R'_{n,\,N}$，其中 $R'_{n,\,N}$是方程 $(1+n\mathbf{r})(n\mathbf{r})^N - (1-n\mathbf{r})^2 = 0$ 的正根。半径 R'_N 是最佳可能值。

接下来我们陈述定理 C 的多维版本。

定理 2.2。 设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$ 中的全纯函数，满足 $|f(z)| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$ 均成立。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$ 且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ $||z||_\infty = \mathbf{r}$。则

$$\mathcal{A}_3(z, \mathbf{r}) := |f(z)| + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leq 1$$

对于 $n\mathbf{r} \leq nr_{a_0} = \frac{2}{3+|a_0|+\sqrt{5}(1+|a_0|)}$。半径 nr_{a_0} 是最优的，且 $nr_{a_0} > \sqrt{5}-2$。此外，

$$\mathcal{A}_4(z, \mathbf{r}) := |f(z)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leq 1$$

对于 $\mathbf{r} \leq r'_{a_0}$，其中 nr'_{a_0} 是方程的唯一正根

$$(1-|a_0|^3)(n\mathbf{r}^3-(1+2|a_0|)\,(n\mathbf{r})^2-2n\mathbf{r}+1=0.$$

半径 nr'_{a_0} 是最佳的。此外，我们有 $1/3n < r'_{a_0} < 1/n(2+|a_0|)$。

接下来我们陈述定理 E 的多维版本。

定理 2.3。设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0;\,1_n)$ 中的全纯函数，满足 $|f(z)| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\,1/n)$均成立。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\,1/n)$ 且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 满足 $||z||_\infty = \mathbf{r}$。那么

$$\mathcal{I}(z,\mathbf{r}) := |f(z)| + |Df(z)| + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leq 1$$

对于 $n\mathbf{r} \leq \frac{\sqrt{17}-3}{4}$，常数 $\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ 是最佳的。此外

$$\mathcal{J}(z,\mathbf{r}) := |f(z)|^2 + |Df(z)| + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leq 1$$

当 $\mathbf{r} \leq r_0$ 时，其中 $nr_0 \approx 0.385795$ 是该方程的唯一正根

$$1-2n\mathbf{r}-(n\mathbf{r})^2-(n\mathbf{r})^3-(n\mathbf{r})^4=0$$

且 nr_0 是最佳的。

最后，我们陈述定理 F 的多维推广。

定理 2.4。设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0;\,1_n)$ 中的全纯函数，满足 $|f(z)| \leq 1$，对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\,1/n)$均成立。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\,1/n)$ 且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 满足 $||z||_\infty = \mathbf{r}$。令 $N \geq 2$。那么

$$\mathcal{M}(z,\mathbf{r}) := |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\right| |z|^\alpha \leq 1$$

˜当 $n\mathbf{r} \leq R_{n,N}$ 时，其中 $R_{n,N}$ 是该方程的最小正根

$$(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}-2(n\mathbf{r})^N=0.$$

˜半径 $R_{n,N}$ 是最佳的。此外

$$\mathcal{N}(z,\mathbf{r}) := |f(z)|^2 + \sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\right| |z|^\alpha \leq 1$$

˜对于 $n\mathbf{r} \leq R'_{n,\,N}$，其中 $R'_{n,\,N}$ 是该方程的最小正根

$$(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}-(n\mathbf{r})^N=0.$$

3. 关键引理及其证明

为了建立我们的主要结果，我们需要以下引理。其中第一个是 [21, 定理 2。2]的一个特例。

引理 3.1. 设 f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$ 中全纯，且对于所有 $z\in\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$，均有 $|f(z)|\leq 1$。那么对于所有 $z\in\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$，有

$$|f(z)|\leq\frac{|f(0)|+||z||_\infty}{1+|f(0)|||z||_\infty}.$$

以下引理包含在 [34, 推论 1.3] 中。

引理 3.2. 设 f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$ 中全纯，且对于所有 $z\in\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$，均有 $|f(z)|<1$。那么对于多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$，有

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_n^{\alpha_n}}\right|\leq\alpha!\frac{1-|f(z)|^2}{(1-||z||_\infty^2)^{|\alpha|}}(1+||z||_\infty)^{|\alpha|-N}$$

对于 a ll $z\in\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$，其中 N 是满足 $\alpha_j\neq 0$ 的指标 j 的数量 .

引理 3.3. *[20]* 假设 $f\in\mathbb{B}$ 且 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$。则以下不等式成立。

(a) $|a_{2k+1}|\leq 1-|a_0|^2-|a_1|^2-\ldots-|a_k|^2,\ k=0,1,\ldots;$
(b) $|a_{2k}|\leq 1-|a_0|^2-|a_1|^2-\ldots-|a_{k-1}|^2-\frac{|a_k|^2}{1+|a_0|},\quad k=1,2,\ldots.$

此外，要使 (a) 取等号，必须满足 $f(z)$ 是如下形式的有理函数

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_kz^k+\epsilon z^{2k+1}}{1+\left(\overline{a}_kz^k+\ldots+\overline{a}_0z^{2k+1}\right)\epsilon},\quad|\epsilon|=1,$$

并且要使 (b) 取等号，必须满足 $f(z)$ 是如下形式的有理函数

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\ldots+\frac{a_k}{1+|a_0|}z^k+\epsilon z^{2k}}{1+\left(\frac{\overline{a}_k}{1+|a_0|}z^k+\ldots+\overline{a}_0z^{2k}\right)\epsilon},\quad|\epsilon|=1,$$

其中 $a_0\overline{a}_k^2\epsilon$ 是非正实数。

为了证明我们的结果，我们首先证明以下结果，它是引理3.3的多维推广。

引理 3.4。 设 f 是多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$ 内的全纯函数，满足$|f(z)|\leq 1$且 $f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha z^\alpha$，对所有 $z\in\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$均成立。则以下不等式成立。

(i) 对于 $k=0$,1、2、...，有

$$\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha|\leq n^{(2k+1)/2}\left(1-\sum_{i=0}^{k}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2\right).$$

(ii) 对于 $k=1$、2、.....，我们有

$$\sum_{|\alpha|=2k}|a_\alpha|\leq n^k\left(1-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2-\frac{\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2}{1+|a_0|}\right).$$

证明。设 $f(z)=a_0+P_1(z)+P_2(z)+\ldots$，其中 $P_k(z)=\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\alpha$ 是齐次的次数为 k的多项式。我们定义

$$g(t)=f(zt)=a_0+P_1(z)\,t+P_2(z)\,t^2+\ldots, \tag{3.1}$$

其中 $t\in\mathbb{C}$ 使得 $|t|\leq 1$。对于固定的 $z\in\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$，我们可以说 $g(t)$ 在 $|t|\leq 1$中解析。由于 $|f(z)|\leq 1$，由 (3.1) 得到 $|g(t)|\leq 1$ 在 $|t|\leq 1$中。现在由引理3.5 (a)，我们有

$$|P_{2k+1}(z)|\leq 1-|a_0|^2-|P_1(z)|^2-\ldots-|P_k(z)|^2,$$

即，

$$|a_0|^2+|P_1(z)|^2+\ldots+|P_k(z)|^2+|P_{2k+1}(z)|\leq 1, \tag{3.2}$$

其中 $k=0$，1，2，.....。我们令 $z_j=r_je^{i\theta_j}(0\leq\theta_j\leq 2\pi)$，其中 $0<r_j<1,j=1$，2，.....，n并考虑对$\left|P_i\left(r_1e^{i\theta_1},\ .....,\ r_ne^{i\theta_n}\right)\right|^2$的积分。注意到$\int_0^{2\pi}e^{i(\beta-\gamma)\theta}d\theta=2\pi\delta_{\beta,\ \gamma}$（克罗内克符号），我们有

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2r^{2\alpha}&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left|P_i\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|^2\,d\theta_1\cdots d\theta_n\\&\leq\max_{C^n(0,r)}\left|P_i\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|^2,\end{aligned}$$

即，

$$\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2r^{2\alpha}\leq\max_{C^n(0,r)}\left|P_i\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|^2, \tag{3.3}$$

其中 $i\geq 1$且 $r=(r_1,\ r_2,\ .....,\ r_n)$。另一方面，由（3.2），可得

$$\begin{aligned}&|a_0|^2+\max_{C^n(0,r)}\left|P_1\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|^2+\ldots+\max_{C^n(0,r)}\left|P_k\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|^2\\&+\max_{C^n(0,r)}\left|P_{2k+1}\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|\leq 1,\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $k=0$、1、2、.....

利用（3.3）至（3.4），可得

$$|a_0|^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2r^{2\alpha}+\max_{C^n(0,r)}\left|P_{2k+1}\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|\leq 1, \tag{3.5}$$

其中 $k=0$、1、2、.....。

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\left(\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha r^\alpha|\right)^2\leq\left(\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha|^2\right)\times\left(\sum_{|\alpha|=2k+1}r^{2\alpha}\right)\leq n^{|\alpha|}\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha|^2r^{2\alpha}$$

因此，由（3.3）可得

$$\left(\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha r^\alpha|\right)^2 \leq n^{|\alpha|}\left(\max_{C^n(0,r)}\left|P_{2k+1}\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|\right)^2,$$

即，

$$\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha r^\alpha| \leq n^{|\alpha|/2}\max_{C^n(0,r)}\left|P_{2k+1}\left(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n}\right)\right|. \tag{3.6}$$

因此，利用（3.6）至（3.5），可得

$$n^{|\alpha|/2}|a_0|^2+n^{|\alpha|/2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2r^{2\alpha}+\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha r^\alpha| \leq n^{|\alpha|/2}, \tag{3.7}$$

其中 $k=0$，1，2，.....令 $r_i\to 1$ 对于 $i=1$，2，.....，n，由（3.7）可得

$$\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha| \leq n^{(2k+1)/2}\left(1-\sum_{i=0}^{k}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2\right),$$

其中 $k=0,1,2,\ldots$.

由引理 3.5(b)，可得

$$|P_{2k}(z)| \leq 1-|a_0|^2-|P_1(z)|^2-\ldots-|P_{k-1}(z)|^2-\frac{|P_k(z)|^2}{1+|a_0|},$$

即，

$$|a_0|^2+|P_1(z)|^2+\ldots+|P_{k-1}(z)|^2+\frac{|P_k(z)|^2}{1+|a_0|}+|P_{2k}(z)| \leq 1,$$

其中 $k=1$，2，.....。

基于前面使用的类似论证，我们证明

$$\sum_{|\alpha|=2k}|a_\alpha| \leq n^k\left(1-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2-\frac{\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2}{1+|a_0|}\right),$$

其中 $k=1,2,\ldots$ □

引理 3.5。设 f 是多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$ 中的全纯函数，满足$|f(z)|\leq 1$且 $f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha z^\alpha$对所有 $z\in\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$均成立。则对任意 $N\in\mathbb{N}$，以下最佳不等式成立：

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|\,r^\alpha+\operatorname{sgn}(t)\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\frac{\mathbf{r}^N}{1-\mathbf{r}}+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right)\sum_{k=t+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2r^{2\alpha}$$
$$\leq\left(1-|a_0|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} \tag{3.8}$$

对于 $n\mathbf{r}\in[0,1)$，其中 $r=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$、$\mathbf{r}=||r||_\infty$和 $t=[(N-1)/2]$，$[x]$表示不大于 x 的最大整数，其中 x是实数。

证明。 设 f 是多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\,1_n)$ 上的全纯函数，使得 $|f(z)|\le 1$ 且对所有 $z\in\mathbb{P}\Delta(0;\,1_n)$，都有 $f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha z^\alpha$。我们将证明分为两种情况。

情形 1. 设 $N=2m$，其中 $m\in\mathbb{N}$。由引理 3.4，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=2m}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|r^\alpha &= \sum_{k=m}\sum_{|\alpha|=2k}|a_\alpha|r^\alpha+\sum_{k=m}\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha|r^\alpha \\ &\le \sum_{k=m}\left(1-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2-\frac{\sum\limits_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2}{1+|a_0|}\right)(n\mathbf{r})^{2k} \\ &\quad+\sum_{k=m}\left(1-\sum_{i=0}^{k}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2\right)(n\mathbf{r})^{2k+1} \\ &\le \sum_{k=2m}^{\infty}(n\mathbf{r})^k-\left(\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2\right)\left(\sum_{k=2m}^{\infty}(n\mathbf{r})^k\right) \\ &\quad-\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\sum_{k=1}^{\infty}(n\mathbf{r})^k\right)\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2(n\mathbf{r})^{2k} \\ &= \left(1-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^{2m}}{1-n\mathbf{r}} \\ &\quad-\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right)\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2(n\mathbf{r})^{2k}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

利用（3.9），经过简单计算可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|\,r^\alpha+\operatorname{sgn}(t)\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\frac{\mathbf{r}^N}{1-\mathbf{r}}+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right)\sum_{k=t+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\mathbf{r}^{2k} \\ &\le \sum_{k=2m}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|\,r^\alpha+\operatorname{sgn}(m-1)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\frac{(n\mathbf{r})^{2m}}{1-n\mathbf{r}} \\ &+\left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right)\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\mathbf{r}^{2k} \\ &\le \left(1-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=i}|a_\alpha|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^{2m}}{1-n\mathbf{r}}+\operatorname{sgn}(m-1)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\frac{(n\mathbf{r})^{2m}}{1-n\mathbf{r}}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

注意，$\operatorname{sgn}(m-1)=0$ 当 $m=1$ 且 $=1$ 当 $m>1$。因此，所需结果可由 (3.10) 轻易得出。

情形 2。 $N = 2m+1$，其中 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。然后利用引理 3.4 和 (3.9)，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2m+1}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| r^\alpha \qquad (3.11)\\
&= \sum_{k=2(m+1)}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| r^\alpha + \sum_{|\alpha|=2m+1} |a_\alpha| r^\alpha\\
&\le \left(1 - \sum_{i=0}^{m}\sum_{|\alpha|=i} |a_\alpha|^2\right) \frac{(n\mathbf{r})^{2(m+1)}}{1-n\mathbf{r}} - \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right) \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 (n\mathbf{r})^{2k}\\
&\quad + \left(1 - \sum_{i=0}^{m}\sum_{|\alpha|=i} |a_\alpha|^2\right) (n\mathbf{r})^{2m+1}\\
&= \left(1 - \sum_{i=0}^{m}\sum_{|\alpha|=i} |a_\alpha|^2\right) \frac{(n\mathbf{r})^{2m+1}}{1-n\mathbf{r}} - \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right) \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 (n\mathbf{r})^{2k}.
\end{aligned}$$

利用（3.11），我们可推出

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \operatorname{sgn}(t) \sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \frac{\mathbf{r}^N}{1-\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right) \sum_{k=t+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \mathbf{r}^{2k}\\
&\le \sum_{k=2m+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\, r^\alpha + \operatorname{sgn}(m) \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \frac{(n\mathbf{r})^{2m+1}}{1-n\mathbf{r}}\\
&\quad + \left(\frac{1}{1+|a_0|} + \frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right) \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \mathbf{r}^{2k}\\
&\le \left(1 - \sum_{i=0}^{m}\sum_{|\alpha|=i} |a_\alpha|^2\right) \frac{(n\mathbf{r})^{2m+1}}{1-n\mathbf{r}} + \operatorname{sgn}(m) \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \frac{(n\mathbf{r})^{2m+1}}{1-n\mathbf{r}}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

注意，$\operatorname{sgn}(m) = 0$ 若 $m = 0$ 且 $= 1$ 若 $m \ge 1$。因此，很容易由（3.12）得到所需结果。

为了说明不等式（3.8）是尖锐的，我们考虑函数

$$f(z) = \frac{a - (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)}{1 - a(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)}, \qquad (3.13)$$

其中 $a \in [0, 1)$。显然，f 在 $\mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$ 中是全纯的。由于 $|a(z_1+z_2+\ldots+z_n)| < 1$，我们有

$$f(z) = a - (1-a^2) \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^k.$$

对于所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0; 1/n)$。对于点 $z = (-r,\ -r,\ \ldots\ldots,\ -r)$，我们得到

$$f(z) = a + (1-a^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-a)^{k-1} (n\mathbf{r})^k. \qquad (3.14)$$

如果取 $a_0 = a$ 和 $a_k = (1-a^2)(-a)^{k-1}$，则很容易验证

(i) $|a_{2k+1}| = 1 - |a_0|^2 - |a_1|^2 - \ldots - |a_k|^2,\ k = 0, 1, \ldots;$

(ii) $|a_{2k}| = 1 - |a_0|^2 - |a_1|^2 - \ldots - |a_{k-1}|^2 - \frac{|a_k|^2}{1+|a_0|},\quad k = 1, 2, \ldots.$

很容易看出

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|\,r^\alpha + \operatorname{sgn}(t)\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\frac{\mathbf{r}^N}{1-\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right)\sum_{k=t+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\mathbf{r}^{2k}$$

$$= \sum_{k=N}^{\infty}|a_k|\,(n\mathbf{r})^\alpha + \operatorname{sgn}(t)\sum_{k=1}^{t}|a_k|^2\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right)\sum_{k=t+1}^{\infty}|a_k|^2(n\mathbf{r})^{2k}.$$

情形 A. 若 $N = 2m$，其中 $m \in \mathbb{N}$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2m}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|r^\alpha &= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{|\alpha|=2k}|a_\alpha|r^\alpha + \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{|\alpha|=2k+1}|a_\alpha|r^\alpha\\ &= \sum_{k=m}^{\infty}|a_{2k}|(n\mathbf{r})^{2k} + \sum_{k=m}^{\infty}|a_{2k+1}|(n\mathbf{r})^{2k+1}\\ &= \left(1-\sum_{k=0}^{m-1}|a_k|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^{2m}}{1-n\mathbf{r}} - \left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right)\sum_{k=m}^{\infty}|a_k|^2(n\mathbf{r})^{2k}.\end{aligned}$$

情形 B. 同理，若 $N = 2m+1$，其中 $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=2m+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|r^\alpha &= \sum_{k=2(m+1)}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|r^\alpha + \sum_{|\alpha|=2m+1}|a_\alpha|r^\alpha\\ &= \sum_{k=2(m+1)}^{\infty}|a_k|(n\mathbf{r})^k + |a_{2m+1}|(n\mathbf{r})^{2m+1}\\ &= \left(1-\sum_{k=0}^{m-1}|a_k|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^{2m}}{1-n\mathbf{r}} - \left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right)\sum_{k=m}^{\infty}|a_k|^2(n\mathbf{r})^{2k}.\end{aligned}$$

因此，有

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|\,r^\alpha + \operatorname{sgn}(t)\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\frac{(\mathbf{r}^N}{1-\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{1+|a_0|}+\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}}\right)\sum_{k=t+1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2\mathbf{r}^{2k}$$

$$= \left(1-|a_0|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}}, \tag{3.15}$$

这表明不等式（3.8）是锐利的。 □

4. 主要结果的证明

定理 2.1 的证明。 取 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，使得 $\mathbf{r} = ||z||_\infty$。由引理 3.1，可得

$$|f(z)| \le \frac{||z||_\infty + |a_0|}{1+|a_0|||z||_\infty} = \frac{\mathbf{r}+|a_0|}{1+|a_0|\mathbf{r}} \le \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+|a_0|n\mathbf{r}}. \tag{4.1}$$

由引理3.5和不等式（4.1），我们推得

$$\mathcal{A}_1(z,\mathbf{r}) \le \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+|a_0|n\mathbf{r}} + \left(1-|a_0|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} = 1 + \frac{\phi_{n,N}(\mathbf{r})}{(1+|a_0|\mathbf{r}^m)(1-n\mathbf{r})} \le 1,$$

若满足 $\phi_{n,\ N}(\mathbf{r}) \leq 0$，其中

$$\begin{aligned}\phi_{n,N}(\mathbf{r}) &:= (n\mathbf{r}+|a_0|)(1-n\mathbf{r})+(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^N(1+|a_0|n\mathbf{r})-(1-n\mathbf{r})(1+|a_0|n\mathbf{r})\\ &= (1-|a_0|)\left[(1+|a_0|)(1+|a_0|n\mathbf{r})(n\mathbf{r})^N-(1-n\mathbf{r})^2\right]\\ &\leq (1-|a_0|)\left[2(1+n\mathbf{r})(n\mathbf{r})^N-(1-n\mathbf{r})^2\right],\end{aligned}$$

因为 $|a_0|<1$。

我们看到，当 $\phi_N(n\mathbf{r}) \leq 0$ 时，

$$\psi_N(n\mathbf{r}) := 2(1+n\mathbf{r})(n\mathbf{r})^N-(1-n\mathbf{r})^2 \leq 0,$$

这对 $n\mathbf{r} \leq R_{n,N}$ 成立。定理的第一部分得证。

为证明数值 $R_{n,N}$ 的最佳性，我们考虑多圆盘 f 中的全纯函数 $\mathbb{P}\Delta(0;1/n)$，其由（3.13）给出。显然，

$$|f(z)| = \frac{a+n\mathbf{r}}{1+an\mathbf{r}}. \tag{4.2}$$

由（3.15）和（4.2），我们得到如下结果

$$\mathcal{A}_1(z,\mathbf{r}) = \frac{a+n\mathbf{r}}{1+an\mathbf{r}}+\left(1-a^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} = 1+\frac{1-a}{(1+na\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})}H_{a,N}(n\mathbf{r}), \tag{4.3}$$

其中

$$H_{a,N}(n\mathbf{r}) := (1+a)(1+nar)(n\mathbf{r})^N-(1-nr)^2 < 2(1+n\mathbf{r})(n\mathbf{r})^N-(1-n\mathbf{r})^2.$$

简单计算可知，不等式（4.3）右端的表达式大于 1，当且仅当 $H_{a,N}(n\mathbf{r}) > 0$。

显然，$H_{a,N}(n\mathbf{r})$ 是 a 在区间 $[0,1)$ 上的严格递增函数。注意，当且仅当对所有 $a \in [0,1]$ 都有 $n\mathbf{r} \leq R_{n,N}$ 时，(4.3) 中的表达式小于或等于 1。最后，对于充分接近 1 的 a，我们观察到

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^-} H_{a,N}(n\mathbf{r}) &= 2(1+nr)(n\mathbf{r})^N-(1-nr)^2\\ &= (1+n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})\left(\frac{2(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}}-\frac{1-n\mathbf{r}}{(1+n\mathbf{r})}\right) > 0,\end{aligned}$$

这表明，对于$\mathbf{r} > R_{n,N}$，$A_1(z) > 1$。这证明半径 $R_{n,N}$ 是最优的。

接下来，我们证明定理的第二部分。应用引理 3.5 并利用关系式（4.1），得到

$$\mathcal{A}_2(z,\mathbf{r}) \leq \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+|a_0|n\mathbf{r}}+\left(1-|a_0|^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} = 1+(1-a^2)G_{a,N}(n\mathbf{r}) \leq 1, \tag{4.4}$$

若 $\phi_{n,N}(\mathbf{r}) \leq 0$，其中

$$G_{a,N}(n\mathbf{r}) = \frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}}-\frac{1-(n\mathbf{r})^2}{(1+an\mathbf{r})^2}.$$

容易看出

$$\frac{\partial G(a,r)}{\partial a} = \frac{(1-(n\mathbf{r})^2)n\mathbf{r}}{(1+an\mathbf{r})^3} > 0.$$

因此， $G(a,\ r)$ 是 $a \in [0,1)$ 的递增函数，所以

$$G(a,r) \le G(1,r) = \frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} - \frac{1-n\mathbf{r}}{1+n\mathbf{r}}.$$

因此， $\mathcal{A}_2(z,\ \mathbf{r}) \le 1$ 当 $n\mathbf{r} \le R'_{n,\ N}$，其中 $R'_{n,\ N}$ 是方程 $(1+n\mathbf{r})(n\mathbf{r})^N - (1-n\mathbf{r})^2 = 0$ 的正根。

为证明数值 $R_{n,\ N}$ 的最佳性，我们考虑多圆盘 f 中的全纯函数 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1/n)$，其定义为 (3.13)。利用 (3.15) 和 (4.2)，简单计算可得

$$\mathcal{A}_2(z,\mathbf{r}) = \left(\frac{a+n\mathbf{r}}{1+an\mathbf{r}}\right)^2 + \left(1-a^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} = 1 + \frac{(1-a^2)\tilde{H}_{a,N}(n\mathbf{r})}{(1+na\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})}, \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{a,N}(n\mathbf{r}) &:= (1+nar)^2(n\mathbf{r})^N - (1-n^2r^2)(1-nr)\\ &< (1+nr)^2(n\mathbf{r})^N - (1-n^2r^2)(1-nr).\end{aligned}$$

简单计算表明，(4.5) 右侧的表达式大于 1˜ 当且仅当 $H_{a,\ N}(n\mathbf{r}) > 0$。

˜显然，$H_{a,\ N}(n\mathbf{r})$ 是关于 $a \in [0,1)$ 的严格递增函数。还需注意，对于所有 $a \in [0,1]$，只有当$n\mathbf{r} \le R'_{n,\ N}$ 时，表达式 (4.5) 才小于或等于 1。最后，当 a 充分接近 1 时，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^-}\tilde{H}_{a,N}(n\mathbf{r}) &= (1+nr)^2(n\mathbf{r})^N - (1-n^2r^2)(1-nr)\\ &= (1+n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})\left(\frac{(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} - \frac{1-n\mathbf{r}}{(1+n\mathbf{r})}\right) > 0,\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{A}_2(z,\ \mathbf{r}) > 1$ 对于$\mathbf{r} > R'_{n,\ N}$成立。这证明半径 $R'_{n,\ N}$ 是最佳的。□

定理2.2的证明。取 $z = (z_1,\ \ldots,\ z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，使得$\mathbf{r} = ||z||_\infty$。我们考虑第一部分。利用引理3.5 以及 $N=1$ 和 （4.1），可得

$$\mathcal{A}_3(z,\mathbf{r}) \le \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|} + \frac{(1-|a_0|^2)n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}} = \frac{1-(1-|a_0|)B_3(|a_0|,n\mathbf{r})}{(1+|a_0|n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})},$$

其中

$$B_3(|a_0|,n\mathbf{r}) = (1-|a_0|-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2 - (3+|a_0|)n\mathbf{r} + 1.$$

要证明定理2.2中的第一个不等式，只需证明 $B_3(|a_0|,\ n\mathbf{r}) \ge 0$对所有 $|a_0| \in [0,1)$以及 $n\mathbf{r} \le r_{a_0}$成立。

若 $|a_0| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $1-|a_0|-|a_0|^2 = 0$，因此，$B_1(|a_0|,\ n\mathbf{r}) \ge 0$ 等价于

$$n\mathbf{r} \le \frac{2}{3+|a_0|} = \frac{2}{5+\sqrt{5}} = \frac{2}{3+|a_0|+\sqrt{5}(1+|a_0|)}.$$

对于 $|a_0| \in [0,1)\backslash\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$，我们有 $1-|a_0|-|a_0|^2 \ne 0$，因此可得

$$\frac{B_1(|a_0|,n\mathbf{r})}{1-|a_0|-|a_0|^2} = \left(n\mathbf{r} - \frac{2}{3+|a_0|+\sqrt{5}(1+|a_0|)}\right)\left(n\mathbf{r} - \frac{2}{3+|a_0|-\sqrt{5}(1+|a_0|)}\right).$$

然后，对这两种情况进行简单分析即可得到所需结论

$$0 \leq |a_0| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ and } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < |a_0| < 1.$$

为证明最佳性，我们令 $a \in [0,1)$ 并考虑函数

$$f(z) = \frac{a + (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)}{1 + a(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)}. \tag{4.6}$$

显然， f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0; 1/n)$ 内是全纯的，并且

$$f(z) = a + (1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty}(-a)^{k-1}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^k$$

对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1/n)$ 均成立。对于点 $z = (r,\ r,\ \ldots,\ r)$，我们得到

$$|f(z)| = \frac{a+nr}{1+nar}$$

and

$$f(z) = a + (1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty}(-a)^{k-1}(n\mathbf{r})^k.$$

对于这个函数，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3(z,\mathbf{r}) &= \frac{n\mathbf{r}+a}{1+an\mathbf{r}} + \frac{(1-a^2)n\mathbf{r}}{1-an\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{1+a} + \frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\right)\frac{(1-a^2)^2(n\mathbf{r})^2}{1-a^2(n\mathbf{r})^2} \\ &= 1 - \frac{(1-a)\tilde{B}_3(a,n\mathbf{r})}{(1+an\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})},\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{B}_3(a,n\mathbf{r}) := (1-a-a^2)(n\mathbf{r})^2 - (3+a)n\mathbf{r} + 1.$$

˜上述不等式大于 1 当且仅当 $B_3(a,\ n\mathbf{r}) < 0$。容易验证˜， $B_3(a,\ n\mathbf{r}) < 0$ 当且仅当

$$n\mathbf{r} > r_a = \frac{2}{3+a+\sqrt{5}(1+a)},$$

这就证明了最佳性。

现在继续证明的第二部分。再次应用引理3.5和关系式（4.1），我们得到

$$\mathcal{A}_4(z,\mathbf{r}) \leq \left(\frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|}\right)^2 + \frac{(1-|a_0|^2)n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}} = \frac{1-(1-|a_0|^2)B_4(|a_0|,n\mathbf{r})}{(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})},$$

其中

$$B_4(|a_0|,n\mathbf{r}) := (1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^3 - (1+2|a_0|)(n\mathbf{r})^2 - 2n\mathbf{r} + 1.$$

为了证明定理2.2中的第二个不等式，只需证明以下条件成立 $B_4(|a_0|, n\mathbf{r}) \geq 0$ 仅对 $0 \leq n\mathbf{r} \leq r^*_{a_0}$成立。初等计算可得以下结果

$$B_4\left(|a_0|, \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{27}(1-|a_0|)(7+|a_0|) > 0,$$

$$B_4\left(|a_0|, \frac{1}{n(2+|a_0|)}\right) = -\frac{(1-|a_0|)(1+|a_0|)^2}{(2+|a_0|)^3} < 0,$$

and

$$\frac{\partial B_4(|a_0|, n\mathbf{r})}{\partial(n\mathbf{r})} = -3|a_0|^2(n\mathbf{r})^2 - 4|a_0|n\mathbf{r} - (1-n\mathbf{r})(1+3n\mathbf{r}) - 1 < 0.$$

因此，所需结论立即得到验证。常数 $r^*_{a_0}$ 的最优性（或最佳性）可通过类似计算得到证明，限于篇幅，此处略去。□

定理 2.3 的证明。 令 $z = (z_1, \ldots\ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(\mathbf{0}; 1_n)$ 满足 $\mathbf{r} = ||z||_\infty$。通过简单计算可知，以下不等式成立

$$\frac{2n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2} \leq 1 \quad \text{if } 0 \leq n\mathbf{r} \leq \sqrt{2}-1.$$

由引理 3.2，可得以下不等式

$$|Df(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-\mathbf{r}^2} n\mathbf{r} \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-(n\mathbf{r})^2} n\mathbf{r}. \tag{4.7}$$

设

$$\Phi(X) = X + \lambda(1-X^2),$$

whe关于 $X = |f(z)|$ 和 $\lambda = \frac{n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2}$。容易看出，当 $\Phi(X) \leq \Phi(X_0)$ 时 n

$$X \leq X_0 = \frac{n\mathbf{r} + |a_0|}{1 + n\mathbf{r}|a_0|}.$$

利用引理 3.5 以及 $N=2$，结合关系式 (4.1) 和 (4.7)，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(z,\mathbf{r}) &\le |f(z)| + \frac{n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2}\left(1-|f(z)|^2\right) + \frac{(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2}{1-n\mathbf{r}} \\
&\le \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|} + \frac{n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2}\left(1-\left(\frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|}\right)^2\right) + \frac{(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2}{1-n\mathbf{r}} \\
&= \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|} + \frac{n\mathbf{r}(1-|a_0|^2)}{(1+n\mathbf{r}|a_0|)^2} + \frac{(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2}{1-n\mathbf{r}} \\
&= 1 + \frac{1-|a_0|}{(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})} \\
&\quad \times \left[-1+3n\mathbf{r}-(n\mathbf{r})^2+(2(n\mathbf{r})^2+(n\mathbf{r})^3)|a_0|+(2(n\mathbf{r})^3+(n\mathbf{r})^4)|a_0|^2+(n\mathbf{r})^4|a_0|^3\right] \\
&\le 1 + \frac{1-|a_0|}{(1+|a_0|r)^2(1-r)} \\
&\quad \times [-1+3n\mathbf{r}-(n\mathbf{r})^2+(2(n\mathbf{r})^2+(n\mathbf{r})^3)+(2(n\mathbf{r})^3+(n\mathbf{r})^4)+(n\mathbf{r})^4] \\
&= 1 + \frac{2(1-|a_0|)(1+(n\mathbf{r})^2)}{(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})}\left(n\mathbf{r}-\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\left(n\mathbf{r}+\frac{\sqrt{17}+3}{4}\right) \\
&\le 1,
\end{aligned}$$

for

$$0 \le n\mathbf{r} \le \frac{\sqrt{17}-3}{4} < \sqrt{2}-1.$$

容易看出

$$\frac{1-n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2} \ge 0 \ \text{ if } \ 0 \le n\mathbf{r} \le \frac{1}{2}$$

同样，沿用前一种情形的方法，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z,\mathbf{r}) &\le \left(\frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|}\right)^2 + \frac{n\mathbf{r}(1-|a_0|^2)}{(1+n\mathbf{r}|a_0|)^2+(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2}\left(\frac{1}{1-n\mathbf{r}}\right) \\
&= 1 + \frac{\left(1-|a_0|^2\right)\left(-(1-n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r}-(n\mathbf{r})^2)+(n\mathbf{r})^2(1+n\mathbf{r}|a_0|)^2\right)}{(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})} \\
&\le 1 + \frac{\left(1-|a_0|^2\right)\left(-1+2n\mathbf{r}+(n\mathbf{r})^2+(n\mathbf{r})^3+(n\mathbf{r})^4\right)}{(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})} \\
&\le 1,
\end{aligned}$$

当 $0 \le \mathbf{r} \le r_0 < \frac{1}{2n}$时。

为证明其最佳性，我们考虑多圆盘 f 中的全纯函数 $\mathbb{P}\Delta(0;1/n)$，由（4.6）给出。现在对于 $z=(r,r,\ldots,r)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z,\mathbf{r}) &= \left(\frac{n\mathbf{r}+a}{1+n\mathbf{r}a}\right)^2 + \frac{(1-a^2)n\mathbf{r}}{(1+an\mathbf{r})^2} + \frac{(1-a^2)a(n\mathbf{r})^2}{1-an\mathbf{r}} + \frac{1+an\mathbf{r}}{(1+a)(1-n\mathbf{r})}\left(\frac{(1-a^2)^2(n\mathbf{r})^2}{1-a^2(n\mathbf{r})^2}\right) \\
&= 1 + \frac{\left(1-a^2\right)\left(-1+2n\mathbf{r}+(n\mathbf{r})^2-(n\mathbf{r})^3+2(n\mathbf{r})^3a+(n\mathbf{r})^4a^2\right)}{(1+an\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})}.
\end{aligned}$$

最后一个表达式大于 1，当且仅当，

$$\tilde{J}(a,n\mathbf{r}) = -1+2n\mathbf{r}+(n\mathbf{r})^2-(n\mathbf{r})^3+2(n\mathbf{r})^3a+(n\mathbf{r})^4a^2 > 0$$

˜对所有 $a \in [0,1)$ 以及某个子集 $[0,1)$ 中的所有 $n\mathbf{r}$。等价条件蕴含 $J(a,n\mathbf{r}) \geq \tilde{0}$，由 $a \to 1$ 可知。容易看出，$J(1,n\mathbf{r}) \geq 0$ 当且仅当 $\mathbf{r} \geq r_0$。这证明了最佳性。□

定理 2.4 的证明。 取 $z=(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，使得 $\mathbf{r}=||z||_\infty$。通过简单计算可知

$$n\mathbf{r} \leq n\tilde{R}_{n,N} < \frac{1}{2} \quad \text{if and only if} \quad \frac{2(n\mathbf{r})^N}{(1+n\mathbf{r})(1-2\mathbf{r})(1-\mathbf{r})^{N-1}} \leq 1.$$

利用引理 3.1和 3.2，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(z,\mathbf{r}) :=& |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \right| |z|^\alpha \\
\leq& |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1-|f(z)|^2}{(1-||z||_\infty^2)^{|\alpha|}} (1+||z||_\infty)^{|\alpha|-1} |z|^\alpha \\
\leq& |f(z)| + (1-|f(z)|^2) \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1+(n\mathbf{r}))^{k-1}(n\mathbf{r})^k}{(1-(n\mathbf{r})^2)^k} \\
=& |f(z)| + (1-|f(z)|^2) \frac{(n\mathbf{r})^N}{(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}}.
\end{aligned}$$

应用定理 2.3证明中的相同论证，我们继续如下推导可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(z,\mathbf{r}) \leq& \frac{|a_0|+n\mathbf{r}}{1+n|a_0|\mathbf{r}} + \left(1 - \left(\frac{|a_0|+n\mathbf{r}}{1+n|a_0|\mathbf{r}}\right)^2\right) \frac{(n\mathbf{r})^N}{(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}} \\
\leq& \frac{(|a_0|+n\mathbf{r})(1+n|a_0|\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^N(1-2\mathbf{r}) + (1-|a_0|^2)(1-n\mathbf{r})^2(n\mathbf{r})^N}{(1-n\mathbf{r})^N(1-2n\mathbf{r})(1+n|a_0|\mathbf{r})^2} := \omega_{n,N}(n\mathbf{r})
\end{aligned}$$

$0 \leq n\mathbf{r} \leq n\tilde{R}_{n,N} < \frac{1}{2}$。

可见 $\omega_{n,\ N}(n\mathbf{r}) \leq 1$ 若 $\nu_{nn,\ N}(n\mathbf{r}) \leq 0$，其中

$$\begin{aligned}
\nu_{n,N}(n\mathbf{r}) =& (|a_0|+n\mathbf{r})(1+n|a_0|\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^N(1-2n\mathbf{r}) + (1-|a_0|^2)(1-n\mathbf{r})^2(n\mathbf{r})^N \\
& - (1-n\mathbf{r})^N(1-2n\mathbf{r})(1+n|a_0|\mathbf{r})^2 \\
=& (1-|a_0|)\left(-1+(3-|a_0|)n\mathbf{r}\right) + (3|a_0|-2)(n\mathbf{r})^2 - 2|a_0|(n\mathbf{r})^3\big)\,(1-n\mathbf{r})^N \\
& + (1-|a_0|)(1+|a_0|)\,(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2 \\
=& (1-|a_0|)\left((-1+3n\mathbf{r}-2(n\mathbf{r})^2)(1-n\mathbf{r})^N + (n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2\right) \\
=& (1-|a_0|)|a_0|n\mathbf{r}(1-n\mathbf{r})^2\left((n\mathbf{r})^{N-1} - (1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}\right).
\end{aligned}$$

为完成证明，我们现在考虑以下两种情况。

Case ˜**1.** 令 $n\mathbf{r} \leq R_{n,N,1}$，其中 $R_{n,N,1}$ 是方程的最小正根 n

$$\phi_{n,N}(n\mathbf{r}) = (1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1} - (n\mathbf{r})^{N-1} = 0.$$

由于 $(n\mathbf{r})^{N-1}-(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}\le 0$ 且 $|a_0|<1$，我们有

$$\begin{aligned}\nu_{n,N}(n\mathbf{r}) \le & (1-|a_0|)(1-n\mathbf{r})^2\left(\frac{1}{n\mathbf{r}}\left((n\mathbf{r})^{N-1}-(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}\right)\right)\\ \le & (1-|a_0|)(1-n\mathbf{r})^2\left((n\mathbf{r})^{N-1}-(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}\right)\le 0.\end{aligned}$$

情形 2. 设 $R_{n,N,1}<n\mathbf{r}\le R_{n,N}$。由于 $R_{n,N,1}<R_{n,N}$ 且

$$(n\mathbf{r})^{N-1}-(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}>0 \quad \text{for } n\mathbf{r}>\tilde{R}_{n,N,1},$$

我们有

$$\begin{aligned}\nu_{n,N}(n\mathbf{r}) \le & (1-|a_0|)\left[(-1+3n\mathbf{r}-2(n\mathbf{r})^2)(1-n\mathbf{r})^N+(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2\right]\\ & +(1-|a_0|)n\mathbf{r}(1-n\mathbf{r})^2\left((n\mathbf{r})^{N-1}-(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}\right)\\ \le & (1-|a_0|)(1-n\mathbf{r})^2\left(2(n\mathbf{r})^N-(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}\right)\le 0.\end{aligned}$$

因此，所需的不等式得证。

为证明 $R_{n,N}$，令 $a\in[0,1)$ 并考虑全纯函数 f 在 $\mathbb{P}\Delta(0;1/n)$ 由 (3.13) 给出。对于点 $z=(-r,-r,\ldots,-r)$，我们得到

$$\mathcal{M}(z,\mathbf{r}):=\frac{a-n\mathbf{r}}{1-na\mathbf{r}}+(1-a^2)\frac{a^{N-1}n(\mathbf{r})^N}{(1-na\mathbf{r})^N(1-2na\mathbf{r})} \quad \text{for } n\mathbf{r}<\frac{1}{2a}. \tag{4.8}$$

当且仅当以下条件成立时，此表达式大于 1：

$$(1-a)\left((-1+(2a-1)n\mathbf{r}+2a(n\mathbf{r})^2)(1-na\mathbf{r})^{N-1}+(1+a)a^{N-1}(n\mathbf{r})^N\right)>0. \tag{4.9}$$

我们定义

$$P_1(a,n\mathbf{r}):=(-1+(2a-1)n\mathbf{r}+2a(n\mathbf{r})^2)(1-na\mathbf{r})^{N-1}+(1+a)a^{N-1}(n\mathbf{r})^N.$$

我们发现通过计算发现，当 $n\mathbf{r}<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\partial P_4}{\partial a}\ge 0$。由此立即可得

$$\begin{aligned}P_1(a,n\mathbf{r}) &\le P_1(1,n\mathbf{r})\\ &=(-1+n\mathbf{r}+2n(\mathbf{r})^2)(1-n\mathbf{r})^{N-1}+2(n\mathbf{r})^N\\ &=2(n\mathbf{r})^N-(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}\end{aligned}$$

对于 $n\mathbf{r}<\frac{1}{2}$，该结论成立。因此，对于所有 $a\in[0,1)$，方程（4.8）小于或等于 1，当且仅当 $n\mathbf{r}\le R_{n,N}$。此外，将 $a\to 1$ 代入（4.9）可知，当 $n\mathbf{r}>R_{n,N}$ 时，方程（4.8）大于 1。这证明了该结果的最佳性。

接下来，我们证明第二部分。利用引理 3.1 和3.2，可得如下结果

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(z,\mathbf{r}) &:= |f(z)|^2+\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\right||z|^{\alpha}\\ &\le |f(z)|^2+\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1-|f(z)|^2}{(1-||z||_\infty^2)^{|\alpha|}}(1+||z||_\infty)^{|\alpha|-1}|z|^{\alpha}\\ &\le |f(z)|^2+(1-|f(z)|^2)\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(1+(n\mathbf{r}))^{k-1}(n\mathbf{r})^k}{(1-(n\mathbf{r})^2)^k}\\ &= |f(z)|^2+(1-|f(z)|^2)\frac{(n\mathbf{r})^N}{(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}}.\end{aligned}$$

应用与定理 2.3 的证明相同的论证，可得以下表达式

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(z,\mathbf{r}) &\leq \left(\frac{|a_0|+n\mathbf{r}}{1+n|a_0|\mathbf{r}}\right)^2+\left(1-\left(\frac{|a_0|+n\mathbf{r}}{1+n|a_0|\mathbf{r}}\right)^2\right)\frac{(n\mathbf{r})^N}{(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}}\\ &\leq \frac{(1-(n\mathbf{r})^N)(1-n\mathbf{r})}{(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^N}|f(z)|^2+\frac{(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})}{(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^N}\\ &\leq \frac{(|a_0|+n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})^N(1-2n\mathbf{r})+(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2}{(1-n\mathbf{r})^N(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-2n\mathbf{r})}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

显然，只要 $\omega_{n,\ N}(r)\leq 1$，式（4.10）中的表达式就小于或等于 1，其中 $\omega_{n,\ N}(r)$ 定义为

$$\tilde{\omega}_{n,N}(r):=\frac{(|a_0|+n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})^N(1-2n\mathbf{r})+(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2}{(1-n\mathbf{r})^N(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-2n\mathbf{r})}.$$

容易看出，当 $\tilde{\nu}_{n,\ N}(r)\leq 0$ 时，$\tilde{\omega}_{n,\ N}(r)\leq 1$，其中

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{n,N}(r) &= (|a_0|+n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})^N(1-2n\mathbf{r})+(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2\\ &\quad-(1-n\mathbf{r})^N(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-2n\mathbf{r})\\ &=(1-|a_0|^2)\Big((1-n\mathbf{r})^N(-1+(n\mathbf{r})^2+2n\mathbf{r}-2(n\mathbf{r})^3)+(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2\Big)\\ &=(1-|a_0|^2)\Big((1-n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})(1+n\mathbf{r})(2n\mathbf{r}-1)+(n\mathbf{r})^N(1-n\mathbf{r})^2\Big).\end{aligned}$$

显然，只要满足以下条件，$\tilde{\nu}_{n,\ N}(r)\leq 0$:

$$(1+n\mathbf{r})(1-2n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r})^{N-1}-(n\mathbf{r})^N\geq 0,$$

该结论对 $r\leq R'_{n,\ N}$ 成立，其中 $R'_{n,\ N}$ 如定理陈述中所定义。

˜为证明 $R'_{n\text{ 的最佳性，}N}$令 $a\in[0,1)$，并考虑全纯函数 f在$\mathbb{P}\Delta$（0；$1/n$）中由（3.13）给出的函数。对于点 $z=(-r,\ -r,\ \ldots\ldots,\ -r)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(z,\mathbf{r}) &:= \left(\frac{a-n\mathbf{r}}{1-na\mathbf{r}}\right)^2+(1-a^2)\frac{a^{N-1}n(\mathbf{r})^N}{(1-na\mathbf{r})^N(1-2na\mathbf{r})}\\ &=\frac{(a-n\mathbf{r})^2(1-an\mathbf{r})^{N-2}(1-2an\mathbf{r})+(1-a^2)a^{N-1}(n\mathbf{r})^N}{(1-an\mathbf{r})^N(1-2an\mathbf{r})}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

方程（4.11）大于 1，当且仅当

$$(1-a^2)\Big((-1+2an\mathbf{r}+(n\mathbf{r})^2-2a(n\mathbf{r})^3)(1-an\mathbf{r})^{N-2}+a^{N-1}(n\mathbf{r})^N\Big)>0. \tag{4.12}$$

通过简单计算并令 $a\to 1$ 趋于无穷（4.12）中的极限可知，当 $r>R'_{n,\ N}$ 时，（4.11）中的表达式大于 1。□

利益冲突：作者声明，本文发表不存在任何利益冲突。

资金支持：不适用。

数据可用性声明：本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

作者贡献： 所有作者对稿件的撰写贡献相同。

References

[1] M. B. Ahamed, 某些调和映射类的尖锐精细 Bohr-Rogosinski 不等式，Complex Var. Elliptic Equ.，69(4)(2024)，585-606。[2] M. B. Ahamed 和S. Ahammed，某些函数类的 Bohr-Rogosinski 型不等式：解析、单叶与凸函数，Results Math. 78，171 (2023)。https://doi.org/10.1007/s00025-023-01953-z。[3] M. B. Ahamed 和 V. Allu，某些全星形调和映射的 Bohr-Rogosinski 不等式，Bull. Malays. Math. Sci. Soc.，45 (2022)，1913-1927。[4] M. B. Ahamed 和 V. Allu，某类近凸调和映射的 Bohr-Rogosinski 半径，Canad. Math. Bull. 66(3)(2023)，1014?1029。[5] M. B. Ahamed 和 P. P. Roy，单位圆盘上解析函数的改进 Bohr 不等式，Proc Math Sci.，135，31 (2025)。https://doi.org/10.1007/s12044-025-00835-4。[6] R. M. Ali，Y. Abu-Muhanna 和 S. Ponnusamy，论 Bohr 不等式，载于：N.K. Govil 等编，《逼近理论与应用复分析进展》，载于：Springer优化及其应用，第117卷，2016年，第269-300页。[7] L. Aizenberg，幂级数 Bohr定理的多维类比，Proc. Am. Math. Soc.，128(4) (1999)，1147-1155。[8] L. Aizenberg，幂级数 Bohr定理的多维类比，Proc. Amer. Math. Soc. 128(4)(2000)，1147–1155。[9] L. Aizenberg, A. Aytuna 和 P. Djakov，对多复变数全纯函数空间基底上的 Bohr 定理的推广，J. Math. Anal. Appl.，258(2) (2001)，429-447。[10] L. Aizenberg，Carathéodory 不等式的推广及多维幂级数的 Bohr半径，载于：《复分析选题》，载于：Oper. Theory Adv. Appl.，第158卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2005年，第87-94页。[11] L. Aizenberg, M. Elin 和 D. Shoikhet，论全纯映射的 Rogosinski 半径及其若干应用，Stud. Math. 168 (2)(2005)，147-158。[12] L. Aizenberg，幂级数 Bohr半径相关结果的推广，Stud. Math.，180 (2007)，161-168。[13] L. Aizenberg，关于幂级数的 Bohr与Rogosinski现象的评论，Anal. Math. Phys. 2 (2012)，69-78。[14] S. A. Alkhaleefah, I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，关于固定零系数的 Bohr 不等式，Proc. Am. Math. Soc.，147(12) (2019)，5263-5274。[15] S. A. Alkhaleefah, I. R. Kayumov和 S. Ponnusamy，有界解析函数的 Bohr-Rogosinski 不等式，Lobachevskii J. Math. 41(2020)，2110-2119。[16] V. Allu 和 V. Arora，凹单叶函数的 Bohr-Rogosinski 型不等式，J. Math. Anal. Appl. 520(1)(2023)，126845。[17] C. BÉnÉteau, A. Dahlner 和 D. Khavinson，关于 Bohr现象的评论，Co mput. Methods Funct. Theory，4(1) (2004)，1-19。[18] H. P. Boas 和 D. Khavinson，多变量中的 Bohr幂级数定理，Proc. Amer. Math. Soc. 125(1997)，2975-2979。[19] H. Bohr，一个关于幂级数的定理，Proc. London Math. Soc. 2(13)(1914)，1-5。[20] F. Carlson，关于单位圆内有界函数的系数，Ark. Mat. Astron. Fys.，27A(1) (1940)（法文），第8页。[21] S. L. Chen, H. Hamada, S. Ponnusamy 和 R. Vijayakumar，Banach空间中的 Schwarz型引理及其应用，J. Anal. Math.，152 (2024)，181-216。[22] N. Das，Bohr与Rogosinski现象的精细化，J. Math. Anal. Appl. 508(1)(2022)，125847[23] A. Defant 和 L. Frerick，多维Bohr半径的对数下界，Isr. J. Math.，152(1) (2006)，17-28。.[24] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerd'a, M. Ouna?es，和 K. Seip，齐次多项式的 Bohnenblust-Hille 不等式具有超收缩性，Ann. of Math. (2) 174 (2011)，第1期，485-497

[25] A. Defant, D. Garcia 和 M. Maestre, 《Bohr幂级数定理与局部Banach空间理论》, J. Reine Angew. Math., 557 (2003), 173-197。[26] A. Defant, S. R. Garcia和 M. Maestre, 《Reinhardt域第一和第二Bohr半径的渐近估计》, J. Approx. Theory, 128 (2004), 53-68。[27] A. Defant, M. Maestre 和 U. Schwarting, 《向量值全纯函数的Bohr半径》, Adv. Math., 231(5) (2012), 2837-2857。[28] P. B. Djakov 和 M. S. Ramanujan, 《关于Bohr定理及其推广的一个注记》, J. Anal. 8(2000), 65-77。[29] K. Gangania 和 S. S. Kumar, 《$\mathcal{S}^*(\psi)$与$\mathcal{C}(\psi)$的Bohr-Rogosinski现象》, Mediterr. J. Math. 19, 161(2022)。https://doi.org/10.1007/s00009-022-02074-7[30] S. R. Garcia, J. Mashreghi和 W. T. Ross, 《有限Blaschke乘积及其联系》, Springer, Cham, 2018。[31] H. Hamada, T. Honda和 G. Kohr, 《取值于齐次球的全纯映射的Bohr定理》, Israel J. Math. 173(2009), 177–187。[32] H. Hamada, T. Honda 和 M. Kohr, 《取值于高维复Banach空间的全纯映射的Bohr-Rogosinski 半径》, Anal. Math. Phys. 15, 64 (2025)。https://doi.org/10.1007/s13324-025-01061-x[33] M.-S. Liu 和 S. Ponnusamy, 《精细化Bohr不等式的多维类比》, Proc. Amer. Math. Soc. 149(5)(2021), 2133–2146。[34] Y. Liu and Z. Chen, 《多圆盘上Schur类的高阶Schwarz-Pick引理》, Indian J. Pure Appl. Math.43 (4) (2012) 411-419。[35] S. Jia, M. S. Liu 和S. Ponnusamy, 《涉及Schwarz映射的精细化Bohr不等式的多维类比》, Anal. Math. Phys., (2025) 15:79。https://doi.org/10.1007/s13324-025-01084-4 [36] I. R. Kayumov和 S. Ponnusamy, 《奇解析函数的Bohr不等式》, Comput. Methods Funct. Theory, 17(2017), 679-688。[37] I. R. Kayumov和 S. Ponnusamy, 《Bohr不等式的改进版本》, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 356(3) (2018), 272-277。[38] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 《解析函数的Bohr-Rogosinski 半径》, 预印本, 见 https://arxiv.org/abs/1708.05585。[39] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 《关于幂次Bohr不等式》, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 44(2019), 301-310。[40] I. R. Kayumov, D. M. Khammatova和 S. Ponnusamy, 《解析函数的Bohr-Rogosinski现象与Cesáro算子》, J. Math. Anal. Appl. 496(2021) 124824。[41] G. Kresin 和 V. Maz'ya, 《精确实部定理：统一方法》；由俄文译出并由T. Shaposhnikova编辑, 数学讲义, 第1903卷, Springer, Berlin, 2007。[42] S. Lata和 D. Singh, 《非交换Hardy空间的Bohr不等式》, Proc. Amer. Math. Soc. 150(1)(2022), 201-211。[43] G. Liu, Z. Liu 和 S. Ponnusamy, 《有界解析函数的精细化Bohr不等式》, Bull. Sci. Math., 173(2021), 103054。[44] M. S. Liu, Y. M. Shang 和 J. F. Xu, 《解析函数的Bohr型不等式》, J. Inequal. Appl., (2018) 345。[45] Y. Abu-Muhanna, 《从属与有界调和函数类中的Bohr现象》, Complex Var. Elliptic Equ., 55(11) (2010), 1071-1078。[46] Y. Abu-Muhanna 和 R. M. Ali, 《映入紧凸体外部的解析函数的Bohr现象》, J. Math. Anal. Appl., 379(2) (2011), 512-517。[47] V. I. Paulsen, G. Popescu, D. Singh, 《关于Bohr不等式》, Proc. Lond. Math. Soc., 85(2) (2002), 493-512。[48] V. I. Paulsen 和 D. Singh, 《一致代数的Bohr不等式》, Proc. Am. Math. Soc., 132(12) (2004), 3577-3579。[49] V. I. Paulsen, D. Singh, 《Bohr不等式的推广》, Bull. Lond. Math. Soc., 38(6) (2006), 991-999。

[50] S. Ponnusamy 和 K. J. Wirths, 《在原点处有重零点的函数的Bohr 型不等式》, *Co mput. Methods Funct. Theory,***20 (2020), 559-570**。[51] G. Popescu, 《多变量 Bohr 不等式》, *Trans. Am. Math. Soc.,* **359(11)(2007), 5283-5317**。.[52] W. Rogosinski, 《关于幂级数及其部分和的像界》, *Math. Z.,* **17(1923), 260-276**。.[53] S. Sidon, 《Bohr 先生的定理》, *Math. Z.,***26(1927), 731-732**[54] M. Tomić, 《关于H. Bohr的一个定理》, *Math. Scand.,* **11(1962), 103-106**。

Molla Basir Ahamed, Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata-700032, West Bengal, India.电子邮箱地址: mbahamed.math@jadavpuruniversity.inSujoy Majumder, Department of Mathematics, Raiganj University, Raiganj, WestBengal-733134, India.电子邮箱地址: sm05math@gmail.comNabadwip Sarkar, Department of Mathematics, Raiganj University, Raiganj, WestBengal-733134, India.电子邮箱地址: naba.iitbmath@gmail.com