基于种子方程的三个立方数之和表示整数——一种新方法

Narinder Kumar Wadhawan[1*] 和 **Priyanka Wadhawan**[2]1*印度行政服务局退休公务员，印度昌迪加尔 PEC 工学学士，电子邮箱： narinderkw@gmail.com[2]印度帕蒂亚拉塔帕尔工程与技术学院计算机科学系，电子邮箱： priyanka.wadhawan@gmail.com

摘要：本文证明，数可以用一个变量和两个实有理数以代数形式表示，因此，三个立方数之和也可以表示为一个三次多项式。利用骨架方程或种子方程，可将该多项式转化为二次方程。种子方程是指一个简单方程，它将给定整数表示为三个立方数之和，其中包括 0。例如，整数 2 的种子方程为 1 的立方加上 1 的立方加上 0 的立方。所得二次方程还可进一步转化为线性方程，从而求出变量的值；将该值代入数的代数形式，即可得到所需解。我们不仅找到了一个三立方数集合，还用此方法找到了多个这样的集合，并给出了这些立方数的参数化。对于难以或无法确定种子方程的情形，我们提供了替代方法。所用方法新颖、富有创新性且易于理解。

关键词：立方数、三次方程、整数根、线性方程、参数化、勾股数、二次方程、种子方程。

AMS 数学学科分类： 11D25

1 引言

在数论中，如何将一个整数表示为三个立方数之和，仍是一个未解决的问题。Heath-Brown 猜想，除形式为 $9x \pm 4$ 或 $9x \pm 5$的整数外，所有整数都可以通过多种方式表示为三个立方数之和 [4]。除此之外，根据费马大定理，数 0 不能表示为三个互不相同的立方数；该定理指出，三个整数 a、b 和 c 不能表示为 $a^n + b^n = c^n$，其中 $n > 2$。唯一可能的解是平凡解，即 $a^3 + (-a)^3 + 0 = 0$。另一方面，K. Mahler 于 1936年发现，整数 1 可以通过参数形式（$1 - 9p^3$）^{3} +（$3p - 9p^4$）^{3} +（$9p^4$）$^3 = 1$、[10]表示为无穷多种形式。对于这个整数，还有其他表示方法和参数化族 1. [1]。早在 1908 年，A. S. Verebrusov 就已发现，整数 2 可以通过参数形式（1 − 6p^3）^{3} + （1 + 6p^3）^{3} + （−6p^4）$^3 = 2$、[2]、[8]表示为无穷多种形式。除了上述参数解之外，表示整数 2, [1], [4]也有一族解。对于整数 3，Mordell 在 1953 年表示，除 $3 = 1^3 + 1^3 + 1^3 = 4^3 + 4^3 + (-5)^3$外，他不知道还有其他解。Heath-Brown、Lioen 和 te Riele 于 1992年通过方程 $39 = 134476^3 + 117367^3 + (-159380)^3$ [4]，找到了其和为 39 的立方数。此后，为了求解 $x^3 + y^3 + z^3 = n$（其中 n 从 1 变化到 1000），许多作者进行了计算搜索，范围达到（$|x|$、$|y|$、$|z|$）$< 10^{15}$ [5]。目前，除整数 33 和 42 [6]外，截至 $n < 100$，其他解均已找到。不过，Andrew Booker 和 Andrew Southland 现已解决这两个整数对应的情形 [3], [11],[9]。在不超过 1000 的整数中，114、

尽管已有大量研究成果，我们仍采用创新且未经尝试的方法，致力于解决整数表示问题1,2,3, ...，但不包括以下形式的整数$9x \pm 4$ 或$9x \pm 5$，即将其表示为三个立方数之和。对于某些特定形式的整数，我们推导出了其参数化形式。我们还证明，给定的整数可以用多组

三个立方数之和。我们通过在表格中列举详尽实例，证明了我们所推导公式的正确性。首先，我们用方程将整数 k 表示为三个立方数之和

$$X^3 + Y^3 + Z^3 = k \tag{1.1}$$

其中，X、Y 和 Z 都是正整数或负整数。为了确定 X、Y 和 Z，我们需要一个种子方程；事实上，它是关于整数 k 的骨架方程。随后，将利用该方程确定 X、Y 和 Z 的值。$k = 1$ 的种子方程可以很容易地写成

$$(1)^3 + (0)^3 + (0)^3 = 1 \tag{1.2}$$

or

$$(1)^3 + (p)^3 + (-p)^3 = 1. \tag{1.3}$$

其中，p 是正整数或负整数。为便于说明，整数 1、2、3、..... 的一些种子方程列于表**1.1** 中。

表**1.1** 一些种子方程

待表示的整数表示为“k”	$A^3 + B^3 + C^3 = k$	待表示的整数表示为“k”	$A^3 + B^3 + C^3 = k$
1	$(1)^3 + (p)^3 + (-p)^3 = 1$	7	$(2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 = 7$
2	$(1)^3 + (1)^3 + (0)^3 = 2$	8	$(2)^3 + (0)^3 + (0)^3 = 8$
3	$(1)^3 + (1)^3 + (1)^3 = 3$	9	$(2)^3 + (1)^3 + (0)^3 = 9$
6	$(2)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 = 6$	10	$(2)^3 + (1)^3 + (1)^3 = 10$

给定的 k 种子方程可能并不容易确定，这种情况将在最后讨论。我们提交一个实有理数，例如 n，可以用代数形式表示为

$$n = a \cdot x + A,$$

其中，a 和A 是我们指定的实有理数，而x 是一个变量。根据上述方程，我们可以写成 $x = \frac{n-A}{}$）。为了说明一个数（例如n）如何表示，我们以$n = 5$为例。设a 和A 的值分别为 7 和 3，则$x = \frac{5-3}{7} = 2\ 7$。如果a 和A 的值分别为 3 和-1，则$x = \underline{2}$。因此，通过为a 和A赋予不同的值，整数 5 可以用无限种方式表示。例如，

$$5 = 7 \cdot (2/7) + 3 = 3 \cdot 2 - 1 = \cdots.$$

这就证明了下面的推导引理 **1.1**。

引理 **1.1：** 实有理数 n 总可以表示为 $n = a \cdot x + A$，其中 a 和A 为实有理数，x 为变量。

1.1 立方和代数方程

应用引理 **1.1，** X、Y 和 Z 可写成代数形式，即 $X = a \cdot x + A$、$Y = b \cdot x + B$和 $Z = c \cdot x + C$。方程（1.1）于是可写为

$$(a \cdot x + A)^3 + (b \cdot x + B)^3 + (c \cdot x + C)^3 = k. \tag{1.4}$$

展开并重新整理后，该方程可写为：

$$x^3(a^3 + b^3 + c^3) + 3x^2(a^2 \cdot A + b^2 \cdot B + c^2 \cdot C) + 3x(a \cdot A^2 + b \cdot B^2 + c \cdot C^2) + A^3 + B^3 + C^3 - k = 0. \tag{1.5}$$

由于 a、b、c、A、B 和 C 的取值已由我们指定，因此上述方程中 x^3、x^2、x的系数以及常数项都是已知的。由于这是一个三次方程，求出满足该方程的 x的整数值十分繁琐，因此确定 $X = a \cdot x + A$、$Y = b \cdot x + B$ 和$Z = c \cdot x + C$ 的值也会十分繁琐且困难。为克服这一困难，我们将把三次方程转化为线性方程。

2 将三次方程转化为线性方程

为了简便地求解三次方程，先将其转化为二次方程，再转化为线性方程。借助种子方程即可完成向二次方程的转化，该方程

已在引言部分作过说明。设整数 k 的种子方程为 $A^3+B^3+C^3=k$。将 k 的这个值代入方程（1.5）并化简后，可转化为

$$x\{x^2(a^3+b^3+c^3)+3x(a^2\cdot A+b^2\cdot B+c^2\cdot C)+3(a\cdot A^2+b\cdot B^2+c\cdot C^2)\}=0。$$

该方程有一个根为 $x=0$，由于它会得到……，因此忽略这个根。 e

给定的种子方程。忽略 $x=0$ 处的根后，该方程便化为二次形式

$$x^2(a^3+b^3+c^3)+3x(a^2\cdot A+b^2\cdot B+c^2\cdot C)+3(a\cdot A^2+b\cdot B^2+c\cdot C^2)=0。若方程 \quad (2.1)$$

2.1) 有实有理根，例如 x 等于 p，且 q，并且将这些根的值代入 $(a\cdot x+A)$、$(b\cdot x+B)$ 和 $(c\cdot x+C)$ 后，所得结果均为整数值（这是由于我们对 a、b 和 c 的选择），则所求立方数由以下关系给出

$$(a\cdot p+A)^3+(b\cdot p+B)^3+(c\cdot p+C)^3=k, \quad (2.2)$$

and

$$(a\cdot q+A)^3+(b\cdot q+B)^3+(c\cdot q+C)^3=k. \quad (2.3)$$

如果二次方程（2.1）无法求解，或难以求得实有理根，则可通过令常数项等于零，将其进一步转化为线性方程。即

$$(a\cdot A^2+b\cdot B^2+c\cdot C^2)=0. \quad (2.4)$$

转化后的方程为

$$x^2(a^3+b^3+c^3)+3x(a^2\cdot A+b^2\cdot B+c^2\cdot C)=0.$$

同样，该方程有一个根，$x=0$，且该根将导出种子方程，因此予以忽略。随后，转化得到的线性方程为

$$x=-\frac{3(a^2\cdot A+b^2\cdot B+c^2\cdot C)}{(a^3+b^3+c^3)}=r\ (\text{say}). \quad (2.5)$$

根据我们对 a、b 和 c 的选择，如果 r 具有实有理值，使得（$a\cdot x+A$）、（$b\cdot x+B$）和（$c\cdot x+C$）均为整数，则解为

$$(a\cdot r+A)^3+(b\cdot r+B)^3+(c\cdot r+C)^3=k. \quad (2.6)$$

2.1 a、 b、 c、 A、 B 和 C的选择

A、B 和 C 应赋予何值，取决于 k 的值；这一点在讨论种子方程时已经解释过。请参阅表 **1.1**。为 a、b 和 c 赋值非常关键。这些值经过专门选择，使得三次方程（1.5）、二次方程（2.1）或线性方程（2.5）至少有一个实有理根，并且将该根代入（$a\cdot x+A$）、（$b\cdot x+B$）和（$c\cdot x+C$）后得到整数值。为实现这一结果，将使用某些代数恒等式。基于这一三次方程变换思想，我们继续确定三个立方数，使其和等于给定的整数。

3 种子方程的使用

我们将先讨论相对简单的情形，然后讨论较难的情形，最后讨论最难的情形；在最难的情形中，找到种子方程并不容易。

3.1 整数 2 及其他可表示为 $2p^3$， 的整数的表示，其中 p 是整数整数 2 的种子方程为 $(1)^3+(1)^3+(0)^3=2$。这样就得到 $X=a\cdot x+1$，$Y=b\cdot x+1$ 一个 d

$Z=c\cdot x$。我们有意选择了 $A=1$、$B=1$ 和 $C=0$，以消去常数项 i n

方程 (3.1)。于是，方程可写为:

$$(a\cdot x+1)^3+(b\cdot x+1)^3+(c\cdot x)^3=2. \quad (3.1)$$

化简后，

$$x^2(a^3+b^3+c^3)+3x(a^2+b^2)+3(a+b)=0.$$

为了转化为线性方程，我们设 $a+b=0$。转化后的线性方程为

$$x(a^3+b^3+c^3)+3(a^2+b^2)=0.$$

令 $b=-a$,

$$x=-\frac{6}{c}\left(\frac{a^2}{c^2}\right)=-\frac{6}{c}(p^2),$$

其中 $p = a/c$。将 x 的这个值代入方程（2.6）

$$(1-6p^3)^3 + (1+6p^3)^3 + (-6p^2)^3 = 2. \tag{3.2}$$

该参数化证明，存在无穷多个整数 p满足方程（3.2），因此有无穷种将 2 表示为三个立方数之和的方法。A.S. Verebrusov 发现了这一关系，并找到了这种参数化方法 [2]。不过，我们给出了确定和为 2 的三立方数组族的最简方法。将恒等式（3.2）乘以 d^3,

$$\{d(1-6p^3)\}^3 + \{d(1+6p^3)\}^3 + \{-d(6p^2)\}^3 = 2d^3. \tag{3.3}$$

这个恒等式是对表示为三个立方数之和的整数 $2d^3$ 的一种参数化。

3.2 整数 3 和 $3p^3$ 的表示

整数 3 的种子方程为 $(1)^3+(1)^3+(1)^3=3$。由此得到 $X=(a\cdot x+1)$、$Y=(b\cdot x+1)$ 和 $Z=(c\cdot x+1)$。对应的方程为

$$(a\cdot x+1)^3 + (b\cdot x+1)^3 + (c\cdot x+1)^3 = 3. \tag{3.4}$$

化简后,

$$x^3(a^3+b^3+c^3) + 3x^2(a^2+b^2+c^2) + 3x(a+b+c) = 0\,.$$

为了将其转化为线性方程，我们令 $a+b+c=0$ 并化简，得到

$$x = 2\left(\frac{1}{c} - \frac{c}{ab}\right).$$

将 x 的这个值代入方程（3.4），得到

$$\left\{1+2a\left(\tfrac{1}{c}-\tfrac{c}{ab}\right)\right\}^3 + \left\{1+2b\left(\tfrac{1}{c}-\tfrac{c}{ab}\right)\right\}^3 + \left\{1+2c\left(\tfrac{1}{c}-\tfrac{c}{ab}\right)\right\}^3 = 3. \tag{3.5}$$

令 $b=c\cdot d$，则 $a=-(c\cdot d+c)$，因为 $a=-(b+c)$，其中 d 是实有理量。将 a 和 b 的这些值代入方程（3.5）并化简，

$$\left\{-1-2\left(d+\tfrac{1}{d}\right)\right\}^3 + \left\{1+2\left(d+\tfrac{1}{d+1}\right)\right\}^3 + \left\{1+2\left(\tfrac{1}{d}+\tfrac{d}{d+1}\right)\right\}^3 = 3. \tag{3.6}$$

对于整数解，$2\ d+\%\ 7$，$2\_ d+\%\ 7.\%$ 和 $2\ \%\ \bar{d}+(d\ .\%$ 必须是整数。为实现这一目标，d 和 $d+1$ 必须是 2 的因子，且二者中至少有一个不为零。由于从方程（3.6）可明显看出，d 和 $d+1$ 分别与 $1/d$ 和 $1/(d+1)$ 具有互反性，因此，如果 d 和 $(d+1)$ 的值满足方程（3.6），那么 $1/d$ 和 $1/(d+1)$ 的值也将满足方程（3.6）。例如，$d=-2$ 或 $1/d=-2$ 或 $d=1$ 将满足方程（3.6），并得到

$$\begin{gathered}(4)^3+(-5)^3+(4)^3=3\,,\\ (4)^3+(4)^3+(-5)^3=3,\\ (-5)^3+(4)^3+(4)^3=3.\end{gathered} \tag{3.7}$$

这些方程具有相同的立方数，但后两个方程中的立方数偏离了原来的位置，因此，这三个方程实际上对应同一组立方数。将方程（3.7）乘以 p^3，其中 p 是整数，可得 $3p^3$ 的参数化形式

$$(4p)^3 + (4p)^3 + (-5p)^3 = 3p^3. \tag{3.8}$$

3.2a 表示整数 $3p^3$的多组三个立方数

将方程（3.6）乘以 p^3，其中 p 是整数，可得以下形式

$$\left\{-p-2p\left(d+\tfrac{1}{d}\right)\right\}^3 + \left\{p+2p\left(d+\tfrac{1}{d+1}\right)\right\}^3 + \left\{p+2p\left(\tfrac{1}{d}+\tfrac{d}{d+1}\right)\right\}^3 = 3p^3. \tag{3.9}$$

要使立方数取整数值，d 的取值必须满足：$2p(d+1/d)$、$2p\{d+1/(d+1)\}$ 和 $2p\{1/d+d/(d+1)\}$ 都必须是整数。对于整数 2，我们已在前一段中找出了因子；由于 2 是 $2p$ 的因子，这些因子也适用于 $2p$。不过，要得到更多因子，$2p$ 必须具有以下形式

$$2p = q(q+1),$$

其中，q 是一个正整数或负整数，且 q 或（$q+1$）至少有一个不为零。我们来看 $q=2$的情况。在这种情况下，$2p$（或 6）的因子中，形如 d（$d+1$）的有 (2)(3) 和 (1)(2)，忽略

因子 $(-3)(-2)$ 和 $(-2)(-1)$，因为它们得到的立方数相同，只是偏离了原来的位置。因此，代入 $d=1$ 和 $p=3$，得 $(-15)^3+(12)^3+(12)^3=3(3)^3$；代入 $d=2$和 $p=3$，得 $(-18)^3+(17)^3+(10)^3=3(3)^3$。这证明了 引理 **3.1**、**3.2** 和**3.3**。

引理 **3.1**：整数3可表示为立方和

$$\left\{-1-2\left(d+\frac{1}{d}\right)\right\}^3+\left\{1+2\left(d+\frac{1}{d+1}\right)\right\}^3+\left\{1+2\left(\frac{1}{d}+\frac{d}{d+1}\right)\right\}^3=3,$$

其中，d 的取值满足：d 和 $d+1$ 是2的因子。此外，$2\left(d+\frac{1}{d}\right)$，$2\left(d+\frac{1}{d+1}\right)$ 和 $2\left(\frac{1}{d}+\frac{d}{d+1}\right)$ 的取值均为整数。

引理 **3.2**：整数$3p^3$ 可表示为立方和

$$\left\{-p-2p\left(d+\frac{1}{d}\right)\right\}^3+\left\{p+2p\left(d+\frac{1}{d+1}\right)\right\}^3+\left\{p+2p\left(\frac{1}{d}+\frac{d}{d+1}\right)\right\}^3=3p^3,$$

其中，d 的取值满足 d 和 $d+1$ 是 $2p$的因子。此外，$2p\left(d+\frac{1}{d}\right)$，$2p\left(d+\frac{1}{d+1}\right)$ 和 $2p\left(\frac{1}{d}+\frac{d}{d+1}\right)$ 的取值均为整数。

引理 **3.3**：如果整数 $2p$ 的因子只有q 和$(q+1)$，且q 和$(q+1)$均不为零，那么整数$3p^3$ 可表示为以下给出的两组立方和

$$\{-p-2p(1+1)\}^3+\left\{p+2p\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}^3+\left\{p+2p\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}^3=3p^3$$

and

$$\left\{-p-2p\left(q+\frac{1}{q}\right)\right\}^3+\left\{p+2p\left(q+\frac{1}{q+1}\right)\right\}^3+\left\{p+2p\left(\frac{1}{q}+\frac{q}{q+1}\right)\right\}^3=3p^3$$

前提是 q 不能进一步分解为 $q_1(q_1+1)$。

3.2b 表示整数的三立方数多组或组族 $3(P!/2!)^3$ 对于 $P\geq 3$设整数 p 满足 $p=P!/2!$，且若 $P=3$，则 $p=3!/2!=3$ 且 $2p=6$。6 可分解为 (1)(2)(3)。因此，(1)(2) 和 (2)(3) 是它的两个因子对。这意味着 $3(3!/2!)^3$ 可以表示为两组三个立方数。

考虑这种情况：当 $P=4$时，则 $p=4!/2!=12$ 或 $2p=24$，可分解为 (1)(2)(3)(4)，此时 (1)(2)、(2)(3) 和 (3)(4) 是形式为 $d(d+1)$ 的三个因子对。这意味着 $3(4!/2!)^3$可以表示为三组三个立方数。

再看另一个例子，当 $P=5$ 或 $p=5!/2!=60$ 或 $2p=120$ 可分解为 (1)(2)(3)(4)(5) 时，(1)(2)、(2)(3)、(3)(4)、(4)(5) 和 (5)(6) 是五对形如$d(d+1)$的因子。这意味着 $3(5!/2!)^3$ 可以表示为五组三个立方数。同理，可以证明，当 $P=6$ 或 $p=6!/2!=360$ 或 $2p=720$时，它可分解为八对形如 $d(d+1)$的因子。这意味着通过取d的不同值，$3(6!/2)^3$ 可以表示为八组三个立方数。以下给出了这八组。

$$(-1800)^3+(1440)^3+(1440)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$
$$(-2160)^3+(2040)^3+(1200)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$
$$(-2760)^3+(2700)^3+(1140)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$
$$(-3420)^3+(3384)^3+(1116)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$
$$(-4104)^3+(4080)^3+(1104)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$
$$(-6210)^3+(6200)^3+(1090)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$
$$(-6920)^3+(6912)^3+(1088)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$
$$(-11208)^3+(11205)^3+(1083)^3=3(6!/2!)^3=139968000$$

由上可得，当 k 的形式为 $3(P!/2!)^3$，其中 $P \geq 3$时，k 可以表示为多组三个立方数。这样的三立方数集合的数量等于 $P!$ 中形如 $d(d+1)$的因子数量。此外，当 $P \geq 5$时，立方数集合的数量大于 P。这证明了引理 **3.4**。

引理 **3.4**：如果整数 $p = (P!/2!)$ 且 $P \geq 3$,，那么整数 $k = 3(P!/2!)^3$ 可表示为立方和

$$\left\{-p - 2p\left(d + \frac{1}{d}\right)\right\}^3 + \left\{p + 2p\left(d + \frac{1}{d+1}\right)\right\}^3 + \left\{p + 2p\left(\frac{1}{d} + \frac{d}{d+1}\right)\right\}^3 = 3p^3 = 3\left(\frac{P!}{2!}\right)^3$$

其集合数量与 $P!$ 具有形如 $d(d+1)$ 的互异因子的数量相同。当 $P \geq 5$, 时， $3p^3$ 可表示为立方数组，其数量大于或等于 P。另外，如果 $P!$ 有 n 组互异因子，那么使用此方法，将有 n 组互异的三个立方数来表示 $3p^3$。

3.3 整数 1 的表示及其他可表示为 p^3, 的整数，其中 p 是整数整数的种子方程 1 为 $(1)^3 + (0)^3 + (0)^3 = 1$。这意味着 $X = a \cdot x + 1$, $Y = b \cdot x$ 以及 $Z = c \cdot x$。因此，

$$(a \cdot x + 1)^3 + (b \cdot x)^3 + (c \cdot x)^3 = 1. \tag{3.10}$$

化简后，

$$x^2(a^3 + b^3 + c^3) + 3x\,(a^2) + 3(a\,) = 0.$$

令 $a = -9p^2$, $b = 3(1 - 3p^3)$, $c = 9p^3$，则二次方程可变形为

$$(1 - 9p^3)x^2 + 9xp^4 - p^2 = 0$$

其根为 $x = p$ 和 $x = -p/(1 - p^3)$。将这些值 $x = p$ 或 $x = -p/(1 - p^3)$ 代入方程 (3.10)，可得恒等式

$$(1 - 9p^3)^3 + (3p - 9p^4)^3 + (9p^4)^3 = 1. \tag{3.11}$$

这是整数 1 的一种参数化表示，并证明 p 有无穷多个值，因此，1 可表示为三个立方数之和的方式有无穷多种。这一结果最早由 K. Mahler 于 1936年[10] 给出。但我们给 [illegible] 立方数组族的最简方法。参照恒等式 (3.11)，若将其乘以 d^3，其中 d 是一个整数，则可将其变换为

$$\{d(1 - 9p^3)^3\}^3 + \{d(3 - 9p^3)\}^3 + \{d(9p^4)\}^3 = d^3 \tag{3.12}$$

这是一个三个立方数之和等于 d^3 的参数化表示。

3.4 整数 4 或 5 的表示

根据 引理 **1.1**，实有理整数 X 可表示为 $X = 9x + a$，其中 x 为正整数或负整数， a 也是整数，可以是正整数 0、1、2、3、4、5 或负整数$-1, -2, -3, -4$。为考察 X^3 被 9 整除的情况，我们展开 X^3,

$$X^3 = (9x + a)^3 = (9x)^3 + 27x \cdot a(9x + a) + a^3.$$

在上述方程中，$(9x)$ " 和 $27x \cdot a(9x + a)$ 显然能被 9 整除，因此，我们现在来讨论 a^3 被 9 整除的情况。取上述所述的 a 的不同取值，可发现 a^3 的余数为 0、1、-1 、0、1、-1 或 0。因此，三个立方数的代数和，即 $X^3 + Y^3 + Z^3$ ，其余数将是由三个整数 0、1 或 -1 任意组合而成的代数和，或单个整数 0、1 或 -1 重复三次所得的余数。所有余数之和的组合结果为 0、± 1 、± 2 或 ± 3。因此，三个立方数之和除以 9 时，余数不可能超出上述范围。反过来说，余数不可能是 ± 4。除以 9 时，余数 -4 等同于余数 5，余数 -5 等同于 4，因此也可以说，三个立方数之和除以 9 时，余数不可能是 ± 5。因此，$k = 9x \pm 4$ 或 $k = 9x \pm 5$ 不可能表示为三个立方数之和。1992年，Roger Heath-Brown 猜想，任何模 9 下不等于 4 或 5 的 [illegible]，都有无穷多种表示形式，可表示为三个立方数之和[illegible]

3.5 整数 7 的表示及其他可表示为 $7d^3$ 的整数

整数 7 的种子方程为 $(2)^3+(-1)^3+(0)^3=7$。这使得 $X=(a\cdot x+2)$, $Y=(b\cdot x-1)$, $Z=c\cdot x$ 和

$$(a\cdot x+2)^3+(b\cdot x-1)^3+(c\cdot x)^3=7. \tag{3.13}$$

代入 $4a+b=0$, $(c/a)=y$ 并化简，得到变换后的线性方程:

$$x=\frac{42a^2}{c^3-63a^3}=\frac{1}{a}\left(\frac{42}{y^3-63}\right) \tag{3.14}$$

代入上述 x的 $b=-4a$ 和$(c/a)=y$ 值到方程（3.13）中，得到

$$\left\{2+\frac{42}{y^3-63}\right\}^3-\left\{1+\frac{168}{y^3-63}\right\}^3+\left\{\frac{42y}{y^3-63}\right\}^3=7.$$

当 $y=4$ 时,

$$44^3-169^3+168^3=7.$$

将上述恒等式乘以 d^3 后，可变换为

$$(44d)^3+(-169d)^3+(168d)^3=7d^3$$

这是可表示为 $7d^3$ 的整数的一种参数化，其中 d 是一个整数。

3.6 可表示为 p^3-1 和 $d^3(p^3-1)$ 的整数，其中 d 和 p 为整数。

整数。

整数 p^3-1 的种子方程为 $(p)^3+(-1)^3+(0)^3=p^3-1$。这使得 $X=(a\cdot x+p)$,$Y=(b\cdot x-1)$, $Z=c\cdot x$ 并且

$$(a\cdot x+p)^3+(b\cdot x-1)^3+(c\cdot x)^3=p^3-1. \tag{3.15}$$

展开、化简并代入 $p^2\cdot a+b=0$, $(c/a)=y$后，方程 3.15 转化为一个线性方程,

$$x=\frac{3p\cdot a^2(p^3-1)}{c^3-a^3(p^6-1)}=\left(\frac{1}{a}\right)\frac{3p(p^3-1)}{\frac{c^3}{a^3}-(p^6-1)}=\left(\frac{1}{a}\right)\frac{3p(p^3-1)}{y^3-(p^6-1)} \tag{3.16}$$

代入上述 x的值， $b=-p^2a$ 和 $(c/a)=y$ 到方程 (3.15) 中,

$$\left\{p+\frac{3p(p^3-1)}{y^3-(p^6-1)}\right\}^3+\left\{-1-\frac{3p^3(p^3-1)}{y^3-(p^6-1)}\right\}^3+\left\{\frac{3p\cdot y(p^3-1)}{y^3-(p^6-1)}\right\}^3=p^3-1.$$

将 $y=p^2$ 代入上面的方程后,

$$\{p+3p(p^3-1)\}^3+\{-1-3p^3(p^3-1)\}^3+\{3p^3(p^3-1)\}^3=p^3-1 \tag{3.17}$$

其中， p^3-1 是整数的参数化， p 为正整数或负整数。

表 **3.1** 等于 p^3-1 的三个立方数之和

p	$X^3+Y^3+Z^3=p^3-1$	p	$X^3+Y^3+Z^3=p^3-1$
3	$237^3-2107^3+2106^3=26$	8	$12272^3-784897^3+784896^3=511$
4	$760^3-12097^3+12096^3=63$	9	$19665^3-1592137^3+1592136^3=728$
5	$1865^3-46501^3+46500^3=124$	10	$29980^3-2997001^3+2997000^3=999$
6	$3876^3-139321^3+139320^3=215$	11	$43901^3-5310691^3+5310690^3=1330$
7	$7189^3-351919^3+351918^3=342$	12	$62184^3-8952769^3+8952768^3=1727$

表 **3.1** 描绘了等于 p^3-1 的三个立方数之和，其中整数 p 从 3 变化到 1 2.

3.7 整数 9，$9d^3$ 及其他可表示为 p^3+1 的整数的表示

考察方程（16）可知，若假设 p 为 $-p$，该方程将转 换为

$$\{p-3p(p^3+1)\}^3+\{1+3(p^3)(p^3+1)\}^3+\{-3(p^3)(p^3+1)\}^3=p^3+1. \tag{3.18}$$

在 $p=2$,

$$(-52)^3+(217)^3+(-216)^3=9.$$

将上述恒等式乘以 d^3 后，便可转化为

$$(-52d)^3+(217d)^3+(-216d)^3=9d^3$$

这是可表示为 $9p^3$ 的整数的参数化，其中 p 是整数。

表 **3.2** 等于 p^3 的三个立方数之和　　$+1$

p	$X^3+Y^3+Z^3=p^3+1$	p	$X^3+Y^3+Z^3=p^3+1$
3	$-249^3+2269^3-2268^3=28$	8	$-12304^3+787969^3-787968^3=513$
4	$-776^3+12481^3-12480^3=65$	9	$-19701^3+1596511^3-1596510^3=730$
5	$-1885^3+47251^3-47250^3=126$	10	$-30020^3+3003001^3-3003000^3=1001$
6	$-3900^3+140617^3-140616^3=217$	11	$-43945^3+53118677^3-5318676^3=1332$
7	$-7217^3+353977^3-353976^3=344$	12	$-62232^3+8963137^3-8963136^3=1729$

表 **3.2** 表示等于 p^3+1 的三个立方数之和，其中 p 是一个介于 3 到 12。

3.8 整数10的表示及其他可表示为 $10p^3$ 的整数

整数 10 的种子方程为 $(2)^3+(1)^3+(1)^3=10$。因此 $X=(a\cdot x+2)$、$Y=(b\cdot x+1)$、$Z=(c\cdot x+1)$，以及

$$(a\cdot x+2)^3+(b\cdot x+1)^3+(c\cdot x+1)^3=10. \tag{3.19}$$

代入 $4a+b+c=0$、$b=c=-2a$ 并化简后，

$$x=2/a \tag{3.20}$$

再将 x 的这个值代入方程 (3.19)，得到

$$(4)^3+(-3)^3+(-3)^3=10.$$

因此，$10p^3$ 的参数化为

$$(4p)^3+(-3p)^3+(-3p)^3=10p^3.$$

3.9 使用勾股数表示整数

设 A、B 和 C 为勾股数，使得 $A^2+B^2=C^2$，且其种子方程为 $k=A^3-B^3+C^3$。因此，$X=(a\cdot x+A)$、$Y=(a\cdot x-B)$ 以及 $Z=(-a\cdot x+C)$，并且

$$(a\cdot x+A)^3+(a\cdot x-B)^3+(-a\cdot x+C)^3=A^3-B^3+C^3. \tag{3.21}$$

令 $A^2+B^2-C^2=0$ 代入并化简，由于其为勾股数，

$$x=-(3/a)(A-B+C).$$

将 x 的此值代入方程 (3.21)

$$\{-3(A-B+C)+A\}^3+\{-3(A-B+C)-B\}^3+\{3(A-B+C)+C\}^3=A^3-B^3+C^3.$$

令 $S=B-(A+C)$，则该方程变为：

$$(3S+A)^3+(3S-B)^3+(-3S+C)^3=A^3-B^3+C^3. \tag{3.22}$$

由于对于所有整数值 y，(y^2-1)、$(2y)$ 和 (y^2+1) 也都是勾股数，因此分别用它们代替 A、B 和 C，恒等式 (3.22) 变为：

$$(-5y^2+6y-1)^3+(-6y^2+4y)^3+(7y^2-6y+1)^3=2y^2(y^4-4y+3). \tag{3.23}$$

取 $y=-1$ 时，2 和 3，分别得到以下立方和

$$(-12)^3+(-10)^3+(14)^3=2(8),$$
$$(-9)^3+(-16)^3+(17)^3=8(11),$$
$$(-28)^3+(-42)^3+(46)^3=18(72).$$

分别。将 $p=1/y$ 代入方程（3.23），

$$(-p^2+6p-5)^3+(4p-6)^3+(p^2-6p+7)=2(3p^4-4p^3+1). \tag{3.24}$$

取 $p=2$ 时，7 和 4，得到以下立方和

$$(3)^3+(2)^3+(-1)^3=34,$$
$$(-12)^3+(22)^3+(14)^3=11664,$$
$$(3)^3+(10)^3+(-1)^3=1026.$$

分别。此外，由于 $A=p^2-q^2$，$B=2p\cdot q$，$C=p^2+q^2$ 对所有实有理数值的 p 和 q 都是勾股数，因此，

$$\{-(5p-q)(p-q)\}^3+\{2p(2q-3p)\}^3+\{7p^2+q^2-6p\cdot q\}^3$$

$$= 2p^2(p^4 + 3q^4 - 4p \cdot q^3). \tag{3.25}$$

当 $p,\ q = (1, 0),\ p,\ q = (1, 2)$ 和 $p,\ q = (2, 1)$，我们得到以下立方和

$$(-5)^3 + (-6)^3 + (7)^3 = 2,$$
$$(3)^3 + (2)^3 + (-1)^3 = 2(17),$$
$$(-9)^3 + (-16)^3 + (17)^3 = 8(11).$$

分别。**3.3**展示了 $k = A^3 - B^3 + C^3$ 的立方和，其中A、 B 和C 是勾股数

表 **3.3** $k = A^3 - B^3 + C^3$的立方和

$A^3 - B^3 + C^3 = k$	$(3S + A)^3$ $+(3S - B)^3$ $-(3S - C)^3$	$A^3 - B^3 + C^3 = k$	$(3S + A)^3 +$ $(3S - B)^3$ $-(3S - C)^3$
$1^3 - 0^3 + 1^3 = 2$	$-5^3 - 6^3 + 7^3$	$5^3 - 12^3 - 13^3 = -3800$	$65^3 + 48^3 - 73^3$
$3^3 - 4^3 - 5^3$ $= -162$	$21^3 + 14^3 - 23^3$	$5^3 + 12^3 + 13^3 = 4050$	$-85^3 - 78^3 + 103^3$
$3^3 - 4^3 + 5^3 = 88$	$-9^3 - 16^3 + 17^3$	$8^3 + 15^3 - 17^3 = -1026$	$-10^3 - 3^3 + 1^3$
$3^3 + 4^3 + 5^3 = 216$	$-33^3 - 32^3 + 41^3$	$8^3 + 15^3 + 17^3 = 8800$	$-112^3 - 105^3$ $+ 137^3$
$3^3 + 4^3 - 5^3 = -34$	$-3^3 - 2^3 + 1^3$	$8^3 - 15^3 + 17^3 = 2050$	$-22^3 - 45^3 + 47^3$
$5^3 - 12^3 + 13^3$ $= 594$	$-13^3 - 30^3 + 31^3$	$8^3 - 15^3 - 17^3 = -7776$	$80^3 + 57^3 - 89^3$

4 符合某些特定形式的整数参数化

4.1 给定整数为某种形式时的参数化 $k = 9p^3 + 1$

当 $k = 9p^3 + 1$ 时，我们将考虑种子方程 $(1)^3 + (0)^3 + (0)^3 = 1$；对于 $9p^3$，我们将在适当地为 a、 b 和 c 赋值后，从 x 的系数中求得此值。为此，考虑 $X = (a \cdot x + 1)$、$Y = (-a \cdot x)$、$Z = (c \cdot x)$ 和 $X^3 + Y^3 + Z^3 = (d \cdot x + 1)$，则

$$(a \cdot x + 1)^3 + (-a \cdot x)^3 + (c \cdot x)^3 = d \cdot x + 1. \tag{4.1}$$

代入 $d = 3a$、 $a/c = p$ 并化简后，它呈现为以下形式

$$3ax(ax) + c^3x^3 = 0,$$
$$x = -\frac{3}{c}(p^2).$$

将 x 的这个值代入方程 (4.1),

$$\{3p^3 - 1]^3 + \{-3p^3\}^3 + \{3p^2\}^3 = 9p^3 - 1. \tag{4.2}$$

当 $p = 2$ 时，3 和 4 是以下立方数之和

$$23^3 - 24^3 + 12^3 = 9(2^3) - 1 = 71,$$
$$80^3 - 81^3 + 27^3 = 9(3^3) - 1 = 242,$$
$$191^3 - 192^3 + 48^3 = 9(4^3) - 1 = 575.$$

将 $-p$ 代入 p

$$\{(3p^3 + 1)]^3 + \{-3p^3\}^3 + \{-3p^2\}^3 = 9p^3 + 1. \tag{4.3}$$

当 $p = 1$ 时，2 和 3 是以下立方数之和

$$4^3 - 3^3 - 3^3 = 9(1^3) + 1 = 10,$$
$$25^3 - 24^3 - 12^3 = 9(2^3) + 1 = 73,$$
$$82^3 - 81^3 - 27^3 = 9(4^3) - 1 = 244.$$

4.2 参数化：当给定整数的形式为 $k = 9(p + 1)(p^2 - 1)$

我们将整数 0 的种子方程视为 $(1)^3 + (-1)^3 + (0)^3 = 0$；对于 $k = 9(p + 1)(p^2 - 1)$，我们将为 a、b 和 c 赋值，以便在将其转化为线性方程时，从 x 的系数中得到 k 的值。考虑 $X = (a \cdot x + 1)$、$Y = (c \cdot x - 1)$、$Z = (-a \cdot x)$ 和$X^3 + Y^3 + Z^3 = dx$，则

$$(a\cdot x+1)^3+(c\cdot x-1)^3-(a\cdot x)^3=d\cdot x. \tag{4.4}$$

展开并重新排列后，可得其形式为

$$c^3\cdot x^2+3x^2(a^2-c^2)+x(3a+3c-d)=0.$$

代入 $d=3(a+c)$ 和 $a/c=p$ 以将其化为线性方程后，得到形式

$$x=-\frac{3}{c}(p^2-1).$$

将 x 的该值代入方程（4.4）后，得到形式

$$\{3p(p^2-1)-1]^3+\{3(p^2-1)+1]^3+\{-3p(p^2-1)]^3=9(p+1)(p^2-1). \tag{4.5}$$

当 $p=2$、3 和 4 时，我们得到

$$(17)^3+(10)^3+(-18)^3=81,$$
$$71^3+25^3-72^3=9(4)(8)=288,$$
$$179^3+46^3-180^3=9(5)(15)=675.$$

将 $-p$ 代入 p 并重新整理，方程（4.5）变为

$$\{3p(p^2-1)+1]^3-\{3(p^2-1)+1]^3-\{3p(p^2-1)]^3=9(p-1)(p^2-1). \tag{4.6}$$

当 $p=2$、3 和 4 时，我们得到

$$19^3-10^3-18^3=9(1)(3)=27,$$
$$(73)^3-(25)^3+(-72)^3=9(2)(8)=144,$$
$$181^3-46^3-180^3=9(3)(15)=405.$$

4.3 参数化：当给定整数的形式为 $k=(9p^3-1)^2$ 且 $(9p^3+1)^2$

考虑 $X=(a\cdot x+1)$、$Y=(-a\cdot x)$、$Z=(c\cdot x)$ 和 $X^3+Y^3+Z^3=(d\cdot x+1)^2$，则

$$(a\cdot x+1)^3-(a\cdot x)^3+(c\cdot x)^3=(d\cdot x+1)^2. \tag{4.7}$$

展开并化简后，

$$x^3\cdot c^3+3x^2(a)+3x\cdot a^2=d^2\cdot x^2+2d\cdot x.$$

为将其化为线性方程，令 $d=2$ and $a=4/3$，则 $x=-4/(3c^3)$。将 x 的这个值代入方程（4.7），并令 $p=2/3c$，

$$(-6p^3+1)^3+(6p^3)^3+(-3p^2)^3=(9p^3-1)^2. \tag{4.8}$$

取 $p=1$、2 和 3，得

$$(-5)^3+(6)^3+(-3)^3=(9-1)^2=64,$$
$$(-47)^3+(48)^3+(-12)^3=(71)^2=5041,$$
$$(-161)^3+(162)^3+(-27)^3=(242)^2=58564.$$

用 $-p$ 代替 p 并重新整理

$$(6p^3+1)^3+(-6p^3)^3+(-3p^2)^3=(9p^3+1)^2. \tag{4.9}$$

取 $p=1$、2 和 3，得

$$(7)^3+(-6)^3+(-3)^3=(10)^2=100,$$
$$(49)^3+(-48)^3+(-12)^3=(73)^2=5329,$$
$$(163)^3+(-162)^3+(-27)^3=(244)^2=59536.$$

4.4 当给定整数为 $k=2(5-9p^2)$ 的形式时的参数化

Consider $X=(a\cdot x+1)$, $Y=(-a\cdot x+1)$, $Z=(-c\cdot x-1)$ and $X^3+Y^3+Z^3=d\cdot x+1$, then

$$(a\cdot x+1)^3+(-a\cdot x+1)^3+(-c\cdot x-1)^3=d\cdot x+1. \tag{4.10}$$

展开后，再代入 $d=-3c$ 和 $p=a^2/c^2$，即可转化为线性方程

$$x=3\left(\frac{2a^2-c^2}{c^3}\right)=\frac{3}{c}\left(\frac{2a^2}{c^2}-1\right)=\frac{3}{c}(2p^2-1).$$

将 x 的这个值代入方程（4.10），得到

$$\{6p^3-3p+1\}^3+\{-6p^3+3p+1\}^3+\{-6p^2+2\}^3=2\{5-9p^2\}. \tag{4.11}$$

在 $p=$ 2、3 和 4 处，我们得到

$$(43)^3+(-41)^3+(-22)^3=(-72+10)=-62,$$

$$(154)^3+(-152)^3+(-52)^3=(-162+10)=-152,$$
$$(373)^3+(-371)^3+(-94)^3=(-288+10)=-278.$$

4.5 其他参数化

考虑方程

$$(a\cdot x+1)^3+(-a\cdot x+1)^3+(-c\cdot x-C)^3=(d\cdot x+2-C^3)\,. \qquad (4.12)$$

展开、化简并代入 $d=-3c\cdot C^2$ 后，它被转化为线性方程 $x=3\_{2a^2-C\cdot c2\ c3}\big)$。将 x 的这个值代入，并令 $a\frac{}{c}=p$，代入方程（4.12），

$$\{3(2p^3-C\cdot p)+1\}^3-\{3(2p^3-C\cdot p)-1\}^3-\left\{\frac{3}{p}(2p^3-C\cdot p)+C\right\}^3$$
$$=\left\{-\left(\frac{9C^2}{p}\right)(2p^3-Cp)+2-C^3\right\}. \qquad (4.13)$$

当 $C=p^2$ 时，方程（4.13）转化为

$$\{3p^3+1\}^3-\{3p^3-1\}^3-\{4p^2\}^3=\{-10p^6+2\}. \qquad (4.14)$$

在 $p=2$ 处，取 3 和 4，得到

$$(25)^3+(-23)^3+(-16)^3=-640+2=-638,$$
$$(82)^3+(-80)^3+(-36)^3=-7290+2=-7288,$$
$$(193)^3+(-191)^3+(-64)^3=-40960+2=-40958.$$

当 $C=p$ 时， 方程（4.13）转化为

$$\{3p^2(2p-1)+1\}^3-\{3p^2(2p-1)-1\}^3-\{2p(3p\ -1\}^3=2(1+4p^3-9p^4). \qquad (4.15)$$

在 $p=-1$ 处，取 2 和 -2，得到

$$(-8)^3+(10)^3+(-8)^3=2(-12)=-24,$$
$$(37)^3+(-35)^3+(-20)^3=2(-111)=-222,$$
$$(-59)^3+(61)^3+(-28)^3=2(-175)=-350.$$

当 $C=-1$ 时，方程（4.13）转化为

$$\{1+3p(2p^2+1)\}^3-\{3p(2p^2+1)-1\}^3-\{3(2p^2+1)-1\}^3=-\{6+18p^2\}. \qquad (4.16)$$

At $p=0,2$ and 3, we obtain

$$(1)^3+(1)^3+(-2)^3=-6,$$
$$(55)^3+(-53)^3+(-26)^3=-78,$$
$$(172)^3-(170)^3-(56)^3=-168,$$

当 $C=-2$ 时，方程（4.13）转化为

$$\{1+6p(p^2+1)\}^3-\{6p(p^2+1)-1\}^3-\{6(p^2+1)-2\}^3=-\{62+72p^2\}. \qquad (4.17)$$

在 $p=0$ 处，由 1 和 2 得到

$$(1)^3+(1)^3+(-4)^3=-62,$$
$$(13)^3+(-11)^3+(-10)^3=-(62+72)=-134,$$
$$(61)^3+(-59)^3+(-28)^3=-(62+288)=-350.$$

当 $C=2$ 时，方程（4.13）转化为

$$\{1+6p(p^2-1)\}^3-\{6p(p^2-1)-1\}^3-\{6(p^2-1)+2\}^3=6\{11-12p^2\}, \qquad (4.18)$$

在 $p=2$ 处，由 3 和 4 得到

$$(37)^3+(-35)^3+(-20)^3=6(11-48)=-222,$$
$$(145)^3+(-143)^3+(-50)^3=6(11-108)=-582,$$
$$(361)^3+(-359)^3+(-92)^3=6(11-192)=-1086.$$

当 $C=1/p$ 时，方程（4.13）转化为

$$\{p(3p^3-1)\}^3-\{p(3p^3-2)\}^3-\{(3p^3-1)\}^3=1-2p^3. \qquad (4.19)$$

在 $p=-1$、2 和 -2 处，我们得到

$$(4)^3+(-5)^3+(4)^3=3,$$
$$(46)^3+(-44)^3+(-23)^3=-15,$$

$$(50)^3+(-52)^3+(25)^3=17.$$

当 $C=1/2p$ 时，方程（4.13）转化为

$$\{p(12p^3-1)\}^3-\{p(12p^3-5)\}^3-\{2(6p^3-1)\}^3=4(2-5p^3). \tag{4.20}$$

在 $p=$ 1、 -1 和 2 处，我们得到

$$(11)^3+(-7)^3+(-10)^3=-12,$$
$$(13)^3+(-17)^3+(14)^3=28,$$
$$(190)^3+(-182)^3+(-94)^3=-152.$$

将 $p=2t$ 代入方程（4.13），我们得到

$$\{t(96t^3-1)\}^3-\{t(96t^3-5)\}^3-\{(48t^3-1)\}^3=(1-20t^3). \tag{4.21}$$

在 $t=$ 1、 -1 和 2 处,

$$95^3-91^3-47^3=-19,$$
$$97^3-101^3+49^3=21,$$
$$1534^3-1526^3-383^3=-159.$$

一般地，考虑方程

$$(a\cdot x+q)^3-(a\cdot x-q)^3-(c\cdot x+C)^3=(d\cdot x+2q^3-C^3). \tag{4.22}$$

展开、化简并代入 $d=-3c\cdot C^2$ 和 $a\frac{}{c}=p$ 后，它被转换为线性方程

$$x=\frac{3}{c}(2q\cdot p^2-C).$$

将 x 的这一值代入方程（4.22），

$$\{3p(2q\cdot p^2-C)+q\}^3-\{3p(2q\cdot p^2-C)-q\}^3-\{3(2q\cdot p^2-C)+C\}^3$$
$$=2C^2(4C-9p^2\cdot q)+2q^3. \tag{4.23}$$

我们再考虑一个更一般的方程

$$(a\cdot x+r)^3-(a\cdot x-q)^3-(c\cdot x+C)^3=(d\cdot x+q^3+r^3-C^3)\ . \tag{4.24}$$

展开、化简并令$a\frac{}{c}=p$ and $d=3c\{p(r^2-q^2)-C^2\}$后，可将其转化为

$$x=\frac{3}{c}\{p^2(r+q)-C\}.$$

将x 的这个值代入方程（4.24），

$$[3p\{p^2(r+q)-C\}+r]^3-[3p\{p^2(r+q)-C\}-q]^3-[\{3p^2(r+q)-2C\}]^3$$
$$=9\{p^2(r+q)-C\}\{p(r^2-q^2)-C^2\}+r^3+q^3-C^3. \tag{4.25}$$

令 p、 r、 q 和 C取不同的值，即可得到 k各种取值下的参数化 .

4.6 通过三个立方数之和对模9为±2 和模9为±3的整数进行参数化表示

我们已在第4.1至4.6段讨论了整数$k=9x\pm1$ 的情形。尽管上述段落也讨论了整数$k=9x\pm2$ 和$k=9x\pm3$ 的若干情形，为了进一步阐述，我们将在本小节依次讨论这些情形。

a. 当整数的形式为 ±2 模9。

令 $(a\cdot x+1)^3+(-a\cdot x)^3+(c\cdot x+1)^3=d\cdot x+2$。化简后，令 $d=3(a+c)$ 且$p=a/c$，得到 $x=-(3/c)(1+p^2)$。将此 x 的值代入方程 $(a\cdot x+1)^3+(-a\cdot x)^3+(c\cdot x+1)^3=d\cdot x+2$，然后重新整理，得到参数解,

$$\{-3p(1+p^2)+1\}^3+\{3p(1+p^2)\}^3+\{-3(1+p^2)+1\}^3=-9(p+1)(1+p^2)+2$$

令 $p=-q$，则

$$\{3q(1+q^2)+1\}^3+\{-3q(1+q^2)\}^3+\{-3(1+q^2)+1\}^3=9(q-1)(1+q^2)+2. \tag{4.26}$$

At $q=2,3$ and 4, we get

$$(31)^3+(-30)^3-(14)^3=47,$$
$$(91)^3+(-90)^3+(-29)^3=182,$$
$$(205)^3+(-204)^3+(-50)^3=461$$

分别。除了上述参数解之外，将 $r=7$、$q=-5$ 和 $C=6$ 代入方程（4.25），还可得到另一个参数解，其转化为

$$[3p\{2p^2-6\}+7]^3-[3p\{2p^2-6\}+5]^3-[\{6p^2-12\}]^3=216\{p^2-3\}\{2p-3\}+2 \quad (4.27)$$

。当 $p=2$、1、3 时，我们得到

$$(19)^3+(-17)^3+(-12)^3=218,$$
$$(-5)^3+(7)^3+(6)^3=434$$
$$(115)^3+(-113)^3+(42)^3=3890$$

分别。因此，方程（4.26）和方程（4.27）给出了一个参数解，可将整数 $k=9x+2$ 表示为三个立方数之和。

假设 p 为 $-p$，方程（4.27）转化为

$$[3p\{2p^2-6\}-7]^3-[3p\{2p^2-6\}-5]^3+[\{6p^2-12\}]^3=216\{p^2-3\}\{2p+3\}-2. \quad (4.28)$$

At $p=2,3,4$, we get

$$(5)^3+(-7)^3+(12)^3=1510,$$
$$(101)^3+(-103)^3+(42)^3=11662,$$
$$(305)^3+(-307)^3+(84)^3=30884$$

分别。因此，方程（4.28）给出了一个参数解，可将整数 $k=9x-2$ 表示为三个立方数之和。

b. 当整数为 ±3 模 *9* 时。

利用方程（4.25），并令 $r=1$、$q=1$、$C=-1$，我们得到

$$-[3p\{2p^2+1\}+1]^3+[3p\{2p^2+1\}-1]^3+[6p^2+2]^3=9\{2p^2+1\}-3. \quad (4.29)$$

分别令 $p=1$、2、3，可得

$$(-10)^3+(8)^3+(8)^3=24,$$
$$(-55)^3+(53)^3+(26)^3=78,$$
$$(-172)^3+(170)^3+(56)^3=168$$

因此，方程（4.29）给出了一个参数解，用于将整数 $k=9x-3$ 表示为三个立方数之和。

在方程（4.19）中用 $-(3q+1)$ 替换 p，可得

$$[3(3q+1)^4+3q+1]^3-[3(3q+1)^4+6q+2]^3+[3(3q+1)^3+1]^3=2(3q+1)^3+1。这是 \quad (4.30)$$

将形如 $9x+3$ 的整数表示为三个立方数的一种参数化。分别令 $q=0$、1、2，可得

$$(4)^3+(-5)^3+(4)^3=3,$$
$$(772)^3+(-776)^3+(193)^3=129,$$
$$(7210)^3+(-7217)^3+(1030)^3=687.$$

分别。

5 种子方程无用时的方法

在某些情况下，通过将三次方程转换为线性方程，使用种子方程可能无法有效确定立方数。例如，除了其种子方程 $(2)^3+(-1)^3+(-1)^3=6$ 外，很难找到三个立方数，使其和为 6。为了寻找另一组三个立方数，我们考虑 $X=(a\cdot x+2)$、$Y=(b\cdot x-1)$、$Z=c\cdot x-1$，因此，

$$(a\cdot x+2)^3+(b\cdot x-1)^3+(c\cdot x-1)^3=6. \quad (5.1)$$

展开并化简后，它被转换为二次方程

$$x^2(a^3+b^3+c^3)+3x(2a^2-b^2-c^2)+3(4a+b+c)=0. \quad (5.2)$$

将其转 换为线性方程后，我们令 $b+c=-4a$ 和 $c/a=y$。结果方程为

$$x=-\left(\frac{2}{a}\right)\frac{y^2+4y+7}{4y^2+16y+21}=-\left(\frac{2}{a}\right)z.$$

其中 $z=\frac{y}{2+4y+7 \quad 4y^2+16y+21}$。将 z 的这个值代入方程（5.1），得到

$$\{-4z+2\}^3+\{2z(4+y)-1\}^3+\{-2y\cdot z-1\}^3=6. \quad (5.3)$$

为确保立方和为整数，y 的值应使 z 必须是整数值，或具有 $p/2$ 的形式，其中 p 是整数。这个值不容易求出。为确定 y的这个值，我们依次给 y 赋不同的整数值，并在每个取值下检查 z 的结果是否满足我们的要求。设 p_1 是 z 的这个值，比如在 $y = y_1$处，则

$$\{-4p_1 + 2\}^3 + \{2p_1(4 + y_1) - 1\}^3 + \{-2y_1 \cdot z_1 - 1\}^3 = 6.$$

或者，我们不赋予整数值，而是将 y 赋值为 $y_1/2$ 或 y_1，其中 y_1 是整数，这样 z 就必定取整数值。这样赋值的目的是使 $\{-4z + 2\}$、$\{2z(4 + y) - 1\}$ 和 $\{-2y \cdot z - 1\}$ 都取整数值。

在上述方法中，我们设定了一个条件 $b + c = -4a$，使二次方程（5.2）转化为线性方程。不过，也可以求解该二次方程的实根，从而得到通解。设 $a = a_1 \cdot c$ 和 $b = b_1 \cdot c$，其中 a_1 和 b_1 是实有理数，则该二次方程可写为

$$c^2 \cdot x^2(a_1^3 + b_1^3 + 1) + 3c \cdot x(2a_1^2 - b_1^2 - 1) + 3(4a_1 + b_1 + 1) = 0 \qquad (5.4)$$

其根为

$$c \cdot x = \frac{-Q \pm (Q^2 - 4P \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{2P} = z \text{ (say)}, \qquad (5.5)$$

其中 $P = (a_1^3 + b_1^3 + 1)$、$Q = 3(2a_1^2 - b_1^2 - 1)$ 和 $R = 3(4a_1 + b_1 + 1)$。将方程（5.5）给出的 x 的值代入方程（5.1），得

$$(a_1 \cdot z + 2)^3 + (b_1 \cdot z - 1)^3 + (z - 1)^3 = 6.$$

这要求 a_1 和 b_1 取这样的实有理数值，使得由方程（5.5）给出的 z、$(a_1 \cdot z)$ 和 $(b_1 \cdot z)$ 必须为整数值。要找到这样的 a_1 和 b_1，需要假设它们取不同的值，直到满足条件为止。

6 种子方程无法确定时的方法

到目前为止，我们讨论的都是种子方程容易确定的情况。但有时，对于给定的整数 k，无法找到种子方程，或者找到种子方程十分困难。在这种情况下，我们将为任意整数 k_1（它不同于 k）找出一个方程。设 k_1 的方程为$a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 = k_1$。请注意，与前面所述的种子方程不同，这个方程不会将三次方程转化为二次方程。因此，立方和可以写成

$$(a \cdot x + a_1)^3 + (b \cdot x + b_1)^3 + (c \cdot x + c_1)^3 = k. \qquad (6.1)$$

假设 $a = a_2 \cdot c$、$b = b_2 \cdot c$ 和 $c \cdot x = z$，并进行展开和化简，其中 a_2 和 b_2为实有理数，

$$z^3(a_2^3 + b_2^3 + 1) + 3z^2(a_1 \cdot a_2^2 + b_1 \cdot b_2^2 + c_1) + 3z(a_1^2 \cdot a_2 + b_1^2 \cdot b_2 + c_1^2) - d = 0 \qquad (6.2)$$

其中 $k - k_1 = d$。方程（6.2）是一个三次方程，其根可能是：（1）两个复数根和一个实根；（2）两个无理根和一个有理根；或（3）三个实有理根。根的性质取决于 z^3、z^2、z 的系数值以及常数项。为 a_2、b_2 和 c 赋予不同的整数值，将得到不同的根，其中具有整数值的根（或多个根）就是所需的根。设该整数根为 $c \cdot x = z$ 或 $x = z/c$，则所需的立方数为

$$(a_2 \cdot z + a_1)^3 + (b_2 \cdot z + b_1)^3 + (z + c_1)^3 = k \qquad (6.3)$$

数学家们设计了不同的步骤和算法来求出所需的根，但我们不打算详述这些方法，因为本文旨在运用种子方程这一新颖方法，将给定整数表示为三个立方数之和。

7 整数表示为三个立方数之和的多种表示，其中 .. . . 或 .. . . 模

再次强调，种子方程方法是利用种子方程或骨架方程来填充立方数，使其之和等于给定的整数

填充方程作为种子方程，我们可以进一步生成另一个方程，依此类推。尽管如此，表 **7.1 中所**

[illegible]

表 **7.1** 若干种子方程和填充方程

k	种子方程	填充方程
1	$(1)^3+(0)^3+(0)^3$	$(1-9p^3)^3+(3p-9p^4)^3+(9p^4)^3$
2	$(1)^3+(1)^3+(0)^3$	$(1-6p^3)^3+(1+6p^3)^3+(-6p^2)^3$
3	$(1)^3+(1)^3+(1)^3$	$(4)^3+(4)^3+(-5)^3$
7	$(2)^3+(-1)^3+(0)^3$	$(44)^3+(-169)^3+(168)^3$
8	$(2)^3+(0)^3+(0)^3$	$(-16)^3+(-12)^3+(18)^3$
9	$(2)^3+(1)^3+(0)^3$	$(-52)^3+(217)^3+(-216)^3$
10	$(2)^3+(1)^3+(1)^3$	$(4)^3+(-3)^3+(-3)^3$

[illegible] $(P!/2!)^3$ 且 $P \geq 3$，则整数 k [illegible] $!)^3$ 可以通过立方和表示，其表示方式的数量等于 P! 中形如 $d(d+1)$ 的互异因子的数量。当 $P \geq 5$时，$3p^3$ 可以通过立方和表示，所用的集合数量等于或大于 P。此外，如果 P! 有 n 组互异因子，则整数 $3(P!/2!)^3$将有 n 组互异的三个立方数表示。我们还给出了整数 $3(6!/2)^3$ 的一个[illegible]通过采用我们的方法，为 d 赋予不同的值，该整数最多可以由八组不同的三个立方数表示。我们还在第 3.7 小节证明，如果 A、B 和C 是勾股数，且 $k=A^3-B^3+C^3$，那么 k 也可以表示为关系式 $k=(3S+A)^3+(3S-B)^3+(-3S+C)^3$，其中 $S=B-(A+C)$。这也证明了k表示的多重性。因此，给定整数 k 可以有多种由三个立方数之和构成的表示。

8 结果与结论

总而言之，让我们重新回顾一下本文证明的内容。一个整数，例如 X，可以表示为关系式 $X=a\cdot x+A$；类似地，Y 可表示为 $b\cdot x+B$，而 Z 可表示为 $c\cdot x+C$，其中 a、b、c、A、B 和C 是实有理数，x 是一个变量。如果 $X^3+Y^3+Z^3=k$，那么这个关系式可以写成关于变量 x 的三次方程。要将该方程先化为二次方程，k 必须等于 $A^3+B^3+C^3$。因此，我们将为 A、B 和 C 赋予这样的值，使得 $A^3+B^3+C^3=k$。例如，整数 1 可写为 $(1)^3+(0)^3+(0)^3$，整数 2 可写为 $(1)^3+(1)^3+(0)^3$，依此类推。关于 k 的这种方程称为种子方程，因为它将生成其他三个立方数，它们的和为 k。为说明这一点，表1.1列出了一些种子方程。将三次方程化为二次方程后，再令常数项为 0，即可将二次方程化为线性方程。线性方程给出 x 的值，可将其代入 $X=a\cdot x+A$、$Y=b\cdot x+B$ 和 $Z=c\cdot x+C$。一旦知道 X、Y 和 Z，三个立方数的值也就确定了，它们的和为 k。A、B 和 C 的值取决于 k 的值，而 a、b 和 c 的取值则经过选择，使得 $X=a\cdot x+A$、$Y=b\cdot x+B$ 和 $Z=c\cdot x+C$ 均为整数。

我们还证明，当 $k=3(P!/2!)^3$ 时，k 可以表示为三个立方数之和，表示方式的数量等于因子 $d(d+1)$ 的数量。例如，当 $k=3(6!/2!)^3$ 时，k 最多可以表示为八组三个立方数。我们还证明，如果 A、B 和 C 是勾股数，那么 $k=A^3-B^3+C^3$ 也可以表示为关系式 $k=(3S+A)^3+(3S-B)^3+(-3S+C)^3$，其中 $S=B-(A+C)$。在这种情况下，由于 Roger-Brown猜想 [4]，整数 k 可以通过多种方式表示为三个立方数之和，前提是 $k\neq 9x+4$ 或 $k\neq 9x+5$。我们已在第3.4小节证明，当 $k=9x+4$ 或 $k=9x+5$ 时，不可能得[illegible]

表示形如 [illegible] 的整数的参数化 $k=9p^3+1$，$k=9(p+1)(p^2-1)$，$k=(9p^3-1)^2$，$k=2(5-9p^2)$，$k=\{-10p^6+2\}$，$k=2(1+4p^3-9p^4)$，$k=-\{6+18p^2\}$，

$k = -\{62 + 72p^2\}$, $k = 6\{11 - 12p^2\}$, $k = 1 - 2p^3$, $k = 4(2 - 5p^3)$, $k = (1 - 20p^3)$, $k = 9(q - 1)(1 + q^2) + 2$, $k = 216\{p^2 - 3\}\{2p - 3\} + 2$, $9\{2p^2 + 1\} - 3$, 以及 $k = 2(3q + 1)^3 + 1$表示为三个立方数之和的方法，也已在论文中给出。尽管如此，我们还确定了 $k = 2C^2(4C - 9p^2 \cdot q) + 2q^3$ 和 $k = 9\{p^2(r + q) - C\}\{p(r^2 - q^2) - C^2\} + r^3 + q^3 - C^3$ 的一般参数化。这些结果有助于确定三个立方数，使其和等于上述形式的给定整数k，其中 p、q、r 和 C 均为整数。我们还给出了一种方法，用于在种子方程没有帮助或难以找到时求出三个立方数。此外，我们还给出了详尽的示例，以说明一种新颖的方法，用来求出和为给定数值k的三个立方数。

9 致谢

我们感谢https://www.desmos.com和https://keisan.casio.com/calculator网站上的科学计算器帮助我

10 参考文献

[1] A. Avagyan、G. Dallakyan，《三立方数问题的新方法》，《国际计算数学杂志》，5 (3)，(2017)，45-56。

$^3 + ^3 + ^3 = 2^3$, A. S.

26

，《数学文集》（俄文），()，)，–。[3] A. R. Booker、A. V. Sutherland，《关于 Mordell 的一个问题》，arXiv:2007.01209，(2020)。[4] D. R. Heath-Prown、W. M. Lioen 和 H. J. J. Te Riele，《在向量计算机上求解丢番图方程

《计算数学》，61，(1993)，235-244。[5] A. Elsenhans、J. Jahnel，

解

题》，《新闻周刊》，(2019年4月3日)，

[7] R. Houston，“什么是

《伦敦数学学会杂志》，17 (3)，(1942)，139-144。[9] D. Liu，《数学破解

，《新科学家》，(2019年3月14日)。[10] K. Mahler，《关于 Hardy 和 Littlewood 的 K 猜想的注记》，《伦敦数学学会杂志》，11(2)，(1936年)，136–138。[11] J. Pavlus，《“顽固数字 33”的三个立方数之和问题获解》，《量子杂志》，(2019年3月10日)。