arXiv:2512.15770v1 [math.HO] 12 Dec 2025

线性阻尼波动方程解的扩散行为：本科生自助讲义

Gastão A. Braga

数学系 米纳斯吉拉斯联邦大学 邮政信箱 1621，贝洛奥里藏特，30161-970，巴西

Antônio Marcos da Silva

数学系 欧鲁普雷图联邦大学 迪奥戈·德·瓦斯孔塞洛斯街 122号，皮拉尔，35400-000，巴西

Jussara de Matos Moreira

数学系 米纳斯吉拉斯联邦大学 邮政信箱 1621，贝洛奥里藏特，30161-970，巴西

摘要

尽管阻尼波方程和热方程描述的是性质截然不同的现象，但令人惊奇的是，当 $t \to \infty$ 时，它们的解之间存在关联。本讲义旨在向具备良好微积分基础的本科生说明，这些解之间的联系是如何建立的。我们采用“自己动手”的策略，鼓励学生完成所建议的练习，以理解本讲义的内容。

1 引言

考虑以下偏微分方程（PDE）

$$\mu u_t + u_{tt} - u_{xx} = 0, \tag{1}$$

其中 $u = u(x,\ t)$，$x,\ t \in \mathbb{R}$ 且 $\mu \geq 0$。当 $\mu = 0$ 时，这就是一维波动方程，是一个经典的双曲型方程实例。它的解是两个行波的叠加，一个向右、一个向左，二者都以单位速度传播，见 [1]。初始时刻的跳跃间断也会沿着速度为单位速度的特征曲线传播。当 $\mu > 0$ 时，也就是我们感兴趣的情形，该方程仍是双曲型方程，其解保留了 $\mu = 0$ 解的性质。它称为阻尼波动方程 （DWE），或电报方程（TE），例如参见 [3] 。

练习 1.1 将 *(1)* 两边乘以 u_t，在 $\mathbb{R}$ 上积分，并假设所有运算均合法，推导出

$$\partial_t \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}[u_t^2 + u_x^2] dx \right) = -\mu \int_{\mathbb{R}} u_t^2 dx. \tag{2}$$

(2) 左边的积分（lhs）是波的总能量。若 $\mu > 0$ 且 u_t 不恒等于零，则 (2) 右边（rhs）为负，这意味着波的总能量会随时间减少，而非守恒。正如我们稍后将看到的，阻尼波动方程的解也是向左和向右传播的行波的叠加；但由于阻尼项 μu_t 的作用，它们的振幅会随时间减小。

另一方面，热方程 或扩散方程（HE）或（DE），

$$\mu u_t - u_{xx} = 0, \tag{3}$$

其中 $u = u(x,\ t)$、$t > 0,\ x \in \mathbb{R}$ 和 $\mu > 0$ 是偏微分方程中的经典抛物型方程。在 (3) 中，$\sigma = 1/\mu$ 是扩散系数。

练习 1.2 对于 $t>0$ 和 $x\in\mathbb{R}$，证明

$$K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}f_\mu^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \tag{4}$$

其中

$$f_\mu^*(x)=\sqrt{\frac{\mu}{4\pi}}e^{-\mu\frac{x^2}{4}}, \tag{5}$$

是（3）的一个解。

我们注意到，由（5）定义的 $f_\mu^*(x)$ 是一个均值为零、方差为$\sqrt{2/\mu}$ 的高斯随机变量的概率密度函数。 ——

练习 1.3 证明

$$\int_{\mathbb{R}}f_\mu^*(x)dx=1,\ \int_{\mathbb{R}}xf_\mu^*(x)dx=0,\ \int_{\mathbb{R}}x^2f_\mu^*(x)dx=\frac{2}{\mu}. \tag{6}$$

由（4）给出的 $K(x,\ t)$ 称为（3）的一个基本解。容易验证 $K(x,\ t)$ 具有以下性质：

练习 1.4 对于 $t>0$ 和 $x\in\mathbb{R}$，验证：1） K（$x,\ t$）是关于 x 的 C^∞ 函数；2） K（$x,\ t$）是尺度不变的，即，

$$\sqrt{t}K(\sqrt{t}x,t)=f_\mu^*(x). \tag{7}$$

事实证明，任何满足 $\mu>0$ 且具有连续 $f(x)$ 的初值问题 (IVP) 的解，

$$\begin{cases}\mu u_t-u_{xx}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=f(x),\end{cases} \tag{8}$$

保留了练习 1.4 中所述的 $K(x,\ t)$ 的性质，具体来说：1) 对于$t>0,\ \ u(\cdot,\ t)$ 是一个 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数，即使 $u(x,\ t)$ 在时间$t=0$处存在跳跃间断点也是如此。在这种情况下，我们说，时间 $t=0$ 处的间断点在任何更晚的时间 $t>0$都会瞬时平滑；2) 初值问题 (8) 的解作为 t 的函数，分别以 $1/\sqrt{t}$ 和 $\sqrt{t}$的速率衰减并扩散，即恒等式 (7)

在 $t \to \infty$ 趋于极限时成立，见恒等式 (10)。上述两个性质是众所周知的积分表示公式 [1]的直接推论。

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t) f(y) dy \tag{9}$$

这对初值问题 (8) 的解成立，其中 $f(x)$ 是有界且连续的函数，至多有有限个跳跃间断。

练习 1.5 根据 *(9)* 得出结论：具有上述指定的 f 的初值问题 (8) 的解 $u(x,t)$ 作为 x 的函数是 C^∞ 。

练习 1.6 根据 *(9)* 得出结论：具有上述指定的 f 且满足 $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ 的初值问题 (8) 的解 $u(x,t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} u(\sqrt{t}x, t) = M f_\mu^*(x), \tag{10}$$

其中

$$M = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \tag{11}$$

且 $f_\mu^*(x)$ 由 *(5)* 给出。

极限 (10) 表明，恒等式 (4) 对核函数$K(x,t)$ 成立，并且渐近地也对初值问题 (8) 的解 $u(x,t)$ 成立；因此，在极限 $t \to \infty$ 下， $u(x,t)$ 以 $1/\sqrt{t}$ 和 $\sqrt{t}$ 的速率分别衰减并扩散，其轮廓函数为 $f_\mu^*(x)$。 M 由 (11) 给出，是前因子。

当 t取较大值时，(10)可改写为

$$u(x,t) \approx \frac{M}{\sqrt{t}} f_\mu^* \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right). \tag{12}$$

上述记号表示（12）中的两个函数是渐近等价的，也就是说，当 t 趋于无穷大时，它们的比值趋于 1。尽管方程（1）和（3）描述的是性质截然不同的现象，但令人惊讶的是，它们的解在渐近意义上满足 $t \to \infty$ 的关系。本

笔记旨在向本科数学、科学及工程专业的学生解释上述两个方程的解之间的联系。

在介绍主定理及其证明之前，我们先给出一个启发式论证，以突出这样一种直观认识：时空采用不同的缩放方式，是解释机制如何从双曲型行为转变为抛物型行为的关键。为阐述这一启发式推理，设 $u(x,\ t)$ 是以下柯西问题（CP）的一个解

$$\begin{cases} \mu u_t + u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{13}$$

我们的目的是证明：若 $u(x,\ t)$ 是方程 (13) 的一个解，则 (10) 中所表达的极限成立，其中前因子 M 定义为

$$M = \int_{\mathbb{R}} \left[f(x) + \frac{1}{\mu} g(x) \right] dx. \tag{14}$$

现在定义

$$v(x,t) \equiv L^{\frac{1}{2}} u(L^{\frac{1}{2}} x, Lt), \tag{15}$$

其中 $L > 1$。我们称上述 $v(x,\ t)$ 是 $u(x,\ t)$ 的重缩放。

练习 1.7 证明由 (15) 定义的 $v(x,t)$ 满足方程

$$\mu v_t + \frac{1}{L} v_{tt} - v_{xx} = 0. \tag{16}$$

假设 $|v_{tt}(x,\ t)|$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t > 0$ 一致有界，则只要选取足够大的 L，左边的第二项就会很小。因此，当 L 足够大时，合理的做法是略去这一项，从而得到扩散方程 (3)。更确切地说，我们得出：当 t 取较大值时，

$$u(x,t) \approx v(x,t), \tag{17}$$

其中 $v(x,\ t)$ 是该初值问题的解

$$\begin{cases} \mu u_t - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) + \frac{1}{\mu} g(x). \end{cases} \tag{18}$$

近似式 (17) 反映了一个令人惊讶的事实：阻尼传播波分别以 $1/\sqrt{t}$ 和 $\sqrt{t}$ 的速率衰减和扩散。这一形式化论证，或者说等价的近似式 (17)，被严谨地表述为以下定理，我们将在接下来的章节中证明该定理。

定理 1.1 若 $u(x,t)$ 是柯西问题 (13)的解，且 $\mu > 0$,$f \in C_0^2(\mathbb{R})$ 和 $g \in C_0^1(\mathbb{R})$，则

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}u(\sqrt{t}x,t) = Mf_\mu^*(x), \tag{19}$$

其中， M 和 $f_\mu^*(x)$ 分别由 (14) 和 (5)给出。

注： 定理 1.1 是更一般定理的简化版本，而证明那些定理需要用到高等数学方法。在论文 [8, 9, 10, 11, 12],中，读者可以了解上述定理可沿哪些方向推广。

2 方程 (13) 解的积分表示

DW 方程 (1) 属于双曲型方程，以下一对直线

$$\alpha = x + t \text{ e } \beta = x - t.$$

构成其特征曲线（参见 [5]）。根据 [5], ，柯西问题 (13) 的解可表示如下:

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{\mu}{2}t}}{2} \quad \left[f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} f(\alpha) \frac{d}{dt} I_0\left(\frac{\mu}{2}\sqrt{t^2-(x-\alpha)^2}\right) d\alpha \right.$$
$$\left. + \int_{x-t}^{x+t} \left(g(\alpha) + \frac{\mu}{2} f(\alpha)\right) I_0\left(\frac{\mu}{2}\sqrt{t^2-(x-\alpha)^2}\right) d\alpha \right], \tag{20}$$

其中 $I_n(x)$ 表示阶数为 n 的修正贝塞尔函数， $n = 0$，1，2，$\cdots$，定义为

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}, \tag{21}$$

其中 $J_n(x)$ 是阶数为 n 的贝塞尔函数，

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}. \tag{22}$$

若 $\mu = 0$ 满足（13），则我们得到波动方程的柯西问题，其解由达朗贝尔公式给出

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\alpha)d\alpha. \tag{23}$$

练习 2.1 证明当$\mu = 0$时，可以从（20）恢复达朗贝尔公式。

对于 $\mu > 0$，表示公式（20）继承了（23）中左行波和右行波的结构：在点 $P = (x_0, t_0)$ 处，解是两个波的叠加，这两个波都以速度一沿特征线传播，并且当 $\mu > 0$ 时都呈指数衰减。此外，$u(x_0, t_0)$ 的值唯一取决于 $f(\alpha)$ e $g(\alpha)$ 的值，其中 $\alpha \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$，这就是依赖域。

练习 2.2 利用对于 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $\frac{d}{d\xi}\left(\xi^n I_n(\xi)\right) = \xi^n I_{n-1}(\xi)$ 以及 $I_{-n}(\xi) = I_n(\xi)$，证明 $I_0'(\xi) = I_{-1}(\xi) = I_1(\xi)$，其中 $I_0'(z)$ 表示 $\frac{d}{dz} I_0(z)$，并得出（*20*）右端的第一个积分可以改写为

$$\int_{x-t}^{x+t} \frac{\mu}{2} f(\alpha) \frac{t}{\sqrt{t^2 - (x-\alpha)^2}} I_1\left(\frac{\mu}{2}\sqrt{t^2 - (x-\alpha)^2}\right) d\alpha. \tag{24}$$

注意到积分区间 $|x - \alpha| \le t$，也表示为 $t^2 - (x-\alpha)^2 \ge 0$，这意味着式 (20) 中的贝塞尔函数 I_0 和式 (24) 中的 I_1 实际上都是实数。

3 重缩放

对于固定的 $x \in \mathbb{R}$、 $t > 0$ 和 $\mu > 0$，我们的目标是验证将重缩放 (15) 应用于表示式 (20) 后，可得到极限 (19)。对于 $L > 1$，定义

$$\xi = \xi(\alpha; L, x) \equiv \frac{\mu}{2}\sqrt{L^2 - (L^{\frac{1}{2}}x - \alpha)^2}. \tag{25}$$

练习 3.1 利用 (20) 和练习 *2.2*，求出由 (15) 给出的重缩放$v(x,t)$ 的表示，并证明在 $t = 1$ 处，该表示为

$$L^{\frac{1}{2}}u(L^{\frac{1}{2}}x, L) = L^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}L}}{2}\Big[f(L^{\frac{1}{2}}x + L) + f(L^{\frac{1}{2}}x - L) + \int_{L^{\frac{1}{2}}x-L}^{L^{\frac{1}{2}}x+L}\frac{\mu^2 L}{4\xi}f(\alpha)I_1(\xi)d\alpha + \int_{L^{\frac{1}{2}}x-L}^{L^{\frac{1}{2}}x+L}\Big(g(\alpha) + \frac{\mu}{2}f(\alpha)\Big)I_0(\xi)\,d\alpha\Big]. \tag{26}$$

注意，我们可以在重缩放函数 $v(x,t)$ 中用 L/t 替换 L，这样所得结果也适用于 $L^{\frac{1}{2}}u(L^{\frac{1}{2}}y, L)$，只需用 $x/\sqrt{t}$ 替换 y，并将 u 乘以 $1/\sqrt{t}$。因此，从现在起我们将考虑 $t = 1$，并使用 (26) 分析当 $L \gg 1$ 时 $L^{\frac{1}{2}}u(L^{\frac{1}{2}}x, L)$ 的行为。此外，注意方程 (26) 中的贝塞尔函数 I_0 和 I_1 也都是实数。

由于 $f(x)$ 是一个紧支撑函数，因此当 $x \notin I_f$ 时，$f(x) = 0$，其中 I_f是其支集。特别地，存在 $L_0 = L_0(x) > 1$，使得若 $L > L_0$，则 $(L^{\frac{1}{2}}x \pm L) \notin I_f$，即 $f(L^{\frac{1}{2}}x + L) = 0 = f(L^{\frac{1}{2}}x - L)$。因此，若 $L > L_0$，则 (26) 右侧可改写为

$$\frac{\sqrt{L}e^{-\frac{\mu}{2}L}}{2}\left[\int_{\sqrt{L}x-L}^{\sqrt{L}x+L}\frac{\mu^2 L}{4\xi}f(\alpha)I_1(\xi)d\alpha + \int_{\sqrt{L}x-L}^{\sqrt{L}x+L}\Big[g(\alpha) + \frac{\mu}{2}f(\alpha)\Big]I_0(\xi)\,d\alpha\right]. \tag{27}$$

4 贝塞尔函数的近似方法

由定理 A.1 可知，给定 $n \in \mathbb{Z}$，存在正常数 C 和ξ_0，使得对于所有 $\xi > \xi_0$,

$$\left|I_n(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\xi}}{\sqrt{\xi}}\right| \le \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\xi}}{\xi}. \tag{28}$$

我们希望利用 (28) 来估计 (27) 中的积分。为此，我们必须确保由 (25) 定义、并作为 I_0 和 I_1 的自变量出现的 ξ 满足条件 $\xi > \xi_0$。

练习 4.1 定义 $L_1 = 2\xi_0/\mu$ 和 $L = \sqrt{\overline{L}^2 - L_1^2}$。证明：$\xi > \xi_0$ 当且仅当 $L > L_1$ 和 $\alpha \in [L^{1/2}x - L, L^{1/2}x + L]$。— —

练习 4.2 证明，对于 $L > L_1$，存在 $L_2(x)$，使得若 $L > L_2$，则 f 和 g 在区间 $[L^{1/2}x - L, L^{1/2}x + L]$外均为零。— —

由练习 4.1 和 4.2 可知，若取 $L > \max\{L_0, L_1, L_2\}$，则可以将（27）中的（28）替换掉。接下来，我们通过证明当 $L \to \infty$时，项

$$\left| \frac{\sqrt{L}e^{-\frac{\mu}{2}L}}{2} \left\{ \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{L^{\frac{1}{2}}x-\overline{L}}^{L^{\frac{1}{2}}x+\overline{L}} \frac{\mu^2 L e^{\xi}}{4\xi^2} f(\alpha)d\alpha + \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{L^{\frac{1}{2}}x-\overline{L}}^{L^{\frac{1}{2}}x+\overline{L}} \left[g(\alpha) + \frac{\mu}{2} f(\alpha) \right] \frac{e^{\xi}}{\xi} d\alpha \right\} \right|$$

趋于零，而项

$$\frac{\sqrt{L}e^{-\frac{\mu}{2}L}}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L^{\frac{1}{2}}x-\overline{L}}^{L^{\frac{1}{2}}x+\overline{L}} \frac{\mu^2 L e^{\xi}}{4\xi^{3/2}} f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L^{\frac{1}{2}}x-\overline{L}}^{L^{\frac{1}{2}}x+\overline{L}} \left[g(\alpha) + \frac{\mu}{2} f(\alpha) \right] \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\xi}} d\alpha \right\}$$

趋于 $Mf_\mu^*(x)$，其中 f_μ^*是高斯分布（5），M由（14）给出。

定义

$$T_\beta = \frac{\mu}{4\sqrt{2\pi}} \int_{L^{\frac{1}{2}}x-\overline{L}}^{L^{\frac{1}{2}}x+\overline{L}} \left(L^{3/2} e^{-\frac{\mu}{2}L} \frac{e^{\xi}}{\xi^{\beta}} \right) \frac{\mu}{2} f(\alpha)d\alpha$$

and

$$S_\beta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{L^{\frac{1}{2}}x-\overline{L}}^{L^{\frac{1}{2}}x+\overline{L}} \left(L^{1/2} e^{-\frac{\mu}{2}L} \frac{e^{\xi}}{\xi^{\beta}} \right) \left[g(\alpha) + \frac{\mu}{2} f(\alpha) \right] d\alpha,$$

我们必须证明，当 $L \to \infty$ 时，$|C(T_2 + S_1)| \to 0$ 和 $T_{3/2} + S_{1/2} \to Mf_\mu^*$。注意，如果我们将 ξ 重写为

$$\xi = \frac{\mu L}{2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{L^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha}{L} \right)^2} - 1 \right] + \frac{\mu L}{2},$$

那么，前述被积函数对 $L-$ 的依赖关系可表示为

$$\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\beta} L^{\gamma-\beta} \left\{ \frac{e^{\frac{\mu L}{2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{L^{\frac{1}{2}}}-\frac{\alpha}{L}\right)^2}-1\right]}}{\left[1-\left(\frac{x}{L^{\frac{1}{2}}}-\frac{\alpha}{L}\right)^2\right]^{\beta/2}} \right\}, \tag{29}$$

其中 $\gamma = 3/2$ 当 T_β，$\gamma = 1/2$ 当 S_β，且 $\beta \in \{1/2, 1, 3/2, 2\}$。

练习 4.3 利用带积分余项的泰勒展开，证明

$$\left|\sqrt{1-x} - 1 + \frac{1}{2}x\right| \leq \max_{[-x,0]} \left\{\frac{1}{4}(1+t)^{-3/2}\right\} x^2, \ \ |x| < 1.$$

练习 4.4 利用练习 *4.3*，证明

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\mu L}{2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{L^{\frac{1}{2}}}-\frac{\alpha}{L}\right)^2}-1\right] = -\mu\frac{x^2}{4}.$$

由练习 4.4 可知，式 (29) 中花括号内的项当 $L \to \infty$ 时收敛到 $e^{-\mu\frac{x^2}{4}}$。应用控制收敛定理 [2], ，很容易验证 $|C(T_2 + S_1)| \to 0$，因为因子 $L^{\gamma-\beta}$ 在 T_2 时化简为 $L^{3/2-2}$，而在 S_1 时化简为 $L^{1/2-1}$，两者均随 $L \to \infty$ 趋于零。此外，对于 $T_{3/2}$ 和 $S_{1/2}$，该因子化简为 $L^{\gamma-\beta} = L^0 = 1$，因此，当 $L \to \infty$ 时，$T_{3/2} + S_{1/2}$ 收敛到

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} e^{-\mu\frac{x^2}{4}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{2} f(\alpha)d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\alpha) + \frac{\mu}{2}f(\alpha)\right]d\alpha\right\} =$$
$$\sqrt{\frac{\mu}{4\pi}} e^{-\mu\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu}g(\alpha) + f(\alpha)\right]d\alpha = M f_\mu^*(x).$$

贝塞尔函数

由级数表示 (21) 可知，$I_n(x)$，$x \in \mathbb{R}$ 是偶函数还是奇函数，分别取决于 n 是偶数还是奇数。此外，对于固定的 $(x,\ t)$ 且对于$\alpha \in [x-t, x+t]$，积分表示 (20) 中 $I_0(x)$ 和 $I_1(x)$ 的自变量均非负，见第 2 节注释 2。基于此，接下来我们将证明渐近行为 (28)：

定理 A.1 考虑修正贝塞尔函数 $I_\nu(x)$，其中 $\nu \geq 0$ 和 $x > 0$。

Then

$$\left| \frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x} I_\nu(x) - 1 \right| \leq C(x), \tag{30}$$

其中

$$C(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi^3 x}{2}} e^{-x(1-\cos\delta)} + \sqrt{\frac{\pi^3}{2x}}(e^{-x} - e^{-2x}) + e^{-2x} + \frac{2|\nu|}{ex\sigma} + \frac{128\sqrt{2}}{xe^2\sigma^{5/2}} + \sqrt{2}e^{-\frac{\delta^2 x}{4}},$$

其中 $\sigma = 1 - 4\delta^2 > 0$ 和 $0 < \delta < 1/2$。

推论 A.1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x} I_\nu(x) = 1. \tag{31}$$

注： 推论 A.1 表明，当$x \to \infty$ 时， $I_\nu(x)$与 $\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ 渐近等价，而定理 A.1 表明，差值 $I_\nu(x) - \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ 是 $\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ 的低阶无穷小。因此，不等式 (30) 是一个更强的结论，因为它蕴含极限 (31)。

定理 A.1 的证明： 我们明确给出证明估计式 (30) 所需的估计。出发点是以下积分表示

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\cosh t - \nu t}dt, \tag{32}$$

见 [6, 7]。

练习 A.1 证明，对于 $a > 0$、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$，然后利用这一点证明，对于 $\nu \geq 0$,

$$\int_0^\infty e^{-x\cosh t - \nu t}dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}.$$

由 (32) 和练习 A.1，我们得到

$$\left| I_\nu(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt \right| \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^{-x}, \quad x > 0. \tag{33}$$

现在，我们将 (33) 左边的积分改写为两个积分之和，其中第二个积分为

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt = \int_{0}^{\pi/2} e^{-x\sin u}\cos(\nu(u+\pi/2))du.$$

练习 A.2 证明，若 $u \in [0, \pi/2]$，则 $u \geq$ 正弦 $u \geq (2u)/\pi$，并利用这一点证明

$$\left|\int_{\pi/2}^{\pi} e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt\right| \leq \pi\frac{1-e^{-x}}{2x}, \quad x > 0.$$

由 (33) 和练习 A.2 可得

$$\left|I_\nu(x) - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt\right| \leq \pi\frac{1-e^{-x}}{2x} + \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^{-x}, \quad x > 0. \tag{34}$$

为了处理 (34) 左端的积分，我们将其分解为两部分:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt, \tag{35}$$

其中 $0 < \delta < \pi/2$。接下来，我们选取 δ 充分小，使得对于 $t \in [0, \delta]$，近似式 x 余弦 $t \approx x\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)$ 成立，这将使我们能够估计 (35) 右端的第一个积分。

练习 A.3 证明，(35) 右端的第二个积分可以用 $\pi e^{x\cos\delta}/2$作为上界。

稍后，我们将令 δ 作为 x 的函数，以便在 $x \to \infty$时取相应的极限。考虑到这一点，我们利用练习 A.3 将 (34) 替换为

$$\left|I_\nu(x) - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} e^{x\cos t}\cos(\nu t)dt\right| \leq \frac{\pi}{2}e^{x\cos\delta} + \pi\frac{1-e^{-x}}{2x} + \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^{-x}, \quad x > 0. \tag{36}$$

练习 A.4 令 $t \in [0, \delta]$、$0 < \delta < 1$ 和 $R(t) \equiv$ 余弦 $t - (1 - t^2/2)$。证明

$$|R(t)| \leq (\cosh 1)t^4.$$

在（36）中用 $1-t^2/2+R(t)$ 替换 $\cos\ t$，并将两边乘以 $(\sqrt{2\pi x})e^{-x}$，

我们得到

$$\left|\frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x}I_\nu(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\delta\sqrt{x}}e^{-\frac{u^2}{2}+xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}\cos\left(\nu\frac{u}{\sqrt{x}}\right)du\right|\leq$$

$$\sqrt{\frac{\pi^3x}{2}}e^{-x(1-\cos\delta)}+\sqrt{\frac{\pi^3}{2x}}(e^{-x}-e^{-2x})+e^{-2x},\quad x>0. \tag{37}$$

考虑到（37）并利用三角不等式，为了得到定理 A.1 中 $\left|\sqrt{2\pi x}e^{-x}I_\nu(x)\ -1\right|$ 的所需界，还需要估计

term

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\delta\sqrt{x}}e^{-\frac{u^2}{2}+xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}\cos\left(\nu\frac{u}{\sqrt{x}}\right)du-1\right|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|V_x-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right|,$$

其中 $V_x\equiv\int_0^{\delta\sqrt{x}}e^{-\frac{u^2}{2}+xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}\cos\left(\nu\frac{u}{\sqrt{x}}\right)du$。接下来，我们的目标是为项 $|V_x-\sqrt{\pi}/2|$ 建立一个上界，这将通过对其进行估计来实现

$$\left|V_x-\int_0^{\delta\sqrt{x}}e^{-\frac{u^2}{2}+xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}du\right|+\left|\int_0^{\delta\sqrt{x}}e^{-\frac{u^2}{2}+xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}du-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right|. \tag{38}$$

为此，我们将使用以下两个练习。

练习 A.5 证明，对于 $t\geq0$，有 $|\text{余弦}\ t-1|\leq t$。

练习 A.6 证明，对于 $t\in[0,\delta]$ 和 $0<\delta<1$，练习 *A.4* 中的不等式可以改进为 $0\leq R(t)\ \leq(\cosh1)t^4$。

由练习 A.6 可得 $R(t)\ \leq2t^4\leq2t^2\delta^2$。因此，

$$-\frac{u^2}{2}\leq-\frac{u^2}{2}+xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\leq-\left(1-4\delta^2\right)\frac{u^2}{2}$$

结合这一结果与练习 A.5，我们可以将式 (38) 中的第一项估计为

如下：

$$\left|\int_0^{\delta\sqrt{x}}e^{-\frac{u^2}{2}+xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)}\left[\cos\left(\nu\frac{u}{\sqrt{x}}\right)-1\right]du\right|\leq\frac{|\nu|}{\sqrt{x}}\int_0^\infty ue^{-\left(1-4\delta^2\right)\frac{u^2}{2}}du. \tag{39}$$

在继续分析上述积分之前，我们注意到，由于

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du=\int_0^{\delta\sqrt{x}}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\int_{\delta\sqrt{x}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

我们可以将（38）式中的第二项改写为

$$\left| \int_0^{\delta\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[e^{xR\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)} - 1 \right] du - \int_{\delta\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right|.$$

练习 A.7 证明，对于 $t \geq 0$，有 $e^t - 1 \leq te^t$。

利用练习 A.6 和练习 A.7，并注意到 $0 \leq \int_{\delta\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq e^{-\frac{\delta^2 x}{4}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} du = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\delta^2 x}{4}}$，我们得到 (38) 中第二项的如下上界：

$$\frac{2}{x} \int_0^{\delta\sqrt{x}} u^4 e^{-(1-4\delta^2)\frac{u^2}{2}} du + \sqrt{\pi} e^{-\frac{\delta^2 x}{4}}. \tag{40}$$

练习 A.8 证明，对于固定的正常数 α, σ，

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha} e^{-\sigma\frac{u^2}{2}} du \leq \left(\frac{2\alpha}{\sigma e}\right)^{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}.$$

注意，只要 δ 足够小，使得 $\sigma = 1 - 4\delta^2 > 0$，我们就可以利用练习 A.8 来估计 (39) 和 (40) 中的积分，其中$\alpha \in \{1, 4\}$。因此，我们对 (38) 的估计可写为

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{ex} \frac{|\nu|}{\sigma} + \frac{128}{xe^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma^{5/2}} + \sqrt{\pi} e^{-\frac{\delta^2 x}{4}}.$$

利用上述估计和 (37)，我们最终可以得到如下界：

$\left|\sqrt{2\pi x} e^{-x} I_\nu(x) - 1\right|$:

$$\sqrt{\frac{\pi^3 x}{2}} e^{-x(1-\cos\delta)} + \sqrt{\frac{\pi^3}{2x}} (e^{-x} - e^{-2x}) + e^{-2x} + \frac{2|\nu|}{ex\sigma} + \frac{128\sqrt{2}}{xe^2\sigma^{5/2}} + \sqrt{2} e^{-\frac{\delta^2 x}{4}},$$

其中 $\sigma = 1 - 4\delta^2 > 0$。

参考文献

[1] W.Strauss, 偏微分方程导论。第二版，

John Wiley & Sons, Ltd., 2008。

[2] W. Rudin, 《数学分析原理》，第三版，国际版，1976年。

[3] R. Courant 和 D. Hilbert, 《数学物理方法》, 第 2 卷, Wiley-VCH Verlag GmbH& Co. KGaA, 1962年。

[4] Fritz John, 《偏微分方程》, Springer-Verlag, 纽约, 1981年。

[5] Arthur G. Webster, 《数学物理中的偏微分方程》。多佛出版社。伍斯特, 1955年。

[6] Watson, G.N., 《贝塞尔函数理论论著》。第二版。剑桥, 1966年。

[7]Mainardi, F., 《线性黏弹性中的分数阶微积分与波：数学模型导论》。第二版。新泽西州：World Scientific, 2022年。

[8] GrezegorzKarch, 阻尼波动方程解的大时间渐近行为中的自相似剖面, 《数学研究》**143(2)**, 175-197, （2000年）。

[9] L.Hsiao, T. P.Liu, 带阻尼的双曲守恒律方程组解向非线性扩散波的收敛, 《数学物理通讯》**43**, 599-605, （1992年）。

[10] L. Hsiao, T. P. Liu, 非线性双曲系统的非线性扩散现象, 《中国数学年刊》B辑 **14**, 465-480, （1993年）。

[11] A. Matsumura, 半线性波动方程解的渐近行为, 《数学科学研究所出版物》, **12(1)**, 169-189, 1976/77年。

[12] K. Nishihara, 具有线性阻尼的拟线性双曲方程解的渐近行为。《微分方程杂志》, **137**, 384- 395, 1997年。