arXiv:2512.15806v1 [math.HO] 17 Dec 2025

广义格里高利求积，包括中点公式的端点修正权重

Gavin R. Putland*

2025年12月17日

摘要

本文推导了一类数值求积公式，其节点等距排列，除序列两端的少数几个点外，权重均为单位权重；对于这些点，在单位权重上加上“修正项”（无需利用被积函数的任何其他信息）。如果修正序列相互重叠，其效果则相加。推导中的一个基本参数（“alpha”）是积分区间端点到第一个节点的距离，以步长为单位向内测量。令 alpha 为 1/2，可得到一组修正复合中点法则。令 alpha=0，可得到 Gregory 的闭型牛顿-柯特斯类公式；当重叠充分时，还包括标准闭型牛顿-柯特斯公式（梯形公式、“辛普森 1/3 法则”、“3/8辛普森法则”、“布尔求积公式”等）。令 alpha=1，可得到开型牛顿-柯特斯类公式，同样包括标准公式。alpha 为负值意味着在积分区间之外对被积函数采样；适当选择负值，可得到梯形公式和中点公式的中心差分端点修正。甚至可以在两端采用不同的 alpha 值，从而得到亚当斯-巴什福思权重和亚当斯-莫尔顿权重等。因此，标题也可以是“等距求积公式的统一推导”。

*皇家墨尔本理工大学，澳大利亚。Gmail 名称：grputland。版权许可：知识共享署名 4.0 国际许可协议。

1 问题的提出

我们寻求一种形式如下的数值求积公式

$$\int_{-\alpha h}^{(n+\beta)h} f(t)\,dt \;\approx\; h\sum_{i=0}^{n} f(ih) \;+\; h\sum_{i=0}^{m} c_i f(ih) \;+\; h\sum_{i=0}^{m} d_i f((n-i)h), \quad (1)$$

其中系数 c_i 和d_i 与n 和h （步长）无关，但可能取决于 α 和 β。这样的求积公式具有以下优点：

- 在等间距横坐标（**节点**）处对被积函数进行采样会很方便，甚至可能是数据所要求的；而参数α 和 β 则允许**端点**（积分“限值”）位于节点上或节点之间。

- 参数取特定值时会得到有用的特殊情形。例如，取 $\alpha=\beta=0$时，可得到“闭型牛顿-科特斯类求积公式”，其最外侧节点与端点重合。取 $\alpha=\beta=1$时，可得到“开型牛顿-科特斯类求积公式”，其最外侧节点距端点一个步长。（牛顿-科特斯类求积公式广为人知；重现其中最著名的示例，也可以检验我们的方法是否合理。）负参数（或m 大于n）会产生节点位于积分区间之外的求积公式。对于 $\alpha=\beta=1/2$，积分区间将分成$n+1$个长度为h的步长，节点位于每个步长的中点，从而得到一种改进的中点公式——正如标题所言。

- 对于 $n > 2m+2$，(1) 右侧除以 h 后将变为

$$\sum_{i=m+1}^{n-m-1} f(ih) \;+\; \sum_{i=0}^{m}(1+c_i) f(ih) \;+\; \sum_{i=0}^{m}(1+d_i) f((n-i)h), \quad (2)$$

  这是一种除每端 m 个单位权重 之外，每端+1个节点的公式，其中系数 系数 c_i 和 d_i 可以描述为对单位权重的修正项，或是与单位权重的差值（因此采用这些符号）。内部的单位权重序列不会出现周期长于步长的周期，从而最大限度地降低权重中的周期与被积函数振荡相互作用而造成偏差的风险，[1] 无需将步数设为任何周期长度的倍数，也能加快将权重输入电子表格的过程（“向下填充”！）。对于$n \le 2m+2$，修正序列会相互重叠，并且根据（1），修正项将相加。

[1]用信号处理的术语来说，权重中的周期相当于采样率降低。

- 因此，对于 $\alpha=\beta=1/2$，我们可以为复合中点公式（矩形公式）添加端点修正项。对于 $\alpha=\beta=0$，若以单位权重为基准，则可以为复合梯形公式添加端点修正项。这些修正项无需了解被积函数的更多信息，只需调整权重即可——不同于标准的“修正梯形公式”，后者需要端点处的导数。
- 通过使用两个连续的m值，我们可以比较针对相同纵坐标 得到的两个积分估计，以实现误差控制（参见常微分方程的龙格–库塔–费尔伯格／龙格–库塔–维尔纳方法）。与使用不同阶数或不同周期长度的牛顿–科特斯方法，对相同纵坐标得到的估计进行比较不同，这种做法仍不会限制步数，也不会在内部权重中引入周期。

若 f (t) 是关于 t 的 m 次多项式，则式 (1) 的两边都是关于 h 的 m 次多项式+1 ，且没有常数项。对于更一般的 f (t)，式 (1) 两边按 h 的幂展开后仍没有常数项。因此，要使规则 (1) 对 m 次多项式精确，只需针对一般的 f，对所有 n，使 h^{k+1}（$k \in [0\,..\,m]$）的系数相匹配；若做到这一点，误差通常为 $O(h^{m+2})$。

2 解的存在性

但是，即便给定了 α 和 β，为什么应当存在常数 c_i 和 d_i，使得（1）对于所有的 n 和 h，以及次数不超过 m 的多项式 $f(t)$ 都是精确的呢？要回答这个问题，我们首先将积分区间分割为：

$$\int_{-\alpha h}^{(n+\beta)h} f(t)\,dt \;=\; \int_{-\alpha h}^{0} f(t)\,dt \;+\; \int_{0}^{nh} f(t)\,dt \;+\; \int_{nh}^{(n+\beta)h} f(t)\,dt\,. \tag{3}$$

对于右侧的第一项，我们将 $f(t)$ 替换为其关于 $t=0$的泰勒级数（该级数在 m^{th} 次幂处终止），并逐项积分，得到

$$\int_{-\alpha h}^{0} f(t)\,dt \;=\; h\sum_{k=0}^{m} \frac{(-\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}\,h^k f^{(k)}(0)\,. \tag{4}$$

For 对于最后一项，我们同样处理，只是泰勒级数是关于 $t=nh$展开的 ：

$$\int_{nh}^{(n+\beta)h} f(t)\,dt \;=\; h\sum_{k=0}^{m} \frac{\beta^{k+1}}{(k+1)!}\,h^k f^{(k)}(nh)\,. \tag{5}$$

对于中间项，根据欧拉–麦克劳林级数 [4, p.167] 可知

$$\int_0^{nh} f(t)\,dt \;=\; h\sum_{i=0}^{n} f(ih) - h\Big[\tfrac{1}{2}f(0) + \tfrac{1}{2}f(nh)\Big] + h\sum_{k=1}^{m} a_k h^k\Big[f^{(k)}(0) - f^{(k)}(nh)\Big], \tag{6}$$

其中，最后一个求和的上限为多项式的次数m （若$m=0$，则视为空和）；系数 a_k是常数，其具体形式在此无需讨论（只需顺带指出，对于正的 $a_k=0$和正的偶数 k，）。现在，方程（4）至（6）右端的和具有（1）右端的形式，因为：

- （6）右端的第一个求和与（1）中的相同；
- 在（6）的下一项中，方括号内的因子是 $f(0)$ 和 $f(nh)$ 的加权和；
- $f_{(k)}(0)$ 在（4）和（6）中，恰好表示为纵坐标$f(kh)$（$k\in[0$至$m]$,）的加权和，因为f本身是次数为m的多项式，恰好可以表示为相同的$m+1$个纵坐标的加权和；并且为了保证量纲正确，前一个加权和必须含有公因子$h^{-}{}_k$，它与h_k相消；
- 同样，式（5）和（6）中的$f_{(k)}(nh)$恰好表示为纵坐标$f((n-k)h)$的加权和，其中$k\in[0..m]$,，并且它们含有一个与h_k约去的公因子；并且
- 上述加权和中的权重归入c_i 和d_i （式（1））。

这解释了（1）的形式以及使其精确成立的条件。但它还有其他含义。在式（4）至（6）中，α 只出现在（4）中；在那里，它关联的不是 $f^{(k)}(nh)$，而只是 $f(k)(0)$，后者由一个加权和给出，其权重归入 c_i之中。同样，β 关联的权重也归入 d_i之中。因此，在我们最初承认“系数 c_i 和 d_i.....可能依赖于 α和 β”的基础上，还可以分别补充“分别”二字。此外，变量替换 $f(t)=g(u)$，其中 $u=nh-t$（由此 $t=nh-u$ 且 $dt=-du$），将规则（1）变换为

$$\int_{-\beta h}^{(n+\alpha)h} {}_{n}g(u)du \approx h\sum_{i=0} {}_{m}g(ih) + h\sum_{i=0} {}_{m}d_i g(ih) + c_i g((n-i)h), \tag{7}$$

这与原规则相同，只是 α 和 c_i 交换了位置，分别与 β 和 d_i相对应。因此，如果该规则是一致的，修正项 d_i 依赖于 β，正如修正项c_i依赖于 α一样。特别地，如果 $\beta=\alpha$，那么 $d_i=c_i$，且规则（1）简化为

$$\int_{-\alpha h}^{(n+\alpha)h} f(t)\,dt \;\approx\; h\sum_{i=0}^{n} f(ih) \;+\; h\sum_{i=0}^{m} c_i\Big[f(ih)+f\big((n-i)h\big)\Big]. \tag{8}$$

由于关于 t =nh/2 对称，这个特殊情形对于任意奇次幂的 (t − nh/2) 都是精确的——因此，若它对 m 次偶数阶多项式精确，那么对 m+1 次多项式也精确。当 $\beta\neq\alpha$ 时，这种精确性最高次数的提升不会发生。而当它确实发生时（当 $\beta=\alpha$），对于一般解析函数 f，误差阶并不会因此改变；这是因为当 f 的次数为 m+1 时，(8) 中 h^{m+2} 的系数会因 f 的最高次项的反对称性而相匹配，而一般的 f 通常会破坏这种反对称性。关于情形$\alpha=\beta=0$的更精确误差界，见 Barrett [1],、Martensen [13], 和 De Swardt 与 De Villiers[2, 第131] 页（引自 [12, 第 161–3] 页）。

3 求解

既然存在系数 c_i 仅取决于 α，而 d_i 则完全取决于 β，使求积公式（1）在某种意义上对某一类函数 $f(t)$ 都成立，那么为了求出这些系数，我们可以从这一类函数中任意选取一个方便的函数。但什么样的函数才算“方便”呢?

第一个提示：如果该公式对任意 n 都成立，那么在 $n\to\infty$ 时也必须成立，当然前提是积分收敛；在这种情况下，被积函数以及（1）式右边的和都必须趋于零，因此我们得到

$$\int_{-\alpha h}^{\infty} f(t)\,dt \;\approx\; h\sum_{i=0}^{\infty} f(ih) \;+\; h\sum_{i=0}^{m} c_i f(ih), \tag{9}$$

其中两边都是 h 的函数。将两边在 $h=0$ 处作泰勒展开，常数项会自动相等，因为当 $h\to 0$ 时，（9）两边都趋于同一个积分。通过调整 $m+1$ 个系数 c_i，我们应该能够使 h^1 到 h^{m+1} 的各项相匹配，从而使误差为 $O(h^{m+2})$.

论证的其余部分大量借鉴了 Fornberg [3, 4],，而 Fornberg 的部分灵感则来自 Fröberg [8, 第194–6] 页，以及詹姆斯·格雷戈里 写给约翰·柯林斯的一封信的片段 [9,，见第208–9] 页，信件写于**1670年**——也就是牛顿提出“3/8辛普森法则”的前一年，比科特斯计算出适用于多达11个点的闭型“牛顿–科特斯”权重早了40多年 [10, 第 130]页。

我通过参数 α 所作的推广，在很大程度上已由 Fornberg & Lawrence 提出 [6, 第4–5], 页；他们的参数 ξ 与我的 $-\alpha$相对应。他们的方法不够一般，因为他们限制了参数的取值范围（这是因为他们希望处理样本之间的不连续性）；但另一方面，他们的方法更一般，因为他们利用一定的自由度来减弱权重中的振荡。（正如下面所指出的，在某些方面，他们的方法也比我的更为详尽。）

第二个提示：牛顿多项式插值法 [10, 第10–12]表明，通过将（9）改写为差分而非纵坐标的形式，可以简化系数匹配。9）差分 如果我们定义算子 Δ 为

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t) \tag{10}$$

使得

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f(0) &= f(0) \\
\Delta^1 f(0) &= f(h) - f(0) \\
\Delta^2 f(0) &= f(2h) - 2f(h) + f(0) \\
&\vdots \\
\Delta^m f(0) &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} f(jh)\,,
\end{aligned} \tag{11}$$

那么（9）中的第二个求和项，即

$$\sum_{i=0}^{m} c_i f(ih)\,, \tag{12}$$

可以写成以下形式

$$\sum_{k=0}^{m} b_k \Delta^k f(0)\,. \tag{13}$$

因为，如果令最后两个求和式相等，并借助（11）展开后一个求和式，就得到

$$\sum_{k=0}^{m} \left(b_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f(jh) \right) = \sum_{i=0}^{m} c_i f(ih) \tag{14}$$

或者，令 $f(ih)$ 的系数相等，

$$\sum_{k=i}^{m} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} b_k = c_i \quad ; \quad i \in [0\,..\,m]\,. \tag{15}$$

这是一个上三角单位对角系统的线性方程，可以通过回代法依次求出b_m到b_0 （Fornberg

& Lawrence [6, 第 3] 页展示了矩阵形式的方程）。因此，给定修正项c_i，我们可以求出差分系数数 系数 b_k——如前所述。[当然，给定b_k，我们可以用（15）求出c_i。] 将（13）代入（12），再代入（9），即可得到所需形式的求积公式

$$\int_{-\alpha h}^{\infty} f(t)\,dt \;\approx\; h\sum_{i=0}^{\infty} f(ih) \;+\; h\sum_{k=0}^{m} b_k \Delta^k f(0)\,, \tag{16}$$

问题是求出m+1个常数b_k，使得各项系数相等，这些系数对应于h 的幂，从h^1到h^{m+1}。

因此，选择一个“方便的”$f(t)$应当能使（16）中的第一个求和变得易于处理——例如，成为一个衰减的几何级数。若选择

$$f(t) = e^{-st/h} \tag{17}$$

其中 $\mathrm{Re}(s) > 0$，则

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(ih) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-s})^i \;=\; \frac{1}{1-e^{-s}} \tag{18}$$

and

$$\int_{-\alpha h}^{\infty} f(t)\,dt \;=\; \frac{e^{-st/h}}{-s/h}\bigg|_{t=-\alpha h}^{t\to\infty} \;=\; h\,\frac{e^{\alpha s}}{s} \tag{19}$$

and

$$f(0) = 1\,, \tag{20}$$

将t 增加h，会使$f(t)$乘以e^{-s}，因此，从运算角度看，

$$\Delta = (e^{-s} - 1)\,. \tag{21}$$

若在（16）中代入这四项，我们可以约去h 并得到

$$\frac{e^{\alpha s}}{s} \;\approx\; \frac{-1}{e^{-s}-1} \;+\; \sum_{k=0}^{m} b_k (e^{-s}-1)^k. \tag{22}$$

现在，令

$$x = e^{-s} - 1\,, \tag{23}$$

使得 $e^{\alpha s} = (1+x)^{-\alpha}$，$s = -\ln(1+x)$，并令 $x \to 0^-$ 为 $s \to 0^+$，则（22）变为

$$\frac{-(1+x)^{-\alpha}}{\ln(1+x)} \;\approx\; \frac{-1}{x} \;+\; \sum_{k=0}^{m} b_k x^k, \tag{24}$$

即，

$$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) \ln(1+x) \;\approx\; \frac{\ln(1+x)}{x} - (1+x)^{-\alpha}. \tag{25}$$

取（1+x）$^{-1}$ 的几何级数并逐项积分（令$x=0$以确定常数），可得

$$\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} x^{i+1} \tag{26}$$

将两边除以x 并重新命名求和指标后，得到

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} x^j . \tag{27}$$

(25) 中的剩余项可展开为二项式

$$(1+x)^{-\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{j} x^j . \tag{28}$$

代入这三个替换后，方程（25）变为

$$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} x^{i+1} \right) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^j}{j+1} - \binom{-\alpha}{j} \right] x^j . \tag{29}$$

现在可以比较（29）中的系数。左边没有 x^0，项，这是由于指标 i+1。右边，系数 x^0 的系数为

$$\frac{(-1)^0}{0+1} - \binom{-\alpha}{0} = 1-1 = 0 , \tag{30}$$

这与左边一致。因此，必须确定系数b_k，使其与x^1 到x^{m+1}的系数相匹配。若将左边的和之积展开，则会有j 项x^j，其中k 从 0 到$j-1$取值，而i则分别从$j-1$ 递减到 0。因此，为了比较x^j的系数，我们将左边第二个求和移入第一个求和中，选取内层求和中$i=j-k-1$的项，并将外层求和取到$k=j-1$，得到

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^{j-k-1}}{j-k} b_k = \frac{(-1)^j}{j+1} - \binom{-\alpha}{j} ; \quad j \in [1\,..\,m+1] . \tag{31}$$

为避免混淆，我们将哑指标j 重命名为i+1，这样两个指标都从零开始计数。由此得到

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k+1} b_k = \frac{(-1)^{i+1}}{i+2} - \binom{-\alpha}{i+1} ; \quad i \in [0\,..\,m] , \tag{32}$$

其中，b_k的系数在$k=i$时为 1，而k没有对应项 $>i$.

因此，(32) 是一个关于 b_k 的下三角单位对角线线性方程组，可依次求解b_0 至 b_m，求解顺序为 前向代入。按此顺序求解意味着我们可以增大 m，添加更多方程，而不会影响迄今为止求得的解。不过，在求出所需数量的系数 b_k 后，我们还需要通过直接代入，将修正项 c_i 代入上三角系统 (15) 中求解；在该系统中，较高索引的 b_k 会影响较低索引的 c_i。

Fornberg & Lawrence [6, p.4] 给出了显式公式，展示了对于选定的 b_k，其随参数 ξ （即我们的 $-\alpha$）变化的情况，以及b_k 在 ξ 取极端值时的渐近行为；后者与寻找具有许多表现良好的非单位权重的高阶求积公式有关。相比之下，以下综述不考虑他们对参数的限制（用我们的记法即 $0 \le \alpha < 1$），而是寻求非单位权重相对较少 的求积公式。

4 示例

正如 Fornberg 所建议的 [3], 如果想要十进制形式的系数，我们不妨在 MATLAB中求解方程；若想要精确的有理数形式，则可使用 Wolfram Mathematica。我用的是电子表格！将 k 的取值填在顶部一行，将 i 的取值填在左侧一列。对于式（32）中的二项式系数，$-\alpha$ 的值被手动输入到相应的单元格中——这是表格里影响最大的一格——随后各项则通过递推得出。在方便之处使用了矩阵求逆和矩阵乘法函数。在研究过程中，我计算了两列修正项 c_i，其精确有理数值并不显而易见；为求得这些值，我将一个十进制数展开为连分数，从而找到了公分母。

4.1 验证：重现已知求积公式

情形 $\alpha = 0$： 这是 Fornberg 在 Gregory 之后所考察的情形，假设从一开始 最外侧节点与端点重合。在他的“表 1”[4, 第170],页中，p 对应我们的 $m+2$，Fornberg 给出了修正项，我们的公式（32）和（15）准确地重现了这些修正项。[2]例如，$m = 2$时的修正项为

$$-\frac{5}{8},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{24},$$

从单位权重求积公式的两端分别应用这些修正项（该公式至少有六个节点），便得到“Lacroix 求积公式” [2, p.131]——这是一种以其创制者命名的 Gregory 求积公式，其精度阶与“Simpson”求积公式相同。而如果我们应用

[2]我的电子表格最多算到了 $m = 5$。

四个修正项$m=3$，分别作用于足够长的单位权重求积公式的两端，然后（例如）将h减半并将n加倍，就会发现误差为$O(h^5)$，这比“Simpson”求积公式 [15]高一阶；依此类推。

此外，Hamming [11, 第 342–4] 页指出，如果我们从单位权重求积公式的两端分别应用格雷戈里修正序列，且该公式的长度相同（即$n=m$），就会得到相应长度的标准闭型牛顿–柯特斯求积公式：$m=1$得到梯形公式，$m=2$得到“辛普森 1/3 求积公式”，$m=3$得到“辛普森 3/8 求积公式”，$m=4$得到“布尔求积公式”，等等。他说，这“或许是求出牛顿–柯特斯公式实际系数的最简单方法” [11, 第 342] 页。

还应补充一点：如果m为偶数（因此修正项的数量为奇数），那么不仅可以将修正项应用于m+1个单位权重来得到标准闭型牛顿–柯特斯求积公式，也可以将其应用于m+2 个单位权重。因此，梯形公式（有两个点）可以由$m=1$（两个修正项）或$m=0$（一个修正项）得到；“辛普森 3/8 求积公式”（有四个点）可以由$m=3$（四个修正项）或$m=2$（三个修正项）得到，依此类推。

但如果 m 是奇数（因此修正项的数量为偶数），只有将修正项应用于m+1个单位权重，才能得到标准的闭型牛顿–科特斯求积公式；将修正项应用于m+2 个单位权重则不能 得到。因此，我们无法从$m=1$（两个修正项）得到“辛普森 1/3 求积公式”（三个点），也无法从$m=3$（四个修正项）得到“布尔求积公式”（五个点）；不过，相应的 Gregory 求积公式仍具有预期的完整精度，误差为 $O(h^{m+2})$。

对于$m=1$，Gregory 求积公式还有另一种解释。“修正后”的复合梯形公式使用端点处的导数，其精度比未修正的公式高两阶（也就是说，它与“辛普森”求积公式的精度阶相同）。若将$m=1$对应的 Gregory 修正项，即 $-\frac{7}{12}$，$1\,12$，改写为对复合梯形公式的修正项，则变为$-\frac{1}{12}$，$1\,12$；这一序列可识别为对梯形公式端点“修正项”的有限差分估计：[3] 在距离端点$h/2$处取导数，而不是 在端点处取值，因此其精度阶介于 未修正与“修正后”的梯形公式之间。

一般而言，针对偶数 m 的修正项使格雷戈里求积公式对最高至m+1次的多项式都精确，这与闭型的（m+1）点和（m+2）点牛顿–柯特斯公式一样；它们分别是长度对应的、在最高至该次数上精确的唯一闭型等距求积公式。而针对奇数 m 的修正项使格雷戈里求积公式对最高至m次的多项式都精确，这与闭型的（m+1）点牛顿–柯特斯公式一样；后者是长度对应的、在最高至该次数上精确的唯一闭型等距求积公式。因此，格雷戈里方法必定能生成每一种闭型牛顿–柯特斯求积公式——如果该公式的节点数为偶数（对应奇数次插值多项式），则会生成两次。

[3] 端点修正项由 Fornberg [4] 式（2）中的h^2项给出。

然而，格雷戈里写给柯林斯的信 [9] 早于除梯形公式和开普勒桶法则（也称为辛普森 1/3 公式）之外的所有闭型牛顿–柯特斯公式。写完那封信五年后，格雷戈里便去世了。相传，他在向学生展示木星的卫星时中风；而现存最早的记载则称："By a cold catched in the castle, he grew blind in on[e] night, and shortly afterdyed" [7]。他当时 36 岁。

情形 $\alpha = 1$： 此情形与 Gregory/Fornberg 的方法不同，它得出了 开型求积公式，其最外侧节点位于距端点一步的位置。类比前一种情形，式（32）和（15）给出的修正项对于 偶数 m应得出开型（m+1）点和（m+2）点牛顿–柯特斯公式（Weisstein [16] 列出了最多 7 个节点的公式），而对于奇数 m，修正项应得出开型（m+1）点牛顿–柯特斯公式。让我们来验证一下。

当$m=0$时，唯一的修正项是$c_0 = \frac{1}{2}$。将其应用于 1 点单位权重求积公式两次后，得到单个权重 2，这与 1 点开型牛顿–柯特斯公式一致。将其分别应用于 2 点单位权重求积公式的两端，得到 2 点开型牛顿–柯特斯公式的权重：

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}.$$

当$m=1$时，修正项序列为

$$\frac{11}{12}, -\frac{5}{12}.$$

从两端分别应用于两点单位权重求积公式，可再次得到两点开型 N–C 求积公式。

对于 $m=2$，修正序列为

$$\frac{31}{24}, -\frac{7}{6}, \frac{3}{8}.$$

从三点单位权重求积公式的两端分别应用，可得到权重序列

$$\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3},$$

这就是三点开型 N–C 求积公式。从四点单位权重求积公式的两端分别应用，可得到权重序列

$$\frac{55}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}, \frac{55}{24},$$

这就是四点开型 N–C 求积公式。

对于 $m=3$，修正序列为

$$\frac{1181}{720}, -\frac{1593}{720}, \frac{1023}{720}, -\frac{251}{720}.$$

将其应用于四点单位权重求积公式的两端，会再次得到四点开型牛顿–柯特斯公式。

对于$m=4$，修正序列为

$$\tfrac{2837}{1440}\,,\ -\tfrac{5086}{1440}\,,\ \tfrac{4896}{1440}\,,\ -\tfrac{2402}{1440}\,,\ \tfrac{475}{1440}\,.$$

将其应用于五点单位权重求积公式的两端，得到一组简单但振荡的权重序列

$$\tfrac{33}{10}\,,\ -\tfrac{21}{5}\,,\ \tfrac{39}{5}\,,\ -\tfrac{21}{5}\,,\ \tfrac{33}{10}\,,$$

这就是五点开放型牛顿–科茨求积公式。目前为止一切顺利。

情形 $\alpha=-1$: 由此得到的求积公式中，最外侧节点位于积分区间之外一个步长处。

其中一种求积公式很容易验证。对于$m=2$，计算得到的修正项为

$$-\tfrac{25}{24}\,,\ -\tfrac{1}{2}\,,\ \tfrac{1}{24}\,.$$

将这些应用于足够长的一列单位权重后，前三个权重为

$$-\tfrac{1}{24}\,,\ \tfrac{1}{2}\,,\ \tfrac{25}{24}\,.$$

复合梯形公式（积分区间从第二 个节点开始）对应的权重分别为

$$0\,,\ \tfrac{1}{2}\,,\ 1$$

因此，通过相减，$m=2$给出的复合梯形公式修正项为

$$-\tfrac{1}{24}\,,\ 0\,,\ \tfrac{1}{24}\,.$$

式（1）右端对应的项为

$$h\Big[-\tfrac{1}{24}f(0)+\tfrac{1}{24}f(2h)\Big]\ =\ \tfrac{1}{12}h^2\,\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\ \approx\ \tfrac{1}{12}h^2f'(h)\,,\qquad(33)$$

其中，右边的表达式是“修正梯形公式”中的标准左端修正项（参数h是积分下限）。因此，取$\alpha=-1$和$m=2$，即可得到离散修正复合梯形公式。Weisstein [16], 给出了一个等价公式，并将其描述为“两点开放型扩展公式”，但未作进一步说明。对于单个区间（单步），该公式的权重为

$$-\tfrac{1}{24}\,,\ \tfrac{13}{24}\,,\ \tfrac{13}{24}\,,\ -\tfrac{1}{24}\,,$$

这是通过令$\alpha=-1$、$m=2$和$n=3$得到的。但也可以令$\alpha=0$、$m=2$和$n=1$得到，因此$m>n$；在后一种情况下，超出单位权重的修正项加到0而不是1上。

我们可以通过取 $\alpha=-2$和 $m=4$； $\alpha=-3$和 $m=6$；等等，来推导梯形公式的高阶离散修正。不过，既然已经进行到这一步

为了展示我们方法的有效性，现在让我们用它来推导一些不太熟悉的求积公式。

4.2 应用：修正中点公式

情形 $\alpha = 1/2$： 由此得到开型求积公式，其最外侧节点距端点半个步长——复合中点公式就是如此。当然，复合中点公式是单位权重求积公式，因此对单位权重求积公式的修正项也可以称为对中点公式的修正项。对于$m=0$，唯一的“修正项”是$c_0=0$，中点公式因而保持不变。对于$m=1$，阶提高了 1。对于$m\in\{2,3,4\}$，我们得到的求积公式或许确实值得采用。作为开型 求积公式，它们无需在端点处计算被积函数的值，因为被积函数在那里可能没有定义。即使被积函数在趋近端点时存在有限极限，不必处理端点处的奇点或潜在奇点也会方便一些，因此可以说，开型求积公式作为通用型 求积公式优于闭型求积公式。

对于 $\alpha=1/2$，指定的m 值对应的修正项为[4]

$$m=2: 1\,\underline{12},\ -\tfrac{1}{8},\ 1\,\underline{24};\quad m=3: 703\ 5760,\ -\tfrac{1389}{5760},\ 909\ 5760,\ -\tfrac{223}{5760};\quad m=4: 909\ 5760,\ -\tfrac{2213}{5760},\ \overline{2145\ 5760},\ -\tfrac{\overline{1047}}{5760},\ \overline{206\ 5760}.$$

对应的权重（如果还有剩余的单位权重）为

$$m=2:\ \tfrac{13}{12},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{25}{24},\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \tfrac{25}{24},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{13}{12};$$

$$m=3:\ \tfrac{6463}{5760},\ \tfrac{4371}{5760},\ \tfrac{6669}{5760},\ \tfrac{5537}{5760},\ 1,\ \text{etc.};$$

$$m=4:\ \tfrac{6669}{5760},\ \tfrac{3547}{5760},\ \tfrac{7905}{5760},\ \tfrac{4713}{5760},\ \tfrac{5966}{5760},\ 1,\ \text{etc.}$$

$m=3$和$m=4$的分母，是通过将一个修正项展开为连分数得到的。（对$m=5$采用相同的方法后发现，精确有理系数会变得难以处理。）

作为检验，值得注意的是，如果从四点单位权重求积公式的两端分别应用$m=3$的修正项，我们会得到相同的权重，即

$$\tfrac{13}{12},\ \tfrac{11}{12},\ \tfrac{11}{12},\ \tfrac{13}{12}$$

——仿佛我们也对$m=2$的修正项做了同样的处理。作为进一步验证，通过实验很容易确认，所得的$m=2$和$m=3$求积公式对于次数不超过 3 的被积函数（如“辛普森”求积公式）是精确的（达到机器精度），而

[4] 这些内容发布于 [14]，适用于$m=2$；相关评论中则适用于$m=3$ 和$m=$ 4.

所得的$m=4$求积公式对于次数不超过 5 的被积函数是精确的（类似“布尔求积公式”）。

作为检验，若对$f(t)=7t^6$在 0 到 1 上积分，取 10 个节点，分别令$m=2$、$m=3$和$m=4$，然后将节点数加倍，则误差分别约缩小 13.5、27.7 和 47.3 倍，因此不难相信误差分别为$O(h^4)$、$O(h^5)$和$O(h^6)$。

情形 $\alpha = -1/2$： 由此得到的求积公式，其最外侧节点位于积分区间之外半个步长处。

同样，这一系列中的一个求积公式很容易验证。对于$m=1$，计算得到的修正项为

$$-\tfrac{23}{24}\,,\ -\tfrac{1}{24}\,.$$

将这些修正项应用于足够长的单位权重序列时，前两个权重为

$$\tfrac{1}{24}\,,\ \tfrac{23}{24}\,.$$

复合中点公式的相应权重（第一个中点是第二个节点）为

$$0\,,\ 1$$

因此，通过相减，$m=1$给出的复合中点公式的修正项为

$$\tfrac{1}{24}\,,\ -\tfrac{1}{24}\,.$$

对式（1）右端的相应贡献为

$$h\Big[\tfrac{1}{24}f(0)-\tfrac{1}{24}f(h)\Big] \;=\; -\tfrac{1}{24}h^2\,\frac{f(h)-f(0)}{h} \;\approx\; -\tfrac{1}{24}h^2 f'(h/2)\,, \qquad (34)$$

其中，右侧的表达式是标准左侧修正项的一半的负值（参数$h/2$是积分下限）。但显然，$-1/2$的梯形公式首阶修正项就是中点公式的首阶修正项；例如，“辛普森”权重（$\frac{1}{3}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{1}{3}$）是从梯形权重 (1, 0, 1) 到中点权重 (0, 2, 0) 距离的 2/3。因此，对于 $\alpha=-1/2$ 和$m=1$，该求积公式是离散修正复合中点公式。我们可以通过取 $\alpha=-3/2$ 和$m=3$、$\alpha=-5/2$ 和$m=5$等，来探讨中点公式的更高阶离散修正项。（所得求积公式具有不同寻常的性质：当m为奇数时，它们对次数不超过$m+2$的被积函数精确，此后误差为$O(h^{m+3})$。这是因为它们关于端点的对称性与上述“离散修正复合梯形公式”相同；对于该公式，当m为偶数时，

端点处的修正项为零，因此，为达到相同的精度阶，实际所需的修正项数量比通常要求的少一个。）
顺便一提，我最初通过将其视为修正后的中点公式，推导出了 $\alpha = +1/2$ 且 $m = 2$ 的求积公式，并在下端点 采用了不同的离散估计来估算 f' [14]。但对于 /，我只使用广义 Gregory/Fornberg 方法，推导相应的 $m = 3$ 和 $m = 4$ 的求积公式。

4.3 非对称公式 ($\beta \neq \alpha$)

到目前为止给出的示例，在积分区间两端都采用相同的 α 值；也就是说，按式（1）至（7）的记号，它们令 $\beta = \alpha$。但我们也可以分别设定 α 和 β。如果我们在固定的等间距横坐标处对函数进行采样，并希望能够在任意积分限之间对其积分，这样做就很有用。

举例来说，令 $\alpha = 1/2$ 和 $\beta = 0$，这样该公式从左侧看类似中点公式，从右侧看类似闭型 Newton–Cotes 公式（这种一端开型、另一端闭型的求积公式称为半开型）。如果仍有任何单位权重，则对于 $m = 2$，权重为

$$\tfrac{13}{12},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{25}{24},\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \tfrac{23}{24},\ \tfrac{7}{6},\ \tfrac{3}{8},$$

而 $m = 3$ 对应的权重为

$$\tfrac{6463}{5760},\ \tfrac{4371}{5760},\ \tfrac{6669}{5760},\ \tfrac{5537}{5760},\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \tfrac{739}{720},\ \tfrac{211}{240},\ \tfrac{299}{240},\ \tfrac{251}{720}$$

其中，最后四个由 Fornberg [3, p.8] 给出。若在 0 到 1 上积分，取 h = 2/19（得到 10 个节点），则 m = 2 对应的求积公式对次数不超过 2 的被积函数精确（而非像对称公式那样精确到 3 次）；而 m = 3 对应的求积公式对次数不超过 3 的被积函数精确（与对称公式相同）。对于 $f(t) = 5t^4$,，若将 h 从 2/19（10 个节点）减小到 2/39（20 个节点），则 m = 2 对应的误差缩小 18.5 倍，m = 3 对应的误差缩小 36.4 倍。因此不难相信，它们的误差分别为 $O(h^4)$ 和 $O(h^5)$；请回想，式 (8) 后指出，一般 f 的误差预期为 $O(h^{m+2})$，无论对于偶数 m，f 的 m+1 次项的误差是否相消。

再举一个例子，Weisstein [16], 列出的“单区间外推公式”之一，即

$$\int_{-h}^{0} f(t)\,dt \;\approx\; h\Big[\tfrac{23}{12}f(0) - \tfrac{4}{3}f(h) + \tfrac{5}{12}f(2h)\Big], \tag{35}$$

可识别为后向 Adams–Bashforth 公式，并可通过设定 $\alpha = 1$、$\beta = -2$ 和 $m = n = 2$ 得到。一般而言，前向 Adams–Bashforth

权重由 $\alpha = -m = -n$ 和 $\beta = 1$ 给出，而前向 Adams–Moulton 权重由 $\alpha = 1-m = 1-n$ 和 $\beta = 0$ 给出。

5 结论

工作方程（15）和（32）值得重述；实际使用时，前者还应左右调换。因此，总而言之，对于次数不超过m 的被积函数，只需在两端各添加m+1个“修正项”来调整朴素的等权等距求积公式中的权重，并从最外侧的权重开始向内依次进行，即可使其精确。修正项为

$$c_i = \sum_{k=i}^{m} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} b_k \quad ; \quad i \in [0\,..\,m], \tag{36}$$

其中，m+1个系数b_k 是下三角方程组的解

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k+1} b_k = \frac{(-1)^{i+1}}{i+2} - \binom{-\alpha}{i+1} \quad ; \quad i \in [0\,..\,m], \tag{37}$$

其中，α 是从积分限到第一个节点的距离，按步长向内测量。修正项可能彼此重叠，此时应累加（如果修正项使权重超出单位权重，则应将其加到0而不是1上）。

两端的 α 值不必相同。如果它们相同（“$\beta = \alpha$”），且m为偶数，则该公式对次数不超过m+1的被积函数精确（而非m）。无论如何，积分误差通常为$O(h^{m+2})$，其中h 为步长。

虽然本研究最初旨在为复合中点公式求出修正权重（无论好坏，这也决定了参数 α 的符号约定），但只要适当选择 α、β 和 m，以及（对于重叠修正项）单位权重的初始数量，就可以用同样的两个方程推导出各种闭型、开型和外推等距求积公式。

6 致谢

我感谢 Bengt Fornberg 教授审阅本文的高级草稿并提出反馈，帮我避免了许多尴尬；也感谢他刚刚发表的詹姆斯·格雷戈里纪念文章 [5]，，它直接或间接地引导我找到了这些参考资料[1, 2, 7, 11, 13]。仍然存在的任何错误或遗漏，责任都在我。

参考文献

[1] W. Barrett, 《数值积分公式中的余项》（1951年11月15日宣读），伦敦数学学会，卷 s1-27，第 4 期（1952年10月），第 465–70 页；doi.org/10.1112/jlms/s1-27.4.465。[2] S.A. De Swardt 和 J.M. De Villiers, 《基于二次节点样条插值的 Gregory 型求积》，《数值数学》，卷 85（2000年），第 129–53 页；doi.org/10.1007/s002110050480。[3] B. Fornberg, 《Gregory 求积法》，科罗拉多大学博尔德分校，2011年；colorado.edu/amath/sites/default/files/attached-files/gregory.pdf。[4] B. Fornberg, 《提高梯形公式的精度》，《SIAM评论》，卷 63，第1期（2021年），第 167–80 页；doi.org/10.1137/18M1229353（开放获取）。[5] B. Fornberg, 《詹姆斯·格雷戈里的数值求积》，《天文学与地球物理学》，卷 66，第6期（2025年12月），第 17–21 页；doi.org/10.1093/astrogeo/ataf070（2025年11月28日在线发表）。[6] B. Fornberg 和 A. Lawrence, 《不连续函数的增强型梯形公式》，《计算物理学杂志》，卷 491，2023年10月15日，112386；doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112386。[7] Frarghall 致 Colin Campbell 的信，1676年1月24日，引自 A. Malet, 《詹姆斯·格雷戈里研究》（1638–1675），博士论文，普林斯顿，1989年，第 86 页。[8] C.-E. Fröberg, 《数值分析导论》，Addison-Wesley，1965年；archive.org/details/introductiontonu0000frob。[9] J. Gregory，经 J. Collins 编，《J. Gregory 致 Collins 的信摘录》（1670年11月23日），载于 S.P. 和 S.J. Rigaud（编），《十七世纪科学家通信集》，第 2 卷，牛津，1841年，archive.org/details/correspondences01rigagoog，第 203–12 页。[10] E. Hairer 和 G.Wanner, 《从历史看分析学》，施普林格，2008年。[11] R.W. Hamming, 《科学家与工程师的数值方法》，第2版，麦格劳-希尔，1973年（纽约州米尼奥拉：多佛出版社，1986年重印）；archive.org/details/numericalmethods00hamm_0。[12] E. Martensen, 《Gregory 求积公式的最佳误差界》，《应用数学与力学杂志》，卷 44（1964年），第 4–5 期，第 159–68 页；doi.org/10.1002/zamm.19640440403（引自 [2]）。[13] E. Martensen, 《奇数阶 Gregory 求积公式的余项表示》，《数值数学》，卷 15（1970年），第 229–33 页；doi.org/10.1007/BF02168972。[14] G.R. Putland, 《中点公式的端点修正权重》，2025年11月16日；linkedin.com/feed/update/urn:li:activity:7395696367576338432。[15] G.R. Putland, 《Gregorian 数值积分》，2025年11月23日；linkedin.com/feed/update/urn:li:activity:7398111129383862273。[16] E.W. Weisstein, 《Newton–Cotes 公式》，Wolfram MathWorld，2025年；mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html。