arXiv:2512.15835v1 [math.AT] 17 Dec 2025

通过范畴上同调研究图式霍赫希尔德上同调与关联代数

LUIGI CAPUTI 和 FRANCESCO VACCARINO

摘要。本文研究 Gerstenhaber 和 Schack 引入的代数图表的霍赫希尔德上同调，并对关联代数的滤过进行计算。我们的目标有三点：首先，重新考察并探究 Gerstenhaber-Schack 复形与范畴的 Baues-Wirsching 上同调之间的联系。其次，分析代数的同调满射背景下（图式）霍赫希尔德上同调的表现。第三，研究关联代数图表。特别是，作为一项主要应用，我们计算与单纯复形有限滤过相关的关联代数图表的图式霍赫希尔德上同调。

1. 引言

霍赫希尔德上同调在代数结构研究中发挥着核心作用，能够刻画代数性质和同伦性质。它已在从表示论到代数几何和拓扑学的诸多领域得到广泛研究；全面介绍请参见 [Lod98, Wit19] 。本文聚焦于图式霍赫希尔德上同调，这是通过 Gerstenhaber 和 Schack 引入的框架发展而来的经典霍赫希尔德上同调的扩展 [GS83a, GS83b, GS88a, GS88b]。图式方法也与代数变形密切相关，它将上同调计算从代数推广到代数图式（即由小范畴索引的代数预层），从而使我们能够深入了解它们之间的相互关系。作为一个引人入胜的应用实例， [GS83b] 证明了单纯上同调就是霍赫希尔德上同调——另见 [Cib89, GMY16] 。自 Gerstenhaber 和 Schack 的开创性工作以来，图式霍赫希尔德上同调日益受到关注，并已在各种情境中得到研究和推广；例如，参见 [GGS05, LVdB11, Dou12, VL18, FK22, Haw23]。图式霍赫希尔德上同调的计算通常并不容易处理。为完善现有计算工具并促进相关应用，本文采用范畴的上同调，具体而言是 Baues-Wirsching 上同调 [BW85]。我们首先借助一个合适的谱序列，重新梳理并阐明图式霍赫希尔德上同调与 Baues-Wirsching 上同调之间的联系；据作者所知，这一结果最早归功于 Robinson [Rob08]。

本文中，对于有限范畴 $\mathbf{C}$ 上取值于 k-代数的预层 $\mathcal{A}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k$ ，我们分析上述谱序列 [Rob08]，的第二页；该谱序列收敛到 Gerstenhaber 和 Schack 的图式霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A},\mathcal{A})$。事实上，Gerstenhaber-Schack 的定义中隐含着这样一个观点：图式霍赫希尔德上同调可视为指标范畴的神经上、关于扭系数系统的局部上同调（或其推广）；相关讨论另见 [Rob08] 和 [BJT09] 。利用 Baues 和 [BW85] 引入的自然系统这一语言，可以将此事实形式化。尽管霍赫希尔德上同调并非完全函子性，图式霍赫希尔德上同调却给出一个自然系统 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{A}) : \mathrm{Tw}\,\mathbf{C} \to$ **阿贝尔群范畴**，即扭箭范畴 $\mathrm{Tw}\mathbf{C}$ 上的一个函子（另见命题3.7）。基于这些考量，本文的主要目标有三：第一，回顾并完善将 Gerstenhaber-Schack 复形与 Baues-Wirsching 范畴上同调联系起来的基础结果；第二，研究代数的同调满射这一特殊情形下霍赫希尔德上同调的性质；第三，将这些结果应用于单纯复形关联代数的滤过。

图式霍赫希尔德上同调与 Baues-Wirsching 上同调之间的关系可概括如下——参见 [Rob08] 和定理 3.11：

定理 1.1。 设$\mathbf{C}$ 是一个有限范畴，且 $\mathcal{A}$ 是定义在域 k 上、取值于 k-代数的预层。则存在一个第一象限谱序列：

$$E_2^{p,*} \cong H^p_{BW}(\mathbf{C}, \mathcal{HH}^*(\mathcal{A},\mathcal{A}))$$

收敛到图表 $\mathcal{A}$ 的图式霍赫希尔德上同调，其各行是 $\mathbf{C}$ 关于自然系统 $\mathcal{HH}^*(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 的 *Baues-Wirsching* 上同调群。

定理 1.1 中的同构已经展现出一些有趣的优势。例如，假设 $\mathbf{C}$ 是一个自由有限范畴。那么，定理 1.1 意味着，当 $p \geq 2$ 时，所考虑的谱序列第二页是平凡的——参见推论 3.14。因此，谱序列的全部信息都包含在第二页中对应于 $p = 0$,1 的列里。为进一步简化谱序列第二页上的计算，本文将讨论范围限定在代数 [GL91, dlPX06] 的同调满射情形。我们关注同调满射而非更一般的代数映射，原因在于我们观察到，霍赫希尔德上同调（通常不对两个变量都具有函子性）在限制到由代数与同调满射构成的范畴 $\mathbf{Alg}_k^{\mathrm{Hepi}}$ 后，会成为一个函子。因此，当研究范围限定在代数图式与同调满射时，定理 1.1 可以进一步细化：在推论 4.16 中，我们证明各行 $E^*{}_{,2}{}^q$ 同构于范畴 $\mathbf{C}$ 的函子上同调群（而非扭箭范畴 Tw$\mathbf{C}$的函子上同调群）。由此直接得到以下结果（另见推论 4.17）：

定理 1.2。 设$\mathbf{C}$ 是一个具有终对象 $\bar{c}$ 的范畴，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{C}$ 上的 k-代数预层，并且是满同调满射。那么，对于所有 p、$q \in \mathbb{N}$，有

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \textit{if } p > 0 \\ \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}(\bar{c}), \mathcal{A}(\bar{c})) & \textit{otherwise} \end{cases}$$

特别地， $\mathcal{A}$ 的图式霍赫希尔德上同调就是 $\mathcal{A}(\bar{c})$ 的霍赫希尔德上同调。

在本文的最后一节，我们聚焦于主要应用：计算关联代数的滤过的图式霍赫希尔德上同调。该应用在持久同调计算 [Car09]中也可能具有独立的研究价值。事实上，Gerstenhaber 和 Schack [GS83b] 证明，对于单纯复形 Σ，有 $\mathrm{H}^*(\Sigma; k) \cong \mathrm{HH}^*(I(\Sigma)\ I(\Sigma))$，其中$I(\Sigma) := I((\Sigma, \subseteq))$ 是与 Σ 相关联的面偏序集的关联代数。因此，单纯复形的滤过可以转化为关联代数的滤过，同时保持上同调群不变。由于单纯复形的单纯单射映射会诱导关联代数的同调满射，而后者也是满态射，因此我们可以将所建立的理论应用于这一情形。于是，我们证明如下：

定理 1.3。 设 $\mathcal{I}\colon\ [n]^{\mathrm{op}} \to$ **代数**$_k$ 由有限单纯复形的一个滤过诱导，并通过 $\mathcal{I}(i) := I(\Sigma_i)$ 定义于 $0 \leq i \leq n$，且具有相应的限制映射。那么，我们有

$$\mathrm{HH}^q_{\mathrm{GS}}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) \cong \mathrm{H}^q(\Sigma_n; k)$$

对所有 $q \geq 0$均成立。

总而言之，本文研究了一个收敛到图式霍赫希尔德上同调的谱序列，并明确地将上同调群描述为扭箭范畴上函子的高阶极限。随后，我们利用代数的同调满射，简化了这类谱序列第二页的计算。最后，我们将这些计算应用于关联代数的滤过情形，揭示了其与组合不变量和拓扑不变量之间的深刻联系。这种理论与应用的相互交融不仅推广了已有结果，也为应用代数拓扑的未来发展铺平了道路。

论文结构。 第 2 节介绍霍赫希尔德上同调和函子（上）同调的经典概念。第 3 节通过 Gerstenhaber-Schack 框架及其借助自然系统的重新诠释，发展图表视角。第 4 节探讨同调满态射图表及其在计算霍赫希尔德上同调中的意义。第 5 节将这些结果应用于关联代数，并着重说明其与持久同调的相关性。

约定。 除非另有说明，全文中 k 均表示一个域。所有 k-代数均为有限维，且除非另有说明，所有范畴均为有限范畴。

2. 预备概念

本节为介绍后续所需的符号和基本概念，首先回顾霍赫希尔德上同调的定义（详见 [Lod98], ），基变换谱序列 [CE99，第十六章5] 及其在霍赫希尔德上同调计算中的作用，然后回顾范畴的函子（上）同调概念 [GZ67]。

2.1. 霍赫希尔德上同调。设 k 为一个域， A为一个结合 k-代数，且 M 为一个 A-双模。考虑由上链构成的上链复形

$$C^n_{\mathrm{HH}}(A,M) \coloneqq \{f\colon \prod_n A \to M \mid f \text{ is } n\text{-multilinear}\} = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)\ , \tag{1}$$

配备霍赫希尔德微分 $d^n_{\mathrm{HH}}\colon C^{n-1}{}_{\mathrm{HH}}(A,M) \to C^n_{\mathrm{HH}}(A,M)$，对每个 $n > 0$均成立。微分d^n_{HH} 由以下公式定义：

$$\begin{aligned} d^n_{\mathrm{HH}} f(a_1,\dots,a_n) \coloneqq & a_1 f(a_2,\dots,a_n) + \\ & \sum_{0<i<n} (-1)^i f(a_1,\dots,a_i a_{i+1},\dots,a_n) + \\ & (-1)^n f(a_1,\dots,a_{n-1}) a_n\ , \end{aligned}$$

令 d^0_{HH} 为零映射。与上链复形 $(C^*_{\mathrm{HH}}(A,M)\ d_{\mathrm{HH}})$ 相关的上同调群 $\mathrm{HH}^n(A,M) \coloneqq \ker\ d^{n+1}{}_{\mathrm{HH}}\ /\ \mathrm{Im}\ d^n_{\mathrm{HH}}$ 被称为 A 的霍赫希尔德上同调群，其系数为 M。如果 $M = A$，我们将 A 的霍赫希尔德上同调（系数为 A，视为其自身上的双模）记为 $\mathrm{HH}^*(A)$。在 0 次时，霍赫希尔德上同调群 $\mathrm{HH}^0(A)$ 给出 k-代数 A 的中心；在 1 次时，它与所谓的 A [Lod98] 的卡勒微分有关。还要注意，霍赫希尔德上同调带有分次，其分次满足 $\mathrm{HH}^*(A,M) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{HH}^n(A,M)$。

假设 k 是一个域（但更一般地说，如果 A 是交换含单位环 R 上的一个投射 R-模），通常会使用 Ext函子来解释霍赫希尔德上同调群——参见例如 [CE99，第 IX 章。6]或 [Wei94，推论 9.1。5]。在这一解释下，我们有

$$\mathrm{HH}^n(A,M) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M)\ , \tag{2}$$

其中 $A^e \coloneqq A \otimes A^{\mathrm{op}}$ 是 A 的包络代数。将霍赫希尔德上同调解释为 Ext 群后，计算时便可以使用 A 作为 A^e-模的任意投射分解。

例 2.1。 设 A 是一个 A^e-投射模。那么，对于所有 $n > 0$ 以及所有 A-双模 M，$\mathrm{HH}^n(A,M) = 0$。

例 2.1 可以进一步改进。事实上，如果对于所有 $n > 0$ 以及所有 A-双模 M，$\mathrm{HH}^n(A,M) = 0$，那么 A 是 A^e-投射的；等价地， A 是一个可分 k-代数。

例 2.2。 设 $A = M_p(k)$ 是域 k 上由 $p \times p$ 个矩阵构成的 k-代数。那么， A 是 A^e-投射的；根据例 2.1，其霍赫希尔德上同调群在所有正次数上均为平凡群。

非可分代数的霍赫希尔德上同调群通常更难计算，而且容易在任意正次数得到非平凡的霍赫希尔德上同调群。例如，直接计算可得：

例 2.3。 设 $k = \mathbb{R}$ 和 $A = \mathbb{R}[x]/(x^m)$。那么，我们有

$$\mathrm{HH}^n(A) = \begin{cases} A & \text{if } n = 0 \\ A/(mx^{m-1}) & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

可以推广 此例，使其适用于任意域 k以及任意首一多项式 f（属于 $k[x]$）——参见 [Gro91、Red01].

代数的霍赫希尔德上同调对于代数与双模对之间的态射而言，表现并不良好。

注 2.4. 霍赫希尔德上同调不能在由 k-代数、 k-代数态射及双模构成的范畴上定义一个双函子 $(A, M) \mapsto \mathrm{HH}^*(A, M)$。不过，它具有某些有限的函子性，下面将对此进行说明。首先注意，霍赫希尔德上同调关于第二个变量是协变的。另一方面，若 M 是一个 A-双模，则 k-代数的态射 $\phi\colon\ B \to A$ 会在 M 上诱导出一个 B-双模结构。于是，标量限制给出一个映射 $\phi^*\colon \mathrm{HH}^*(A, M) \to \mathrm{HH}^*(B, M)$，它连接霍赫希尔德上同调群 [Lod98，第 1 节5]；注意， ϕ^* 由上链映射 $C^*_{\mathrm{HH}}(A, M) \to C^*_{\mathrm{HH}}(B, M)$ 诱导，而霍赫希尔德上同调关于第一个变量是逆变的。后一性质意味着，霍赫希尔德上同调通常无法扩展为整个 k-代数及k-代数态射范畴上的函子 $A \mapsto \mathrm{HH}^*(A, A)$。

注记 2.5。 尽管霍赫希尔德上同调通常不具有函子性，但对于一类重要的 k-代数，函子性仍然成立；例如，限制到对称 Frobenius 代数范畴后，便得到一个（关于霍赫希尔德上同调的）反变函子 [Ger14]。

2.2. **基变换谱序列**。 设$\mathbf{Mod}_R$ 为环 R上的 R-模范畴，且**阿贝尔群范畴** 为阿贝尔群范畴。若 $R \to S$ 是环同态，且 N 是一个 S-模，则存在自然函子 $(-) \otimes_R S\colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S$和 $\mathrm{Hom}_S(-,\ N)\colon \mathbf{Mod}_S \to$**阿贝尔群范畴**，以及一个称为基变换谱序列的谱序列：

定理 2.6 （[CE99，第 XVI 章。5]）。 设 $\phi\colon\ A \to B$ 是 k-代数之间的一个态射。设 M 是左 A-模， N 是左 B-模（也通过 ϕ视为 A-模）。那么，存在一个上同调型谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_B^p(\mathrm{Tor}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{M}), \mathrm{N}) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{p+q}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$$

收敛到 $\mathrm{Ext}^*_A(M, N)$，且关于 M和 N均自然。

对于态射 $\phi\colon\ A \to B$ （ k-代数之间），以及给定的 B-模 N，定理 2.6 中的基变换谱序列是与函子 $\Phi = - \otimes_A B$和 $\Theta = \mathrm{Hom}_B(-, N)$ 相关联的 Grothendieck 谱序列，并且关于 A-模 M和 B-模 N均自然。我们还请参见 [SA07，第 2] 节，其中对其构造有更详细的描述。作为定理 2.6 的推论，我们得到一个收敛到霍赫希尔德上同调的谱序列（另见 [SA07，第 2.3.1] 节）：

推论 2.7。 设 $\phi\colon\ A \to B$ 为 k-代数之间的态射。那么，对于任意 B-双模 N，存在一个谱序列

$$\mathrm{Ext}_{B^e}^p(\mathrm{Tor}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{B}), \mathrm{N}) \Rightarrow \mathrm{HH}^*(\mathrm{A}, \mathrm{N})$$

它关于 N 是自然的（视为经由 ϕ 的 A-双模）。

证明。 态射 $\phi\colon\ A \to B$ 诱导出关联包络代数之间的态射 $\phi^e\colon\ A^e \to B^e$。根据定理 2.6，对于任意 B-双模 N，存在一个谱序列

$$\mathrm{Ext}_{B^e}^p(\mathrm{Tor}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{A^e}}(\mathrm{B^e}, \mathrm{A}), \mathrm{N}) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{A^e}}^*(\mathrm{A}, \mathrm{N})$$

收敛到 $\mathrm{Ext}^*_{A^e}(A,\ N) \cong \mathrm{HH}^*(A,\ N)$。由于 k 是一个域（更一般地说，若它是半单环），分次群 $\mathrm{Tor}_*^{\mathrm{A^e}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{B^{op}},\ \mathrm{A})$ 由 [CE99，推论 IX.4.4] 给出的典范同构 $\mathrm{Tor}_*^{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\ \mathrm{B})$。关于自然性的陈述可由基变换谱序列在 N 上的自然性推出。□

如果我们进一步假设 $\mathrm{Tor}_0^{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\ \mathrm{B}) = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}$ 同构于 B（作为 B-模，该同构由乘法诱导），那么基变换谱序列中的边缘态射给出一个映射

$$\mathrm{HH}^n(B) = \mathrm{Ext}_{B^e}^n(B, B) \to \mathrm{HH}^n(A, B) \tag{3}$$

这是一个 k-代数态射（其中霍赫希尔德上同调群和 Ext 群均配备相应的杯积）——参见。 [SA07]。另请注意，如果所有群 $\mathrm{Tor}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{B})$ 对于 $q \geq 1$ 均消失，那么基变换谱序列会在第二页退化，并收缩到 p-轴上。在这种情况下，全复形的同调以及群 $\mathrm{HH}^*(A, N)$ 都可以与群 $E^*,{}_\infty{}^0 = E^{*,2}{}^0 = \mathrm{Ext}^*_{B^e}(\mathrm{Tor}_0^{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{B}),\mathrm{N})$ 等同。

2.3. 函子（上）同调。设 $\mathbf{C}$ 是一个小范畴，$\mathbf{A}$ 是一个完备且余完备的阿贝尔范畴。给定一个函子 $\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A}$，我们回顾以 $\mathcal{F}$ 为系数的 $\mathbf{C}$ 的函子同调（分别为上同调）群 $\mathrm{H}_*(\mathbf{C};\mathcal{F})$（分别为 $\mathrm{H}^*(\mathbf{C};\mathcal{F})$）的定义。我们遵循 [GZ67] 和 [CCDT24，第 6 节。1]为此，我们首先用 Kan 延拓来定义函子（上）同调，然后给出一种更直接、可计算的方法。

设$\mathbf{1}$ 是一个只有一个对象和一个态射的范畴。存在唯一的函子 $\mathcal{T}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{1}$。由于$\mathbf{A}$ 是完备且余完备的，$\mathcal{F}$ 的左、右 Kan 延拓均存在。特别地，$\mathcal{F}$ 沿 $\mathcal{T}$ 的左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_{\mathcal{T}}\mathcal{F}$ 存在，并给出 $\mathcal{F}$的余极限函子。因此，$\mathcal{F}$上函子同调 $\mathrm{H}_n(\mathbf{C};\mathcal{F})$ 是 $\mathrm{Lan}_{\mathcal{T}}\mathcal{F}$的第 n 个左导出函子；例如参见 [Mac71]。我们用 $\mathrm{colim}_n\mathcal{F}$ 表示这类导出函子，它们也称为 $\mathcal{F}$的高阶余极限。类似地，沿 $\mathcal{T}$的右 Kan 延拓存在，并给出 $\mathcal{F}$的极限；因此，函子上同调 $\mathrm{H}^n(\mathbf{C};\mathcal{F})$ 由 $\lim\mathcal{F}$的第 n 个导出函子给出。我们用 $\lim^n\mathcal{F}$表示它们，它们也称为 $\mathcal{F}$ 的高阶极限 ——关于这两种方法的等价性，参见 [GZ67] 。

函子同调群可以更明确地计算为以下链复形的同调群:

$$\dots \xrightarrow{\partial_n} \bigoplus_{c_0\to\cdots\to c_n} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{c_0\to c_1\to c_2} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{c_0\to c_1} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{\partial_0} \bigoplus_{c_0\in\mathbf{C}} \mathcal{F}(c_0) \to 0$$

其以 $\mathbf{C}$ 的对象和态射所构成的链 $c_0 \to \cdots \to c_n$ 为指标。这个链复形配备了如下微分

$$\partial_n(f(c_0 \to \cdots \to c_{n+1})) = \mathcal{F}(c_0 \to c_1)f(c_1 \to \dots c_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i f(c_0 \to \cdots \to \widehat{c_i} \to \dots c_{n+1})$$

其中，$\widehat{c_i}$ 表示从链中移除对象 c_i，而 $(c_0 \to \cdots \to c_n)$ 表示将 $f \in \mathcal{F}(c_0)$ 包含映射到与序列 $c_0 \to \cdots \to c_{n+1}$ 对应的直和项中。

对偶地，Roos 复形 [Roo61] 计算函子上同调群 $\mathrm{H}^n(\mathbf{C};\mathcal{F})$。这是上链复形

$$0 \to \prod_{c_0\in\mathbf{C}} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{d^0} \prod_{c_0\to c_1} \mathcal{F}(c_1) \xrightarrow{d^1} \prod_{c_0\to c_1\to c_2} \mathcal{F}(c_2) \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \prod_{c_0\to\cdots\to c_n} \mathcal{F}(c_n) \xrightarrow{d^n} \dots$$

其微分为 d^n，在 $f \in \prod_{c_0\to\cdots\to c_n}\mathcal{F}(c_n)$ 上的取值为

$$\begin{aligned} d^n(f)(c_0 \to \cdots \to c_{n+1}) = (-1)^{n+1}\mathcal{F}(c_n \to c_{n+1})f(c_0 \to \cdots \to c_n) + \\ + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(c_0 \to \cdots \to \widehat{c_i} \to \dots c_{n+1})\,. \end{aligned}$$

在前述公式中，符号 $(c_0 \to \cdots \to c_n)$ 表示投影到与序列 $c_0 \to \cdots \to c_{n+1}$ 对应的因子。

注 2.8。使用逆变函子而非协变函子，也可以得到类似的构造——因此，这是对偶范畴$\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 的$\mathbf{C}$上的函子。注意，转到对偶范畴意味着 Roos 复形的描述也应相应修改。例如，如果 $\mathcal{F}$是$\mathbf{C}$上的逆变函子，那么计算$\mathbf{C}$ 上以 $\mathcal{F}$为系数的函子上同调的 Roos 复形为

$$0 \to \prod_{c_0\in\mathbf{C}} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{d^0} \prod_{c_0\to c_1} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{d^1} \prod_{c_0\to c_1\to c_2} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \prod_{c_0\to\cdots\to c_n} \mathcal{F}(c_0) \xrightarrow{d^n} \dots$$

函子同调也是如此。关于这一方法的进一步参考，见 [ET15]。

以函子为系数的范畴同调已得到广泛研究，相关文献也十分丰富。对于常值函子，函子（上）同调群仅取决于范畴$\mathbf{C}$ 的几何实现——参见 [Qui73]。特别地，根据 [Qui73，推论 2], ，若$\mathbf{C}$是一个具有初始元素的范畴，则以常值函子为系数的函子（上）同调是平凡的，且同构于一点的（单纯）同调。更一般地，我们有:

注记 2.9。设 R 是一个交换环，$\mathbf{C}$ 是一个具有始对象 c_0的范畴，且 $\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \to$ **模**$_R$ 是一个函子。那么，

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{C};\mathcal{F}) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \geq 1 \\ \mathcal{F}(0) & \text{if } n = 0 \end{cases}.$$

关于这一事实的证明，例如参见 [FP03，推论 3。13] 或参见 [ET22，引理 1（3）]。类似地，若 $\mathcal{F}$ 是反变函子，且$\mathbf{C}$ 有一个终对象 T，则有 $\mathrm{H}^*(\mathbf{C};\mathcal{F}) = 0$ for $* \geq 1$和 $\mathrm{H}^0(\mathbf{C};\mathcal{F}) = \mathcal{F}(T)$.

Baues 和 Wirsching 在 [BW85]，中将以函子为系数的范畴上同调推广为使用更一般系数系统的情形。我们在第 3.2 节回顾他们的构造。为避免混淆这两种概念，有时我们将范畴$\mathbf{C}$ 关于函子 $\mathcal{F}$ 的函子上同调简单记为 $\lim^n_{\mathbf{C}} \mathcal{F}$。

3. 图式霍赫希尔德上同调

本节回顾 k-代数图表的霍赫希尔德上同调定义，简称图式霍赫希尔德上同调。该理论由 Gerstenhaber 和 Schack 提出（因此有时也称为*Gerstenhaber-Schack* 上同调）；更多细节请参阅相关文献 [GS83a、GS83b、GS88a、GS88b] 及其中的参考文献。随后，我们将通过范畴的 Baues-Wirsching 上同调来描述图式霍赫希尔德上同调 [BW85]。尽管本节的大部分讨论适用于局部有限范畴，更一般地也适用于小范畴，但我们将仅讨论有限范畴的情形。

3.1. **Gerstenhaber-Schack 复形**。

设有限范畴$\mathbf{C}$上有一个 $\mathcal{A}$ k代数预层。所谓 k代数预层，是指一个函子

$$\mathcal{A}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k$$

从$\mathbf{C}$ 的对偶范畴到 k代数及 k代数同态所构成的范畴。 $\mathcal{A}$双模预层是$\mathbf{C}$上的函子 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$，满足对所有 $c \in \mathbf{C}$， $\mathcal{M}(c)$都是一个 $\mathcal{A}(c)$-双模；并且对$\mathbf{C}$ 中的每个态射 $c \to d$，映射 $\mathcal{M}(d) \to \mathcal{M}(c)$ 都是 $\mathcal{A}(d)$-模同态——其中 $\mathcal{M}(c)$通过映射 $\mathcal{A}(d) \to \mathcal{A}(c)$视为 $\mathcal{A}(d)$-模。

设$\mathrm{N}(\mathbf{C})$为范畴$\mathbf{C}$的神经，也就是说，它是$\mathbf{C}$ 的对象上的单纯复形，其中p-单形由$\mathbf{C}$ 中长度为 $p+1$的态射路径给出。若 $\sigma \in \mathrm{N}(\mathbf{C})_p$ 是一个 p-单形，我们将 σ写作$\mathbf{C}$中元素组成的链 $c_0 \to c_1 \to \cdots \to c_p$；对于这样的单形 σ，令$\max\,\sigma := c_p$，$\min\sigma := c_0$。利用式（1）中 Hochschild 上链复形的定义，我们构造一个双重分次的 k-模

$$C^{p,q}(\mathcal{A},\mathcal{M}) := \prod_{\sigma\in \mathrm{N}(\mathbf{C})_p} C^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(\max\sigma), \mathcal{M}(\min\sigma))\,, \tag{4}$$

其中指标 p,q 遍历所有非负整数。

注记 3.1. k-模 $C^{p,q}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 可视为定义在 $\mathrm{N}(\mathbf{C})_p$ 上的函数模 Γ，它将一个 p-单形 σ 映射为上链 $\Gamma^\sigma \in C^q\,\mathrm{HH}(\mathcal{A}(\max\,\sigma, \mathcal{M}\min\,\sigma)$。

双分次模 $C^{*,*}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 配备了一个垂直微分，即霍赫希尔德微分。此外，还有一个水平微分 $C^{*,q}(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to C^{*+1,q}(\mathcal{A},\mathcal{M})$，它由神经 $\mathrm{N}(\mathbf{C})$ 上的单形微分诱导而来。更确切地说，对于一个 p-单形 $\sigma := c_0 \to \cdots \to c_p$ 以及任意指标$r = 0,\ldots,p$，我们定义

$$\partial_r\sigma := c_0 \to \cdots \to \widehat{c_r} \to \cdots \to c_p$$

并定义 $\partial\sigma := \sum_r (-1)^r \partial_r$。注意，根据定义，对于$r = 1,\ldots,p-1$，我们有 $\min\,\partial_r\sigma = \min\,\sigma$，且 $\max\,\partial_r\sigma = \max\,\sigma$。现在，令 ϕ为由态射 $c_{p-1} \to c_p$诱导的代数态射 $\phi\colon \mathcal{A}(c_p) \to \mathcal{A}(c_{p-1})$。那么，由下式定义的上链 $\Gamma^{\partial_p\sigma}\phi$

$$(\Gamma^{\partial_p\sigma}\phi)(a_1,\ldots,a_q) := \Gamma^{\partial_p\sigma}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_q))\,,$$

其中 $a_1,\ldots,a_q \in \mathcal{A}(c_p)$ 是 $C^q\,\mathrm{HH}(\mathcal{A}(\max\,\sigma)\ \mathcal{M}(\min\,\sigma))$ 的一个元素。类似地，若 T是由态射 $c_0 \to c_1$诱导的态射 $\mathcal{M}(c_1) \to \mathcal{M}(c_0)$，则 $T\Gamma^{\partial_0}$ 属于上链群

$C^q{}_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(\max\ \sigma)\ \mathcal{M}(\min\ \sigma))$。双分次模 $C^{*,*}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 上诱导的单纯微分 d_{simp}：$C^{p-1,q}(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to C^{p,q}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 最终定义如下：

$$(d_{\mathrm{simp}}\Gamma)^\sigma := T\Gamma^{\partial_0\sigma} + \sum_{r=1}^{p-1}(-1)^r\Gamma^{\partial_r\sigma} + (-1)^p\Gamma^{\partial_p\sigma}\phi\,. \tag{5}$$

霍赫希尔德微分与单纯微分反交换，因此配备这些微分的 $C^{*,*}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 是一个双上链复形——参见 [GS83a，第 7] 节。

定义 3.2. 图表 $\mathcal{A}$ 上系数取自 $\mathcal{M}$ 的（图表式）霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A},\mathcal{M})$，定义为双复形 $(C^{*,*}(\mathcal{A},\mathcal{M})\ d_{\mathrm{simp}}, d_{\mathrm{HH}})$ 的全复形的上同调。

注 3.3. 若 C 是一个双上链复形，则其全复形 $\mathrm{Tot}(C)$ 上有两种自然滤过。第一种滤过是按列滤过 $F^I_p(\mathrm{Tot}(C))_n := \bigoplus_{r\geq p} C^{r,n-r}$。第二种（按行）滤过 F^{II} 与之互补：$F^{II}_q(\mathrm{Tot}(C))_n := \bigoplus_{r\geq q} C^{n-r,r}$。这两种滤过都会产生谱序列；若该双上链复形有界，则相应的谱序列收敛到全复形 $\mathrm{Tot}(C)$ 的上同调——例如参见 [McC01，定理 2.15]。

鉴于注记 3.3，为了计算图式霍赫希尔德上同调群，我们可以使用与双上链复形 $(C^{*,*}(\mathcal{A},\mathcal{M})\ d_{\mathrm{simp}}, d_{\mathrm{HH}})$ 相关的谱序列。

记号 3.4。在下文中，我们考虑如下获得的滤过：首先沿 q 方向取霍赫希尔德上同调微分，然后沿 p 方向取单纯微分。除非另有说明，我们将以 $\{IE^{*,*}_r\}_r$ 表示通过这种方式得到的谱序列。

3.2. **通过自然系统得到的图式霍赫希尔德上同调**。在本小节中，我们说明，收敛到有限范畴 $\mathbf{C}$上的图表 $\mathcal{A}$（其系数为 $\mathcal{M}$）的霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 的谱序列 $\{IE^{*,*}_r\}_r$ 的第二页，可以用 Baues-Wirsching 范畴上同调来描述。我们首先回顾自然系统的概念。

设$\mathbf{C}$ 是一个有限范畴，$\mathcal{A}$ 是$\mathbf{C}$ 上的一个 k-代数预层，$\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$-双模。注意，由于霍赫希尔德上同调不具函子性（见注 2.4），预层 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{M}$ 通常不会在$\mathbf{C}$上给出一个系数局部系统。事实上，对于神经$\mathbf{C}$中的给定单形 $\tau\subseteq\sigma$，不存在显然的函子映射

$$C^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(\max\sigma),\mathcal{M}(\min\sigma)) \to C^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(\max\tau),\mathcal{M}(\min\tau))$$

由 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{M}$诱导。因此，我们无法直接用带扭系数的同调来描述与双复形$(C^{*,*}(\mathcal{A},\mathcal{M})\ d_{\mathrm{simp}}, d_{\mathrm{HH}})$ 相关联的谱序列 $\{IE^{*,*}_r\}_r$。然而，复形 $C^q{}_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(\max\ -)\ \mathcal{M}(\min\ -))$在$\mathbf{C}$上给出一个自然系统 [BW85]，如下文所述。

对于小范畴$\mathbf{C}$，扭箭范畴 $\mathrm{Tw}\mathbf{C}$ 是一个范畴，其对象为$\mathbf{C}$ 的态射集；其同态集 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}}(f,g)$由$\mathbf{C}$ 中的态射对(α,β)组成，这些态射使图表

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{\alpha} & d' \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ c & \xleftarrow[\beta]{} & c' \end{array}$$

可交换。复合由并置定义：

$$(\alpha',\beta')\circ(\alpha,\beta) = (\alpha'\circ\alpha, \beta\circ\beta')\,.$$

注意，存在一个双函子 $\mathrm{Tw}\ \mathbf{C}\ \to \mathbf{C}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{C}$，它将 $f\colon c\to d$ 映射为 $(c,\ d)$。

定义 3.5 ([BW85])。范畴 $\mathbf{C}$ 上的一个自然系统 是一个函子 $F\colon \mathrm{Tw}\mathbf{C}\ \to$ **阿贝尔群范畴** .

当上述态射 α 或 β 是$\mathbf{C}$的恒等态射时，我们令 $\alpha_* := F(\alpha,1)$ 和 $\beta^* := F(1,\beta)$。这些是通过与$\mathbf{C}$中每个箭头 f 进行前复合和后复合所诱导的同态。

给定范畴$\mathbf{C}$上的一个自然系统 F，我们如下定义$\mathbf{C}$的系数取自 F的上同调群 $H^*_{BW}(\mathbf{C}\ F)$。 n上链群定义为

$$C^n_{BW}(\mathbf{C},F) \coloneqq \prod_{c_n \xrightarrow{f_n} c_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_1} c_0} F(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)$$

我们可以将其视为 F 在$\mathbf{C}$的神经各元素处的取值，并可将其元素视为函数 Γ。上余边界 δ_{BW}定义为公式

$$\begin{aligned}(\delta_{BW}\Gamma)(f_1,\dots,f_n) =& f_{1*}\Gamma(f_2,\dots,f_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\Gamma(f_1,\dots,f_if_{i+1},\dots,f_n)+\\ &+(-1)^n f_{n*}\Gamma(f_1,\dots,f_{n-1})\,.\end{aligned}$$

We r关于构造的更多细节及其性质说明，请参阅 [BW85] es.

定义 3.6. $\mathbf{C}$的（*Baues-Wirshing*）上同调 $H^*_{BW}(\mathbf{C};\ F)$，即$\mathbf{C}$ 上取值于自然系统 F的上同调，是上链复形 $(C^*_{BW}(\mathbf{C}\ F)\ \delta_{BW})$ 的上同调。

现在我们回到图式霍赫希尔德上同调。设$\mathbf{C}$ 为一个有限范畴， $\mathcal{A}$ 为$\mathbf{C}$ 上的 k-代数预层， $\mathcal{M}$ 为一个 $\mathcal{A}$-双模。对于$\mathbf{C}$中的每个态射 $f\colon\ c \to d$，我们定义

$$\mathcal{C}^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A},\mathcal{M})(f) \coloneqq C^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(d),\mathcal{M}(c))\,. \tag{6}$$

若 $g\colon\ c' \to d'$是$\mathbf{C}$中的另一个态射，且 $(\alpha,\beta)\colon\ f \to g$是 Tw $\mathbf{C}$中的一个态射，根据注记 2.4，我们得到一个自然映射

$$\mathcal{C}^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A},\mathcal{M})(\alpha,\beta)\colon \mathcal{C}^q_{\mathrm{HH}}(f) = C^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(d),\mathcal{M}(c)) \to C^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A}(d'),\mathcal{M}(c')) = \mathcal{C}^q_{\mathrm{HH}}(g) \tag{7}$$

由标量限制通过 α 和 β给出。

引理 3.7. 对于每个 $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^q{}_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 都是 $\mathcal{C}$ 上的一个自然系统。

证明。对于每个 $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^q$ ， HH$(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 通过方程 (6) 和 (7) 定义在 C 的扭箭范畴的对象和态射上。当应用于 Tw C 的恒等态射 $(1_c,1_c)$ 时，根据方程 (7)，诱导映射 $\mathcal{C}^q$HH$(\mathcal{A},\mathcal{M})$: $\mathcal{C}^q$ HH$(\mathcal{A},\mathcal{M})(1_c) \to \mathcal{C}^qHH(\mathcal{A},\mathcal{M})(1_c)$ 是群 C^qHH$(\mathcal{A}(c)\ \mathcal{M}(c))$ 的恒等态射。此外，根据方程 (7)，$\mathcal{C}^q$HH$(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 保持 Tw C 中的复合。因此， $\mathcal{C}^q$HH$(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 给出一个函子 $\mathcal{C}^q$HH$(\mathcal{A},\mathcal{M})$: Tw C $\to$阿贝尔群范畴，它定义在 Tw C 上；也就是说，它是 C 上的一个自然系统。□

直接比较定义可得以下命题。

命题 3.8。 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{C}$ 上的一个 k-代数预层，且 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{A}$-双模预层。则，

$$(C^{q,*}(\mathcal{A},\mathcal{M}),d_{\mathrm{simp}}) \cong (C^*_{BW}(\mathbf{C},\mathcal{C}^q_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A},\mathcal{M})),\delta_{BW})\,,$$

对所有 $q \in \mathbb{N}$。

证明。 设 q 为一个自然数。根据引理 3.7， $\mathcal{C}^q{}_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 是 $\mathbf{C}$ 上的一个自然系统。$(C^*_{BW}(\mathbf{C}\ \mathcal{C}^q{}_{\mathrm{HH}}(\mathcal{A},\ \mathcal{M}))\ \delta)$ 的 n-上链恰好是式 (4) 中定义的上链复形 $(C^{q,\ *}(\mathcal{A},\ \mathcal{M})\ d_{\mathrm{simp}})$ 的 n-上链。将微分 δ_{BW} 与式 (5) 中的微分进行比较可知，这两个微分在上链上的作用方式相同，从而得到所需的同一。□

注意，命题 3.8 中的同一也保持了上链复形作为基域 k 上的分次向量空间的结构，但我们不使用这一事实。

注记 3.9. 给定一个范畴 $\mathbf{C}$、一个取值于 k-代数的预层 $\mathcal{A}$ on$\mathbf{C}$ 以及一个取值于 $\mathcal{A}$-双模的预层，我们也可以定义函子

$$\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})\colon \mathrm{Tw}\,\mathbf{C} \to \mathbf{Ab} \tag{8}$$

它将 $\mathbf{C}$ 的一个态射 $f\colon\ c \to d$ 关联到阿贝尔群 HH$^q(\mathcal{A}(d)\ \mathcal{M}(c))$。根据注 2.4，我们可以像公式 (7) 中那样，将 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 的定义从 Tw $\mathbf{C}$ 的对象扩展到其态射。于是， $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})$ 也在$\mathbf{C}$上给出了一个自然系统。

令 $IE^{*,*}_1$ 为记号 3.4 中所考察的谱序列的第一页，即对双复形 $(C^{*,*}(\mathcal{A},\mathcal{M}),\ d_{\mathrm{simp}}, d_{\mathrm{HH}})$ 先关于垂直（Hochschild）微分取同调后得到的谱序列。根据命题 3.8，我们得到一个同一

$$(IE^1_{q,*}, d_{\mathrm{simp}}) = (C^*_{BW}(\mathbf{C}, \mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})), \delta_{BW}) \tag{9}$$

谱序列第一页各行与 $,*$ 以及带有自然系统 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 系数的$\mathbf{C}$ 的 Baues-Wirshing 上链复形之间。由此，我们可以用$\mathbf{C}$的 Baues-Wirshing 上同调群以及自然系统 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\ \mathcal{M})$ 的系数来描述此类谱序列第二页 $IE^{*,}{}_2{}^q$ 的各行。总结如下：

命题 3.10。 设$\mathbf{C}$ 为一个小范畴， $\mathcal{A}$ 为$\mathbf{C}$ 上的一个 k-代数预层， $\mathcal{M}$为一个 $\mathcal{A}$-双模预层。那么，对于所有 p、 $q \in \mathbb{N}$，谱序列第二页 $IE^{*,}{}_2{}^*$ 中出现的上同调群由以下 *Baues-Wirshing* 上同调群给出：

$$IE_2^{p,q} \cong H^p_{BW}(\mathbf{C}; \mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M}))\ .$$

因此，它们可以计算为$\mathbf{C}$ 的上同调，其系数取为自然系统 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})$。

据作者所知，命题 3.10 最早由 [Rob08] 提出（另见学位论文 [Rob11]，尤其是第 5.7 节），而近期它虽以不同形式出现在 [Mun24]中。鉴于 Baues-Wirsching 上同调群的性质，我们还可以将谱序列 $IE^{*,*}$ 第二页的各行与更经典的函子上同调群对应起来。事实上，根据 [BW85、定理 4.4 和注记 8.7],，我们得到如下同构

$$H^n_{BW}(\mathbf{C}, F) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}}(\mathbb{Z}, F) \cong \lim^n_{\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}} F \tag{10}$$

范畴$\mathbf{C}$ 中取自然系统 F 为系数的上同调、Ext 群，以及范畴 Tw$\mathbf{C}$ 中取 F 为系数（将其视为 Tw$\mathbf{C}$ 上的函子）的函子上同调群之间。因此，鉴于命题 3.10，我们得到如下结论：

定理 3.11。 设$\mathbf{C}$ 是一个有限范畴， $\mathcal{A}$ 是$\mathbf{C}$ 上的 k-代数预层， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$-双模。则存在一个第一象限谱序列

$$IE_2^{p,q} \cong \lim^p_{\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}} \mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})$$

收敛于图式霍赫希尔德上同调$\mathrm{HH}^*_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A},\mathcal{M})$。

证明。 考虑来自记号 3.4 的谱序列 $\{IE^{*,*}_r\}_r$ 。按构造，它收敛于 $\mathrm{HH}^*_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A},\mathcal{M})$，其第一页根据公式 (9) 同一于$\mathbf{C}$ 上以自然系统 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})$为系数的上链复形：Tw $\mathbf{C}$ $\to$**阿贝尔群范畴**。于是，对于每个 $q \in \mathbb{N}$，应用单纯微分可将第二页的各行 $IE^{*,}{}_2{}^q$ 同一于$\mathbf{C}$ 上以 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{M})$为系数的上同调。由公式 (10)即得结论。□

我们给出一个说明性示例。

例 3.12. 考虑范畴 $[n]$，它的对象为自然数 0,…, n，且当且仅当 $i \le j$ 时存在态射 $i \to j$ 。 $[n]$ 上的 k-代数预层为每个满足 $i \le n$ 的数 i关联一个 k-代数 A_i ，并为 $i \le j$ 关联一个 k-代数态射 $A_j \to A_i$。因此，对每个 $i \le j$，我们有 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{A})(i \to j) = \mathrm{HH}^q(A_j, A_i)$。考虑满足 $i' \le i$ 和 $j \le j'$ 的指标 i', j' ；于是我们得到一个态射

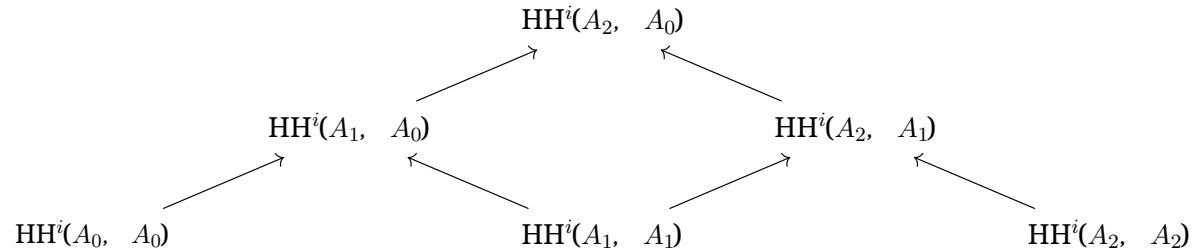
$$\begin{array}{ccc} j & \xrightarrow{j\le j'} & j' \\ {\scriptstyle i\le j}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i'\le j'} \\ i & \xleftarrow[i'\le i]{} & i' \end{array}$$

在扭箭范畴 Tw$[n]$ 中。自然系统 $\mathcal{HH}^i(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 给出一个映射

$$\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{A})((i,j) \to (i',j')) \colon \mathrm{HH}^q(A_j, A_i) \to \mathrm{HH}^q(A_{j'}, A_{i'})$$

（请回忆，霍赫希尔德上同调在第一个变量上是逆变的，在第二个变量上是协变的，并且 $\mathcal{A}$ 在 $[n]$ 上是逆变的）定义了霍赫希尔德上同调群之间的映射。此外，该映射

由标量限制诱导。在 $n = 2$的情况下，它产生如下的 k-代数图表（其中省略了所有复合）：



由定理 3.11 可得 $IE^{p}{}_{2}{}^{q} = \lim^{p}{}_{\mathrm{Tw}[n]}\, \mathcal{HH}^{q}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$，因此，此类谱序列第二页的第 q 行是自然系统 $\mathcal{HH}^{q}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 的高阶极限。

例 3.12 中的范畴 $[n]$ 是一个自由范畴，这意味着它是由一个有向图自由生成的范畴。对于这类范畴，其（Baues-Wirshing）上同调维数存在上界。我们首先需要给出一个定义：

定义 3.13。 设$\mathbf{C}$ 是一个小范畴。称（可能为无限的）自然数

$$\dim \mathbf{C} := \min\{N \mid H^{k}_{BW}(\mathbf{C}; D) = 0 \text{ for all } k > N \text{ and all natural systems } D\}$$

为维数 of $\mathbf{C}$。

范畴的维数与其同调性质有关。特别地，自由范畴的高阶 Baues-Wirshing 上同调消失；事实上，如果$\mathbf{C}$ 是一个自由范畴，那么 $\dim\mathbf{C} \leq 1$，由 [BW85，定理 6.3(A)]。

推论 3.14. 设$\mathbf{C}$ 是一个自由范畴。那么， $IE^{p}{}_{2}{}^{q} = 0$ 对所有 $p \geq 2$ 和 $q \geq 0$均成立。

证明。 根据假设，$\mathbf{C}$ 是一个自由范畴；由 [BW85, 定理 6.3(A)] 可知，其维数至多为 1。因此，$H^{p}_{BW}(\mathbf{C}\ \mathcal{HH}^{q}(\mathcal{A}, \mathcal{M})) = \lim^{p}{}_{\mathrm{Tw}\mathbf{C}}\, \mathcal{HH}^{q}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = 0$ 对所有 $p \geq 2$均成立。结论得证。□

根据推论 3.14，收敛到图式霍赫希尔德上同调的谱序列的第二页仅集中在两个非平凡列上。因此，计算霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^{n}_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 只需解决涉及同调群 $\lim^{0}_{\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}}\, \mathcal{HH}^{n}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 和 $\lim^{1}_{\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}}\, \mathcal{HH}^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 的扩张问题。为进一步简化这些高阶极限的计算，我们可以例如将考察范围限制为对称 Frobenius 代数或关联代数的预层。事实上，在这种情况下，扭箭范畴上的高阶极限可化为$\mathbf{C}$上的高阶极限。下一节将重点讨论涉及同调满射的图表。

4. 同调满射图表

本节首先按照 [GL91、dlPX06、SA07、Her16], 的论述，回顾 k-代数的同调满射概念及其若干性质。随后，我们分析代数图式与同调满射图式相关的图式霍赫希尔德上同调。

4.1. 同调满射。令 Mod_{A} 为 k-代数 A 上有限生成（左）模所成的范畴。对于 k-代数的态射 ϕ: $A \to B$，记标量限制函子 $\phi^{*}\colon \mathrm{Mod}_{B} \to \mathrm{Mod}_{A}$，它通过 ϕ 将 B- 模视为 A- 模。若 M、 N 是 B-模，则由标量限制给出的自然映射 $\mathrm{Hom}_{B}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{A}(M, N)$ 会诱导 Ext 群的自然同态 $\mathrm{Ext}^{i}_{B}(M, N) \to \mathrm{Ext}^{i}_{A}(M, N)$。同样，对于所有 B-模 M，也存在自然态射 $\mathrm{Hom}_{A^{e}}(B, M) \to \mathrm{Hom}_{A^{e}}(A, M)$ 和 $\mathrm{Ext}^{i}_{A^{e}}(B, M) \to \mathrm{Ext}^{i}_{A^{e}}(A, M)$。

回忆一下， k-代数之间的态射 ϕ: $A \to B$ 若是环范畴中的满态射，则称为满态射 。这等价于要求限制函子 $\phi^{*}\colon \mathbf{Mod}_{B} \to \mathbf{Mod}_{A}$忠实且满。态射 ϕ: $A \to B$ 是满态射，当且仅当乘法映射 $\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{0}(\mathrm{B},\mathrm{B}) = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ 是 B-模之间的同构 [Sil67, 命题 1.1]。

例 4.1。 代数的满射也是满态射。反之，有限满态射也是满射。

请注意，并非所有满态射都是满射；例如，包含映射 $bZ \to \mathbb{Q}$ 是满态射，但它不是满射。

注 4.2 ([Sil67，推论 1.2])。如果 $\phi\colon\ A \to B$ 是一个满态射，那么 ϕ 将 A 的中心映射到 B 的中心中。

对于一个环 R，考虑链复形的同伦范畴 $K(R)$，其中链复形取自 R-模；以及导出范畴 $D(R) = D$（**模**$_R$），即通过对 $K(R)$ 中的拟同构取逆而得到的范畴。我们只考虑有界链复形，并将与 k-代数 A 和 B 相关的有界导出范畴分别记为 $D^b(A)$ 和 $D^b(B)$。一个 k-代数的态射 $\phi\colon\ A \to B$ 还给出一个导出标量限制函子 $D^b(\phi^*)\colon\ D^b(B) \to D^b(A)$，其连接相关的导出范畴。

定义 4.3 ([GL91，定义 4.5])。代数态射 $\phi\colon\ A \to B$ 是一个同调满射，如果诱导的函子

$$D^b(\phi)\colon D^b(B) \to D^b(A)$$

是全忠实的。

同调满射的概念扩展了代数满态射的概念。事实上，如果$\phi\colon\ A \to B$ 是一个具有 B A-平坦性的 k-代数满态射，那么 ϕ 是一个同调满射 [GL91，推论 4.7 (1)]。同调满射还有多种用 Ext 和 Tor 函子表述的刻画。关于以下刻画，我们参考 [GL91，定理 4.4] 和 [dlPX06，引理 2.1];

引理 4.4. 设 $\phi\colon\ A \to B$ 是一个代数满态射。那么，以下条件等价：

- ϕ 是一个同调满射；
- ϕ_{op} 是一个同调满射；
- $\mathrm{Tor}^A_i(B, M) = 0$ 对所有 $i \geq 1$ 以及所有 B-模 M均成立；
- $\mathrm{Tor}^A_i(B, B) = 0$ 对所有 $i \geq 1$均成立；
- $\mathrm{Ext}^i_A(B, M) = 0$ 对所有 $i \geq 1$ 以及所有 B-模 M均成立；
- $\mathrm{Ext}^i_A(B, B) = 0$ 对所有 $i \geq 1$均成立；
- 对所有 $i \geq 1$ 和 B-模 M，N，自然态射都是同构。
$$\mathrm{Ext}^i_B(M, N) \to \mathrm{Ext}^i_A(M, N)$$

根据引理 4.4，若 ϕ 是同调满射，则 $\phi^e\colon\ A^e \to B^e$ 也为同调满射——参见 [dlPX06, 命题 2.3 (3)]。此外，沿同调满射进行标量限制会诱导映射 $\mathrm{HH}^i(B) = \mathrm{Ext}^i_{B^e}(B, B) \to \mathrm{Ext}^i_{A^e}(B, B)$，对所有情形均为同构 $i \geq 1$ [dlPX06, 命题 2.3 (4)]。一项更一般的结果最初由 [dlPX06, 命题 3.1] 证明，并在 [SA07, 命题 5.3], 中得到推广，它揭示了与霍赫希尔德上同调的如下联系：

命题 4.5。设 $\phi\colon\ A \to B$ 是 k-代数之间的满态射。若 ϕ 同时也是同调满射，则存在一个自然同构

$$\mathrm{HH}^*(B, -) \to \mathrm{HH}^*(A, -)$$

它是从 B-双模范畴到自身的函子之间的自然同构。

证明。根据引理 4.4，对于所有正的 i 和 B-双模 M，群 $\mathrm{Tor}^A_i(B, M)$ 均为零。此外，群 $\mathrm{Tor}^A_0(B, B)$ 作为 B-双模同构于 B。因此，推论 2.7 的谱序列在第二页退化；所有高阶微分均为平凡微分。换环谱序列的自然性给出一个变换

$$\mathrm{HH}^n(B, -) = \mathrm{Ext}^n_{B^e}(B, -) \to \mathrm{HH}^n(A, -)$$

它是分次模之间的自然同构。 □

若 A和 B是有限维 k 代数，则命题 4.5 中相关霍赫希尔德上同调群之间的态射可以更明确地描述如下：

命题 4.6。 设 $\phi\colon A \to B$ 是有限维 k 代数之间的满态射，且 核 ϕ 是一个 A^e-投射模。若 ϕ 还是一个同调满射，则标量限制诱导出同构

$$\mathrm{HH}^n(B,M) \to \mathrm{HH}^n(A,M)$$

对所有 B-双模 M 以及所有 $n \geq 0$。

为完整起见，我们附上证明，摘自 [dlPX06，命题 3.1]。

证明。 考虑 A^e-模的短正合列

$$0 \to \ker\phi \to A \xrightarrow{\phi} B \to 0\,.$$

对于任意 B-双模 M，应用反变函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,M)$。于是，我们得到一个涉及 A^e 上 Ext 群的长正合列。特别地， ϕ 诱导出态射 $\mathrm{Hom}_{A^e}(B,M) \to \mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$ 和 $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(B,M) \to \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M)$。我们有 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\ker\phi, M) = 0$，并且由于 $\ker\phi$ 是一个投射 A^e-模，群 $\mathrm{Ext}_{A^e}(\ker\phi, M)$ 为零。于是，根据引理 4.4，同调满射 ϕ 诱导出同构 $\mathrm{Ext}^n_{B^e}(B,M) \to \mathrm{Ext}^n_{A^e}(B,M)$；因此，这些态射

$$\mathrm{HH}^n(B,M) = \mathrm{Ext}^n_{B^e}(B,M) \to \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M) = \mathrm{HH}^n(A,M)$$

对所有 B-双模 M 以及所有 $n \geq 0$，结论均成立。 □

由命题 4.5 可得以下推论——另见 [SA07]。

推论 4.7。 设 $\phi\colon A \to B$ 是 k-代数之间的满态射。若 ϕ 也是同调满射，则它会诱导同构 $\mathrm{HH}^i(B,B) \to \mathrm{HH}^i(A,B)$，对所有 $i \geq 0$均成立。

证明。 将命题 4.5 应用于作为 B-模的 $B = M$。 □

更确切地说，推论 4.7 中的同构可写为以下复合

$$\mathrm{HH}^i(B) = \mathrm{Ext}^i_{B^e}(B,B) \to \mathrm{Ext}^i_{A^e}(B,B) \to \mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,B) = \mathrm{HH}^i(A,B) \tag{11}$$

其中，第一个映射是引理 4.4 中由标量限制诱导的自然同构，第二个映射则是通过应用函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,B)$ 由 ϕ 诱导的态射。

现在设 I 为态射 $\phi\colon A \to B$ 的核，其中 $A \to B$ 是 k-代数，并考虑正合列

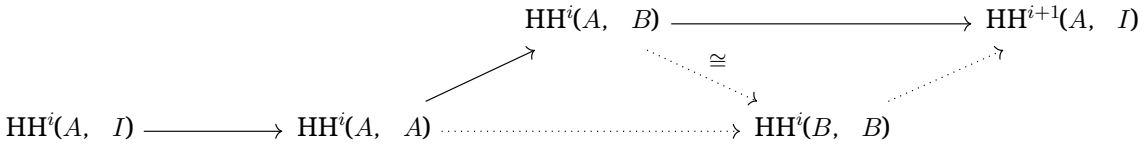
$$0 \to I \to A \to B \to 0\,.$$

应用函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,\ -)$ 后，我们得到长正合列

$$0 \to \mathrm{HH}^0(A,I) \to \mathrm{HH}^0(A) \to \mathrm{HH}^0(A,B) \to \mathrm{HH}^1(A,I) \to \mathrm{HH}^1(A) \to \mathrm{HH}^1(A,B) \to \dots$$

由此长正合列可得，对每个 $i \geq 0$，交换图表

(12)



虚线同构是公式（11）中同构的逆，而其他虚线箭头则是由此得到的映射的复合，因此所有三角图都交换。所得映射 $\mathrm{HH}^i(A,\ A) \to \mathrm{HH}^i(B,\ B)$ 还可以用更熟悉的方式来描述，即通过标量变换来描述，下面我们将对此进行解释。首先，若 M 是一个 B-双模，那么 $\phi\colon A \to B$ 这一 k-代数态射会在 M 上诱导出一个 A-双模结构，我们将其明确写作 $\phi^*(M)$。再考虑诱导出的态射 $\phi^e\colon A^e \to B^e$。

注 4.8。 沿着态射 $\phi^e\colon A^e \to B^e$ 的限制函子 ϕ^{e*} 有一个左伴随，给定为

$$B^e \otimes_{A^e} - \cong B \otimes_A - \otimes_A B\,.$$

态射 $\phi\colon A \to B$ 诱导出一个映射 $\phi^*\colon \mathrm{HH}^*(B,\ M) \to \mathrm{HH}^*(A,\ \phi^*(M))$，它作用于 Hochschild 上同调群。由公式（2）可知，这可以写成 $\mathrm{Ext}^*_{B^e}(B,\ M) \to \mathrm{Ext}^*_{A^e}(A,\ \phi^*(M))$。利用 A 的巴分解 $\mathbb{B}A$，对每个 n，我们有

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, \phi^*(M)) = H^n \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathbb{B}A, \phi^*(M))\ .$$

那么，注 4.8 中的伴随——另见 [Her16，引理 8.2] ——诱导出一个同构

$$H^n \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathbb{B}A, \phi^*(M)) \cong H^n \operatorname{Hom}_{B^e}(B \otimes_A \mathbb{B}A \otimes_A B, M)$$

上同调群之间的同构；并且根据 [Her16，引理 7.13]，$B \otimes_A \mathbb{B}A \otimes_A B$ 可得 B 在 B^e 上的一个投射分解——前提是 ϕ 是同调满射。因此，我们得到一个同构$H^n \operatorname{Hom}_{B^e}(B \otimes_A \mathbb{B}A \otimes_A B, M) \cong \mathrm{Ext}^n_{B^e}(B, M)$。所诱导的映射

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, \phi^*(M)) \to \mathrm{Ext}^n_{B^e}(B, M)$$

当 $M = B$ 时，该映射给出同构 (11) 的逆映射，并得到推论 4.7 的以下版本：

引理 4.9 ([Her16，引理 8.2])**.** 设 A 是一个 k-代数，$I \subseteq A$ 是一个双边理想，且 $\pi\colon A \to B$ 是商。假设 A 和 $B := A/I$ 都是 k-模上的投射模。那么，若对所有 $i \geq 1$，$\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{B},\mathrm{B}) = 0$，则函子

$$B \otimes_A - \otimes_A B\colon \mathbf{Mod}(A^e) \to \mathbf{Mod}(B^e)\ ,$$

与限制标量函子伴随，从而得到一个同构

$$\mathrm{HH}^*(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{HH}^*(B)$$

在$\mathrm{HH}^*(A)$上的分次模。

鉴于 [Her16，定理 8.11]，，所得复合

$$\mathrm{HH}^*(A, A) \to \mathrm{HH}^*(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{HH}^*(B, B)$$

由导出张量积 $B \otimes^{\mathbb{L}}_A - \otimes^{\mathbb{L}}_A B$ 诱导，从而完成了对图（12）的描述。在引理 4.9 的假设下，我们得到一个联系 A、I和 B的霍赫希尔德上同调群的长正合列：

推论 4.10 ([Her16, 定理 8.11])。设 $\pi\colon\ A \to A/I$，并令 $B\colon = A/I$。若 π 是同调满射，则存在一个诱导的长正合列

$$0 \to \mathrm{HH}^0(A, I) \to \mathrm{HH}^0(A) \to \mathrm{HH}^0(B) \to \mathrm{HH}^1(A, I) \to \mathrm{HH}^1(A) \to \mathrm{HH}^1(B) \to \cdots \tag{13}$$

霍赫希尔德上同调群。

从引理 4.9 和推论 4.10 可见，同调满射在霍赫希尔德上同调计算中十分重要。此外，同调满射还与相关理想的同调性质有关。例如，根据推论 4.10，若假设映射 $\pi\colon A \to A/I$ 是同调满射，为了比较代数 A 和 B的 Hochschild 上同调，我们还需要计算相对上同调群 $\mathrm{HH}^*(A,\ I)$。现在我们回顾同调理想的概念，该概念可追溯至 Auslander（见 [APT92], , 其中这类理想被称为强幂等理想）。

定义 4.11。A 的理想 I 称为同调理想，如果商 $\pi\colon A \to A/I$ 是同调满射。

若 $\phi\colon A \to B$ 是满态射，且令 $I\coloneqq$ 为核 ϕ，则有 $\mathrm{Tor}^{\mathrm{A}}_1(\mathrm{B},\ \mathrm{B}) \cong \mathrm{I}/\mathrm{I}^2$；因此，若 ϕ也是同调满射，则由引理 4.4 可知 I 是幂等的。我们有一个部分逆命题，这将在下一节中派上用场：

引理 4.12 ([dlPX06, 命题 2.2 (c)])。设 I 是 A 的一个理想，它是一个投射 A-模，且 $I/I^2 = 0$。则 $\pi\colon\ A \to A/I$ 是一个同调满射。

证明。 取短正合列

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

并应用函子 $-\otimes_A B$。我们得到，对所有 $i \geq 2$，$\mathrm{Tor}_i^A(A/I, A/I) \cong \mathrm{Tor}_{i-1}^A(I, A/I)$。另一方面，$\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/I) \cong I/I^2$。于是，由于 I 是一个投射 A-模，且 $I/I^2 = 0$，所有 Tor 群都消失。□

现在令 $\mathbf{Alg}_k^{\mathrm{Hepi}}$ 为 k-代数及同时为满射的代数同调满射所构成的范畴。当 k 是交换环时，我们还考虑范畴 $\mathbf{Alg}_{k}^{\mathrm{Hepi},\mathrm{pr}}$，它是 $\mathbf{Alg}_k^{\mathrm{Hepi}}$ 中由作为 k-模的投射代数组成的满子范畴；若 k 是域，这两个范畴便相同。Gan21 引理 A.2] 已证明，霍赫希尔德上同调关于（dg）范畴之间的同调满射具有函子性；同样的论证也适用于 k-代数的情形，从而得到如下结果：

命题 4.13。 设 k 是一个交换环。那么，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，霍赫希尔德上同调

$$\mathrm{HH}^i \colon \mathbf{Alg}_k^{\mathrm{Hepi,pr}} \to \mathbf{Ab}$$

给出一个函子。

主要论证依赖于这样一个事实：标量扩张函子作为标量限制函子的左伴随，经由同调满射将对角双模映射到对角双模，参见 [Gan21, 引理 A.1]和 [Efi20, 命题 3.4]。我们在此回顾一下，范畴的霍赫希尔德上同调的函子性最早由 Keller 展示，且论述更为详尽 [Kel03, Kel21],；不过，近来也有更一般的结果，参见例如 [Per22, HW25]。

4.2. **具有同调满射的图表式霍赫希尔德上同调**。 设$\mathbf{C}$是一个小范畴， $\mathcal{A}$ 是$\mathbf{C}$上的一个 k-代数预层。若所有诱导映射$\mathcal{A}_{c,d}$: $\mathcal{A}(d) \to \mathcal{A}(c)$都是满射，则称 $\mathcal{A}$ 是满射的。类似地，我们为预层定义同调满射：

定义 4.14. 预层 $\mathcal{A}$: $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k$ 是同调满射，当且仅当诱导映射$\mathcal{A}_{c,d}$: $\mathcal{A}(d) \to \mathcal{A}(c)$对所有$\mathbf{C}$中的态射 $c \to d$ 都是 k-代数之间的同调满射。

同调同态 $\mathcal{A}$ 是一个函子 $\mathcal{A}$: $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k^{\mathrm{Hepi}}$ 。根据命题 4.13，将次数为 i的霍赫希尔德上同调的复合 $i \geq 0$与预层 $\mathcal{A}$: $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k^{\mathrm{Hepi}}$ 复合，可得到一个函子

$$\mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(-), \mathcal{A}(-)) = \mathrm{HH}^i \circ \mathcal{A} \colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

为稍微滥用记号起见，我们将其记为 $\mathrm{HH}^i(\mathcal{A}, \mathcal{A})$。

定理 4.15. 设 $\mathcal{A}$: $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_{,k}^{\mathrm{Hepi}}$ 是一个满同调满射。那么，高阶极限$\lim^p{}_{\mathrm{Tw}\mathbf{C}} \mathcal{HH}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 与$\lim^p{}_{\mathbf{C}} \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}(-)\ \mathcal{A}(-))$ 同构。特别地，我们有一条同构链

$$H^p_{BW}(\mathbf{C}, \mathcal{HH}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})) \cong \lim^p_{\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}} \mathcal{HH}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \cong \lim^p_{\mathbf{C}} \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \cong H^p(\mathbf{C}, \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}))\ ,$$

对所有 p、$q \geq 0$。

证明。 我们只需证明第二个同构。令 $c \to d$为 $\mathbf{C}$中的一个箭头，并考虑由 $c \to d$诱导的 k-代数态射 $\mathcal{A}_{c,\ d}$: $\mathcal{A}(d) \to \mathcal{A}(c)$。根据假设，这是一个满同调满射。如上一节所示，对所有 $i \in \mathbb{N}$，我们都有自然同构 $\mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(d)\ \mathcal{A}(c)) \cong \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c)\ \mathcal{A}(c))$，并且根据命题 4.13，我们得到一个函子

$$\mathrm{HH}^i \circ \mathcal{A} \colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

它将 $\mathbf{C}$ 中的对象 c 对应到霍赫希尔德上调群 $\mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c)\ \mathcal{A}(c))$；对于$\mathbf{C}$ 中的态射 $c \to d$，它对应于由标量扩张诱导的映射 $\mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(d)) \to \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c))$。

现在考虑式 (8) 中的自然系统 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\ \mathcal{A})$。我们要证明存在函子 η: $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\ \mathcal{A}) \to \pi \circ \mathrm{HH}^q \circ \mathcal{A}$ 之间的自然同构，该同构由图表给出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tw}\,\mathbf{C} & \xrightarrow{\mathcal{HH}^q(\mathcal{A},\mathcal{A})} & \mathbf{Ab} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\mathrm{HH}^q\circ\mathcal{A}} & \\ \mathbf{C}^{\mathrm{op}} & & \end{array}$$

其中 $\pi\colon \mathrm{Tw}\,\mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 是标准投影。事实上，对于 $\mathrm{Tw}\,\mathbf{C}$ 的任意对象 $c \to d$ 和 $q \in \mathbb{N}$，我们有一个同构 $\eta(c \to d)\colon \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}(d)\ \mathcal{A}(c)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}(c)\ \mathcal{A}(c))$：这由推论 4.7 得出；更明确地说，可由引理 4.9 中映射的逆得到。对于一个态射

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{\alpha} & d' \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ c & \xleftarrow[\beta]{} & c' \end{array} \tag{14}$$

在 $\mathrm{Tw}\mathbf{C}$ 中，我们得到代数的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(d) & \xleftarrow{\alpha} & \mathcal{A}(d') \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{A}(c) & \xrightarrow[\beta]{} & \mathcal{A}(c') \end{array}$$

所有映射都是满同调满态射。回忆一下，霍赫希尔德上同调在第二个变量上是协变的，在第一个变量上是反变的。接着，考虑所得图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(d),\mathcal{A}(c)) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(d),\mathcal{A}(c')) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(d'),\mathcal{A}(c')) \\ \cong\downarrow{\scriptstyle\eta} & & {\scriptstyle f^*}\uparrow & & {\scriptstyle\eta}\downarrow\cong \\ \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c),\mathcal{A}(c)) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c),\mathcal{A}(c')) & \xleftarrow{\beta^*} & \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c'),\mathcal{A}(c')) \\ & & & \overset{\cong}{\searrow\!\!\nearrow} & \end{array}$$

其中右侧方块中的所有映射都是标量限制诱导的同构。上方的复合给出了函子 $\mathcal{HH}^i$ 在扭箭范畴中态射 (14) 处的取值。右下方最右侧的映射 β^* 是引理 4.9 中映射 $\mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c)\ \mathcal{A}(c')) \to \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c')\ \mathcal{A}(c'))$ 的逆映射；这个逆映射与自然变换 η 相容。根据 [Her16，定理 8.11], ，所得复合 $\mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c)\ \mathcal{A}(c)) \to \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c')\ \mathcal{A}(c'))$ 是 [Her16，定理 7.6] 中两个霍赫希尔德上同调群之间由导出张量积诱导的映射。我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(d),\mathcal{A}(c)) & \longrightarrow & \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(d'),\mathcal{A}(c')) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c)) & \xrightarrow{\mathcal{A}(c')\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}(c)}-\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}(c)}\mathcal{A}(c')} & \mathrm{HH}^i(\mathcal{A}(c')) \end{array}$$

这意味着自然系统 $\mathcal{HH}^i(\mathcal{A},\ \mathcal{A})$ 是通过沿复合拉回函子 $\mathrm{HH}^i(\mathcal{A},\ \mathcal{A})$ 而得到的，且在自然同构意义下成立

$$\pi\colon\ \mathrm{Tw}\,\mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathrm{op}}\ .$$

在这种情况下，以自然系统为系数的 Baues-Wirsching 上同调群与函子上同调群一致（见 [BW85]）；而同构的自然系统会产生同构的 Baues-Wirsching 上同调群，因此结论成立。□

作为定理 3.11 和定理 4.15 的推论，我们得到本节的主要结果。该结果从函子上同调群（而非更一般的 Baues-Wirsching 上同调群）的角度，阐明了收敛到图式霍赫希尔德上同调的谱序列的结构；

推论 4.16. 设$\mathbf{C}$是一个有限范畴， $\mathcal{A}$是$\mathbf{C}$上的一个 k-代数预层，且为满同调满射。则存在一个上同调型谱序列

$$IE_2^{p,q} = \lim_{\mathbf{C}}{}^{p} \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}(-), \mathcal{A}(-))$$

收敛到 $\mathcal{A}$ 的图式霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 。

推论 4.16 的优点在于，它使我们能够在计算谱序列各页时利用函子上同调的性质。事实上，我们有如下直接推论；

推论 4.17。 设 $\mathbf{C}$ 是一个具有终对象 $\bar{c}$ 的范畴，且 $\mathcal{A}$ 是一个取值于 k-代数的预层，它是满同调满射。则谱序列 $IE^*{}_{,r}{}^*$ 的两项为

$$IE_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \textit{if } p > 0 \\ \mathrm{HH}^q(\mathcal{A}(\bar{c}), \mathcal{A}(\bar{c})) & \textit{otherwise} \end{cases}$$

对所有 $p, q \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。 该结论由注记 2.9 和推论 4.16 得出：由 [GZ67], , 函子上同调与高阶极限一致，在正次数上为 0；而在次数 0 时，它由函子在终对象处的取值给出。□

特别地，若范畴 $\mathbf{C}$ 有终对象，且 $\mathcal{A}$ 是$\mathbf{C}$ 上的 k-代数预层，并且是满同调满射，则相应的谱序列在第二页退化，此时它与终对象的标准霍赫希尔德上同调一致。因此，目标图式霍赫希尔德上同调也归约为终对象的标准霍赫希尔德上同调。这一事实将推论 3.14 的初步结果推广到了所有（不一定是自由的）具有终对象的范畴，但代价是限制了所考虑的代数态射的类别。

备注 4.18。 回顾一下，高阶（余）极限计算同伦（余）极限的（上）同调群，因此，推论 4.17 可表述为： $IE^*{}_{,\ 2}{}^q$ 由 $\mathrm{HH}^q(\mathcal{A}(–)\ \mathcal{A}(–)$ 的同伦极限的上同调群给出。我们可以问，这是否等同于计算极限，也就是说，第二页能否用极限代数的霍赫希尔德上同调来描述（在存在终对象的情形下,– 该代数为 $\mathcal{A}(c)\ c$）。然而，事实并非如此，因为霍赫希尔德上同调与代数取极限的运算不交换。反例可参见例如 [BDS09, Example 1.2.1]。

令 ϕ: $B \to A$ 为满同调满射，且 $[1]$ 为箭范畴 $0 \to 1$.

例4.19。考虑预层 $\mathcal{A}$: $[1]^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Alg}_k^{\mathrm{Hepi}}$，其定义为 $\mathcal{A}(0) = A$、 $\mathcal{A}(1) = B$，并将唯一的非平凡态射映为 $\mathcal{A}_0,\ _1 = \mathcal{A}(1 \to 0) = \phi$。要计算 $\mathcal{A}$的图式霍赫希尔德上同调，考虑方程（8）中的自然系统 $\mathcal{HH}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})$。根据定理 4.15，这等价于考虑系统 $\mathrm{HH}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{HH}^q \circ \mathcal{A} \circ \pi$，其中投影函子 π: Tw C $\to \mathrm{C}^{\mathrm{op}}$将 $[1]$ 中的态射 $c \to d$ 映到其源 c。相应的谱序列 $IE^*{}_{,r}{}^*$在第二页退化。第一页的第 0 列为 $IE^0{}_{,1}{}^* = \mathrm{HH}^*(A) \oplus \mathrm{HH}^*(B)$，而第一列的非退化部分为 $IE^1{}_{,1}{}^* = \mathrm{HH}^*(B, A)$；注意，由于 ϕ: $B \to A$ 是满同调满射，这个群可以认作 $\mathrm{HH}^*(A, A)$。直接计算可知，该谱序列的第二页只有一列非平凡，即第 0 列；特别地，我们有 $IE^0{}_{,2}{}^* = \mathrm{HH}^*(B)$；这也正如推论 4.17 所预言的。对象 1 确实是范畴 $[1]$, 的终对象，而且 $\mathcal{A}$ 的图式霍赫希尔德上同调与 B的霍赫希尔德上同调一致。

按照前一个例子的论证，更一般地，我们得到：

例 4.20. 设 $\mathbf{C} = [n]$ 是例 3.12 中的范畴，且 $\mathcal{A}$ 是 $[n]$ 上的满射同调满态射。那么，图式霍赫希尔德上同调 $\mathrm{HH}^*_{\mathrm{GS}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}(n)$ 的经典霍赫希尔德上同调。

5. 关联代数图表

受应用拓扑学中各种应用的启发，本节将同调满态射的一般理论应用于单纯复形的关联代数图表这一特殊情形。

设 P 为一个有限偏序集。注意，它可以看作一个范畴$\mathbf{P}$，其对象与 P相同；规定当且仅当 $p \leq q$ 属于 P时，$\mathbf{P}$ 中存在一个态射 $p \to q$。P 的神经定义为范畴$\mathbf{P}$的神经；也就是说，单纯复形 $\mathrm{N}(P)$ 中的 n-单形由 P的元素链$\sigma = p_0 < \cdots < p_n$ 给出。设 k 为一个域。对于一个范畴 $\mathbf{C}$，我们按如下方式赋予它一个 k-代数 $k\mathbf{C}$。

定义 5.1. 范畴代数 $k\mathbf{C}$ 是一个自由的 k-模，其基为$\mathbf{C}$的态射集合。基元素上的乘积定义为

$$f \cdot g = \begin{cases} f \circ g & \text{when the composition exists in } \mathbf{C} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

然后将其线性扩展到整个 $k\mathbf{C}$。

范畴代数的例子包括经典的群代数——将群视为只有一个对象的范畴——以及偏序集 [Rot64] 的关联代数。按照 Rota 最初的定义，偏序集 P 的关联代数由区间 P 上所有可能的 k 值函数构成，其乘积为 $f * g(x,\ y) := \sum_{x \leq z \leq y} f(x,\ z)g(z,\ y)$。然而，对于（局部）有限偏序集，这两种定义是等价的。下文中，偏序集 P 的关联代数指偏序集 P（及其关联范畴）的范畴代数，记作 $I(P) := kP$。

注 5.2。偏序集 P 的关联代数是有限维的（作为 k 代数），当且仅当 P 有限。

注 5.3。取范畴代数通常不具有函子性。然而，若将范围限制为对象上的映射为单射的范畴之间的函子，则该构造具有函子性 [Xu07，命题 2.2.3]。特别地，单射偏序集映射 $P \to Q$ 会在相应的关联代数之间诱导一个态射 $I(P) \to I(Q)$。

回忆一下，偏序集 $(P,\ \leq)$ 的子集 $Q \neq \emptyset$ 称为下理想，如果对于所有 $x \in Q$ 和 $y \leq x$，都有 $y \in Q$。若 Q 是 P 的下理想，则通过限制可得到诱导映射 $I(P) \to I(Q)$。取关联代数不能扩展为整个（有限）偏序集范畴上的函子，即使像备注 5.3 中那样将范围限制为单射映射也不行。为绕开这一问题，我们考虑具有分解的唯一提升 [的函子（Lei12，第 5] 节）：

定义 5.4. 若函子 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 满足以下条件，则称其具有分解的唯一提升（ULF）：每当 f 是 $\mathbf{C}$ 中的映射，且 $F(f) = g_1 \circ g_2$ 属于 $\mathbf{D}$ 时，都存在唯一的映射 f_1 和 f_2 属于 $\mathbf{C}$，使得 $f = f_1 \circ f_2$，$F(f_1) = g_1$ 且 $F(f_2) = g_2$。

例 5.5. 设 V 是一个有限顶点集。容易验证，存在如下对应关系：

- 给定一个带有 $\varnothing \in K$ 的单纯复形 $K \subseteq \mathcal{P}(V)$，其包含映射

$$i\colon K \hookrightarrow \mathcal{P}(V)$$

  是偏序集之间的一个 ULF 函子。

- 反过来，给定一个 ULF 函子 $F\colon P \to \mathcal{P}(V)$，它从一个带有初始元素且该元素映至 $\varnothing$ 的偏序集 P 出发，其像

$$K = \mathrm{Im}(F) \subseteq \mathcal{P}(V)$$

  是一个单纯复形（一个下闭子集）。

因此：

单纯复形 $K \subseteq \mathcal{P}(V)$ 恰好是来自具有初始元素且该元素映射到 $\varnothing$ 的偏序集的 ULF-函子 $F\colon P \to \mathcal{P}(V)$ 的像。

按照 [Lei12 第 5], 节的记号，存在一个由有限范畴和 ULF-函子构成的范畴 $\mathbf{Cat}^*$。令 $\mathbf{Poset}^*$ 为 $\mathbf{Cat}^*$ 的满子范畴，其对象为有限偏序集（视为范畴），态射为 ULF-函子。那么，相关联的关联代数之间诱导的限制映射构成一个反变函子

$$\mathbf{Poset}^{*\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k$$

将偏序集 P 映射到其关联代数，并将 ULF 函子（视为偏序集之间的映射）$F\colon Q \to P$映射到由限制诱导的关联代数映射 $F^*\colon I(P) \to I(Q)$。更明确地说，对于所有 $g \in I(P)$ 和 $x,\ y \in Q$，都有 $F^*(g)(x,\ y) = g(F(x)\ F(y))$，其中 $x \le y$。

例 *e* 5.6. 设 P是一个偏序集，$Q \subseteq P$是一个下理想。那么，包含映射 $\iota\colon Q \to P$是 ULF F.

以下结果此前已在 [SA07 第 5.7] 节中证明：

命题 5.7。 设 P是一个偏序集，$Q \subseteq P$是一个下理想。那么，诱导映射

$$I(P) \to I(Q)$$

关联代数之间的映射是同调满射。

证明。 映射 $I(P) \to I(Q)$ 的核由 P 中所有经过 $P \setminus Q$ 中某个顶点的路径生成。由于 $Q \subseteq P$ 是下理想，这意味着它实际上由所有从 Q 中某个对象出发的路径生成。若 e 表示幂等元 $e\colon = \sum_{x \in P\setminus Q} x$，则映射 $I(P) \to I(Q)$ 的核可识别为 $I(P)$ 中由 e 生成的理想。特别地，它是幂等的，并且作为 $I(P)$-模是投射的。由引理 4.12 即得结论。□

回顾一下，给定有限单纯复形 Σ，其面偏序集 $F(\Sigma)$ 是定义在 Σ 的单形集合上的偏序集，其偏序关系由包含关系诱导：当且仅当 τ 是 σ 在 Σ中的一个面时，$\sigma \le \tau$。单纯映射 $\alpha\colon \Sigma \to \Sigma'$ 诱导出保序映射 $F(\alpha)\colon F(\Sigma) \to F(\Sigma')$。此外，$F(\alpha)$ 的像是 $F(\Sigma')$ 的下理想，因为它们是单纯复形的面偏序集。现在我们考虑由单纯复形的面偏序集得到的关联代数。为简单起见，我们用 $I(\Sigma)$ 表示 Σ的面偏序集的关联代数。若 $\Sigma \subseteq \Sigma'$ 是一个子复形，则我们得到映射 $I(\Sigma') \to I(\Sigma)$ 和一个函子

$$I\colon \mathbf{SimpComp}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k \tag{15}$$

从有限单纯复形及单射单纯映射的（反）范畴到 k-代数。根据命题 5.7，函子 I 可细化为函子 **单纯复形范畴**$^{\mathrm{op}} \to$ **代数**$_k^{\mathrm{Hepi}}$。

单纯复形的关联代数的霍赫希尔德上同调与单纯上同调密切相关 [GS83b, Cib89, GMY16]；我们回顾其精确表述：

定理 5.8。 存在一个从有限单纯复形到结合含幺 k-代数的函子 $\Sigma \mapsto I(\Sigma)$，它诱导出一个同构

$$\mathrm{H}^*(\Sigma; k) \cong \mathrm{HH}^*(I(\Sigma), I(\Sigma))$$

在 Σ的单纯上同调与 $I(\Sigma)$的霍赫希尔德上同调之间。

沿用例 3.12 中的记号，设 $[n]$ 为一个范畴，其对象为数字 $0, \ldots, n$，且态射 $i \to j$ 当且仅当 $i \le j$。按照拓扑数据分析中的惯例，我们关注单纯复形的滤过；

定义 5.9. 范畴 $\mathbf{D}$ 中的一个 $[n]$-指标滤过是一个函子 $\mathcal{F}\colon [n] \to \mathbf{D}$。

回忆一下，**单纯复形范畴** 表示由有限单纯复形及其单射单纯映射构成的范畴。若 $\Sigma\colon [n] \to$ **单纯复形范畴**，$i \mapsto \Sigma_i$ 是有限单纯复形中的一个滤过，则可应用式 (15) 中的函子 I，通过复合得到一个由 k-代数组成的图表 $\mathcal{I}$；对于每个 $i \in [n]$，都有一个关联 k-代数 $\mathcal{I}(i) = I(\Sigma_i)$，并且对于每个 $i \le j$，都有一个函子性限制映射 $I(\Sigma_j) \to I(\Sigma_i)$。为简便起见，我们将此类函子称为关联代数图表。

定理 5.10. 设 $\mathcal{I}\colon [n]^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k$ 是一个由有限单纯复形的关联代数组成的图表，且 $\mathcal{I}(i) \coloneqq I(\Sigma_i)$。那么，我们有

$$\mathrm{HH}^q_{\mathrm{GS}}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) \cong \mathrm{H}^q(\Sigma_n; k)$$

对所有 $q \ge 0$。

证明。 图表 $\mathcal{I}$ 是由有限单纯复形及单射单纯映射构成的关联代数图表。因此，每个包含映射 $\Sigma_i \to \Sigma_j$ 都会在相应的关联代数之间诱导一个满态射。此外，由命题 5.7 可知，诱导映射 $\mathcal{I}(j) \to \mathcal{I}(i)$ 是同调满射。因此，我们可以应用推论 4.16。由于范畴 $[n]$ 有一个终对象 n，相应谱序列 $IE^{p,\,q}_{\,2}$ 的第二页为

$$IE_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{if } p > 0 \\ \mathrm{HH}^q(I(\Sigma_n), I(\Sigma_n)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

并收敛到 $\mathcal{I}$ 的图式霍赫希尔德上同调。根据定理 5.8，所得霍赫希尔德上同调群可与 Σ_n 的标准单纯上同调群对应起来，由此得证。□

仿照上述论证，我们得到以下更一般的结论：

定理 5.11。 设 $\mathbf{C}$ 是一个具有终对象 $\bar{c}$ 的有限范畴，并且 $\mathcal{I} = I \circ \Sigma \colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_k^{\mathrm{Hepi}}$ 是一个由有限单纯复形的关联代数组成的图表（其映射为单射单纯映射）。那么，

$$\mathrm{HH}^q_{\mathrm{GS}}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) \cong \mathrm{H}^q(\Sigma(\bar{c}); k)$$

对所有 $q \geq 0$。

5.1. **关联代数与余极限**。 在本节中，我们比较单纯复形图表的余极限与相应关联代数的极限。

设 P 是一个有限偏序集，且 $\Sigma \colon P \to$ **单纯复形范畴** 是一个有限单纯复形图表，其中 $\Sigma_p := \Sigma(p)$ 和 $\Sigma_{pq} := \Sigma(p \leq q) \colon \Sigma_p \hookrightarrow \Sigma_q$ 是单射。容易看出，余极限 $\operatorname{colim}_P \Sigma$ 存在，且仍是一个有限单纯复形。事实上，单纯复形范畴是余完备的；由于 P 是有限的，可以将其元素线性排序，并通过一系列推出归纳地构造余极限：每一步都沿着一个有限子复形（其前驱在单射下的像）粘合一个有限复形。有限单纯复形沿有限子复形作出的推出仍然有限，因此由归纳法可知，所得余极限是有限的。为完整起见，我们也给出一个更具构造性的证明。

首先，考虑图表中所有复形的不交并：

$$\bigsqcup_{p \in P} \Sigma_p \,.$$

定义由以下同一关系生成的等价关系 $\sim$

$$x \sim \Sigma(p \leq q)(x) \qquad \text{for all } (p \leq q) \in P,\ x \in \Sigma_p \,.$$

由于每个 $\Sigma(p \leq q)$ 都是单射，这个关系不会同一同一个 Σ_p 内的不同点，只会沿着图表中的态射粘合不同复形中的点。将候选余极限 K 的顶点集定义为

$$V := \left(\bigsqcup_{p \in P} V(\Sigma_p) \right) / \sim \,,$$

其中 $V(\Sigma_p)$ 表示 Σ_p 的顶点集。如果 $\sigma = \{v_0, \ldots, v_k\}$ 是某个 Σ_p 中的 k-单形，我们令 $[\sigma] := \{[v_0], \ldots, [v_k]\} \subseteq V$，并定义

$$S(K) := \{\, [\sigma] \mid \sigma \text{ is a simplex of some } \Sigma_p \,\} \,.$$

这是定义良好的，因为图示映射是单纯的：若 σ 是 Σ_p 和 $p \leq q$ 中的单形，则 $\Sigma(p \leq q)(\sigma)$ 是 Σ_q 中的单形，且这些单形在 $\sim$ 下被同一。此外，$S(K)$ 对取面封闭：若 $[\sigma] \in S(K)$ 且 τ 是某个 Σ_p 中 σ 的面，则 $[\tau] \in S(K)$。因此，$K = (V, S(K))$ 是一个单纯复形。

对于每个 $p \in P$，都有一个典范包含映射

$$\iota_p \colon \Sigma_p \longrightarrow K$$

它将顶点 $v \in \Sigma_p$ 映射到其等价类 $[v]$，并将其单纯地延拓。这些映射满足关系 $\iota_q \circ \Sigma(p \le q) = \iota_p$。现在设 L 是一个单纯复形，且 $\phi_p\colon \Sigma_p \to L$ 是一个相容锥，使得 $\phi_q \circ \Sigma(p \le q) = \phi_p$。在顶点上定义 $\Phi\colon K \to L$ 如下：

$$\Phi([v]) := \phi_p(v) \qquad (v \in V(\Sigma_p)) .$$

这是良定义的，因为如果 $v \sim \Sigma(p \le q)(v)$，那么 $\phi_q(\Sigma(p \le q)(v)) = \phi_p(v)$。对 Φ 作单纯延拓。于是 $\Phi \circ \iota_p = \phi_p$，且 Φ 是具有此性质的唯一对象。也就是说，K 满足 Σ的余极限的泛性质。此外，注意到：

- K 的顶点集 V是有限不交并 $\bigsqcup_{p\in P} V(\Sigma_p)$的一个商。由于每个 $V(\Sigma_p)$ 都是有限的，且 P是有限的，因此这个并是有限的。所以 V是有限的。
- 同样，单形集合 $S(K)$ 是有限不交并 $\bigsqcup_{p\in P} S(\Sigma_p)$ 的一个商，因此是有限的。

因此 ， K 有有限多个顶点和有限多个单形，所以它是一个有限单纯复形 x.

现在回到单纯复形图表的余极限与相应关联代数的极限之间的关系。设 P 为一个有限偏序集，且 $\Sigma\colon P \to$ **单纯复形范畴** 是一个取值于有限单纯复形及单射单纯映射范畴的函子。设 K 为其余极限。对于每个 $p \in P$，我们都有一个单射单纯映射

$$i_p\colon \Sigma_p \hookrightarrow K,$$

它诱导出相应面偏序集之间的单射序嵌入

$$\iota_p\colon F(\Sigma_p) \hookrightarrow F(K)$$

设 $I(X)$ 表示有限偏序集 X 上的关联代数（取值于 k）。对于 P 中的每个关系 $p \le q$，包含映射 $F(\Sigma_p) \hookrightarrow F(\Sigma_q)$ 诱导出一个限制同态

$$r_{q\to p}\colon I(F(\Sigma_q)) \longrightarrow I(F(\Sigma_p)) ,$$

从而得到一个反变图表

$$\Sigma^*\colon P^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Alg}_k .$$

沿着 ι_p 的限制给出一个映射

$$\rho_p\colon I(F(K)) \longrightarrow I(F(\Sigma_p)) .$$

引理 5.12。若 $\sigma \le \tau$ 属于 $F(K)$，则存在 $p \in P$ 使得 $\tau \in \iota_p(F(\Sigma_p))$，且对于这个 p，整个区间 $[\sigma,\tau] = \{x\colon \sigma \le x \le \tau\}$ 都包含在 $\iota_p(F(\Sigma_p))$ 中。

证明。余极限 K 中的每个单形 τ 都来自某个 Σ_p，因为图示映射是单射的，而我们构造的余极限涉及单射单纯映射。τ 的所有面都属于同一个 Σ_p，因此整个区间 $[\sigma,\tau]$也属于其中。□

这个引理表明， $F(K)$中的每个区间实际上都是某个 $F(\Sigma_p)$内部的区间。因此，族 $(\rho_p)_p$ 定义了一个同态

$$\Theta\colon I(F(K)) \longrightarrow \varprojlim_{p\in P} I(F(\Sigma_p)) .$$

命题 5.13。对于由有限单纯复形及单射单纯映射构成的图表 $\Sigma\colon P \to$ **单纯复形范畴**，相应关联代数（配备限制映射）的逆极限 $\varprojlim_{p\in P} I(F(\Sigma_p))$ 作为一个 k-代数，同构于余极限复形的关联代数 $I(F(K))$，且该同构是典范的。

证明。我们证明 $\Theta\colon I(F(K)) \longrightarrow \varprojlim_{p\in P} I(F(\Sigma_p))$ 是一个 k-代数同构。我们已经证明它是一个同态。现在需要证明它是单射且满射。

单射性。若 $f \ne g \in I(F(K))$，取一个区间 $[\sigma,\tau]$，使得 $f(\sigma,\tau) \ne g(\sigma,\tau)$。选取 p，使得$\tau \in \iota_p(F(\Sigma_p))$；于是 $[\sigma,\tau] \subset \iota_p(F(\Sigma_p))$，因此 $\rho_p(f) \ne \rho_p(g)$。故 $\Theta(f) \ne \Theta(g)$。

满射性。给定一个相容族 $(f_p)_p \in \varprojlim I(F(\Sigma_p))$，定义 $f \in I(\mathcal{F}(K))$ 如下

$$f(\sigma,\tau) := f_p(\sigma,\tau) \quad \text{for any } p \text{ such that } \tau \in \iota_p(F(\Sigma_p)).$$

这是良定义的，因为如果 (x_p, y_p) 和 (x_q, y_q) 都表示$F(K)$中的同一区间 $([\sigma], [\tau])$，那么它们可以通过图表 Σ 中单纯映射上的像与原像构成的有限锯齿链相连。沿着该锯齿链的每一步，极限 $\Sigma^*_{r,s}(f_s) = f_r$中的相容条件正是我们沿链传递值相等关系所需的条件。

卷积乘积保持不变：对于 $\sigma \le \tau$，所有链 $\sigma = x_0 \le \cdots \le x_m = \tau$都位于同一个 $F(\Sigma_p)$ 内，因此 $(f * g)(\sigma, \tau)$ 是在 $I(F(\Sigma_p))$ 中计算的，并且与其中的乘积一致。

因此， Θ 是 k-代数的一个同构。 □

注 5.14。 这一论证关键依赖于这样一个事实：面偏序集中的可比关系 $\sigma \le \tau$ 会迫使两个元素，乃至整个区间，都位于同一个单纯子复形中。对于沿子偏序集粘合的一般偏序集，这种“区间局部性”可能会失效，因此该结论仅适用于单纯复形的面偏序集。

我们还注意到，只要在整个图表中采用一致的约定，是否在每个面偏序集中包含空单形都不会影响结果。

设 P 是一个没有终对象的有限偏序集，设 Σ 和 Σ^* 如上。利用定理 5.11，我们可以计算图表 Σ^* 的图表上同调；该图表通过向 P 添加一个终对象，并用 Σ^* 的极限为其赋值而得到，映射显然。人们可能会想知道，这个上同调（实际上就是该极限的霍赫希尔德上同调）是否同构于原图表的图表上同调。一般而言，它们并不同构，正如下例所示。

例 5.15。 考虑偏序集 P:

(16)
$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \longrightarrow & \{4\} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \{3\} & \longleftarrow & \{2\} \end{array}$$

我们设 Σ:$\mathcal{P} \to$ **单纯复形范畴** 由 $\Sigma(p) = \{*\}$ 给出，其中 p 均取单元素集，且 $\Sigma_{pq} = \mathrm{id}$，对所有 $p \le$ 均成立 q:

(17)
$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \{*\} & \longleftarrow & \{*\} \end{array}$$

于是，根据 [GS83b], ，可得 $\mathrm{HH}^n_{\mathrm{GS}} = k$ 对于 $n = 0$, 1，以及 $\mathrm{HH}^n_{\mathrm{GS}} = 0$ 对于 $n \ge 2$。

现在将 P扩展为 $\hat{P}$，方法是添加一个极大元:

(18)
$$\begin{array}{ccccc} \{1\} & & \longrightarrow & & \{4\} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \{5\} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \{3\} & & \longleftarrow & & \{2\} \end{array}$$

ˆ ˆ我们以显而易见的方式将 Σ 扩展到 Σ: $P \to$ **单纯复形范畴** ，即

(19)
$$\begin{array}{ccccc} \{*\} & & \longrightarrow & & \{*\} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \{*\} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \{*\} & & \longleftarrow & & \{*\} \end{array}$$

T接着，再次利用 [GS83b], ，可得 $\mathrm{HH}^n_{\mathrm{GS}} = k$ （当 $n = 0$ 时），以及 $\mathrm{HH}^n_{\mathrm{GS}} = 0$ （当 $n \ge$ 时）1.

这个例子表明，即使在简单的情况下，添加一个极大元或终对象也可能显著改变图式霍赫希尔德上同调群——另见注4.18。

5.2. **进一步展望**。 现在我们来谈谈我们的研究动机及其在拓扑数据分析中的应用。首先，我们回顾一下，关联代数是持久同调和拓扑数据分析中备受关注的对象；例如，可参见近期的研究 [AENY23、BBH24、CR24]。我们研究关联代数图表的动机问题，涉及与单纯复形滤过相关联的高阶持久模是否存在。前几节所发展的理论与持久性的联系，基于以下观察：

注 5.16。 谱序列 $IE^{*,\ 1}{}^{*}$ 第一页的第一列给出了与滤过 $\Sigma\colon [n] \to$ **单纯复形**相关联的（经典）持久模。

于是，定理 5.10 表明，当谱序列进入第二页时，唯一保留下来的群是滤过的终对象的上同调群。对于任意指标图表，情况并非如此；在这种情况下，图表的拓扑会影响图式霍赫希尔德上同调。完全类比于第一列的情形，我们或许会想把其他列称为该图表的“高阶持久上同调群”。这一观点引出了以下问题：

问题 5.17。 高阶持久同调群描述了什么？我们能否用一个闭式公式描述谱序列第一页和第二页上出现的上同调群？

致谢。 LC 获得了马蒂诺·卢皮尼的欧洲研究理事会启动资助项目101077154“可定义代数拓扑”项目的支持。LC 也感谢 INdAM-GNSAGA 提供的部分资助。本研究在 FAIR（未来人工智能研究）项目框架内开展，并获得欧盟下一代欧盟资金支持（国家复苏与韧性计划（PNRR）– 任务4组成部分2，投资1.3 – 第1555号法令，2022年10月11日，PE00000013）。本研究工作还获得欧盟地平线欧洲计划研究与创新项目 FINDHR（资助协议编号：101070212）的支持。本手稿仅反映作者的观点和意见；欧盟和欧盟委员会均不对此承担责任。

参考文献

[AENY23] H. Asashiba、E. G. Escolar、K. Nakashima 和 M. Yoshiwaki. 持久模的区间可分解对象逼近与区间分解。《纯粹与应用代数杂志》，227(10):20，2023。编号 107397。[APT92] M. Auslander、Ma. I. Platzeck 和 G. Todorov. 幂等理想的同调理论。《美国数学会会刊》，332:667–692，1992。[BBH24] B. Blanchette、T. Brüstle 和 E. J. Hanson. 持久性理论中的同调逼近。《加拿大数学杂志》，76(1):66–103，2024。[BDS09] J. C. Bustamante、J. Dionne 和 D. Smith. 定向代数的（上）同调理论。《代数通讯》，37(5):1516–1544，2009。[BJT09] D. Blanc、M. W. Johnson 和 J. M. Turner. 图表上同调的局部到整体谱序列。《纯粹与应用代数杂志》，213(1):34–53，2009。[BW85] H.-J. Baues 和 G. Wirsching. 小范畴的上同调。《纯粹与应用代数杂志》，38(2):187–211，1985。[Car09] G. Carlsson. 拓扑与数据。《美国数学会通报》，46:255–308，2009。[CCDT24] L. Caputi、C. Collari 和 S. Di Trani. 有向图的多路径上同调。《代数与几何拓扑》，24，2024。DOI: 10.2140/agt.2024.24.4373。[CE99] H. Cartan 和 S. Eilenberg. 同调代数。普林斯顿数学经典。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1999。附录由 David A. Buchsbaum 撰写；重印自 1956 年原版。[Cib89] C. Cibils. 关联代数与单纯复形的上同调。《纯粹与应用代数杂志》，56 232，1989 3 221( ): – 。[CR24] L. Caputi 和 H. Riihimäki. 关于箭图的可达性范畴、持久性与交换代数。《范畴论及其应用》，41:426–448，2024。[dlPX06] J. A. de la Peña 和 C. Xi. 具有同调理想的代数的霍赫希尔德上同调。《筑波数学杂志》，30(1):61–79，2006。[Dou12] M. Doubek. 从代数手术观点看 Gerstenhaber-Schack 图表上同调。《同伦相关结构杂志》，7(2):165–206，2012。[Efi20] Alexander I. Efimov. 代数几何中某些微分分次范畴的同伦有限性。《欧洲数学会杂志》，22(9):2879–2942，2020。

[ET15] B. Everitt 和 P. Turner. 具有局部系数的偏序集的胞腔上同调。《代数杂志》，439 158，2015 134: – 。[ET22] B. Everitt 和 P. Turner. 超平面构形、布尔覆盖与外幂的层同调。《数学杂志》，302(3):1451–1475，2022。[FK22] D. Fiorenza 和 N. Kowalzig. 循环 Gerstenhaber-Schack 上同调。《非交换几何杂志》，16 151，2022 1 119( ): – 。[FP03] V. Franjou 和 T. Pirashvili. 稳定的 K-理论即双函子同调（据 A. Scorichenko）。载于《有理表示、斯廷罗德代数与函子同调》，第 107–126 页。巴黎：法国数学会（SMF），2003。[Gan21] Sheel Ganatra. 包裹弗洛尔理论中的范畴非适当性。预印本，arXiv:2104.06516 [math.SG](2021)，2021。[Ger14] M. Gerstenhaber. 自对偶与拟自对偶代数。《以色列数学杂志》，200(1):193–211，2014。[GGS05] M. Gerstenhaber、A. Giaquinto 和 S. D. Schack. 李代数图表。《纯粹与应用代数杂志》，196(2-3):169–184，2005。[GL91] W. Geigle 和 H. Lenzing. 正交范畴及其在表示与层中的应用。《代数杂志》，144(2):273–343，1991。[GMY16] A. Grigor'yan、Y. Muranov 和 S.-T. Yau. 关于有向图的上同调与霍赫希尔德上同调。《同伦相关结构杂志》，11(2):209–230，2016。[Gro91] 布宜诺斯艾利斯循环同调组。单生成元代数的循环同调。 K-理论，5(1):51–69，1991。[GS83a] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack. 关于代数态射与图表的变形。《美国数学会汇刊》，279:1–50，1983。[GS83b] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack. 单纯上同调即霍赫希尔德上同调。《纯粹与应用代数杂志》，30(2):143–156，1983。[GS88a] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack. 代数上同调与变形理论。载于《代数与结构的变形理论及其应用》（Il Ciocco，1986），NATO 高等科学研究所系列 C：数学与物理科学第 247 卷，第 11–264 页。Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1988。[GS88b] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack. 代数预层的上同调 I: 偏序集上的预层。《美国数学会汇刊》，310(1):135–165，1988。[GZ67] P. Gabriel 和 M. Zisman. 《分式演算与同伦论》，第 35 卷。施普林格出版社，柏林、海德堡，1967。[Haw23] E. Hawkins. 代数图表的霍赫希尔德双复形上的运算。《数学进展》，428:80，2023。编号 109156。[Her16] R. Hermann. 同调满射、再拼接与霍赫希尔德上同调——着眼于 Snashall–Solberg 猜想。《数学进展》，299:687–759，2016。[HW25] Yang Han 和 Xukun Wang. Hochschild 上链复形的拉克斯函子性。预印本，arXiv:

2509 14620 .

[ ] 2025 2025

math.KT ( )， 。[Kel03] B. Keller. Hochschild 复形上高阶结构的导出不变性。预印本，2003。[Kel21] Bernhard Keller. 霍赫希尔德（上）同调与导出范畴。《伊朗数学会通报》，47:57–83，2021。[Lei12] T. Leinster. 莫比乌斯反演的各种概念。《比利时数学会—Simon Stevin》，19(5):909–933，2012。[Lod98] J.-L. Loday. 《循环同调》，数学科学基础丛书第 301 卷。施普林格出版社，柏林、海德堡，1998。[LVdB11] W. Lowen 和 M. Van den Bergh. 预叠的霍赫希尔德上同调比较定理。《美国数学会汇刊》，363(2):969–986，2011。[Mac71] S. MacLane. 《工作数学家的范畴论》。施普林格出版社，纽约，1971。《数学研究生教材》第 5 卷。[McC01] J. McCleary. 《谱序列使用指南》，剑桥高等数学研究第 58 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2001。[Mun24] J. Mundinger. 正特征下微分算子的霍赫希尔德上同调。《代数杂志》，650 376，2024 367: – 。[Per22] Alexander Perry. 二维卡拉比–丘范畴的整霍奇猜想。《组合数学》，158(2):287–333，2022。[Qui73] D. Quillen. 高阶代数 K 理论：I。载于 H. Bass 编，《高阶 K 理论》，第 85–147 页，柏林、海德堡，1973。施普林格出版社，柏林、海德堡。[Red01] J. Redondo. 霍赫希尔德上同调：若干计算方法。《圣保罗大学数学与统计研究所评论》，2，01 2001。[Rob08] M. Robinson. 代数图表的上同调。arXiv 预印本 arXiv:0802.3651，2008。[Rob11] M. Robinson. λ 环与 ψ 环的上同调，2011。arXiv:1101.2976。[Roo61] J.-E. Roos. 关于 projlim 的导出函子。应用。《巴黎科学院通讯》，252 1961 3702–3704.，252:3702–3704，1961。[Rot64] G. C. Rota. 组合理论基础 I：莫比乌斯函数理论。《概率论及相关领域杂志》，2:340–368，1964。

[SA07] M. Suárez-Alvarez. 将换环谱序列应用于霍赫希尔德上同调的计算，2007年。[Sil67] L. Silver. 非交换局部化及其应用。《代数杂志》，7(1):44–76，1967年。[VL18] H. D. Van 和 W. Lowen. 预叠的 Gerstenhaber-Schack 复形。《数学进展》，330:173–228，2018年。[Wei94] C. A. Weibel。同调代数导论，《剑桥高等数学研究》第38卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。[Wit19] S. J. Witherspoon. 代数的霍赫希尔德上同调，《研究生数学》第204卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会（AMS），2019年。[Xu07] F. Xu. 范畴的表示及其应用。《代数杂志》，317(1):153–183，2007年。