arXiv:2512.15839v1 [math.KT] 17 Dec 2025

Γ-半环 K-理论中的基本定理：可加性、局部化与Dévissage

Chandrasekhar Gokavarapu*

印度安得拉邦拉贾蒙德里 533105，Government College(A) 数学讲师；印度安得拉邦贡土尔阿查里亚·纳加朱纳大学数学系研究学者 a

摘要。 基于非交换n元 Γ半环（T, Γ）所关联的正合范畴与 Waldhausen 范畴的高阶代数 K-理论的 Waldhausen 和 Quillen 模型，我们在这一 Γ参数化、槽敏感情形中确立了 K-理论的基本形式性质。对于有限生成的双位置 n元 Γ-模的正合/Waldhausen 范畴、导出范畴中的完美复形，以及非交换 Γ谱 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$上的完美拟凝聚复形，我们证明了 Waldhausen 纤维化定理、可加性定理，以及针对 Serre 对和 Waldhausen 对的 Quillen 型局部化。在关于Γ-稳定过滤的自然假设下，我们得到 d´evissage 和逼近定理，以及余终性和 Karoubi 不变性；这表明幂等完备化不会改变 K-理论，而余终子范畴控制正次数上的 K_n 。此外，我们为n元 Γ情形下的多项式扩张导出了 Bass–Quillen 基本三角，并证明了双边 Γ理想的幂零不变性。从几何角度看，这些结果给出了 K理论关于 $\mathbf{Perf}(X)$ 在 $X = \mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$ 上的局部化与 Mayer–Vietoris 序列，以及其容许开覆盖上的相应序列。总而言之，本文表明，非交换 n元 Γ半环的高阶 K-理论具有与经典环和概形情形相同的形式性质，从而为后续计算和

*通讯作者。电子邮箱：chandrasekhargokavarapu@gmail.com；电话：+91- 9666664242。

同伦论应用奠定了坚实基础。

关键词： 代数 K-理论；Waldhausen 范畴；Quillen Q-构造；局部化；d´evissage； Γ-半环；非交换几何。

美国数学学会主题分类（2020年）： 19D10, 19E08, 16Y60, 18G80。

作者单位

Chandrasekhar Gokavarapu，数学讲师，Government College(A) Rajahmundry，邮编：533105，安得拉邦，印度；AcharyaNagarjuna University 数学系研究学者，贡土尔，安得拉邦，印度。电子邮件：chandrasekhargokavarapu@gmail.com，电话： $+91$-9666664242

1 引言

代数 K-理论已成为现代代数、几何和拓扑学中的核心不变量之一。自 Quillen [2] 和 Waldhausen[3], 奠定基础以来， K-理论的基本形式性质——可加性、局部化、d´evissage、逼近、余终性和幂零不变性——在从代数几何、数论到非交换几何和拓扑循环同调的诸多应用中发挥了决定性作用 [1, 6]。

近年来， Γ-半环结构及其高元推广已成为一种灵活的框架，可用于编码多参数代数运算和位置敏感的相互作用规则 [13, 14, 15, 12]。对于非交换的 n 元 Γ-半环（T， Γ），可以构造若干自然的正合范畴和 Waldhausen 范畴：有限生成的双位置 Γ-模、导出范畴中的完美复形，以及相应非交换 Γ-谱 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$ 上的完美拟凝聚对象。在一篇配套论文中， [24], 我们为这些范畴的高阶 K-理论构造了 Quillen 和 Waldhausen 模型，并证明由此得到的谱彼此一致。

本文旨在建立非交换的 n-元 Γ-框架中代数 K

K-理论中经典“基本定理”的对应版本。更确切地说，对于自然附属于 $(T,\ \Gamma)$ 的正合范畴和 Waldhausen 范畴，我们证明：

- Waldhausen 纤维化定理和加性定理，给出K-理论谱的纤维序列，并体现余纤维化序列的可加性；
- Serre 对和 Waldhausen 对的 Quillen 型局部化，既适用于抽象正合范畴，也适用于 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$上的几何情形；
- 适用于恰当 Γ-稳定过滤和正合函子的 D´evissage 定理与逼近定理；
- 余终性和 Karoubi 不变性结果，确保幂等完备化不会改变 K-理论，并且余终子范畴能够控制正次数上的 K_n ；
- 多项式扩张的 Bass–Quillen 基本三角，以及 Γ-理想的幂零不变性。

综上，这些结果表明，在 n元 Γ半环情形下，高阶 K-理论具有与经典的环和概形情形相同的形式函子性质。特别是，$\mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$ 的 K-理论满足局部化、Mayer–Vietoris 和切除性质，并且不受幂零 Γ-理想的影响。

论文结构。 第 2 节回顾基本框架：非交换n元 Γ半环、相关的正合范畴与 Waldhausen 范畴，以及全文采用的余纤维化、弱等价和圆柱对象约定。第 3节将为这些范畴建立核心 K理论形式体系：Waldhausen 纤维化与可加性、Quillen 局部化、d´evissage、逼近、余终性、Bass–Quillen 三角、幂零不变性，以及 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$上的局部化。论文最后以简短的总结和展望作结，重点说明这些结果将如何用于后续关于具体计算、导出 Morita 不变性以及朝向 Γ参数化 Farrell–Jones 范式的组装映射研究。

2 预备知识

本节汇总后文所采用的基本假设、基本定义和范畴论约定。假定读者熟悉

正合范畴和 Waldhausen 范畴的语言，以及高阶代数 K-理论的一般工具。

2.1 非交换 n 元 Γ-半环

本文始终用 (T, Γ) 表示一个固定的非交换 n元 Γ-半环[18, 19]。具体而言， T 是一个（可能非交换的）加法半群， Γ 是一个用于索引各位置槽的参数集，并且

$$\mu \ : \ T^{\times n} \times \Gamma \longrightarrow T$$

是一个 n 元“乘法”，它对每个变量都是可加的，并以通常意义与 Γ 参数相容。这里不再重复完整的公理列表；下文只用到以下几点：

- n 元乘积满足结合律（依照指定的 Γ 规则）；
- 每个位置槽中都满足单位元律和分配律；
- 存在双边 Γ理想以及 Γ 局部化的概念。

一个（左） n-元 Γ-模上的 T 是一个加法群 M，配备了如下形式的相容位置作用

$$\mu_M \ : \ T^{\times(j-1)} \times M \times T^{\times(n-j)} \times \Gamma \longrightarrow M,$$

对 $1 \leq j \leq n$，满足显然的结合律和分配律条件。我们用 T-ΓMod 表示此类模构成的范畴；当同时存在左、右作用时，用 T-$\Gamma\mathrm{Mod}^{\mathrm{bi}}$ 表示相应的双位置或双模变体。

2.2 与 (T, Γ) 相关的正合范畴与 Waldhausen 范畴

对于这一对 (T, Γ)，我们构造若干正合/Waldhausen 范畴，作为 K-理论 [6, 11] 的模型：

- T-$\Gamma\mathrm{Mod}_{\text{双 fp}}$： T 上有限生成的双位置 n 元 Γ-模的范畴，其赋有由底层加法群的短正合列给出的通常正合结构；

- **Perf(D(T-ΓMod双))**：T-ΓMod双 的导出范畴中紧对象／完美对象构成的全子范畴；此处弱等价为拟同构，余纤维化为逐次分裂单态射，且其余核为余纤维化余核；

- **拟凝聚层(Spec$_{\mathrm{nc}_\Gamma}(T)$)完美**：拟凝聚$_{\mathrm{Spec}_{\mathrm{nc}_\Gamma}(T)}$-模的完美复形范畴，定义在非交换 Γ-谱 Spec$_{\mathrm{nc}_\Gamma}(T)$ 上；其中余纤维化仍取为逐次数分裂单态射，弱等价取为拟同构。

每个范畴都带有 Waldhausen 范畴（$\mathcal{C}$，余纤维化，弱等价）的结构：余纤维化在推出下封闭，弱等价满足三取二性质，并且存在与位置敏感的 n 元乘积 μ 相容的柱体函子。锥构造和柱体构造的选取方式，确保弱等价的映射锥是弱可缩的，并确保位置敏感的张量积保持余纤维化和弱等价。

2.3 高阶 K-理论约定

给定一个 Waldhausen 范畴 $\mathcal{C}$，记其 Waldhausen $\mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C})$理论谱为 K，它由 [3] -构造得到；记其 Quillen $\mathrm{K}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C})$理论谱为 K，当 [2] 来自一个正合范畴时，该谱通过 Q-构造定义。相应的 $\mathcal{C}$ -群为 K：

$$K_n(\mathcal{C}) \;=\; \pi_n \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C}) \;\cong\; \pi_n \mathrm{K}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}) \qquad (n \geq 0)$$

只要比较映射 $\mathrm{K}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C})$ 是弱等价映射。

在非交换 n 元 Γ-半环情形下，我们系统地使用在位置敏感的张量积以及由 μ 诱导的相关局部化和完备化下保持稳定的正合/Waldhausen 模型。这样，在验证该情形下的公理后，我们便可以应用经典的 Waldhausen 定理和 Quillen 定理。

第 3 节中的约定记号因此如下：$\mathcal{C}$ 始终表示上文列出的某个精确/Waldhausen 范畴，并赋予此处固定的余纤维化、弱等价和柱体函子；诸如 $\mathcal{A}$ 之类的子范畴在需要时均假定为严格满子范畴，并且对位置敏感运算保持稳定。

3 正合序列与局部化序列

在本节中，设 $\mathcal{C}$ 为与非交换 n元 Γ-半环（T， $+$， Γ， μ）相联系的某个精确 Waldhausen 模型，该模型构造于第 2节：

$$\mathcal{C} \in \Big\{ T\text{-}\Gamma\mathrm{Mod}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{bi}},\ \mathbf{Perf}\big(\mathbf{D}(T\text{-}\Gamma\mathrm{Mod}^{\mathrm{bi}})\big),\ \mathbf{QCoh}\big(\mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)\big)_{\mathrm{perf}} \Big\},$$

配备了余纤维化、弱等价和圆柱对象，如第 2 (Quillen$Q$ 和 Waldhausen $S_\bullet$ 模型由其中的定理证明是 Quillen 等价的 [24]）。我们的目标是建立 局部化 和 纤维化 定理，从而得到内在于 Γ-参数化、槽敏感、非交换n元设定的 K-理论长正合序列。

3.1 正合对与 Serre–Waldhausen 子范畴

定义 3.1 (正合/Waldhausen对)。 一个正合对 $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$由一个正合范畴 $\mathcal{C}$ 和一个对扩张与收缩封闭的严格满正合子范畴 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ 组成。在 Waldhausen 形式下，$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$是一个配备余纤维化和弱等价的 Waldhausen 范畴 $\mathcal{C}$ ，以及一个严格满子范畴 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ ，满足：

(E1) $\mathcal{A}$在 $\mathcal{C}$中对余纤维化和弱等价封闭，

（E2）对于任意余纤维化序列 $A \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/A$ （其中有 $A \in \mathcal{A}$），当且仅当 $X/A \in \mathcal{A}$ 时，有 $X \in \mathcal{A}$ 。

例 3.2 （幂零部分与挠部分）。 令 $\mathcal{A} = \mathrm{Nil}_{\Gamma}$（$\mathcal{C}$）为对象的满子范畴 X ，其中固定的 Γ-线性自同态所诱导的某个迭代 $\alpha \in \Gamma$ 在每个位置槽上幂零地作用（第 2节）。或者，令 $\mathcal{A}$为支集包含于某个闭子集 $Z \subset \mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)$中的对象所成的子范畴；则通过茎层检验，（$\mathcal{C}$， $\mathcal{A}$）是精确的/Waldhausen 的。

3.2 Waldhausen 纤维化与可加性

定理 3.3 (Waldhausen 纤维化)。 设$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 是上述 *Waldhausen* 对，并记 $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ 为 *Verdier*商模型（通过 $S_\bullet$ 构造，并将弱等价取逆）。那么存在一个连通谱的同伦纤维序列

$$\mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C}/\mathcal{A}),$$

由此得到 K 群中的自然长正合序列：

$$\cdots \to K_{n+1}(\mathcal{C}/\mathcal{A}) \;\to\; K_n(\mathcal{A}) \;\to\; K_n(\mathcal{C}) \;\to\; K_n(\mathcal{C}/\mathcal{A}) \;\to\; \cdots .$$

此构造对保持余纤维化和弱等价的正合函子具有函子性，并且与由 n元乘积 μ *[3]* 所诱导的按槽位索引的张量和锥结构相容。

证明概要。构造 Waldhausen 子范畴 $S_\bullet(\mathcal{A}) \subset S_\bullet(\mathcal{C})$，并将$S_\bullet(\mathcal{C})/S_\bullet(\mathcal{A})$ 中的 $\mathcal{A}$ 等价（第 2节）取逆，得到商。由于 (E1)–(E2) 提供了饱和性和扩张封闭性，且柱公理和粘合公理由 μ [3]的映射柱与位置锥构造成立，因此 Waldhausen 的纤维化定理适用。所得的单纯纤维化经几何实现后给出所述的纤维序列。

□

定理 3.4 (Waldhausen 加法性)。 令$\mathrm{Seq}(\mathcal{C})$ 为由 $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ 构成的 *Waldhausen* 范畴，其中对象属于 $\mathcal{C}$。那么典范映射

$$\mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathrm{Seq}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C}) \times \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C}), \qquad [A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C] \longmapsto ([A], [C]),$$

是谱的弱等价。因此， $[B] = [A] + [C]$ 属于 $\pi_0 \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C}) = K_0(\mathcal{C})$，并且同一可加性会推广到所有更高阶同伦群 *[3]*。

思路。 将 Waldhausen 的加性定理应用于 $S_\bullet(\mathcal{C})$；由于位置锥具有正合性，所需的推出／拉回公理和柱公理在我们的 Γ-半环背景下成立（第 2节）。

□

推论 3.5 （$\mathrm{K}^{\mathrm{Q}} \simeq \mathrm{K}^{\mathrm{W}}$的一致性）。 对于本节开头列出的正合范畴（有限、幂等完备且具有圆柱对象），第 *2* 节的典范比较映射诱导出谱等价 $\mathrm{K}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C})$，并且与定理 *3.3–3.4*相容。因此，以下所有局部化结论同样适用于 *Quillen* 的 Q-构造和 *Waldhausen* 的 $S_\bullet$-模型。

3.3 正合函子的 Quillen 局部化

定理 3.6 (正合范畴的 Quillen 局部化)。 设 $F\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是一个全忠实正合嵌入，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 *Serre* 子范畴（对扩张、

子对象、商对象和收缩封闭）。假设其幂等完备（或转而考虑$\mathrm{Kar}(-)$）。则存在一个自然的谱纤维序列

$$\mathrm{K}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{K}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{K}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}/\mathcal{A}),$$

以及 K群上的长正合序列，如定理 *3.3 [2, 8]*所示。

略。 将 Quillen 的定理 B 应用于正合函子 F 以及 Q-构造神经；Serre 闭性确保正合序列下降到商中，并且神经上的诱导映射是同伦纤维化 [2]。与 K^{W}的相容性由推论 3.5得到。

□

注 3.7（$\mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)$上的几何形式）。取 $\mathcal{C} = \mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)$上的拟凝聚层^{perf}和$\mathcal{A}$ = 拟凝聚层$_Z$（$\mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)$）^{perf}，其中后者是一个闭 $Z \subset \mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)$（由某个双边素系统的 Γ-理想定义）。于是 $\mathcal{C}/\mathcal{A} \simeq$拟凝聚层$_U$（$\mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)$）^{perf}满足 $U = \mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)\backslash Z$，定理 3.6 给出切除长正合序列

$$\cdots \to K_{n+1}(U) \to K_n(Z) \to K_n(\mathrm{Spec}_{\Gamma}^{\mathrm{nc}}(T)) \to K_n(U) \to \cdots,$$

与完美复形上的位置张量积规范相容 $\otimes_{\Gamma}^{(j,k)}$ [4]。

3.4 D´evissage 与逼近

定义 3.8（过滤与简单层）。对象 $X \in \mathcal{C}$ 具有有限$\mathcal{A}$过滤，当且仅当存在一列余纤维化 $0 = X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_m = X$，使得每个子商 X_i/X_{i-1} 都属于 $\mathcal{A}$ 且是 Γ-简单的（即不存在非平凡的Γ-稳定正合子对象）。

定理 3.9（D´evissage）。假设每个 $X \in \mathcal{C}$ 都具有有限的 $\mathcal{A}$过滤，且其简单因子是 (j,k)-平坦的（在位置意义上），并且 $\mathcal{A}$ 对扩张和直和项封闭。那么包含 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}(\mathcal{C}),$$

因此，对所有 $n \geq 0$ *[2, 5]*，都有 $K_n(\mathcal{A}) \cong K_n(\mathcal{C})$。

思路。 利用过滤假设，对 $S_\bullet(\mathcal{C})$ 应用 Waldhausen 的 D´evissage 定理：可加性将 $[X]$ 归约为其在 π_0 中各因子的和，而高阶同伦则

通过胞腔归纳由同一过滤控制。位置平坦性确保锥仍属于 $\mathcal{A}$。

□

定理 3.10 (逼近)。 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 *Waldhausen* 范畴之间的一个正合函子，且

(A1) 反映弱等价，并将余纤维化映为余纤维化，

(A2) 在同伦意义下本质满射，并在映射柱/锥上诱导等价，

(A3) 保持(j, k)-平坦对象和完美锥（与 μ 兼容）。

那么 F 诱导出谱等价 $\mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{K}^{\mathrm{W}}(\mathcal{D})$ （因此在 K^{Q}上也诱导出谱等价).

概述。应用 Waldhausen 逼近定理：(A1)–(A3) 为诱导映射在 $S_\bullet$-构造上在实现后成为弱等价提供了假设 [3]。

□

3.5 余终性、Karoubi 包络与幂等元

定义 3.11 （共尾子范畴）。 严格满正合子范畴 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ 是共尾的，如果对每个 $X \in \mathcal{C}$，都存在 $Y \in \mathcal{C}$ 使得 $X \oplus Y \in \mathcal{A}$。

定理 3.12 （余终性与 Karoubi 不变性）。 若 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ 是共尾子范畴，且两者均为幂等完备的（或替换为 $\mathrm{Kar}(-)$），则包含函子诱导同构 $K_n(\mathcal{A}) \cong K_n(\mathcal{C})$，对所有 $n \geq 1$均成立，并在 K_0上诱导分裂单射。此外，典范函子 $\mathcal{C} \to \mathrm{Kar}(\mathcal{C})$ 对所有 $n \geq 0$ 、*[7, 4]*均在 K_n 上诱导一个等价。

证明。 这是经典余终性（Karoubi）定理对正合/Waldhausen 对的改写；证明可原样沿用，利用可加性以及收缩在 Kar(–) 中分裂这一事实。

□

3.6 基本定理与幂零不变性

定理 3.13 (Bass–Quillen 基本三角（相对版本）)。 令 $S = T[t]$ 为多项式 Γ-半环（其 n 元乘积逐槽扩展 μ），并令 $\mathcal{C}_S$

为与 T 上的 $\mathcal{C}$ 相对应的 S 上的正合范畴。那么存在一个典范的同伦纤维序列

$$\mathrm{K}(\mathcal{C}_T) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{C}_S) \oplus \mathrm{K}(\mathcal{C}_{S^{-1}}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{C}_{S,S^{-1}}),$$

其中 S^{-1} 表示在 t 处的 Γ 局部化（即将指定的 Γ-乘法集中的元素求逆），而 $\mathcal{C}_{S,\ S^{-1}}$ 表示相应的局部化范畴。特别地，

$$K_n(\mathcal{C}_T) \oplus K_n(\mathcal{C}_{S,S^{-1}}) \twoheadleftarrow K_n(\mathcal{C}_S) \oplus K_n(\mathcal{C}_{S^{-1}})$$

对所有 n.[1] 都是正合的

思路。对（$\mathcal{C}_S$，$\mathcal{C}_{S\text{-tors}}$）应用切除/局部化（定理 3.6），并与主开集 $D(t)$ 进行比较；在 Waldhausen 框架中，通过 Mayer–Vietoris 方块进行粘合。逐槽扩张 μ 确保了沿 t 进行同伦不变性所需的平坦性条件。

□

定理 3.14（幂零不变性）。设 $I \subset T$ 是一个双侧 Γ-理想，且在 n 元意义下满足 $I^N = 0$（幂零）（即，任何一次 N 重迭使用 μ 且其中一个输入来自 I，都会得到 0）。那么，投影诱导出一个谱等价

$$\mathrm{K}\big(\mathcal{C}_T\big) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}\big(\mathcal{C}_{T/I}\big),$$

因此，对所有 $n \geq 0$.[6]，都有 $K_n(\mathcal{C}_T) \cong K_n(\mathcal{C}_{T/I})$

证明思路。构造 Waldhausen 对（$\mathcal{C}_T$，$\mathcal{A}$），其中 $\mathcal{A}$ 是由 I-挠对象构成的子范畴。幂零性意味着 $\mathcal{A}$ 中的任意对象都存在一个有限滤过，其连续商均被 I 消去，因此 $\mathcal{A}$ 在 K 理论中由 d´evissage（定理3.9）可缩。应用定理 3.3 即可得证。

□

3.7 非交换 Γ-谱的推论

设 $i\colon Z \hookrightarrow X := \mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$ 是一个闭浸入，$j\colon U \hookrightarrow X$ 是其开补。用 $\mathbf{Perf}(X)$ 表示完美 $\mathcal{O}_X$- 复形，对于 Z，U 也作类似定义。

定理 3.15 (Spec 上的局部化$^{\mathrm{nc}}_{\Gamma}(T)$)。存在一个谱的同伦纤维序列

$$\mathrm{K}\big(\mathbf{Perf}(Z)\big) \longrightarrow \mathrm{K}\big(\mathbf{Perf}(X)\big) \longrightarrow \mathrm{K}\big(\mathbf{Perf}(U)\big),$$

它在非交换 Γ-半环空间的态射下是自然的，并且与沿 Γ-态射的基变换相容。特别地，可以得到关于 K_n 的长正合切除序列。

证明。 利用定理 3.6 以及 $\mathcal{C} = \mathbf{Perf}(X)$ 和 $\mathcal{A} = \mathbf{Perf}_Z(X)$。由 $\mathbf{Perf}(U)$ 与 [24, 25, 26], 中构造的、与 Waldhausen 结构相容的导出拼接可知，该商同构于

□

推论 3.16 (Mayer–Vietoris 可容许覆盖)。 若 $X = U \cup V$ 由 U、V 可容许开集（基本开集 $D(a、\gamma)$ 的有限并）组成，则该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}\big(\mathbf{Perf}(U \cap V)\big) & \longrightarrow & \mathrm{K}\big(\mathbf{Perf}(U)\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{K}\big(\mathbf{Perf}(V)\big) & \longrightarrow & \mathrm{K}\big(\mathbf{Perf}(X)\big) \end{array}$$

是同伦笛卡尔的。因此，在 K_n *[4]* 上存在 *Mayer–Vietoris* 长正合序列。

3.8 与 K_0 和 K_1 的相容性

命题 3.17 (低次数中的边界态射)。 对于任意正合对 $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$，边界映射 $\partial\colon K_1(\mathcal{C}/\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{A})$ 与 $\mathrm{Seq}(\mathcal{C})$ *(定理 3.4)* 中连接余纤维化的行列式类相一致，并且定理 *3.3* 中的局部化序列限制为六项正合片段

$$K_1(\mathcal{A}) \to K_1(\mathcal{C}) \to K_1(\mathcal{C}/\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{C}) \to K_0(\mathcal{C}/\mathcal{A}).$$

注3.18（行列式解释）。 在投射 Γ-模模型中，∂ 将 $K_1(\mathcal{C}/\mathcal{A})$ 中的一个自同构类映射为 $K_0(\mathcal{A})$ 中核／余核类的虚差，该虚差是在与 μ 兼容的位置正合结构中计算的。

3.9 总结与路线图

我们已经在非交换的 n 元 Γ 框架下确立了：

- Waldhausen 纤维化与可加性（定理 3.3–3.4），

- Quillen 局部化（定理 3.6）以及 Spec 上的几何切除$_{\mathrm{nc}_\Gamma}(T)$（定理 3.15），
- D´evissage、逼近、余终性、Karoubi 不变性（定理3.9–3.12），
- Bass–Quillen 基本三角与幂零不变性（定理3.13–3.14）
- 低次相容性 K_0 和 K_1 （命题3.17）。

在后续工作中，我们将利用这些工具计算 K-理论在基本族（矩阵/自同态模型、三角扩张和局部化）中的情形，证明 Γ-参数化背景下的导出 Morita 不变性，并建立通向 Γ-Farrell–Jones 范式的组装映射 [23]。

4 结论

本文确立了与非交换 n元 Γ半环（T, Γ）自然关联的正合范畴和 Waldhausen 范畴中高阶代数 K-理论的基本形式性质。我们同时研究了投射 n元Γ-模、导出范畴中的完美复形，以及非交换 Γ-谱 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_\Gamma(T)$上的完美拟凝聚复形，证明了 Waldhausen 纤维化定理和加性定理、Quillen 局部化、d´evissage 与逼近结果、余终性和 Karoubi 不变性、Bass–Quillen 基本三角，以及 Γ-理想的幂零不变性。我们还将这些结果表述为几何形式，即在 $\mathrm{Spec}^{\mathrm{nc}}_\Gamma(T)$上建立了适用于可容许覆盖的 K-理论局部化序列和 Mayer–Vietoris 序列。

这些定理表明，$(T,\ \Gamma)$ 的 K-理论从形式角度来看，与环和概形的 K-理论完全相同，尽管它还具有额外的非交换和 n 元结构。它们为进一步的研究奠定了技术基础，包括对矩阵半环和三角 Γ-半环的显式计算、导出 Morita 不变性，以及为该情境下的 Γ-参数化 Farrell–Jones 猜想构造组装映射。后续工作将进一步探讨这些应用。

致谢

作者谨向安得拉邦大学教育专员（CCE）以及拉贾蒙德里政府学院（自治）的校长致以诚挚谢意，感谢他们一直以来的鼓励、学术支持，并为研究提供了良好的环境。

经费

作者未获得公共部门、商业部门或非营利部门资助机构针对本研究提供的任何专项资助。

伦理审批

本文不包含作者开展的涉及人类参与者或动物的任何研究。

作者贡献

作者提出了这一问题，得出了主要结果，并撰写了稿件。作者已阅读并批准论文的最终版本。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] H. Bass，《代数 K 理论》，W. A. Benjamin, Inc.，纽约，1968年。

[2] D. Quillen，《高阶代数K理论：I》，载于代数K理论，I：高阶K理论（会议论文集，巴特尔纪念研究所，西雅图，华盛顿州，1972年），《数学讲义》，第341卷，施普林格，柏林，1973年，第85–147页。

[3] F. Waldhausen，《空间的代数 K 理论》，载于代数与几何拓扑（新不伦瑞克，新泽西州，1983年），《数学讲义》，第1126卷，施普林格，柏林，1985年，第318–419页。[4] R. W. Thomason 和 T. Trobaugh，《概形与导出范畴的高阶代数 K 理论》，载于格罗滕迪克纪念文集，第*III*卷，《数学进展》，第88卷，Birkhäuser 波士顿，波士顿，马萨诸塞州，1990年，第247–435页。[5] D. Grayson，《高阶代数K理论：II（据 Daniel Quillen）》，载于代数 K 理论（会议论文集，西北大学，埃文斯顿，伊利诺伊州，1976年），《数学讲义》，第551卷，施普林格，柏林，1976年，第217–240页。[6] C. A. Weibel，K 理论之书：代数 K 理论导论，《数学研究生课程》，第145卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013年。[7]M. Karoubi，K 理论：导论，《数学科学基础丛书》，第226卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1978年。[8] M. Schlichting，《导出范畴的负 K 理论》，*Math. Z.*，第253卷，第1期，第97–134页，2006年。[9] A. Neeman，三角范畴，《数学年刊研究丛书》，第148卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2001年。[10] B. Keller，《导出范畴及其应用》，载于代数手册，第*1*卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1996年，第671–701页。[11] V. Srinivas，代数 K 理论，第2版，《数学进展》，第90卷，Birkhäuser 波士顿，1996年。[12] J. S. Golan，半环及其应用，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1999年。[13] N. Nobusawa，《论环论的一种推广》，*Osaka J. Math.*，第1卷，第81–89页，1964年。[14] W. E. Barnes，《论 Nobusawa 的 Γ-环》，*Pacific J. Math.*，第18卷，第411–422页，1966年。

[15] M. K. Sen，“关于 Γ-半群”，代数及其应用 （新德里，1981），纯粹与应用数学讲义，91，德克尔，纽约，1984年，第301–308页。[16] T. K. Dutta 和 S. K. Sardar，“ Γ-半环的半素理想与不可约理想”，诺维萨德数学杂志，第30卷，第1期，第97–108页，2000年。[17] W. E. Coppage 和 J. Luh，“伽马环的根”，日本数学会杂志，第21卷，第24–35页，1969年。[18] W. A. Dudek，“关于n元群中的整除理论”，拟群及相关系统，第16卷，第2期，第171–184页，2008年。[19] U. Hebisch 和 H. J. Weinert，半环：代数理论与应用，世界科学出版公司，新泽西州里弗埃奇，1998年。[20] J. Rosenberg，代数*K*理论及其应用，数学研究生教材，第147卷，施普林格出版社，纽约，1994年。[21] A. Connes，非交换几何，学术出版社，加利福尼亚州圣迭戈，1994年。[22] F. Van Oystaeyen，结合代数的代数几何，Marcel Dekker，纽约，2000年。[23] F. T. Farrell 和 L. E. Jones，“代数K理论中的同构猜想”，美国数学会杂志，第6卷，第2期，第249–297页，1993年。[24] C. Gokavarapu，高阶代数 K-理论与非交换 Γ-半环的 *Quillen*谱和*Waldhausen*谱，arXiv:2512.11102，2025年。（已投稿。）[25] C. Gokavarapu，射影模与非交换 K-半环的经典代数 Γ-理论，arXiv:2512.11097，2025年。（已投稿。）[26]C. Gokavarapu，层论与非交换 Γ-谱上的导出 Γ-几何，arXiv:2512.00216，2025年。（已投稿。）