arXiv:2512.15908v1 [math.AC] 17 Dec 2025

关于范畴$\mathcal{NT}$中同构类数量有限性的研究

Diego Lobos Maturana *

2025年12月19日

摘要

范畴$\mathcal{NT}$ 在 [10], 中被定义，它是一个范畴，其对象是域上的交换幂零分次代数，由三角矩阵编码的表示来定义。与该范畴相关的一个自然问题，是对其对象进行同构意义下的完整分类。基于 [10], 中的一些结果，我们可以通过研究固定大小 n. 的编码矩阵来分解这一问题。在 [11] 和 [12], 中，这方面的研究取得了若干进展；特别是，在 [11] 中可以看到，对于较小的矩阵，同构类的数量似乎是有限的，且与基域无关。这一事实引出了一系列关于同构类数量及其与基域关系的问题。当时尚不清楚，在基域满足什么条件时，这个数量才是有限的。本文还证明了其他结果，其中包括：对于每个 $n \geq 4$，同构类的数量有限，当且仅当基域有限。

关键词：交换分次代数。范畴 $\mathcal{NT}$。

目录

1 引言 **2**

2 规范化形式和简化形式 **4**

2.1 规范化形式.4 2.2 $\mathcal{TM}_4$ 中的简化形式.5

3 应用 **9**

3.1 关于 $N_n(\mathbb{F})$的有限性.9 3.2 $N_4(\mathbb{F}_q)$的显式公式。 .10 3.3 $\mathcal{MT}_4$ 在 $\mathbb{C}$ 上的完备代表集.12 3.4 $n = 4$ 的同构与 ETO.12

附录 **13**

A 记号与术语 13 B 先前定义 13 C 先前结果 16

*本研究部分由2024年博士后研究基金（FONDECYT）、编号3240046，以及智利国家研究与发展局（ANID）2024年学术界引进补助计划、编号85240053资助。

1 引言

固定一个基域 $\mathbb{F}$. 对于每个大小为 $n \times n$的严格下三角矩阵 $T = [t_{ij}]$，其中 $n \geq 2$ 且其元素属于 $\mathbb{F}$，我们将 $\mathcal{A}(T)$定义为由生成元 X_1、.....、 X_n 及以下关系给出的代数:

$$\begin{cases} X_1^2 = 0 \\ X_i^2 = \sum_{j<i} t_{ij} X_j X_i, \quad (2 \leq i \leq n) \\ X_i X_j - X_j X_i = 0, \quad (1 \leq i, j \leq n) \end{cases} \tag{1.0.1}$$

赋值 $\deg(X_i) = 2$，对于 $1 \leq i \leq n$，将 $\mathcal{A}(T)$ 转换为交换分次代数中的元素。范畴 $\boldsymbol{\mathcal{NT}} = \boldsymbol{\mathcal{NT}}^{\mathbb{F}}$ 定义为这样一个范畴：其对象是所有如上所定义的可能的交换分次代数 $\mathcal{A}(T)$，其态射则是所有保持次数的分次 $\mathbb{F}$–代数同态（见附录 B）。

由 [10], 可知，若矩阵 T 的大小为 n，则代数 $\mathcal{A}(T)$的维数为 2^n. 。这尤其意味着，若两个编码矩阵 T 和 S 的大小不同，则代数 $\mathcal{A}(T)$ 与 $\mathcal{A}(S)$不同构。另一方面，由 [11], 可知，当T 和 S 的大小相同时，设其大小为 n，则存在同构$\boldsymbol{\gamma}$：$\mathcal{A}(T) \to \mathcal{A}(S)$，的充要条件是存在一个可逆 $n \times n$–矩阵 $\Gamma = [\gamma_{ij}]$，其元素满足以下方程组:

$$2\gamma_{ir}\gamma_{kr} + \gamma_{kr}^2 s_{ki} = \sum_{j<r} t_{rj}(\gamma_{kj}\gamma_{kr}s_{ki} + \gamma_{kj}\gamma_{ir} + \gamma_{ij}\gamma_{kr}), \quad (1 \leq r \leq n; 1 \leq i < k \leq n). \tag{1.0.2}$$

在这种情况下，同构 $\boldsymbol{\gamma}$：$\mathcal{A}(T) \to \mathcal{A}(S)$ 与矩阵 Γ 之间由下列方程联系:

$$\boldsymbol{\gamma}(X_j) = \sum_i \gamma_{ij} Y_i \tag{1.0.3}$$

其中， X_1、.....、 X_n 是 $\mathcal{A}(T)$ 的生成元，而 Y_1、.....、 Y_n 是 $\mathcal{A}(S)$ 的生成元（见附录 C）。

用 $\mathcal{TM}_n = \mathcal{TM}_n^{\mathbb{F}}$ 表示所有大小为 $n \times n$ 、元素属于$\mathbb{F}$. 的严格下三角矩阵构成的集合。我们在 $\mathcal{TM}_n$，上定义一个等价关系：当相应的代数 $\mathcal{A}(T)$ 与 $\mathcal{A}(S)$ 同构时，规定 $T \sim S$ 。我们用 $N_n = N_n(\mathbb{F})$，表示 $\mathcal{TM}_n$. 中按关系 $\sim$划分所得的等价类数目。由 [11], 可知，当 $n = 2$，3 时，数目 $N_n(\mathbb{F})$ 有限，且与基域 $\mathbb{F}$. 无关。这一观察引出了以下问题:

Q1: 等价类的数目是否总是与基域无关?

Q2: 等价类的数量总是有限的吗?

本文将回答这些问题。命题 2.9 和 2.10 表明，一般而言，等价类的数量并不独立于基域；此外，在某些条件下，这个数量可能是无限的。显然，当基域 $\mathbb{F}$ 是有限域时，数量 $N_n(\mathbb{F})$ 是有限的，因此我们提出以下问题:

Q3: 在 $\mathbb{F}$ 的什么条件下，对所有 n，数量 $N_n(\mathbb{F})$，都是有限的?

本文的主要结果给出了 **Q3** 的答案，即定理 3.2。我们在其中陈述并证明：数量 $N_n(\mathbb{F})$ 有限，当且仅当 $\mathbb{F}$ 是有限域。现在，既然已经知道 **Q3** 的答案，我们提出以下问题:

Q4: 设 $\mathbb{F}_q$ 是一个含有 q 个元素的有限域，且 n 是一个大于 3 的整数。那么 $N_n(\mathbb{F}_q)$ 的精确值是多少?

对于 **Q4**，我们目前只有部分结果。在定理 3.4 中，我们给出了 $N_4(\mathbb{F}_q)$的显式值，它是域 $\mathbb{F}_q$ 的基数 q 的函数，分为两种情况，取决于 -1 是否是域 $\mathbb{F}_q$ 中的一个平方。对于 $n > 4$，问题会变得非常复杂，因此我们将其留待未来研究。

最后，在 [11], 中定义了三种初等三角运算（简称 ETO）：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r(\quad,\alpha) &: T \mapsto \mathcal{P}_r(T,\alpha) && (\mathcal{P}-\text{operation}) \\ \mathcal{F}_{(r_1,r_2)}(\quad) &: T \mapsto \mathcal{F}_{(r_1,r_2)}(T) && (\mathcal{F}-\text{operation}) \\ \mathcal{Q}_{(r_0,k_0)}(\quad,\beta) &: T \mapsto \mathcal{Q}_{(r_0,k_0)}(T,\beta) && (\mathcal{Q}-\text{operation}) \end{aligned} \tag{1.0.4}$$

每个 ETO 都会在满足特定限制的情况下，将给定矩阵 T 变换为一个新矩阵 T（详见附录 B）。设 T, S 是两个严格下三角 $n \times n$–矩阵，若存在一个将 T 变换为 S, 的（有限）ETO 序列，那么我们称 T 与 S 是*ETO*等价的，并记作 $T \approx S.$。ETO 等价是 $\mathcal{TM}_n.$ 中的一个等价关系。此外，根据 [11] 我们知道，如果 $T \approx S$，那么 $T \sim S.$。其逆命题尚未得到证明，但基于 [11] 中描述的若干证据，人们猜想它应当成立。该猜想被称为**同构与 ETO 等价猜想**。在定理 3.8 中，我们证明了，对于任意一对 T, S 严格下三角 4×4–矩阵，该猜想的断言均成立，从而为支持这一猜想提供了新的证据。

本文内容安排如下：

- 在第2节中，我们为一般情形定义了标准化形式，即满足特定结构条件的一类矩阵。在命题 2.2 中，我们证明任意矩阵$T \in \mathcal{TM}_n$ 都等价于某个标准化形式。

- 在第2.2小节中，我们重点研究 4×4–矩阵。对于这种情形，我们定义了简化形式，即标准化形式的一个特定子集，适用于 $n = 4.$。在命题 2.5 中，我们用简化形式描述了 $\mathcal{TM}_4$ 中等价类的一个完备代表集。

- 在命题 2.9 和 2.10 中，我们给出了明确的判据，用以判断两个简化形式是否等价。

- 第3节致力于展示第2节分析的一些应用。特别是，在第3.1小节中，我们得到了本文的主要结果。在定理 3.2 中，我们陈述并证明：等价类的数量 $N_n(\mathbb{F})$有限，当且仅当基域是有限域。

- 在第 3.2 小节中，我们得到了另一项重要结果：在定理 3.4 中，我们给出了等价类数量的显式公式 $N_4(\mathbb{F})$，其中 $\mathbb{F}$ 是一个有限域。
- 在第 3.3 小节中，我们利用复数域 $\mathbb{C}$ 的代数性质和几何表示，明确描述了 $\mathcal{TM}_4$ 在 $\mathbb{C}$.上的一组（两两不同的）等价类的完备代表集。

- 最后，在第 3.4 小节中，作为对第2节所作分析的应用，我们提供了新的证据，以支持在 [11]中提出的**同构与 ETO 等价猜想**。
- 最后，在本文末尾，读者可以找到一组附录，其中汇集了来自 [10], [11] 和 [12]的记号、定义和先前结果。

致谢：
谨此感谢 Valentina Delgado 和 Rahma Salama 对本文初稿提出的宝贵意见。

本研究获得以下资助：

- 2024年博士后研究基金（FONDECYT），编号3240046，ANID，智利。
- 2024年学术界设立资助计划，编号85240053，ANID，智利。

2 规范化与简化形式

2.1 标准化形式

下文中，我们用 $\mathcal{W}_n$ 表示矩阵的所有可能墙的集合 $T \in \mathcal{TM}_n$. 因此我们有：

$$\mathcal{W}_n = \{(r_1, \ldots, r_h) : 3 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_h \leq n, h \in [1, n-2]\} \cup \{(0)\}$$

回顾一下，我们定义 $\mathbb{W}(0_n) = (0)$。记 $\mathcal{W}_n^{\times} = \mathcal{W}_n - \{(0)\}$.

对于每个 $\mathbb{W} \in \mathcal{W}_n$，我们定义集合 $\mathcal{TM}_n(\mathbb{W})$ 为所有以 $\mathbb{W}$ 为墙的 n–严格下三角矩阵（SLTM）所组成的集合。也就是说，$\mathcal{TM}_n(\mathbb{W}) = \{T \in \mathcal{TM}_n : \mathbb{W}(T) = \mathbb{W}\}$. 我们自然可以将集合 $\mathcal{TM}_n$ 分解为集合 $\mathcal{TM}_n(\mathbb{W})$ 的不交并，其中 $\mathbb{W}$ 遍历集合 $\mathcal{W}_n$，即：

$$\mathcal{TM}_n = \bigcup_{\mathbb{W} \in \mathcal{W}_n} \mathcal{TM}_n(\mathbb{W}). \tag{2.1.1}$$

如果我们还将集合 $\mathcal{TM}_n(\mathbb{W})$ 定义为 $\mathcal{TM}_n(\mathbb{W})$ 中矩阵在关系 $\sim$ 下所有不同等价类构成的集合，，也就是说，$\mathcal{TM}_n(\mathbb{W}) = \{T : \overline{T \in \mathcal{TM}_n(\mathbb{W})}\}$. 利用方程 2.1.1 给出的分解，我们可以将 $\mathcal{TM}_n$ 中等价类的数量 $N_n(\mathbb{F})$ 表示为以下求和：

$$N_n(\mathbb{F}) = \sum_{\mathbb{W} \in \mathcal{W}_n} |\overline{\mathcal{TM}_n}(\mathbb{W})| = 1 + \sum_{\mathbb{W} \in \mathcal{W}_n^{\times}} |\overline{\mathcal{TM}_n}(\mathbb{W})| \tag{2.1.2}$$

方程 2.1.2 中最左侧表达式里的 1 对应于 $|\mathcal{TM}_n(0)|$，因为 $\overline{\mathcal{TM}_n(0) = \{0_n\}}$ —.

定义 2.1. 设 $U \backsim 0_n$ 是 n–严格下三角矩阵，属于 $2 - REF$，且满足 $\mathbb{W}(U) = (r_1, \ldots, r_h)$。如果满足以下条件，我们称$U$ 为规范化：

- 若 $u_{r_1,\ j} \neq 0$，对于某个 $j \in [1, r_1[$，，则 $u_{r_1,\ j} = 1$.

对于每个 $r \in [r_1, n]$，第 $r-$ 行的首项 u_{rc} 等于 1。

我们也称零矩阵为规范化

命题 2.2。 设 T 是一个 n–严格下三角矩阵，则 T *ETO*等价于一个规范化矩阵。

证明。 我们已从 [12], 得知， T ETO等价于一个处于 2–REF中的矩阵 S 。若 $T \backsim 0_n$， 我们将证明，对于 2–REF中的每个矩阵 S ，都可以通过对 S 依次施加有限次 $\mathcal{P}$–操作，得到一个矩阵 U ：

1. 对于每个满足 $s_{rj} \neq 0$的 $j \in [1, r_1[$，， 我们施加操作 $\mathcal{P}_j(\ 1/s_{rj})$。 经过这一过程得到的矩阵，记作 V， 显然满足以下条件：对于每个满足 $v_{r_1 j} \neq 0$的 $j \in [1, r_1[$，，必有 $v_{r_1 j} = 1$.2。根据我们的构造， r–行的首项 $v_{r_1 c_1}$ 等于 1。 假设$r \in]r_1,\ n]$ ，且对于每个 $r' \in [r_1, r[$ ， r'–行的首项 $v_{r'c'}$ 等于 1。 若 v_{rc} 是 V 中 r–行的首项，则施加操作 $\mathcal{P}_r(\ v_{rc})$，得到一个新矩阵，记作W， 它处于 2–REF中，满足 $W^{[r_1]} = V^{[r_1]}$，并且对于每个 $r' \in [r_1, r]$， r'–行的首项$w_{r'c'}$ 等于 1。3. 通过递归论证，我们得到一个新的矩阵 U ，它处于 2–REF中，是规范化的，并且与 T.ETO等价

□

例 2.3. 假设 $\mathbb{F}$ 是一个特征为零的域，考虑矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

容易验证， T是 2–*REF* 中的一个矩阵，使得 $\mathbb{W}(T) = (3,\ 4)$。这个矩阵没有规范化，例如，第 4– 行的首项不等于1。如果按照命题 *2.2* 证明中所述的算法进行操作，可以看出：

$$T \approx V := \mathcal{P}_1(T, 1/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \approx U := \mathcal{P}_4(V, 3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

方程 *2.1.3* 的矩阵 U 已按要求规范化。

由命题 2.2 可得如下结论：

推论 2.4。 令 $\mathbb{W} \in \mathcal{W}_n^{\times}$. 于是我们有

$$\overline{\mathcal{TM}_n}(\mathbb{W}) = \left\{\overline{U} : U \in \mathcal{TM}_n(\mathbb{W}) \quad and \quad U \quad is\ normalized\right\}.$$

推论 2.4 基本上说明，如果我们想要得到 $\mathcal{TM}_n$(W) 的等价类的完备代表集，就可以将注意力集中在规范化形式上。推论 2.4 并不意味着两个规范化形式不等价，因此，如果我们想要得到两两等价类的完备代表集，就应当寻找充要条件，以确定两个规范化形式何时等价、何时不等价。在下面的小节中，我们将对 $n = 4$. 的情形进行讨论。

2.2 $\mathcal{TM}_4$ 中的简化形式

在本节余下部分，我们采用以下记号：

$$0_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

$$C_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (a \in \mathbb{F}); \quad D_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (u \in \mathbb{F}^{\times}). \tag{2.2.2}$$

命题 2.5。 无论基域如何，我们都有：

$$\begin{gathered} \overline{\mathcal{TM}_4}(0) = \{\overline{0}_4\}, \qquad \overline{\mathcal{TM}_4}(4) = \{\overline{B}, \overline{B'}\}, \\ \overline{\mathcal{TM}_4}(3,4) = \{\overline{C}_a : a \in \mathbb{F}\}, \quad \overline{\mathcal{TM}_4}(3) = \{\overline{D}_u : u \in \mathbb{F}^{\times}\} \end{gathered} \tag{2.2.3}$$

证明。 正如我们已经提到的，矩阵 0_4 是相应集合$\mathcal{TM}_4$中的唯一标准化矩阵(0)。另一方面，沿用命题 2.2 的证明，我们可以看到，对于任意矩阵$T \in \mathcal{TM}_4$(4)， 都有：

- $$T \sim B, \quad \text{if} \quad \mathbb{M}(T) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \tag{2.2.4}$$
- $$T \sim B', \quad \text{if} \quad \mathbb{M}(T) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \tag{2.2.5}$$

（ $\mathbb{M}(T)$ 的定义见附录 B。）

对于矩阵 $T \in \mathcal{TM}_4$(3)，如果我们按照命题 2.2 的证明进行推导，就可以看到$T \sim D_u$ 对于某个 $u \in \mathbb{F}^{\times}$.

最后，对于 $T \in \mathcal{TM}_4(3,\ 4)$，如果我们按照命题 2.2 的证明进行推导，就可以看到 T等价于（通过 ETO）以下形式的标准化矩阵：

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ u & v & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

Th V 可化为 C_a 形式的矩阵的证明见下文引理 2.6 . □

引理 2.6。给定 u、$v \in \mathbb{F}$，考虑方程 *2.2.6* 的规范化矩阵 V。若 $a = 2uv + u + v$，则矩阵 V 和 C_a 是 *ETO*等价的。

证明。取 $\epsilon \in \mathbb{F}^\times$ 并定义 $T_1 = \mathcal{Q}_{(2,1)}(V,\ \epsilon)$。于是 T_1 定义良好，其形式如下：

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 1+\epsilon & 1 & 0 & 0 \\ u+v\epsilon & v & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2.7}$$

令 $\beta := \frac{\epsilon-1}{2\epsilon}$. 注意到 $\Delta^{(2)}{}_{(1,\ 2,\ 3)}(T_1) = -2\epsilon\beta$，因此矩阵 $T_2 := \mathcal{Q}_{(3,2)}(T_1,\ \beta)$ 定义良好，其形式如下：

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 1+\epsilon & 1/\epsilon & 0 & 0 \\ u+v\epsilon & v'/(2\epsilon) & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad v' = (2v+1)\epsilon - 1. \tag{2.2.8}$$

现在令 $T_3 := \mathcal{P}_2(T_2,\ \epsilon)$，于是

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\epsilon & 1 & 0 & 0 \\ u+v\epsilon & v'/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2.9}$$

令 $T_4 := \mathcal{Q}_{(2,1)}(T_3,\ -1)$，则显然，$T_4$ 是良定义的，且形式如下：

$$T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 & 0 \\ u' & v'/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad u' = \frac{2u+1-\epsilon}{2} \tag{2.2.10}$$

现在令 $T_5 = \mathcal{P}_1(1/\epsilon)$，则有

$$T_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ u'/\epsilon & v'/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2.11}$$

最后，定义 $U_\epsilon = \mathcal{F}_{(1,2)}(T_5)$。容易看出，$U_\epsilon$ 是良定义的，且形式如下：

$$U_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ v'/2 & u'/\epsilon & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2.12}$$

根据构造，我们有 V与 U_ϵ. ETO等价。不难看出，将$\epsilon := 2u+1$，替换后，可得 $U_\epsilon = C_a$. 。因此，V与 C_a ETO等价，正如所需。 □

形如 0_4，B，B'，D_u或 C_a（如方程 2.2.1 和 2.2.2 中所示）的矩阵称为简化形式。命题 2.2 和引理 2.6 基本上意味着，$\mathcal{MT}_4$中的每个标准化矩阵都可以通过 ETO 过程化为适当的简化形式。此外，命题 2.5 意味着，我们可以为 $\mathcal{MT}_4$选取一个仅由简化形式组成的等价类完备代表集。

例 2.7。 与方程 *2.1.3* 的标准化矩阵 U 经 *ETO* 等价的一个简化形式是 C_{17}. 也就是说

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\2&3&1&0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\17&0&1&0\end{bmatrix}$$

由命题 2.5 可直接推出:

推论 2.8。 无论基域为何，数量 $N_4(\mathbb{F})$ 由下式给出

$$N_4(\mathbb{F})=3+|\{\overline{D_u}:u\in\mathbb{F}^\times\}|+|\{\overline{C_a}:a\in\mathbb{F}|\}. \tag{2.2.13}$$

特别地，若 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的有限域（且 $\mathit{char}(\mathbb{F})\neq 2$），则 $N_4(\mathbb{F}_q)\leq 2q+2$.

命题 2.5 中的方程 $\mathcal{TM}_4(3,4)=\{C_a:a\in\mathbb{F}\}$（分别为 $\mathcal{TM}_4(3)=\{D_a:a\in\mathbb{F}^\times\}$）并不意味着集合 $\{C_a:a\in\mathbb{F}\}$（分别为 $\{D_a:a\in\mathbb{F}^\times\}$）是 $\mathcal{TM}_4(3,4)$（分别是 $\mathcal{TM}_4(3)$）的两两不同等价类的完全集。因此，为了得到 $\mathcal{TM}_4(3,4)$ 和 $\mathcal{TM}_4(3)$ 的两两不同等价类的完全集代表元，我们需要寻找更具体的判据。下面的命题 2.9 和 2.10 给出了判定两个给定的简化形式是否等价的充要条件。

命题 2.9. 设 u、$v\in\mathbb{F}^\times$ 满足 $u\neq v.$，则 $D_u\sim D_v$ 当且仅当 $\frac{u}{v}$ 是 $\mathbb{F}$.中的一个平方。

证明。 假设 $\gamma:\ \mathcal{A}(D_u)\to\mathcal{A}(D_v)$ 是一个同构，其关联矩阵为 $\Gamma=[\gamma_{ij}].$。根据命题 C.7，我们知道 Γ 具有以下几种形式之一:

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix}a&0&x&z\\0&b&y&w\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{bmatrix},\Gamma_2=\begin{bmatrix}0&a&x&z\\b&0&y&w\\0&0&c&0\\0&0&0&d\end{bmatrix},\Gamma_3=\begin{bmatrix}a&0&z&x\\0&b&w&y\\0&0&0&c\\0&0&d&0\end{bmatrix},\Gamma_4=\begin{bmatrix}0&a&z&x\\b&0&w&y\\0&0&0&c\\0&0&d&0\end{bmatrix}. \tag{2.2.14}$$

其中 $abcd\neq 0.$ 此外，我们知道 Γ 的各项满足定理 C.2 中的方程 C.0.1 .

我们假设 Γ 具有方程 2.2.14 中 Γ_1 的形式；对于所有形式，分析过程都等价。因此，将 $r=3$ 代入方程 C.0.1，经化简后可得以下方程组:

$$\begin{cases}2xy=ay+bx\\2x=a-c\\2y=b-c\end{cases} \tag{2.2.15}$$

结合这些方程，可得

$$c^2=ab \tag{2.2.16}$$

因此，参数 a，b 必须取为使得 ab 是域 $\mathbb{F}.$ 中的一个平方。如果这样做，任意选择 $c=\pm\sqrt{ab}$ 都可以定义 x 和 y，并且我们可以验证 $\gamma(X_3)=xY_1+yY_2+cY_3$ 满足所需条件。

现在，如果将 $r=4$ 代入方程 C.0.1，经过化简后，我们得到以下方程组:

$$\begin{cases}2zw=uaw+bz\\2z=ua-vd\\2w=b-d\end{cases} \tag{2.2.17}$$

结合这些方程，我们得到

$$vd^2=uab \tag{2.2.18}$$

由此我们得出，要有 $D_u\sim D_v$，分数 $\frac{u}{v}$ 必须是 $\mathbb{F}.$ 上的平方 –

另一方面，若假设 $\frac{u}{v}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的平方，即 $\frac{u}{v}=\epsilon^2$，对于某个 $\epsilon\in\mathbb{F}^\times$，我们可以验证矩阵

$$\Gamma=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}(u-v\epsilon)\\0&1&0&\frac{1}{2}(1-\epsilon)\\0&0&1&0\\0&0&0&\epsilon\end{bmatrix} \tag{2.2.19}$$

定义一个同构 $\gamma:\mathcal{A}(D_u)\to\mathcal{A}(D_v)$。 □

命题 2.10。 设 $a,a'\in\mathbb{F}$ 满足 $a\neq a'$. 则 $C_a\sim C_{a'}$ 当且仅当 $2a+1\in(\mathbb{F}^\times)^2$ 且 $a'=-\frac{a}{2a+1}$.

证明。 设 $2a+1\in(\mathbb{F}^\times)^2$ 且 $a'=-\frac{a}{2a+1}$. 令 $u=a$ 和 $v=0$，则由引理 2.6 的证明可知，

$$T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\u&v&1&0\end{bmatrix}\approx T'=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\u'/\epsilon&v'/2&1&0\end{bmatrix} \tag{2.2.20}$$

其中 $u'=\frac{2a+1-\epsilon}{2}$ 且 $v'=\epsilon-1$，对于某个 $\epsilon\in\mathbb{F}^\times$。若取 $\epsilon=\sqrt{2a+1}$，则得到

$$T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\u&v&1&0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\u''&v''&1&0\end{bmatrix} \tag{2.2.21}$$

其中 $u''=v''=\frac{\sqrt{2a+1}-1}{2}$. 由引理 2.6 可知，

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\u''&v''&1&0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\a''&0&1&0\end{bmatrix} \tag{2.2.22}$$

其中 $a''=2u''v''+u''+v''$. 经过一些计算，我们可以验证 $a''=a'=-\frac{a}{2a+1}$.，因此 $C_a\approx C_{a'}$.。由 [11]，可知，这意味着 $C_a\sim C_{a'}$（见定理 C.3）。

另一方面，若假设 $C_a\sim C_{a'}$.，则存在一个可逆矩阵 $\Gamma=[\gamma_{ij}]$，其元素满足方程 C.0.1（取 $T=C_a$，$S=C_{a'}$）。根据命题 C.7，我们还知道矩阵 Γ 具有以下形式之一

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix}\gamma_{11}&0&\gamma_{13}&\gamma_{14}\\0&\gamma_{22}&\gamma_{23}&\gamma_{24}\\0&0&\gamma_{33}&\gamma_{34}\\0&0&0&\boldsymbol{\gamma_{44}}\end{bmatrix}\quad\text{or}\quad\Gamma_2=\begin{bmatrix}0&\gamma_{12}&\gamma_{13}&\gamma_{14}\\\gamma_{21}&0&\gamma_{23}&\gamma_{24}\\0&0&\gamma_{33}&\gamma_{34}\\0&0&0&\boldsymbol{\gamma_{44}}\end{bmatrix} \tag{2.2.23}$$

不失一般性，我们可以假设 Γ 具有 Γ_1 的形式（对Γ_2的分析也是等价的）。由于 $\det(\Gamma)\neq0$，因此对每个 $i\in[1,4].$，都有 $\gamma_{ii}\neq0$。利用方程 C.0.1，我们推导出以下方程组：

$$\begin{cases}2\gamma_{13}\gamma_{23}=&\gamma_{11}\gamma_{23}+\gamma_{22}\gamma_{13}\\2\gamma_{13}=&\gamma_{11}-\gamma_{33},\\2\gamma_{23}=&\gamma_{22}-\gamma_{33},\\2\gamma_{14}\gamma_{24}=&a\gamma_{11}\gamma_{24}+\gamma_{23}\gamma_{14}+\gamma_{13}\gamma_{24}\\2\gamma_{14}=&a\gamma_{11}-a'\gamma_{44}+\gamma_{13}\\2\gamma_{24}=&\gamma_{23}\\2\gamma_{34}=&\gamma_{33}-\gamma_{44}\\\gamma_{34}^2=&(a\gamma_{11}+\gamma_{33}+\gamma_{13}-2\gamma_{14})\gamma_{34}+\gamma_{33}\gamma_{14}\\\gamma_{34}^2=&(\gamma_{33}+\gamma_{23}-2\gamma_{24})\gamma_{34}+\gamma_{33}\gamma_{24}\end{cases} \tag{2.2.24}$$

结合方程 2.2.24，得到：

$$\begin{cases} \gamma_{33}^2 = & \gamma_{11}\gamma_{22} \\ \gamma_{44}^2 = & \gamma_{22}\gamma_{33} \\ (2a'+1)\gamma_{44}^2 = & (2a+1)\gamma_{11}\gamma_{33} \\ 0 = & (\gamma_{22}-\gamma_{33})\left((2a+1)\gamma_{11}-\gamma_{33}\right) \end{cases} \tag{2.2.25}$$

特别地，我们可以看出，$2a+1=0$ 当且仅当 $2a'+1=0$，但这只会在$a=a'=-1/2.$ 时发生。根据我们的假设，$a\neq a'$，于是我们得出 $2a+1\neq 0$ 和 $2a'+1\neq 0.$。利用这一事实，我们可以看出

$$\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{22}}=\frac{2a'+1}{2a+1} \tag{2.2.26}$$

另一方面，由 2.2.25 中的最后一个方程可知，$\gamma_{22}=\gamma_{33}$ 或 $(2a+1)\gamma_{11}=\gamma_{33}.$。但是，如果我们假设 $\gamma_{22}=\gamma_{33}$，还可以得到 $\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}$，于是方程 2.2.26 蕴含$a=a'$，这与我们的假设矛盾。因此我们得出 $(2a+1)\gamma_{11}=\gamma_{33}.$

由于 $\gamma_{44}^2=\gamma_{22}\gamma_{33}=(2a+1)\gamma_{11}\gamma_{22}=(2a+1)\gamma_{33}^2$，我们得出，要使 $T\sim S$ 成立，一个必要条件是 $2a+1\in(\mathbb{F}^\times)^2.$。另一方面，由于 $(2a'+1)\gamma_{44}^2=(2a+1)\gamma_{11}\gamma_{33}=\gamma_{33}^2$，可以得出 $2a'+1=1/(2a+1)$，即 $a'=-a/(2a+1)$，这正是所需的。 □

推论 2.11。 假设 $a\in\mathbb{F}$ 满足对于任意 $a'\in\mathbb{F}$，条件 $C_a\sim C_{a'}$ 蕴含$a=a'.$。那么 $a\in\{x\in\mathbb{F}:2x+1\notin(\mathbb{F}^\times)^2\}\cup\{0,-1,-1/2\}.$

证明。这直接由命题 2.10 以及方程$a=-a/(2a+1)$仅有两个解，即 $a=0$ 和 $a=-1.$ 这一事实得出。对于 $a=-1/2,$ 这一特殊情形，很容易看出$2a+1=0\notin(\mathbb{F}^\times)^2.$

□

3 应用

3.1 关于 $N_n(\mathbb{F})$的有限性

设 $a\in\mathbb{F}$ 和 $n\in\mathbb{N}.$。在本节余下部分中，我们用 $C_{a,n}=[c_{ij}]$ 表示其元素如下所给的 n–严格下三角矩阵：

$$c_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{if} \quad i\in[3,n-1], j\in[1,2] \\ 1 & \text{if} \quad (i,j)=(n,3) \\ a & \text{if} \quad (i,j)=(n,1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.1.1}$$

例如

$$C_{a,4}=C_a=\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ a&0&1&0 \end{bmatrix},\quad C_{a,5}=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ a&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

命题 3.1. 令 $n>4$, $a,a'\in\mathbb{F}$ 满足 $a\neq a'.$。要使 $C_{a,n}\sim C_{a',n}$ 成立，一个必要条件是 $2a+1\in(\mathbb{F}^\times)^2$ 以及 $a'=-\frac{a}{2a+1}.$ ——

证明。假设 $C_{a,\ n}\sim C_{a',\ n}$，那么存在一个可逆矩阵 $\Gamma=[\gamma_{ij}]$ 满足方程 C.0.1，取 $T=C_{a,\ n}$, $S=C_{a',\ n}.$ 根据命题 C.7，不失一般性，我们可以假设 Γ 具有以下形式：

$$\Gamma=\begin{bmatrix} \gamma_{11}&0&\gamma_{13}&\gamma_{14}&\cdots&\gamma_{1,n-1}&\gamma_{1n}\\ 0&\gamma_{21}&\gamma_{23}&\gamma_{24}&\cdots&\gamma_{1,n-1}&\gamma_{2n}\\ 0&0&\gamma_{33}&0&\cdots&0&\gamma_{3n}\\ 0&0&0&\gamma_{44}&\cdots&0&\gamma_{4n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&\gamma_{n-1,n-1}&\gamma_{n-1,n}\\ 0&0&0&0&\cdots&0&\boldsymbol{\gamma_{nn}} \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

由于 $\det(\Gamma) \neq 0$，我们有，对于每个 $i \in [1,n].$，$\gamma_{ii} \neq 0$。利用方程 C.0.1，我们推导出以下方程组：

$$\begin{cases} 2\gamma_{1r}\gamma_{2r} = & \gamma_{11}\gamma_{2r} + \gamma_{2r}\gamma_{1r}, & \text{for} \quad r \in [3, n-1] \\ 2\gamma_{1r} = & \gamma_{11} - \gamma_{rr}, & \text{for} \quad r \in [3, n-1] \\ 2\gamma_{2r} = & \gamma_{22} - \gamma_{rr}, & \text{for} \quad r \in [3, n-1] \\ 2\gamma_{1n}\gamma_{2n} = & a\gamma_{11}\gamma_{2n} + \gamma_{23}\gamma_{1n} + \gamma_{13}\gamma_{2n}, & \\ 2\gamma_{1n} = & a\gamma_{11} - a'\gamma_{nn} + \gamma_{13}, & \\ 2\gamma_{2n} = & \gamma_{23}, & \\ 2\gamma_{3n} = & \gamma_{33} - \gamma_{nn}, & \\ \gamma_{3n}^2 = & (a\gamma_{11} + \gamma_{33} + \gamma_{13} - 2\gamma_{1n})\gamma_{3n} + \gamma_{33}\gamma_{1n}, & \\ \gamma_{3n}^2 = & (\gamma_{33} + \gamma_{23} - 2\gamma_{2n})\gamma_{3n} + \gamma_{33}\gamma_{2n}, & \end{cases} \tag{3.1.3}$$

（参见方程 2.2.24）。正如我们在命题 2.10 的证明中所进行的类似分析表明，要满足 $C_{a,n} \sim C_{a',n}$，必要条件是 $2a+1 \in (\mathbb{F}^\times)^2$ 以及 $a' = -\frac{a}{2a+1}$. —— □

注意，命题 3.1 的证明中所使用的方程组 3.1.3，是通过取自方程 C.0.1 的部分方程而得到的，而非全部方程，因此我们不能断言对于 $n > 4$.其逆命题也成立

定理 3.2。 数目 $N_n(\mathbb{F})$ </style>有限，当且仅当 $\mathbb{F}$ 是有限域。

证明。 显然，如果 $\mathbb{F}$ 有限，那么 $N_n(\mathbb{F})$ 也是有限的。我们将证明，当 $\mathbb{F}$是无限域时， $N_n(\mathbb{F})$ 是无限的：

任取一个元素 $a_1 \in \mathbb{F}$, 我们定义集合：

$$A_1 = \begin{cases} \left\{a_1, \frac{-a_1}{2a_1+1}\right\}, & \text{if} \quad 2a_1+1 \in (\mathbb{F}^\times)^2 \\ \{a_1\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

由于 $\mathbb{F}$ 是无限集，而 $A_1 \subset \mathbb{F}$ 是有限集，我们可以选取 $a_2 \in \mathbb{F} - A_1$ 并定义集合：

$$A_2 = \begin{cases} A_1 \cup \left\{a_2, \frac{-a_2}{2a_2+1}\right\}, & \text{if} \quad 2a_2+1 \in (\mathbb{F}^\times)^2 \\ A_1 \cup \{a_2\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

递归地，假设对于 $k > 2$，我们已经定义了有限子集 $A_{k-1} \subset \mathbb{F}$，并选取一个元素 $a_k \in \mathbb{F} - A_{k-1}$（这是可行的，因为 $\mathbb{F}$ 是无限域）。现在定义集合：

$$A_k = \begin{cases} A_{k-1} \cup \left\{a_k, \frac{-a_k}{2a_k+1}\right\}, & \text{if} \quad 2a_k+1 \in (\mathbb{F}^\times)^2 \\ A_{k-1} \cup \{a_k\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此，我们选取了一个序列$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中的元素均不重复，且属于 $\mathbb{F}$。根据命题 2.10 和 3.1，我们得出结论：我们的构造表明，矩阵集合 $\{C_{a_k,n} : k \in \mathbb{N}\}$，是一个无限集，其中的元素是关于关系 $\sim$ 两两不同的等价类的代表元。 □

3.2 N_4（$\mathbb{F}_q$）的显式公式。

本小节以 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$，含有 q 个元素的有限域作为基域（其特征为 $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$）。我们假设读者对有限域理论有一定了解。关于有限域的一些前置背景知识，读者可以参阅 [8]。

引理 3.3. 若 $\mathbb{F}$ 是特征不为 2 的有限域，则 $|\mathcal{TM}_4(3)| = 2.$ ——

证明。 设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 是一个包含 q 个元素且特征不等于 2 的有限集合。 设 $T \in \mathcal{M}_4(3)$，那么根据命题 2.5，我们有 $T \sim D_a$，其中某个 $a \in \mathbb{F}^\times$. 。根据命题 2.9，我们还知道，对于任意一对 a，$b \in \mathbb{F}^\times$，$D_a \sim D_b$ 当且仅当 $b/a \in (\mathbb{F}^\times)^2$. 。利用这一事实，可以

验证 $D_a = \{D_{ax}: x \in (\mathbb{F}^\times)^2\}$ 。众所周知， $|(\mathbb{F}^\times)^2| = \frac{q-1}{2}$ （例如参见 [8] ），因此我们有 $|D_a| = \frac{q-1}{2}$.

取 $d \in \mathbb{F}^\times - (\mathbb{F}^\times)^2$, （我们总能选取这样的元素），注意到 $D_1 \nsim D_d$, 由于 $d = d/1 \notin (\mathbb{F}^\times)^2$, , 因此有 $|D_1 \cup D_d| = q - 1 = |\mathbb{F}^\times|$.

最后的分析表明，对于任意 $T \in \mathcal{TM}_4(3)$, 必有 $T \sim D_1$ 或 $T \sim D_d$. 。由于 $D_1 \nsim D_d$, 我们得出，恰有两个矩阵 $T \in \mathcal{TM}_4(3)$, 的同构类满足 $\mathbb{W}(T) = (3)$。

□

注意，推论 2.8 和引理 3.3 表明

$$N_4(\mathbb{F}_q) = 5 + |\overline{\mathcal{TM}_4}(3,4)|. \tag{3.2.1}$$

定理 3.4。同构类的数量 $N_4(\mathbb{F}_q)$ 由下式给出：

- $N_4(\mathbb{F}_q) = (3q+23)/4$ 当 $q \equiv 3$(模 4)。
- $N_4(\mathbb{F}_q) = (3q+25)/4$ 当 $q \equiv 1$(模 4)。

证明。 由方程 3.2.1，我们只需确定 $|\mathcal{TM}_4(3,4)|$. 的精确值。根据命题 2.5，我们有 $\mathcal{TM}_4(3,4) = \{C_a: a \in \mathbb{F}_q\}$, 于是 $|\mathcal{TM}_4(3,4)| \leq q$, 但若使用命题 2.10，我们可以看到 $|\mathcal{TM}_4(3,4)| < q$.

定义如下函数 $g: \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, 其由 $g(x) = 2x + 1$. 给出。显然， g 是一个双射，因此我们有：

$$|g^{-1}\left(\mathbb{F}_q - (\mathbb{F}_q^\times)^2\right)| = (q+1)/2, \quad \text{and} \quad |g^{-1}\left((\mathbb{F}_q^\times)^2\right)| = (q-1)/2. \tag{3.2.2}$$

特别地，注意 $-1/2 \in f^{-1}\left(\mathbb{F}_q - (\mathbb{F}_q^\times)^2\right)$. 。记作

$$\overline{\mathcal{TM}_4}(3,4) = \left\{\overline{C_a} : g(a) \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2\right\} \cup \left\{\overline{C_a} : g(a) \in (\mathbb{F}_q^\times)^2\right\}, \tag{3.2.3}$$

根据推论 2.11，我们知道，若 $g(a) \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2$, 则条件 $C_a \sim C_{a'}$ 意味着 $a' = a$。因此

$$|\overline{\mathcal{TM}_4}(3,4)| = (q+1)/2 + |\left\{\overline{C_a} : g(a) \in (\mathbb{F}_q^\times)^2\right\}| \tag{3.2.4}$$

现在考虑函数 $f: \mathbb{F}_q - \{1/2\} \to \mathbb{F}_q$, 由 $f(x) = -x/(2x+1)$。数量 $|\left\{C_a: g(a) \in (\mathbb{F}_q^\times)^2\right\}|$ 取决于集合 $g^{-1}\left((\mathbb{F}_q^\times)^2\right)$. 中 f 的不动点个数。 f 的不动点为 $x = 0$ 和 $x = -1$, 显然 $0 \in g^{-1}\left((\mathbb{F}_q^\times)^2\right)$.

- 假设 $-1 \in g^{-1}\left((\mathbb{F}_q^\times)^2\right)$, 也就是说 $g(-1) = -1 \in (\mathbb{F}_q^\times)_2$, 那么

$$|\left\{\overline{C_a} : g(a) \in (\mathbb{F}_q^\times)^2\right\}| = \frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{2} - 2\right) + 2 = \frac{q+3}{4}. \tag{3.2.5}$$

  众所周知， $-1 \in (\mathbb{F}^\times)^2$ 当且仅当 $q \equiv 1 (\text{mod } 4)$（例如参见 [8] ），因此数量 $(q+3)/4$ 是一个整数。现在结合方程 3.2.1、3.2.4 和 3.2.5，我们在这种情况下得到

$$N_4(\mathbb{F}_q) = 5 + \frac{q+1}{2} + \frac{q+3}{4} = \frac{3q+25}{4}.$$

  正如所需。

- 相比之下，若假设 $-1 \notin (\mathbb{F}^\times)_2$, 那么

$$|\left\{\overline{C_a} : g(a) \in (\mathbb{F}_q^\times)^2\right\}| = \frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{2} - 1\right) + 1 = \frac{q+1}{4}. \tag{3.2.6}$$

  注意，在这种情况下，我们有 $q \equiv 3 (mod \quad 4)$, 那么数值 $(q+1)/4$ 是一个整数。现在结合方程 3.2.1、3.2.4 和 3.2.6，可得这种情况下

$$N_4(\mathbb{F}_q) = 5 + \frac{q+1}{2} + \frac{q+1}{4} = \frac{3q+23}{4}.$$

  如所希望的。

□

3.3 $\mathcal{MT}_4$ 上的完备代表集

在本小节中，我们将复数域作为基域，也就是 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.If$z \in \mathbb{C}$，我们分别用 $|z|$ 和 $\mathcal{I}(z)$ 表示它的模和虚部。 $\mathbb{C}$ 是一个代数闭域这一事实，加上它的几何表示，使得这种情形格外有趣。

记 $\mathbb{C}$ 的以下子集为$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ 和$\boldsymbol{\mathcal{V}}$：

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \wedge \mathcal{I}(z) \geq 0 \right\}.$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \wedge \mathcal{I}(z) \leq 0 \right\}.$$

我们还记$\boldsymbol{\mathcal{U}}^\times = \boldsymbol{\mathcal{U}} - \{-1/2\}.$。从几何上看，在复平面中，$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ 是圆心为 $-1/2$ 、半径为 $1/2$的开圆盘，以及其边界的上半部分；而$\boldsymbol{\mathcal{V}}$ 是该圆盘的外部区域以及其边界的下半部分。另一方面，$\boldsymbol{\mathcal{U}}^\times$ 等于$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ 去掉其圆心后的集合。注意，$\boldsymbol{\mathcal{U}} \cup \boldsymbol{\mathcal{V}} = \mathbb{C}$ 以及$\boldsymbol{\mathcal{U}} \cap \boldsymbol{\mathcal{V}} = \{-1, 0\}$.

命题3.5。 *1.* 如果 $z \neq z'$ 是$\boldsymbol{\mathcal{U}}$中的两个点，则 $C_z \nsim C_{z'}$.

2. 如果 $z' \in \mathcal{V}$，则存在唯一的 $z \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^\times$，使得 $C_z \sim C_{z'}$.

证明。只需注意，M¨obius 变换 f： $\mathbb{C} - \{-1/2\} \to \mathbb{C}$ 由 $f(z) = -z/(2z+1)$ 给出，是双射并且满足 $f(\boldsymbol{\mathcal{U}}^\times) = \boldsymbol{\mathcal{V}}$（例如参见 [6]）。还要注意， f有两个不动点，即 $z = 0$ 和 $z = -1$ ，并且在 $z = -1/2$处有一个极点，于是如果 $z \in \{-1, 0, -1/2\}$ ，我们有 $C_z \sim C_{z'}$蕴含 $z' = z$ （与推论 2.11 比较）。 □

引理3.6. 若 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，则 $|\mathcal{TM}_4(3)| = 1$

证明. 令 $u \in \mathbb{F}^\times$.。由于 $\mathbb{F}$ 是代数闭域， u 是 $\mathbb{F}$上的一个平方，因此命题 2.9 蕴含 $D_u \sim D_1$，从而 $\mathcal{TM}_4(3) = \{D_1\}$ 且 $|\mathcal{TM}_4(3)| = 1$. □

定理3.7. 以下矩阵集合：

$$\{0_4, B, B', D_1\} \cup \{C_z : z \in \boldsymbol{\mathcal{U}}\}. \tag{3.3.1}$$

是 $\mathbb{C}$上 $\mathcal{TM}_4$ 的一组完备代表集，其中各等价类两两不同

证明. 该定理由命题2.5、3.5和引理3.6得出。 □

3.4 $n = 4$的同构与 ETO

在 [11], 中，我们已经确立了**同构与 ETO 等价猜想**。该猜想声称，对于两个 n–严格下三角矩阵，即 T 和 S ，若 $T \sim S$ ，则 T 和 S 是 ETO 等价的。作为引理 2.6 和命题 2.10 的推论，我们得到以下证据，表明该猜想成立：

定理 3.8。 若 $T \neq S$ 是两个 4–严格下三角矩阵，且满足 $T \sim S$，则 T和 S 是 *ETO*等价的。

证明。 由于任意 4–严格下三角矩阵都 ETO等价于一个简化形式的矩阵（见命题 2.2），我们可以假设 T和 S 均为简化形式。若假设 $T \sim S$，根据定理 C.6，我们知道 $\mathbb{W}(T) = \mathbb{W}(S)$。根据命题 2.5，我们只需分析两矩阵均以 $\mathbb{W} = (3)$ 或 $\mathbb{W} = (3, 4)$ 为墙的情形。

- 如果我们假设 $\mathbb{W}(T) = \mathbb{W}(S) = (3)$，那么我们可以假设 $T = D_a$ 和 $S = D_b$ 对于某些$a,\ b \in \mathbb{F}^\times$. 我们知道命题 2.9， $D_a \sim D_b$ 当且仅当 $a/b \in (\mathbb{F}^\times)_2$。 </style}在此基础上，令我们记 $\epsilon = \sqrt{a/b}$ 并逐步定义以下矩阵

$$\begin{gathered} T_2 := \mathcal{Q}_{(2,1)}(D_a, \epsilon), \quad T_3 := \mathcal{Q}_{(3,2)}\left(T_2, (\epsilon - 1)/(2\epsilon)\right), \quad T_4 := \mathcal{P}_2\left(T_3, \epsilon\right) \\ T_5 := \mathcal{Q}_{(2,1)}(T_4, -1) \qquad T_6 := \mathcal{P}_1(T_5, 1/\epsilon) \qquad T_7 := \mathcal{P}_4(T_6, \epsilon) \end{gathered} \tag{3.4.1}$$

根据构造，我们有 D_a 与 T_7. ETO等价。进行计算后，我们可以看到 $T_7 = D_b$，这一点留给读者验证。

• 假设 $\mathbb{W}(T) = \mathbb{W}(S) = (3, 4)$，那么我们可以假设 $T = C_a$ 和 $S = C_{a'}$ 对于某些 $a,\ a' \in \mathbb{F}$. 由于 $T \sim S$，命题 2.10 意味着 $2a + 1 \in (\mathbb{F}^\times)^2$ 和 $a' = -\frac{a}{2a+1}$. 在这些条件下，命题 2.10 的证明意味着 $T \approx S$. ——

□

附录

附录A 记号与术语

• $\mathbb{F}$ 是一个特征不为 2 的固定域。我们记 $\mathbb{F}^\times = \mathbb{F} - \{0\},\ \mathbb{F}^2 = \{a^2 :\ a \in \mathbb{F}\}$和 $(\mathbb{F}^\times)^2 = \mathbb{F}^2 - \{0\}$.

• A n–严格下三角矩阵，是一个严格下三角矩阵，其元素属于 $\mathbb{F}$. A 严格下三角矩阵是一个（任意大小的）严格下三角矩阵，其元素属于 $\mathbb{F}$. 我们用 $\mathcal{TM}_n$表示所有 n–严格下三角矩阵构成的集合，用 $\mathcal{TM}$表示所有严格下三角矩阵构成的集合。

• 设 $a,\ b \in \mathbb{Z}$，其中 $a \le b.$，我们定义区间 $[a, b] := \{m \in \mathbb{Z} :\ a \le m \le b\}$. 类似地，我们定义 $[a, b[,]a, b[$, 等。我们还记 $[a] = [a, a] = \{a\}$.

• 如果 T是一个严格下三角矩阵，$I,\ J \subset [1, n]$ 是两个区间，那么我们用 T^I_J表示 T中由元素 t_{ij} 组成的子矩阵，其中 $i \in I$且 $j \in J$. 我们还记 $T^I := T^I_{[1,n]}$和 $T_J := T^{[1,n]}_J$. 特别地，$T^{[r]}$ 表示 T 的第 r–行，而 $T_{[c]}$ 表示 T的第 c–列

• 如果 T 是一个 n–严格下三角矩阵，那么对每个 $r \in [1, n]$，我们定义:

$$c_r = \begin{cases} \max\{j : t_{rj} \neq 0\}, & \text{if} \quad T^{[r]} \neq 0. \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当 $c_r > 0$ 时，我们称元素 $t_{r,\ c_r}$ 为 r–的第 $r-$ 行的首项 $T.$。有序对 $(r,\ c_r)$ 是 r–的第 $r-$ 行的主元位置 $T.$

• 给定一个 n–严格下三角矩阵，$T = [t_{ij}]$ 以及 $\alpha \in \mathbb{F}$. 对每个 $1 \le i < j < k \le n$，我们记 $\Delta^{(\alpha)}_{i,\ j,\ k}(T) = \alpha t_{ki} + t_{kj}t_{ji}$. 若不存在混淆的可能，我们只写 $\Delta^{(\alpha)}_{i,\ j,\ k}$.

• 给定任意矩阵 $M = [m_{ij}]$，我们用 $\mu(M) = |\{(i,\ j) \text{ 表示:}\ \ m_{ij} \neq 0\}|$. 我们称 $\mu(M)$ 为矩阵 M.的度量

附录 B 前置定义

本节汇编了来自 [10], [11] 和 [12]的定义。

定义 B.1. 固定一个基域 $\mathbb{F}$. 对于每个大小为$n \times n$、满足 $n \ge 2$ 且元素属于 $\mathbb{F}$的严格下三角矩阵 $T = [t_{ij}]$，我们将 $\mathcal{A}(T)$ 定义为由生成元 X_1、.....、X_n 以及以下关系所给出的 $\mathbb{F}$–代数:

$$\begin{cases} X_1^2 = 0 \\ X_i^2 = \sum_{j<i} t_{ij} X_j X_i, \quad (2 \le i \le n) \\ X_i X_j - X_j X_i = 0, \quad (1 \le i, j \le n) \end{cases} \tag{B.0.1}$$

赋 值 $\deg(X_i) = 2$（对 $1 \le i \le n$），将（T）转化为一个交换分次代数 .

定义 B.2. 我们将$\mathcal{NT}$定义为这样一个范畴：其对象为这些代数 $\mathcal{A}(T)$，其中 T 是一个严格下三角矩阵，其元素属于基域 $\mathbb{F}$；其态射为它们之间所有保持次数的同态。

我们记作 $T \sim S$，当代数 $\mathcal{A}(T)$ 与 $\mathcal{A}(S)$ 同构时。

定义 B.3. 设 $T=[t_{rk}]$ 是一个 $n-$严格下三角矩阵:

1. 固定一个 $1\leq r_1\leq n$ 和一个标量 $\alpha\neq 0.$ 。我们定义矩阵 $S=\mathcal{P}_{r_1}(T,\alpha)$ 为 $n-$严格下三角矩阵，其元素由方程 *B.0.2* 给出

$$s_{rk}=\begin{cases}\alpha^{-1}t_{rk} & if \quad r=r_1\\ \alpha t_{rk} & if \quad k=r_1\\ t_{rk} & otherwise\end{cases} \tag{B.0.2}$$

2. 固定 $1\leq r_1<r_2\leq n.$ 若矩阵 T 满足以下条件:

(a) 对每个 $r_1\leq j$，元素 $t_{r_2j}=0$ *(b)* 对每个 $r_1\leq r\leq r_2$，元素 $t_{rr_1}=0$

则我们将矩阵 $S=\mathcal{F}_{(r_1,r_2)}(T)$ 定义为首项严格下三角矩阵，其元素由以下方程给出:

$$s_{rk}=\begin{cases}t_{r_2k} & if \quad r=r_1\\ t_{r_1k} & if \quad r=r_2\\ t_{rr_2} & if \quad k=r_1\\ t_{rr_1} & if \quad k=r_2\\ t_{rk} & otherwise\end{cases} \tag{B.0.3}$$

3. 固定 T的主元位置(r_0,k_0)

(a) 若 $k_0=1$，则对任意 $\beta\in\mathbb{F}^{\times}$，我们将矩阵 $S=\mathcal{Q}_{(r_0,1)}(T,\beta)$ 定义为首项严格下三角矩阵，其元素 s_{rk} 由方程 *B.0.4* 给出。

(b) 若 $k_0>1$ 且存在一个 $\beta\in\mathbb{F}^{\times}$，使得对于每个 $1\leq i<k_0$，$\Delta_i^{(1)},_{k_0,r_0}(T)=\beta t_{k_0,i}$，则我们定义矩阵 $S=\mathcal{Q}_{(r_0,k_0)}(T,\beta)$ 为 $n-$严格下三角矩阵，其元素 s_{rk} 由方程 *B.0.4* 给出。

$$s_{rk}=\begin{cases}t_{r_0,k_0}-2\beta & if \quad (r,k)=(r_0,k_0)\\ t_{r,k_0}+\beta t_{r,r_0} & if \quad r>r_0 \quad and \quad k=k_0\\ t_{rk} & otherwise\end{cases} \tag{B.0.4}$$

我们将以下任意一种矩阵赋值称为初等三角运算（简称 *ETO*）（只要其定义良好）:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_r(\quad,\alpha):T\mapsto\mathcal{P}_r(T,\alpha) \qquad (\mathcal{P}-operation)\\ \mathcal{F}_{(r_1,r_2)}(\quad):T\mapsto\mathcal{F}_{(r_1,r_2)}(T) \qquad (\mathcal{F}-operation)\\ \mathcal{Q}_{(r_0,k_0)}(\quad,\beta):T\mapsto\mathcal{Q}_{(r_0,k_0)}(T,\beta) \quad (\mathcal{Q}-operation)\end{aligned} \tag{B.0.5}$$

设 T,S 是两个 $n-$严格下三角矩阵，若存在一个（有限的）ETO序列，可将 T 变换为 S,，则称 T 和 S 是*ETO*等价，记作 $T\approx S.$

定义 B.4. 设 $S\neq 0_n$ 是一个 $n-$严格下三角矩阵，若 S 满足以下条件，则称其为第一简化阶梯形（$1-$*REF*）:

1. S 的零行位于非零行上方。

2. 对于每个主元位置 $(r,\ c)$ 我们有 $c>1$ 并且存在一个 $i_0\in[1,c[$ 使得 $\Delta_{i_0}^{(2)},_{c,r}\neq 0.$

3. 如果 (r,c_r) 和 $(r+1,c_{r+1})$ 分别是 S 的第 $r-$ 行和第 $-$ 行的主元位置，其中$(r+1)$，那么$c_r\leq c_{r+1}.$

我们也称零矩阵 0_n 处于第一简化阶梯形。

定义 B.5。 设 S 是一个 $n-$严格下三角矩阵，使得 $S\approx 0_n.$ 假设 S 属于 $1-$*REF*:

1. 我们递归地定义数 r_j 和向量 $\mathbb{W}(S)$，它们与 S 相关，具体如下：

(a) 令 $r_1 := $ 最小值$\{r \in [1,n] : \ S^{[r]} \neq 0\}$。*(b)* 假设数 r_j 已经定义，定义集合 $A_j = \{r \in]r_j, n] : \ c_r > r_j\}$.

- 如果 $A_j \neq \emptyset$，则定义 $r_{j+1} = \min(A_j)$。
- 如果 $A_j = \emptyset$，则定义向量 $\mathbb{W}(S) = (r_1, \ldots, r_j)$。

向量 $\mathbb{W}(S)$ 将称为 S 的墙，

2. 如果 $\mathbb{W}(S) = (r_1)$，则定义 S 的砖块 如下：

$$B_1(S) := S^{[r_1,n]}_{[1,r_1[}$$

3. 如果 $\mathbb{W}(S) = (r_1, \ldots, r_h)$，且 $h > 1$，则对每个 $j \in [1,h]$，定义 S 的第 $j-$ 个砖块 为子矩阵：

$$B_j(S) = \begin{cases} S^{[r_1,r_2[}_{[1,r_1[} & if \quad j = 1 \\ S^{[r_j,r_{j+1}[}_{[r_{j-1},r_j[} & if \quad 1 < j < h \\ S^{[r_h,n]}_{[r_{h-1},r_h[} & if \quad j = h \end{cases}$$

对于零矩阵，我们也定义 $\mathbb{W}(0_n) = (0)$。

对于给定的 $\mathbb{W}(S) = (r_1, \ldots, r_h)$，我们将记 $r_0 := 1$ 以及 $r_{h+1} = n+1$，那么 $[r_0, r_1[= [1, r_1[$ 和 $[r_h, r_{h+1}[= [r_h, n+1[= [r_h, n]$.

定义 B.6. 设 T 是任意一个严格下三角矩阵。假设 S 是一个严格下三角矩阵，即属于 $1-$*REF* 且 $T \sim S.$ 。我们将 T 的墙定义为 $\mathbb{W}(T) = \mathbb{W}(S)$。

由 [12], 可知，对于每个严格下三角矩阵 T，墙 $\mathbb{W}(T)$，都有明确定义。**定义 B.7.** 设 $T \backsim 0_n$ 是一个 $n-$严格下三角矩阵，并设 $\mathbb{W}(T) = (r_1, \ldots, r_h)$ 为其墙。称 T处于第二简化阶梯形$(2-$*REF*$)$，如果它满足以下条件：

1. T 恰好包含 $r_1 - 1$ 个零行，且它们位于非零行之上。

2. 如果 (r, c_r) 是 T 的第 $r-$ 行的主元位置，那么 $c_r > 1$，并且存在一个 $i_0 \in [1, c_r[$，使得 $\Delta^{(2)}_{i_0,\ c,\ r} \neq 0.$。此外，对于每个 $j \in [1,h]$ 和 $r \in [r_j, r_{j+1}[$，我们有 $c_r \in [r_{j-1}, r_j[$.

3. 对于每个 $j \in [1,h]$ 和 $r \in [r_j, r_{j+1} - 1[$，我们有

$$\mu\left(T^{[r]}_{[r_j,r_{j+1}[}\right) \leq \mu\left(T^{[r+1]}_{[r_j,r_{j+1}[}\right).$$

我们也称零矩阵处于 $2-$*REF* 中。

定义 B.8. 设 $T \backsim 0_n$ 是一个 严格下三角矩阵，并假设它处于 $2-$*REF* 中。令 $\mathbb{W}(T) = (r_1, \ldots, r_h)$。对于每个 $j \in [1,h]$，我们递归地定义数 r_{jk} 和 μ_{jk}，以及矩阵 $M_j(T)$，如下所示：

1. 令 $r_{j1} := r_j$，且 $\mu_{j1} = \mu\left(T^{[r_{j1}]}_{[r_{j-1},r_j[}\right)$.

2. 假设数值 r_{jk} 和 μ_{jk} 已定义。定义集合

$$A_{jk} = \left\{r \in]r_{jk}, r_{j+1}[\ : \ \mu\left(T^{[r]}_{[r_{j-1},r_j[}\right) > \mu_{jk}\right\}.$$

- 如果 $A_{jk} \neq \emptyset$，则定义 $r_{j,\ k+1} := \min(A_{jk})$ 以及 $\mu_{j,\ k+1} := \mu\left(T^{[r_{j,k+1}]}_{[r_{j-1},r_j[}\right)$
- 如果 $A_{jk} = \emptyset$，则定义矩阵 $M_j(T)$ 如下：

$$M_j(T) := \begin{bmatrix} r_{j1} & r_{j2} & \cdots & r_{jk} \\ \mu_{j1} & \mu_{j2} & \cdots & \mu_{jk} \end{bmatrix}.$$

我们将序列 $\mathbb{M}(T) := (M_1(T) \ldots, M_h(T))$ 称为 T.的测度序列

定义 B.9. 令 T为一个严格下三角矩阵。我们将 T的测度序列 定义为 $\mathbb{M}(T) = \mathbb{M}(V)$，其中$V$ 是 $2-$*REF* 中的任意矩阵，使得 $T \sim V.$

由 [12], 可知，对于每个严格下三角矩阵 $T \backsim 0_n$，测度序列$\mathbb{M}(T)$，都有明确定义。

附录C 先前结果

本节汇集了来自 [10], [11]和 [12]的先前结果。

定理 C.1. 若 $T=[t_{ij}]$ 是一个 n–严格下三角矩阵，则代数 $\mathcal{A}(T)$ 的维数为 2^n，且集合$\{X_1^{a_1}\cdots X_n^{a_n}$: $a_i\in\{0,1\}\}$ 是 $\mathcal{A}(T)$ 的一组基。

证明。参见 [10]。 □

定理 C.2. 设 T、S 是两个 n–严格下三角矩阵。给定一个 $n\times n$ 可逆矩阵 $\Gamma=[\gamma_{ij}]$，则映射

$$X_j\mapsto\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}Y_i$$

定义了一个同构 $\boldsymbol{\gamma}\colon\mathcal{A}(T)\to\mathcal{A}(S)$，当且仅当以下方程组成立：

$$2\gamma_{ir}\gamma_{kr}+\gamma_{kr}^2s_{ki}=\sum_{j<r}t_{rj}(\gamma_{kj}\gamma_{kr}s_{ki}+\gamma_{kj}\gamma_{ir}+\gamma_{ij}\gamma_{kr}),\quad(1\le r\le n;1\le i<k\le n).\tag{C.0.1}$$

证明。参见 [11]。 □

定理 C.3. 设 T、S 是两个 n–严格下三角矩阵。若存在一个（有限）*ETO*序列，将 T 变换为 S，则 $T\sim S$.

证明。参见 [11]。 □

命题 C.4. 设 T 是一个 n–严格下三角矩阵，使得 $T\nsim 0_n.$。则 T *ETO*等价于一个处于第一简化阶梯形的矩阵 R。

证明。参见 [12] □

命题 C.5. 设 T 是一个 n–严格下三角矩阵，使得 $T\nsim 0_n.$。则 T *ETO*等价于一个处于第二简化阶梯形的矩阵 R。

证明。参见 [12] □

定理 C.6。 ($\mathbb{W}$–测试) 设 S、T 是两个 n–严格下三角矩阵，若 $S\sim T$，则 $\mathbb{W}(S)=\mathbb{W}(T)$。

证明。 见 [12] □

命题 C.7。 设 T、S 是两个非零的 n–严格下三角矩阵，满足：

- T 和 S 属于 2–*REF*,
- $\mathbb{W}(T)=\mathbb{W}(S)=(r_1,\dots,r_h)$.
- $\mathbb{M}(T)=\mathbb{M}(S)=(M_1,\dots,M_h)$.

若 $\boldsymbol{\gamma}$： $\mathcal{A}(T)\to\mathcal{A}(S)$ 是一个同构，则关联矩阵 $\Gamma=[\gamma_{ij}]$ 满足以下关系：

1. 若 $r\in[r_j,r_{j+1}[$，则对于所有 $k\ge r_{j+1}.$, $\gamma_{kr}=0$
2. 存在一个双射 $\mathbf{r}\colon[1,n]\to[1,n]$，满足：
   - *(a)* 对于每个 $j\in[1,h]$，都有 $\mathbf{r}([r_j,r_{j+1}[)=[r_j,r_{j+1}[$
   - *(b)* 对于每个 i、$k\in[r_j,r_{j+1}[$，都有
   $$\gamma_{ik}\neq 0\quad \textit{if and only if}\quad k=\mathbf{r}(i).$$
   - *(c)* 对于每个 $j\in[1,h]$，若
   $$M_j=\begin{bmatrix}r_{j1}&\cdots&r_{j,l(j)}\\ \mu_{j1}&\cdots&\mu_{j,l(j)}\end{bmatrix}$$
   对于某个 $l=l(j)>1.$，则对于每个 $i\in[1,l(j)[$，都有 $\mathbf{r}([r_{j,i},r_{j,i+1}[)=[r_{j,i},r_{j,i+1}[$.

证明。参见 [12]。 □

定理 C.8。 ($\mathbb{M}$–测试) 设 T,S 是两个 n–严格下三角矩阵。若 $T\sim S$，则 $\mathbb{M}(T)=\mathbb{M}(S)$。证明。 参见 [12]。 □

参考文献

[1] A. Bj¨orner，F. Brenti，Coxeter群组合学，数学研究生教材，Springer Science+ Business Media, Inc. 2005.[2] B. Elias，G. Williamson，Soergel演算，《表示论》20 (2016), 295-374.[3] J. Espinoza，D. Plaza，Blob代数与双色Soergel演算，《纯粹与应用代数杂志》223(11)，(2019)，4708-4745.[4] J. J. Graham，G. I. Lehrer，胞腔代数，《数学发明》123 (1996), 1-34.[5] J. E. Humphreys，反射群与Coxeter群，剑桥高等数学研究丛书第29卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990.[6] S. Lang。复分析，数学研究生教材，Springer Science+Business Media，纽约。1999.[7] N. Libedinsky，《Soergel双模范畴》，《代数杂志》320 (7) (2008)，2675-2694.[8] R. Lidl，H. Niederreiter。《有限域及其应用导论》，第2版。剑桥大学出版社。1994.[9] D. Lobos，论广义Blob代数：垂直幂等元截断与Gelfand-Tsetlin子代数，arXiv:2203.15139.[10] D. Lobos，与三角矩阵相关的幂零分次代数及其在Soergel演算中的应用，《纯粹与应用代数杂志》228 (12), (2024)，107766.[11] D. Lobos，范畴 N T：同构判据与应用，arXiv:2410.15538.[12] D. Lobos，范畴 N T 中同构类的不变量，arXiv:2508.00084 [13] D. Lobos，D. Plaza，S. Ryom-Hansen，Nil-Blob代数：类型 A_1 Soergel演算与截断Blob代数的一种体现，《代数杂志》570 (2021), 297-365.[14] D. Lobos，S. Ryom-Hansen，广义Blob代数的分次胞腔基与Jucys-Murphy元，《纯粹与应用代数杂志》224 (7)，(2020)，106277.[15] A. Mathas，胞腔代数的半正规形与Gram行列式，《J. Reine Angew. Math.》619 (2008)，141-173。附录由M. Soriano撰写。[16] W. Soergel，关于多项式环的Kazhdan-Lusztig多项式与不可分解双模，《J. Inst. Math. Jussieu》6 (2007)，第3期，501–525. ¨W. Soergel。范畴 $\mathcal{O}$、perverse层与Weyl群余不变量上的模。《J. Amer. Math. Soc.》3(2) (1990)，421–445，[18] S. Ryom-Hansen，Soergel双模的Jucys-Murphy元，《代数杂志》551 (2020)，154-190.

- diego.lobosm@uv.cl, Universidad de Valparaíso, Chile.