# 模糊度量空间中等距集的模糊几何研究

Biswajit Singha[1], Ronald Manr´ıquez[2], Cristian Carvajal[2], 和 Debjani Chakraborty[1]

[1]印度理工学院克勒格布尔分校数学系，印度西孟加拉邦[2]研究实验室 Lab[e]saM，数学、物理与计算系，普拉亚安查大学，瓦尔帕莱索，智利。

2025年12月19日

arXiv:2512.15939v1 [math.GM] 17 Dec 2025

**摘要**

本文研究了模糊豪斯多夫距离，并引入了模糊度量空间中两点之间的模糊等距集。本文采用近期发展的模糊几何重新定义了模糊度量空间，并为两个不同的模糊点构造了等距集。针对具有分离的支撑区间、外切支撑区间、部分重叠的支撑区间、内切支撑区间、完全重叠的支撑区间，以及与模糊点的核重合的集合，研究了等距集的不同情形。所提出的构造给出了分级等距集；当度量精确时，该集合与经典中点集相一致。文中还提供了恰当的数值示例和图示，以支持相关讨论与研究。

**关键词：** 模糊集、模糊几何学、模糊中点集、模糊度量、模糊等距集 t

## 1 引言

本文旨在介绍模糊度量空间上的模糊等距集概念。模糊度量空间的概念是从多个视角发展而来的。例如，George-Veeramani方案中，一个映射 $M:\ X\times X\times(0,\ \infty)\ \to(0,1]$ 与一个连续的 $t$-范数编码尺度依赖的邻近性 [7]; Kramosil-Mich´alek观点将距离视为 $\mathbb{R}_0^+$ [12]的模糊子集；而其概率对应形式则通过分布函数刻画邻近度 [21]。Kaleva-Seikkala给出了更自然的模糊度量空间定义 [11], ，其中不确定性源于模糊度而非随机性。其他变体还包括直觉模糊度量和 $L$-模糊度量（[15] 和 [20]），以及大量相关文献，重点介绍了[4], [18], 和 [22]的研究成果。

本文考虑 George-Veeramani 意义下的模糊度量空间 [7]，因为其拓扑性质良好（Hausdorff 且可度量化）。本文运用所发展的模糊几何概念 [2],[3],[8], 和 [9]，以确立所提思想的闭式表达。本文采用 Ghosh和Chakraborty [10] 定义的两个模糊点之间的模糊距离，来定义 Kaleva-Seikkala [11]意义下的模糊度量空间。此外，通过为清晰度量提供典范嵌入，这些方法使几何方法能够直接应用，同时比其他现有方法更便于进行解析处理。

另一方面，在（清晰）度量空间（$X$，$d$）中，非空 $A$、$B\subset X$ 的等距集（或中点集）定义为 $E(A,\ B)=\{x\in X:\ d(x,\ A)=d(x,\ B)\}$，其中 $d(x,\ A)=\inf\{\text{dist}(x,\ a):\ a\in A\}$。集合 $A$ 和 $B$ 称为焦集。$E(A,\ B)$ 已在 [13] 和 [24] 中得到广泛研究。由于这一集合推广了平分线或中垂线的概念，因此相关研究颇多。例如，参见 [6], [16], [17], 和 [27]。

在模糊情境中，[14] 提出了模糊中点集的概念，将其视为模糊点的集合，但所采用的度量无法用于研究该集合的拓扑特征。文中声称，模糊点的核属于由模糊焦集的核所定义的中点集。然而，文中并未说明其余的 $\alpha$-截集位于何处。此外，对于模糊焦集相互分离、部分重叠、重叠或扩散范围不等而重合时，等距集如何变化或形成，也尚未得到充分讨论。本研究弥补了这一

空白。文中通过恰当的数值示例和图示为相关讨论与研究提供了支持。研究重新引入了模糊度量空间的概念，并探讨了模糊等距集。整个研究均假设模糊焦集满足紧致性，且模糊集满足凸性。

本文结构如下：第2节介绍贯穿整个研究所必需的基本预备知识。第3节提出模糊豪斯多夫距离和模糊度量空间。第4节介绍本文的核心概念——模糊等距集。第4节中已证明，基于所提出的模糊度量空间思想，模糊等距集在度量空间 $(X,\ \widetilde{M}_d,\ *)$ 和 $(X,\ \widetilde{d},\ L,\ R)$中均为不变集。此外，还通过建立隶属函数，提出了 $\widetilde{E}(\widetilde{A},\ \widetilde{B})$ 的一种自然的模糊推广。最后，第5节给出了一些评述和结论。

## 2 预备知识

本节总结了相关定义和结果，主要介绍了George和Veeramani意义下的模糊距离和模糊度量空间的概念 [7] 。此外，还总结了[3], 所阐述的模糊几何学的基本组成部分。

**定义 2.1** （模糊集， [26]）。 设 $X$ 为一个经典集合。那么，有序对的集合

$$\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x)):x\in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x)\in[0,1]\}$$

称为 $X$上的模糊集。求值函数 $\mu_{\tilde{A}}$（$x$）称为$x$ 在 $A$中的隶属函数或隶属度。

**定义 2.2** （$\alpha$-截集， [5]）。 对于模糊集 $A$，其 $\alpha$-截集记作 $A^{\alpha}$，定义如下：

$$\tilde{A}^{\alpha}=\begin{cases}\{x\in X:\ \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\} & if\quad 0<\alpha\leq 1\\ \mathrm{cl}\{x\in X:\ \mu_{\tilde{A}}(x)>\alpha\} & if\quad \alpha=0,\end{cases}$$

其中 $\mathrm{cl}\{x\in X:\ \mu_{\tilde{A}}(x)\ >\alpha\}$ 表示拓扑闭包。

**定义 2.3** （模糊数， [1]）。 若模糊集 $A$ 是 $\mathbb{R}$ 上的模糊数，且其隶属函数 $\mu$ 具有以下性质，则称其为模糊数：

*(i)* $\mu$（$x|A$）是上半连续的，

*(ii)* $\mu(x|A)\ =0$ 在某个区间 $[a,d]$之外，且

*(iii)* 存在实数 $b$和 $c$，使得 $a\leq b\leq c\leq d$且 $\mu(x|A)$在 $[a,b]$上递增、在 $[c,d]$上递减，并且$\mu(x|A)\ =1$ 对每个 $x\in[b,c]$都成立。

若 $b=c$且令 $f(x)\ =\mu(x|A)\quad\forall x\in[a,b]$和 $g(x)\ =\mu(x|A)\quad\forall x\in[b,d]$为线性函数，则该模糊数称为三角模糊数，记作 $(a,b,d)$ 或 $(a/b/d)$。

**定义 2.4** (沿直线的模糊数，[3] [8] [10])。 定义模糊数时，通常取实数直线 $(\mathbb{R})$ 作为全集。因此，实数直线上的模糊数，例如 $\widetilde{p}$，定义为一组与实数 $p$ 相邻、具有不同隶属度值的实数。我们不再考虑实数直线，而考虑平面 $\mathbb{R}^2$上的任意一条直线，那么 $\widetilde{p}$ 可表示为该直线上的模糊数。在 $x$轴上， $\widetilde{p}$的隶属函数可写为 $\mu\big((x,0)|\ \widetilde{p})\big)=\mu(x|\widetilde{p})\quad\forall x\in\mathbb{R}$. 更明确地说： $\mu\big((x,0)|\widetilde{p})\big)=\begin{cases}\mu(\ \ x|\widetilde{p} & y=0\\ 0 & \text{在其他地方。}\end{cases}$

不考虑 $x$-轴，而将 $xy$-平面上的任意直线 $ax+by=c$ 视为全集，该直线与.....成角 $\theta$，于是定义一个双射变换 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，其形式如下：

$$T(x,y)=\Big((x-h)\cos\theta+(y-k)\sin\theta,\ -(x-h)\sin\theta+(y-k)\cos\theta\Big) \tag{1}$$

将 $x$ 轴变换为直线 $ax+by=c$，那么

*(i)* 点 $(h,k)=\left(\frac{ac}{a^2+b^2},\ \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ 是 $ax+by=c$ 与其过原点的垂线$bx-ay=c$的交点，并且

*(ii)* $\theta$ 是 $ax+by=c$ 与正 $x$ 轴的仰角。

因此，若 $\widetilde{p}$ 是 $x$ 轴上的模糊数，那么在直线 $l_{p\theta}$ （例如）：$ax+by=c$ 上，该模糊数可以视为 $T(\widetilde{p})$。

**定义 2.5 (**模糊点，[10])。 设 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个模糊集，若其隶属函数满足以下性质，则称其为模糊点 $\widetilde{P}(a,b)$：

*(i)* $\mu((x,y)|P(a,b))$ 是上半连续的，

*(ii)* $\mu((x,y)|\widetilde{P}(a,b))=1$ *only at (x,y) = (a,b), and*

*(iii)* $\widetilde{P}^{\alpha}(a,b)$ （$\alpha$截集）是 $\mathbb{R}^2$ 的凸紧子集，对所有 $\alpha\in[0,1]$.

**定义 2.6 (**相同点，[10])。 模糊点 $P(a,b)$、$P(c,d)$ 的支集上分别有两点 $(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$，若满足下列条件，则称为相同点：

*(i)* $\mu((x_1,y_1)|\widetilde{P}(a,b))=\mu((x_2,y_2)|\widetilde{P}(c,d))$,

*(ii)* $(x_1,y_1)$ 和 $(x_2,y_2)$ 位于连接 $(a,b)$ 与 $(c,d)$ 的直线的同一侧，并且

*(iii)* 连接 $(x_1,y_1)$ 与 $(a,b)$ 的直线，与连接 $(x_2,y_2)$ 与 $(c,d)$ 的直线平行。

**定义 2.7 (**逆点，[10])。 模糊点 $P(a,b)$、$P(c,d)$ 的支集上分别有两点 $(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$，若满足下列条件，则称为逆点：

*(i)* $\mu((x_1,y_1)|\widetilde{P}(a,b))=\mu((x_2,y_2)|\widetilde{P}(c,d))$,

*(ii)* $(x_1,y_1)$ 和$(x_2,y_2)$ 位于连接$(a,b)$ 与$(c,d)$的直线两侧，且

*(iii)* 连接$(x_1,y_1)$ 与$(a,b)$ 的直线和连接$(x_2,y_2)$ 与$(c,d)$ 的直线平行。

**定义 2.8 (**模糊点之间的模糊距离，[3] [8] [10])。 设 $A$ 和 $B$ 是两个模糊点，则模糊距离重新定义如下

$$\mu(\widetilde{d^{\alpha}}\mid\widetilde{d})=sup\{\alpha:d=d(u,v),\forall(u,v)\ lies\ on\ the\ line\ joining\ inverse\ points$$
$$u\in\widetilde{A}^0\ and\ v\in\widetilde{B}^0\ and\ \mu(u\mid\widetilde{A})=\mu(v\mid\widetilde{B})=\alpha,d\ is\ euclidean\ distance\}$$
$$and$$
$$\widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{B})=\bigcup_{\alpha=0}^{1}\widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{A}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}\right)$$

这里，$d(,)$ 是模糊距离度量，$A^0$和 $B^0$ 分别是模糊点 $A$和 $B$ 的支集。

**例1.** 设 $A(a_1, a_2)$ 和 $B(b_1, b_2)$ 是两个模糊点，其椭圆基底的扩散范围分别为 $S_1 = (p_1, p_2)$ 和 $S_2 = (q_1, q_2)$。在每个 $\alpha$-截集（$\alpha \in [0,1]$）中，考虑一条与实轴成角 $\theta$ 的直线 $l_\theta$。直线与 $A^\alpha$ 的交点分别为 $A_\theta^\alpha$和 $A_\theta^\alpha$。同理，与 $\widetilde{B}^\alpha$ 的交点分别为 $B_\theta^\alpha$ 和 $B_\theta^\alpha$。于是，

$$\begin{aligned}
\underline{A}_\theta^\alpha &= \big(a_1 - p_1 * (1-\alpha) * \cos(\theta),\, a_2 - p_2 * (1-\alpha) * \sin(\theta)\big) \\
\overline{A}_\theta^\alpha &= \big(a_1 + p_1 * (1-\alpha) * \cos(\theta),\, a_2 + p_2 * (1-\alpha) * \sin(\theta)\big) \\
\underline{B}_\theta^\alpha &= \big(b_1 - q_1 * (1-\alpha) * \cos(\theta),\, b_2 - q_2 * (1-\alpha) * \sin(\theta)\big) \\
\overline{B}_\theta^\alpha &= \big(b_1 + q_1 * (1-\alpha) * \cos(\theta),\, b_2 + q_2 * (1-\alpha) * \sin(\theta)\big)
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\theta \in [0, \pi]$。距离 $d^\alpha$ 根据定义 *2.8* 定义

$$\widetilde{d}^\alpha\big(\widetilde{A}^\alpha, \widetilde{B}^\alpha\big) = \left(\min_{\theta\in[0,\pi]} \underline{\lambda}, d((a_1,a_2),(b_1,b_2)), \max_{\theta\in[0,\pi]} \overline{\lambda}\right) \tag{3}$$

其中，$\lambda$ = 最小值 $\Big(d\big(\underline{A}_\theta^\alpha,\, B_\theta^\alpha\big), d\big(A_\theta^\alpha,\, B_\theta^\alpha\big)\Big)$ 和 $\lambda$ = 最大值 $\Big(d\big(\underline{A}_\theta^\alpha,\, B_\theta^\alpha\big), d\big(A_\theta^\alpha,\, B_\theta^\alpha\big)\Big)$. $\widetilde{A}^\alpha$， $\widetilde{B}^\alpha$ 是 **α**-截集， $d(,\,)$ 表示通常的欧几里得距离。考虑所有 $\alpha$-截集，模糊点 $A(a_1,\ a_2)$ 与 $B(b_1,\ b_2)$ 之间的模糊距离为

$$\widetilde{d}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}^\alpha\big(\widetilde{A}^\alpha, \widetilde{B}^\alpha\big) \tag{4}$$

$d(A,\ B)$ 是一个隶属函数如下的模糊集：

$$\mu_{\widetilde{d}}(x) = \begin{cases} L(d) = \min\{1 - \phi(x,\theta)\}, & for\ \theta_{\max}, \\ R(d) = \max\{1 - \phi(x,\theta)\}, & for\ \theta_{\min}, \end{cases} \tag{5}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&\phi(x,\theta) = \frac{-\big(d_1 R_1 \cos\theta + d_2 R_2 \sin\theta\big) \pm \sqrt{\big(d_1 R_1 \cos\theta + d_2 R_2 \sin\theta\big)^2 - (R_1^2\cos^2\theta + R_2^2 \sin^2\theta)(d_c^2 - x^2)}}{(R_1^2\cos^2\theta + R_2^2\sin^2\theta)} \\
&and\ R_1 = p_1 + q_1,\quad R_2 = p_2 + q_2,\quad d_1 = a_1 - b_1,\quad d_2 = a_2 - b_2,\quad d_c = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

**例2.** 设 $A(1{,}0)$ 和 $B(5,\ 2)$（图*1*）是两个模糊点，其隶属函数为

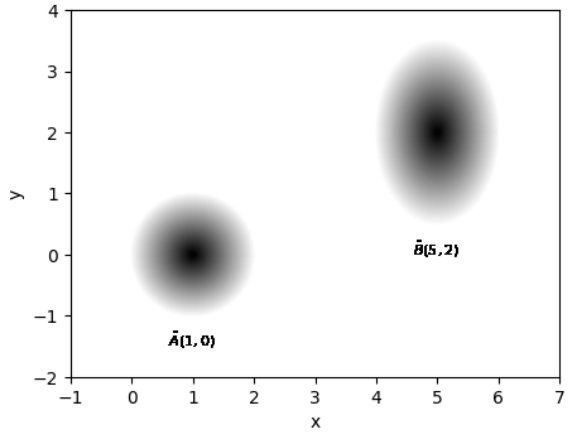
$$\mu_1((x,y)|\widetilde{A}(1,0)) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} & if\ (x-1)^2 + (y-0)^2 \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\mu_2((x,y)|\widetilde{B}(5,2)) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(\frac{x-5}{1})^2 + (\frac{y-2}{1.5})^2} & if\ (\frac{x-5}{1})^2 + (\frac{y-2}{1.5})^2 \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

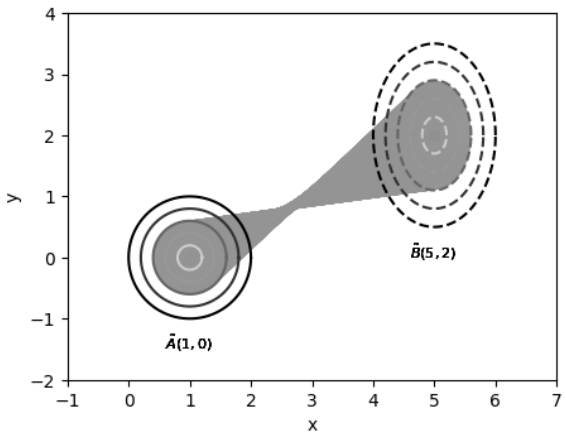
这里，最小值$_{\theta\in[0,\pi]}\,\lambda$ 在 $\theta = 0.4631$ 处取得，而最大值$_{\theta\in[0,\pi]}\,\lambda$ 在 $\theta = 3.8168$处取得。利用公式 *3*， $\alpha$-截集上的距离如下：

$$\widetilde{d}^\alpha\big(\widetilde{A}^\alpha, \widetilde{B}^\alpha\big) = \Big(\sqrt{5.667025 + 9.883959\alpha + 4.449017\alpha^2}, 4.472136, \sqrt{43.618887 - 28.497955\alpha + 4.879067\alpha^2}\Big)$$

综合考虑所有 $\alpha$-截集，模糊点 $A(1{,}0)$ 与 $B(5{,}2)$ 之间的模糊距离为




模糊点 $\widetilde{A}(1,0)$ 和 $\widetilde{B}(5,2)$，具有不同的扩散范围




$\alpha = 0.4$-截集上的模糊距离

图 1：模糊点与模糊距离

$$\widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = (2.380551, 4.472136, 6.604459).$$

与其考虑基底不同的两个模糊点，不如考虑基底相似的两个模糊点，此时适用以下命题。

**命题 2.1.** 若 $A$ 和 $B$ 是两个具有圆形基底的模糊点，则值 $\min\limits_{\theta\in[0,\pi]} \lambda$ 和 $\max\limits_{\theta\in[0,\pi]} \lambda$（见公式 *3*）在角处取得，该角的值与连接模糊点 $A$ 和的核的线段的斜率相同$B$。

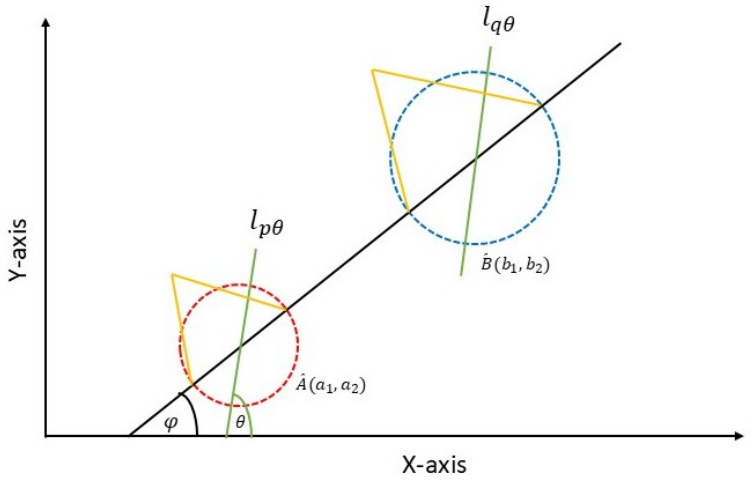



图 2：$l_{p\theta}$ 和 $l_{q\theta}$ 与 $x$轴构成 $\theta$，连接$(a_1, a_2)$和$(b_1, b_2)$的直线与 $x$轴构成 $\psi$

**证明：** 设 $A$（$a_1$，$a_2$）和 $B$（$b_1$，$b_2$）是两个具有圆形基底、扩散范围分别为 $S_1 = r_1$ 和 $S_2 = r_2$的模糊点。由方程 2 可得，

$$\begin{aligned} d^2\big(\overline{A}_\theta^\alpha, \underline{B}_\theta^\alpha\big) &= d_c^2 + (r_1+r_2)^2(1-\alpha)^2 + 2(r_1+r_2)(1-\alpha)\big[(a_1-b_1)\cos\theta + (a_2-b_2)\sin\theta\big] \\ d^2\big(\underline{A}_\theta^\alpha, \overline{B}_\theta^\alpha\big) &= d_c^2 + (r_1+r_2)^2(1-\alpha)^2 - 2(r_1+r_2)(1-\alpha)\big[(a_1-b_1)\cos\theta + (a_2-b_2)\sin\theta\big] \end{aligned} \tag{7}$$

其中，$d_c^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2$。

对 $\theta$ 求方程 7 求导，得到 $2(r_1+r_2)(1-\alpha)[(a_1-b_1)\sin\theta - (a_2-b_2)\cos\theta] = 0$。对于 $\alpha \in [0,1$ 的所有取值，$\theta$ 的最小值为 $\tan^{-1}\left[\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}\right]$。因此，当 $l_{p\theta}$ 和 $l_{q\theta}$ 均为 $\theta_{min} = \tan^{-1}\left[\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}\right]$ 时，我们得到 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 两个模糊点之间的模糊距离。对于 $\alpha = 1$，$A$ 和 $B$ 变为非模糊。因此无需计算 $\alpha$-截集。同样，连接 $(a_1, a_2)$ 和 $(b_1, b_2)$ 的直线 $\frac{x-a_2}{a_1-a_2} = \frac{y-b_2}{b_1-b_2}$ 的斜率为 $\tan\psi = \frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}$，即 $\psi = \tan^{-1}\left[\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}\right]$。这与 $\theta_{min}$ 相同。

这表明，对于具有圆形基底的两个模糊点，其模糊距离的逆点出现在连接这两个模糊点的核的直线上。由此可知，两个模糊点之间的模糊距离是沿着使 $\psi$的方向计算的模糊数之间的距离。如果考虑扩展度为 $S_1 = (p_1, p_2)$ 和 $S_2 = (p_2, p_1)$ 的两个具有椭圆基底的模糊点，则可得到相同的结果。

**定义2.9**（模糊点与模糊集之间的模糊距离，[14]）。设 $A$ 为一个模糊集，$P$ 为一个模糊点 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{P}$，则 $P$与 $A$之间的模糊距离记为 $d$，定义为 $d(P, A) = d(P_A, \widetilde{a})$

**定义2.10** (模糊中点集，[14])。设 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{P}$ 是 $\mathbb{R}^2$上的模糊集。$\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$之间的模糊中点集记作$\widetilde{\mathcal{M}}(\widetilde{A}, \widetilde{B})$，可定义为满足以下条件的模糊点 $\widetilde{P}$的集合：$\widetilde{d}(\widetilde{P}, \widetilde{A}) = \widetilde{d}(\widetilde{P}, \widetilde{B})$ 且 $\widetilde{P}^1 \in \mathcal{M}(\widetilde{A}^1, \widetilde{B}^1)$。

**定义2.11** ($t$-范数，[21])。二元运算 $*$：$[0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ 称为连续的 $t$-范数，如果$([0,1], *)$ 是一个单位元为*1*的阿贝尔拓扑幺半群，并且当 $a \le b$和 $c \le d$, $a, b, c, d \in [0,1]$时，$a * b \le c * d$。

**定义 2.12**（模糊度量空间，[7][12]）。模糊度量空间是一个有序三元组（$X, M, *$），满足：$X$是一个非空集合，$*$是连续的 $t$-范数，且 $M$是 $X^2 \times$在（$0, \infty$）上的模糊集，并满足以下条件，对所有 $x, y, z \in X$,$s, t > 0$:

1. $M(x, y, t) > 0$，2. $M(x, y, t) = 1$ 当且仅当 $x = y$，3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
4. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \le M(x, z, t+s)$,
5. $M(x, y, \cdot)$：$(0, \infty) \to [0,1]$ 连续

.

如果$(X, M, *)$ 是一个模糊度量空间，我们称$(M, *)$ 是 $X$上的模糊度量。

令 $x \cdot y$为对所有 $x, y \in [0,1]$都适用的通常乘法，并令 $M$为定义在 $X^2 \times (0, \infty)$上的函数，使得

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}, \quad x, y \in X,\ t > 0. \tag{8}$$

那么，$(X, M, \cdot)$是一个模糊度量空间，称为标准模糊度量空间（见 [7]）；$(M, \cdot)$则称为 $d$的标准模糊度量。在 [7], 中已证明，$X$ 上的每个模糊度量$(M, *)$都会生成一个拓扑 $\tau$，使得$(X, \tau)$是一个可度量化拓扑空间。在度量空间中，考虑的不是距离 $d(x, y)$，而是 $M(x, y, t)$，它表示 $x$与 $y$在时间/距离 $t$（通常为 $t \in [0, \infty)$ 或$(0, \infty)$)时的相似度或接近度。

以下结果将在后续章节中用到。

**命题 2.2 (**《 [19]》中的命题 1。 ⌋ 设 $(X, M, *)$ 是一个模糊度量空间。那么， $M$ 是定义在$X^2 \times (0, \infty)$上的连续函数。

**定义 2.13 (** [23]中的定义 2.4)。 设 $A$ 是模糊度量空间 $(X, M, *)$的一个非空子集。对于 $x \in X$ 和$t > 0$，令 $M(x, A, t) := \sup_{a \in A}\{M(x, a, t)\}$。

**引理 2.1 (** [19]中的引理 2)。 设 $(X, M, *)$ 是一个模糊度量空间。那么，对于每个 $a \in X$和 $B \in \mathcal{K}_0(X)$，函数$t \longmapsto M(a, B, t)$ 在 $(0, \infty)$上连续，其中 $\mathcal{K}_0(X)$ 是 $X$的非空紧子集构成的集合。

**定义 2.14 (**模糊度量空间 [11])。 设 $X$ 是一个非空集合， $d$ 是从 $X \times X$ 到 $G$ （$E$ 的所有非负模糊数的集合）的映射，并设映射 $L, R\colon [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ 是对称的、关于两个自变量均非递减的，并满足 $L(0,0) = 0$ 以及 $R(1,1) = 1$。记

$$[d(x, y)]_\alpha = [\lambda_\alpha(x, y), \rho_\alpha(x, y)] \text{ for } x, y \in X,\ 0 < \alpha \leq 1.$$

四元组 $(X, d, L, R)$ 称为模糊度量空间，且 $d$ 是一个模糊度量，当且仅当

*1.* $d(x, y) = \overline{0}$ 当且仅当 $x = y$， *2.* $d(x, y) = d(y, x)$ 对所有 $x, y \in X$，

*3.* 对所有 $x, y, z \in X$

(a) $d(x, y)(s + t) \leq R(d(x, y)(s)\ d(z, y)(t))$， 当 $s \leq \lambda_1(x, z)$、$t \leq \lambda_1(z, y)$ 和 $s + t \leq \lambda_1(x, y)$ 时 (b) $d(x, y)(s + t) \geq L(d(x, y)(s)\ d(z, y)(t))$， 当 $s \geq \lambda_1(x, z)$、 $t \geq \lambda_1(z, y)$ 和 $s + t \geq \lambda_1(x, y)$ 时

**定理 2.1**。 在模糊度量空间$(X, d, L, R)$ 中，定义 *2.14* 中的三角不等式 *3* 等价于 $d(x, y) \preceq d(x, y) + d(z, y)$，其中 $L$ 表示最小值，$R$ 表示最大值。 *[*参见 *[11]]*中的证明

# 3 模糊度量空间简介

本节提出了包含模糊点的模糊度量空间定义 [见定义 2.12] 。随后，证明了两个模糊点之间的模糊距离 [见定义 2.8]是一个度量，并提出了模糊豪斯多夫距离的定义。

**定义 3.1 (**重新定义的模糊度量空间)。 模糊度量空间是一个有序三元组 $(X, M_d, *)$，其中 $X$ 是全集， $*$ 是连续的 $t$-范数，且 $M$ 是定义在 $X^2 \times (0, \infty)$ 上的模糊集，并满足以下条件，对所有模糊点 $A, B, C \in X,\ t, s > 0$均成立：

*1.* $M_d(A, B, t) \succ 0$，

*2.* $M_d(A, B, t) \cong 1$ 当且仅当 $A \cong B$，

*3.* $M_d(A, B, t) \cong M_d(B, A, t)$；

*4.* $M_d(A, B, t) * M(B, C, s) \preceq M(A, C, t + s)$，

*5.* $M_d(A, B, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ 连续。

这里， $\cong$ 表示在模糊意义下“几乎相等”，而 $\preceq$ 表示“模糊地小于或等于”。此外，如果$(M_d, *)$ 是定义在 $X$ 上的模糊度量，且 $d(,)$ 是模糊距离（定义 *2.8*），那么$(X, M_d, *)$ 就是一个模糊度量空间。

前述定义 3.1 中提到的所有条件，似乎都与 [12]有着非常相似的解释。这些条件也传达了这样的概念：恒等性、非负性和对称性等特征都受到模糊度或不确定性的影响。还需注意，模糊度量空间以模糊点作为其元素，即它们是由模糊点 [25]构成的集合。

例如，模糊度量 $M_d$ 可以定义如下。设 $M_d$ 是定义在$X^2 \times (0, \infty)$上的两个模糊点 $A$ 和 $B$ 的函数，并可建立如下：

$$\widetilde{M_d}(\widetilde{A}, \widetilde{B}, t) = \frac{t}{t + \widetilde{d}(\widetilde{A}, \widetilde{B})}, \quad \widetilde{A}, \widetilde{B} \in X,\ t > 0 \tag{9}$$

这里，$M_d(A, B, t)$表示在 $t$处的模糊度量 $M_d$下，集合 $A$和 $B$彼此接近的程度。

**例 3**。 如果我们考虑例2。对于每个 $A$、$B \in X$、$t > 0$

$$\begin{aligned}
\widetilde{M_d}(\widetilde{A}, \widetilde{B}, t) &= \frac{t}{t + \widetilde{d}(\widetilde{A}, \widetilde{B})} \\
&= \frac{t}{t + (2.380551, 4.472136, 6.604459)} \\
&= \frac{t}{(t + 2.380551, t + 4.472136, t + 6.604459)} \\
&= \left( \frac{t(t + 2.339813)}{(t + 4.472136)^2}, \frac{t}{t + 4.472136}, \frac{t(t + 6.563721)}{t + 4.472136} \right)
\end{aligned}$$

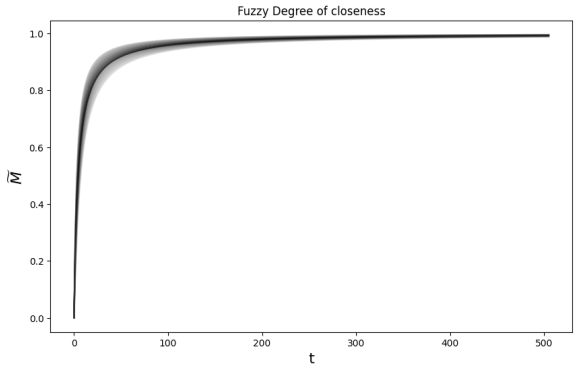



图 3：模糊点 $A(1, 0)$、 $B(5, 2)$之间的接近度

在此例中，很明显，模糊度或不确定性与接近度存在内在联系。从图-3可以观察到，当 $t$ 接近于零时，不确定性较低。随着 $t$ 增加，不确定性增大。然而，当 $t$取非常大的值时，不确定性又会降低，并最终消失。此外，当 $t$ 接近于零时， $M_d$ 也接近于零；随着 $t$变大， $M_d$ 趋近于1。

通常，模糊距离表示模糊集或模糊点之间相距多远。

$B$ 彼此相离，因此，距离越小，接近度越高。$\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 彼此相离，因此，距离越大，接近度越低。

**命题 3.1.** 两个模糊点之间的模糊距离是模糊度量，且（$X, M_d, *$）是一个度量空间。

**证明：** 由方程 4 可得 $\widetilde{d}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}^{\alpha}(\widetilde{A}^{\alpha}, \widetilde{B}^{\alpha}) = (\lambda, d(A, B)\ \lambda)$

1. $d(A,B) \approx 0$ 当且仅当 $A \cong B$令，$\widetilde{A} \cong \widetilde{B}$则 $\widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{A}) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}^{\alpha}(\widetilde{A}^{\alpha},\widetilde{A}^{\alpha}) = (\lambda, 0, \lambda) \cong 0$反过来，令 $\widetilde{d}(\underline{\widetilde{A}},\overline{\widetilde{B}}) = 0$。则，$\bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}^{\alpha}(\widetilde{A}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}) = 0$，意味着 $\widetilde{d}^{\alpha}(\widetilde{A}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}) = 0$ 对每个 $\alpha \in [0,1]$.因此，$(A_{\theta}^{\alpha}, B_{\theta}^{\alpha}) = 0 = d(A_{\theta}^{\alpha}, B_{\theta}^{\alpha})$，这意味着 $\widetilde{A} \cong \widetilde{B}$。

2. 对所有 $A, B \in X$, $d(A, B) = d(B, A)$

证明显然，因为 $d(A_{\theta}^{\alpha}, B_{\theta}^{\alpha})$ 和 $d(A_{\theta}^{\alpha}, B_{\theta}^{\alpha})$ 是欧几里得距离，因此具有对称性。

3. 对所有 $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C} \in X$ $\widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = (\lambda_{AB}, d(A,B)\ \lambda_{AB})\widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{C}) = (\lambda_{AC}, d(A,\overline{C})\ \lambda_{AC})\widetilde{d}(\widetilde{C},\widetilde{B}) = (\lambda_{CB}, d(C,B)\ \lambda_{CB})$，$\widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{B}) \preceq \widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{C}) + \widetilde{d}(\widetilde{C},\widetilde{B})$。这里，$d(A,B)$、$d(A,C)$ 和 $d(C,B)$ 分别是模糊点 $A$、$B$和 $C$的核的欧几里得距离。因此，我们有 $\overline{d}(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$。

$$
\begin{aligned}
\widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{C}) + \widetilde{d}(\widetilde{C},\widetilde{B}) &= (\underline{\lambda}_{AC}, d(A,C), \overline{\lambda}_{AC}) + (\underline{\lambda}_{CB}, d(C,B), \overline{\lambda}_{CB}) \\
&= (\underline{\lambda}_{AC} + \underline{\lambda}_{CB}, d(A,C) + d(C,B),\ \overline{\lambda}_{AC} + \overline{\lambda}_{CB}) \\
&\succeq (\underline{\lambda}_{AB}, d(A,B), \overline{\lambda}_{AB}) \\
&= \widetilde{d}(\widetilde{A},\widetilde{B})
\end{aligned}
$$

因此，$M_d(A, B, t)$ 也是模糊度量，因此，$(X, M_d, *)$ 是一个度量空间。

## 3.1 模糊豪斯多夫距离

豪斯多夫距离的概念也可以扩展到上述模糊度量空间。通常，豪斯多夫距离是一种度量，用于衡量两个集合在形状和结构方面的相似性或相异性。$A$ 与 $B$之间的豪斯多夫距离，其中 $A, B \subset X$ 为非空集，定义如下:

$$
d_H(A,B) = \max\left\{ \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b),\ \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(b,a) \right\}. \tag{10}
$$

$d_H(A, B)$ 表示一个集合中的点到另一个集合中最近点的所有距离中的最大值。本质上，它量化了这两个集合之间的距离。

现在我们尝试定义模糊豪斯多夫距离，它是方程（10）的扩展。模糊豪斯多夫距离也可以解释为两个模糊集之间的距离。然而，我们认为，两个模糊几何对象之间的距离不可能像上述定义那样精确。

结合上述概念与定义2.9，可将这一思想扩展到两个模糊集之间的模糊豪斯多夫距离。第一步是确定模糊集的核 $S_1$与 $S_2$之间的豪斯多夫距离。若核分别为$p \in S_1$和 $q \in S_2$，则距离为 $d(p,q) = d_H(S_1^1, S_2^1)$。考虑两个模糊数 $\widetilde{T}(p) = (T(p) - \gamma_1, T(p)\ T(p) + \gamma_2)$和 $\widetilde{T}(q) = (T(q) - \gamma_3, T(q)\ T(q) + \gamma_4)$，其沿分别连接 $p$和 $q$的线段的扩散范围为 $\gamma_1,\gamma_2$和 $\gamma_3,\gamma_4$。由此可得相应的模糊豪斯多夫距离表达式 $d_H(S_1,S_2) = d(T(p)\ T(q))$，其中使用了 [14]。

借用例2.1，即两个三角形模糊数，模糊豪斯多夫距离。令 $\widetilde{A}^1 = (a_1, a_2)$和 $\widetilde{B}^1 = (b_1, b_2)$是其核，则 $\alpha = 1$处的豪斯多夫距离为 $d_H(\widetilde{A}^1, \widetilde{B}^1)$，这是一个清晰距离。因此，存在一条直线 $l_{\psi}$，经过$(a_1, a_2)$和$(b_1, b_2)$，并与 $x$轴成角 $\psi$ [（见图2]）。设 $l_{\theta}$为一条经过$(a_1, a_2)$的线段，则当 $\theta = \psi$ [时，$l_{\theta}$经过$(b_1, b_2)$（见命题 2.1]）。因此，可以找到两个逆点 $A_{\psi}^{\alpha}, B_{\psi}^{\alpha}$和 $A_{\psi}^{\alpha}, B_{\psi}^{\alpha}$，它们分别相对于 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$，位于角$\psi$ 的每个 $\alpha$-截线上。现在设 $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$ 和 $\widetilde{b} \in \widetilde{B}$是沿直线 $l_{\psi}$的两个连续模糊数，则 $\widetilde{a}^{\alpha} = (T(A_{\psi}^{\alpha})\ T(a_1, a_2)\ T(A_{\psi}^{\alpha}))$ 以及 $\widetilde{b}^{\alpha} = (T(B_{\psi}^{\alpha})\ T(b_1, b_2)\ T(B_{\psi}^{\alpha}))$，其中使用映射 $T$式（1）。对于每个 $\alpha$, $\widetilde{d}_H^{\alpha}(\widetilde{A}^{\alpha}, \widetilde{B}^{\alpha}) = \widetilde{d}^{\alpha}(\widetilde{a}^{\alpha}, \widetilde{b}^{\alpha})$ 和 $\bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}_H^{\alpha}(\widetilde{A}^{\alpha}, \widetilde{B}^{\alpha}) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}^{\alpha}(\widetilde{a}^{\alpha}, \widetilde{b}^{\alpha})$，也就是说

也就是两个模糊点之间的模糊距离。于是，两个模糊点 $\widetilde{A}$和 $\widetilde{B}$之间的模糊豪斯多夫距离记为 $d_H(A,\ B)$，其值为 $\widetilde{d}_H(\widetilde{A},\ \widetilde{B}) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}^{\alpha}(\widetilde{a}^{\alpha},\ \widetilde{b}^{\alpha}) = \widetilde{d}(\widetilde{a},\ \widetilde{b})$。其数学定义如下：

**定义 3.2**（模糊豪斯多夫距离）。两个模糊点 $A$和 $B$在 $(X, M_d, *)$之间的模糊豪斯多夫距离 $d_H(A, B)$可通过其隶属函数定义为

$$\widetilde{(d_H^{\alpha} \mid d_H) = sup\{\alpha:\ d = d(u, v)\ \ u \in \widetilde{a}^0,\ v \in b^0}$$是连续模糊数 $\widetilde{a}$的逆点和 $\widetilde{b}$沿着连接 $\widetilde{A}^1$和 $\widetilde{B}^1$的直线，使得 $\mu(u \mid \widetilde{a}) = \mu(v \mid \widetilde{b}) = \alpha$和 $d(\widetilde{a}^1, \widetilde{b}^1) = d_H(\widetilde{a}^1, \widetilde{b}^1)\}$

$$\widetilde{d}_H(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \widetilde{d}_H^{\alpha}(\widetilde{a}^{\alpha}, \widetilde{b}^{\alpha}) \quad and$$

**例4.** 考虑例*2*中的模糊点 $A,\ B$，并定义其模糊豪斯多夫距离。取线段 $l_\psi$：$\frac{x-1}{\cos\psi} = \frac{y}{\sin\psi}$，它经过$(1,\ 0)$，且与 $x$ 轴的夹角为 $\psi$。当 $\psi = \tan^{-1}\frac{2-0}{5-1} = 0.46365$ 时，它经过$(5,\ 2)$。它还包含定义 $\widetilde{A}^1$ 和 $\widetilde{B}^1$ 之间欧几里得距离的线段。因此，对于角 $\psi$，有 *[*，见图 *2],*

$$l_\psi : x - 2y = 1$$

现在，若 $P_A = (0.118033989,\ 1.118033989,\ 2.118033989)$是模糊点 $A$ 在线 $l_\psi$ 上对应的模糊数，且 $P_B = (4.472135955,\ 5.59016994,\ 6.708203932)$是模糊点 $B$ 在线 $l_\psi$上对应的模糊数，那么这两个模糊点之间的豪斯多夫距离为 $d(P_A, P_B)$。于是，两个模糊点 $A, B$ 之间的模糊豪斯多夫距离为

$$d_H(A, B) = (2.35379606, 4.47213595, 6.59016994),$$

其相同根据定义 *2.8*，两个模糊点之间的模糊距离为 $d_H(A, B) \approx d(A, B)$ .

# 4 模糊等距集

本节将介绍本文的核心概念：模糊等距集。这些基础定义为后续各节中的拓扑分析和稳定性分析提供了分析框架。I

n ge neral，对于两个非空集 $A, B \subset X$，由 $A$ 和 $B$ 确定的中点集 [24] 定义为 e

$$E(A, B) = \{x \in X : d(x, A) = d(x, B)\}$$

其中 $d(x, A) = \inf\{d(x, a):\ a \in A\}$。集合 $A$和 $B$称为 $E(A, B)$的焦集。

集合 $E(A, B)$可在模糊度量空间中定义。相关的前期研究见 [14]。如果给定的两个集合位于模糊度量空间中，由于模糊等距集是从模糊度量导出的，因此它将是模糊的，而不是 $X$ 的清晰子集；后者由所有与焦集 $A$ 和 $B$等距的点构成。对这一构造进行自然的模糊化，可以赋予一个隶属函数，使其在点偏离精确等距轨迹时逐渐减小，从而真正以模糊形式表示等距集。

本节以闭式重新定义模糊中点集。模糊中点集也可以视为模糊等距集。模糊等距集有两种理解方式。首先，根据定义 2.8，考虑所有满足以下条件的 $\widetilde{x} \in X$（即模糊点）：与 $\widetilde{x}$ 之间的模糊距离等于 $A$ 与 $\widetilde{x}$ 之间的模糊距离。这是理解模糊等距集的标准方式。另一种方式是寻找满足以下条件的 $\widetilde{x} \in X$：$\widetilde{x}$ 与 $A$ 之间的模糊接近度等于 $\widetilde{x}$ 与 $B$之间的模糊接近度。这里分别使用方程 9 和定义 2.8 求得等距集。本节证明了这两种方法得出的结果相同。

**定义 4.1** (重新定义模糊中点集)。设 $\widetilde{A}$和 $\widetilde{B}$是 $\mathbb{R}^2$上的模糊集。$\widetilde{A}$和 $\widetilde{B}$之间的模糊中点集，记作$\widetilde{\mathcal{M}}(\widetilde{A}, \widetilde{B})$，可重新定义为满足以下条件的模糊点集合 $\widetilde{P}$：$\widetilde{d}(\widetilde{P}, \widetilde{A}) = \widetilde{d}(\widetilde{P}, \widetilde{B})$且 $\widetilde{P}^{\alpha} \in \mathcal{M}(\widetilde{A}^{\alpha}, \widetilde{B}^{\alpha})\ \ \forall \alpha \in [0, 1]$。

为了求得模糊中点集，也就是模糊等距集，我们求出模糊焦集各个 $\alpha$-截集的中点集。为便于记号，记作 $\widetilde{E}^{\alpha} = \mathcal{M}(\widetilde{A}^{\alpha}, \widetilde{B}^{\alpha})$。于是 $\widetilde{E}(\widetilde{A},\ \widetilde{B}) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \mathcal{M}(\widetilde{A}^{\alpha},\ \widetilde{B}^{\alpha})$。因此，对于模糊度量

~ ~空间 $(X,\ d,\ L,\ R)$ 中的两个非空集 $A$ 和 $B$，由它们确定的模糊等距集定义为

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(\widetilde{A},\widetilde{B}) &= \left\{\widetilde{x}\in X : \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A}) = \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{B})\right\}\\ &= \left\{\bigcup_{\alpha=0}^{1}\widetilde{x}^{\alpha}\in X : \widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{A}^{\alpha}\right) = \widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}\right)\right\}\\ &= \left\{\bigcup_{\alpha=0}^{1}\widetilde{x}^{\alpha}\in X : t+\widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{A}^{\alpha}\right) = t+\widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}\right)\right\}\\ &= \left\{\bigcup_{\alpha=0}^{1}\widetilde{x}^{\alpha}\in X : \frac{t}{t+\widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{A}^{\alpha}\right)} = \frac{t}{t+\widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}\right)}\right\}\\ &= \left\{\widetilde{x}\in X : \frac{t}{t+\bigcup_{\alpha=0}^{1}\widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{A}^{\alpha}\right)} = \frac{t}{t+\bigcup_{\alpha=0}^{1}\widetilde{d}^{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}\right)}\right\}\\ &= \left\{\widetilde{x}\in X : \widetilde{M}_d(\widetilde{x},\widetilde{A},t) = \widetilde{M}_d(\widetilde{x},\widetilde{B},t)\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

~ ~ ~ ~ ~ ~集合 $A$ 和 $B$ 称为 $E(A,B)$ 的模糊焦集。模糊等距集 $E(A,B)$ 可由其隶属函数定义：

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{E}}(x) &= \left\{\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha : \widetilde{d}_{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{A}^{\alpha}\right) = \widetilde{d}_{\alpha}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha}\right);\quad \widetilde{x}\in X\right\}\\ &= \left\{\bigcup_{\alpha=0}^{1}\alpha : \widetilde{M}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{A}^{\alpha},t\right) = \widetilde{M}\left(\widetilde{x}^{\alpha},\widetilde{B}^{\alpha},t\right);\quad \widetilde{x}\in X\ \ \&\ \ t>0\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

~ ~ ~ ~ ~其中，$M(\widetilde{x},A,t)$ 和 $M(\widetilde{x},B,t)$ 分别表示到模糊焦集 $A$和 $B$ 的模糊邻近度。注意，函数 $\mu_{\widetilde{E}}(x)$ 是连续的。因此，对于每个 $\alpha\in[0,1]$，$\alpha$-截集为

$$\widetilde{E}(\alpha) := \{x\in X : \mu_{\widetilde{E}}(x)\geq\alpha\} = \mu_{\widetilde{E}}^{-1}([\alpha,1]). \tag{13}$$

~ ~ ~ ~因此，如果考虑度量空间 $(X,M_d,*)$，则可得到关于 $E(A,B)$ 的类似结果 . Th .

## 4.1 模糊等距集的不变性

模糊度量空间的概念以两种不同形式被引入：一种由 Kramosil 和 Mich´alek [12]提出，另一种由 Kaleva 和 Seikkala [11]提出。然而，在这两种表述中，基础集合均未得到充分明确的规定。在每种情况下，模糊距离都定义在两个清晰点或集合之间，其值取决于 $t>0$。

在我们的工作中，模糊度量空间 [见定义 3.1] 被以闭式形式重新定义，将模糊距离视为模糊集，因此两个模糊点之间的模糊距离 [见定义 2.8] 本身就是一种模糊度量。本节将证明，使用模糊度量空间的两种定义所得到的模糊等距集，与所提出的重新定义的模糊度量空间相比是不变的。为方便起见，并区分求取等距集的两种方法，~ ~ ~ ~ ~ ~我们分别将通过第一种和第二种方法得到的集合记为 $E_{\widetilde{M}}(A,B)$ 和 $E_{\widetilde{d}}(A,B)$。

如果模糊度量空间 $\left(X,\widetilde{M}_d,*\right)$ 是第一类的，那么对于给定的非空子集 $\widetilde{A},\ \widetilde{B}\subset X$，由 $A$ 和 $B$ 确定的模糊等距~ ~集定义为

$$\widetilde{E}_{\widetilde{M}}(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \left\{\widetilde{x}\in X : \widetilde{M}_d(\widetilde{x},\widetilde{A},t) = \widetilde{M}_d(\widetilde{x},\widetilde{B},t)\right\}. \tag{14}$$

其中， $x$到集合 $A$的邻近度定义为

$$\widetilde{M}_d(\widetilde{x},\widetilde{A},t):=\frac{t}{t+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A})}.$$

同样，对于第二类模糊度量空间 $\left(X,\widetilde{d},L,R\right)$，若给定的非空子集为 $\widetilde{A},\widetilde{B}\subset X$，则模糊等距~ ~集由 $A$ 和 $B$确定，

$$\widetilde{E}_{\widetilde{d}}(\widetilde{A},\widetilde{B})=\left\{\widetilde{x}\in X:\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A})=\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{B})\right\}. \tag{15}$$

因此，由式14和式15可得，

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{\widetilde{M}}(\widetilde{A},\widetilde{B})&=\left\{\widetilde{x}\in X:\frac{t}{t+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A})}=\frac{t}{t+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{B})}\right\}\\&=\left\{\widetilde{x}\in X:\frac{1}{t+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A})}=\frac{1}{t+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{B})}\right\}\\&=\left\{\widetilde{x}\in X:t+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A})=t+\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{B})\right\}\\&=\left\{\widetilde{x}\in X:\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A})=\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{B})\right\}\\&=\widetilde{E}_{\widetilde{d}}(\widetilde{A},\widetilde{B}).\end{aligned}$$

由式15可得，

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{\widetilde{d}}(\widetilde{A},\widetilde{B})&=\left\{\widetilde{x}\in X:\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{A})=\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{B})\right\}\\&=\widetilde{E}_{\widetilde{M}}(\widetilde{A},\widetilde{B}).\ [\text{see Eq.11}]\end{aligned}$$

相同

~ ~**例5.** 设 $A(0,0)$ 和 $B(5,0)$ 为两个隶属函数如下的模糊点

$$\mu_1((x,y)|\widetilde{A}(0,0))=\begin{cases}1-\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} & if\ (x-0)^2+(y-0)^2\le 4\\0 & otherwise\end{cases}$$

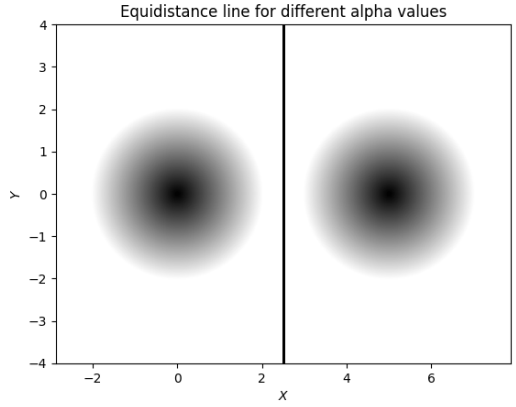
$$\mu_2((x,y)|\widetilde{B}(5,0))=\begin{cases}1-\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2} & if\ (x-5)^2+(y-0)^2\le 4\\0 & otherwise\end{cases}$$

~ ~此处模糊点 $A$ 和 $B$ 可表示为

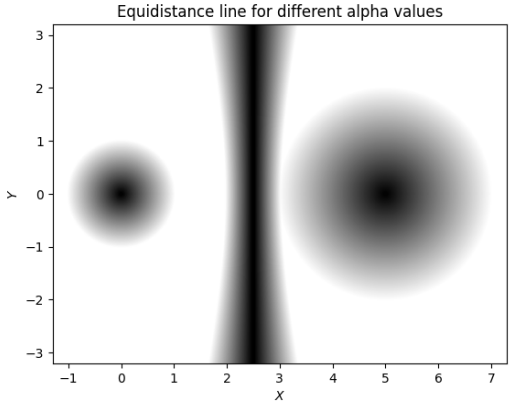
$$\begin{aligned}\widetilde{A}&:x^2+y^2=4(1-\alpha)^2\\\widetilde{B}&:(x-5)^2+y^2=4(1-\alpha)^2\end{aligned}$$

当 $\alpha=1$时，它表示模糊点的核，也就是 $\mathbb{R}^2$ 中的清晰点。此时，等距线将是点 (0,0) 和 (5,0) 的垂直平分线。也就是与 $y$ 轴平行的 $x=2.5$ 直线。

给定 $(p,q)\in\mathbb{R}^2$，对于 $\alpha$ 的不同取值，可通过令以下表达式相等来确定模糊等距集：$\sqrt{p^2+q^2-2(1-\alpha)}=\sqrt{(p-5)^2+q^2-2(1-\alpha)}$。化简后得到直线 $p=2.5$。因此，对于不同的 $\alpha$，等距集由 $x=2.5$ 定义。值得注意的是，如果两个模糊点的扩散范围都是半径相同的圆，则所得等距集将是一条清晰直线。下一个例子将讨论半径不同的点。




(a) 例5




(b) 例6

图4：在图4a中，模糊点 $A$ 和 $B$ 对称，因此模糊等距线是一个清晰集。但在图4b中，$B$ 的模糊度大于 $A$ 的扩散范围，且两者不重叠。因此得到的模糊等距集看起来像一条双曲线。

**例6.** 设 $A(0,0)$ 和 $B(5,0)$ 是两个模糊点，其隶属函数如下

$$\mu_1((x,y)|\widetilde{A}(0,0)) = \begin{cases} 1-\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} & if\ (x-0)^2+(y-0)^2 \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\mu_2((x,y)|\widetilde{B}(5,0)) = \begin{cases} 1-\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2} & if\ (x-5)^2+(y-0)^2 \le 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

模糊点 $A$ 和 $B$ 可以表示为

$$\widetilde{A} : x^2+y^2 = (1-\alpha)^2$$
$$\widetilde{B} : (x-5)^2+y^2 = 4(1-\alpha)^2$$

与例5类似，我们得到 $\alpha = 1$的 $x = 2.5$ 直线。并且，对于给定的$(p,\ q) \in \mathbb{R}^2$，模糊等距集可由下式求得

$$\sqrt{p^2+q^2}-(1-\alpha) = \sqrt{(p-5)^2+q^2}-2(1-\alpha) \implies \frac{(2p-5)^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{4q^2}{25-(1-\alpha)^2} = 1$$

这给出了双曲线的方程。

现在，我们考虑 $\alpha$ 的不同取值，以生成不同的双曲线。对于 $\alpha = 1$，我们得到模糊点的核，其等距集为 $x = 2.5$ 线。相反，当 $\alpha = 0$ 时，这就变成了两个圆之间的等距线，由方程 $\frac{(x-5/2)^2}{1/4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 表示。因此，对于 $\alpha \in [0,1]$，可以得到不同的模糊等距集。

接下来，我们举例说明不同情形：两个模糊点的模糊度可能彼此分离、部分重叠或完全重叠。我们还尝试分析模糊等距集。

**例7。** 设 $A(a_1,a_2)$ 和 $B(b_1,b_2)$ 是两个圆形展布大小不同的模糊点。并设其隶属函数为

$$\mu_1((x,y)|\widetilde{A}(a_1,a_2)) = \begin{cases} 1-\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2} & if\ (x-a_1)^2+(y-a_2)^2 \le r_1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\mu_2((x,y)|\widetilde{A}(b_1,b_2)) = \begin{cases} 1-\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2} & if\ (x-b_1)^2+(y-b_2)^2 \le r_2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

考察了模糊展布处于不同位置时模糊等距集的性质，并给出了不同情形下的必要条件。

考虑 $d_1 = \sqrt{(p-a_1)^2+(q-a_2)^2}$ 和 $d_2 = \sqrt{(p-b_1)^2+(q-b_2)^2}$，对于 $(p,\ q) \in \mathbb{R}^2$，不同情形如下：

**情形 1：模糊点互不重叠**

对于每个 $\alpha \in [0,1]$，等距集为 $d_1 - r_1(1-\alpha) = d_2 - r_2(1-\alpha)$。对于任意不同的 $r_1$ 和 $r_2$，该方程始终给出一个双曲型等距集。当模糊点的扩展度相同时，即 $r_1 = r_2$，这意味着 $d_1 = d_2$。因此可得到一条精确的直线，该直线作为 $\widetilde{A}^1$ 和 $\widetilde{B}^1$的平分线。

**情形 2：模糊点部分重叠**

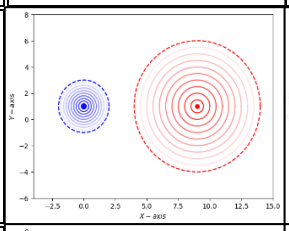
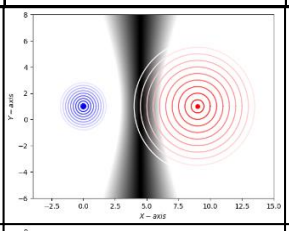
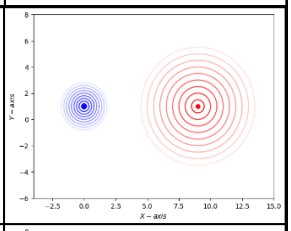
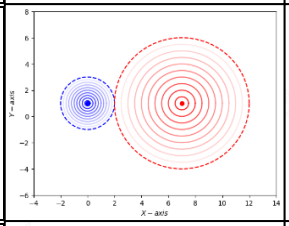
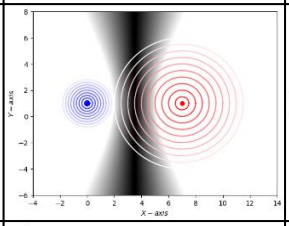
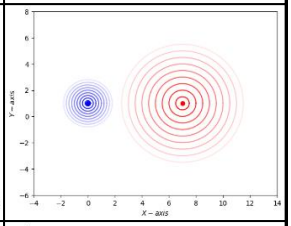
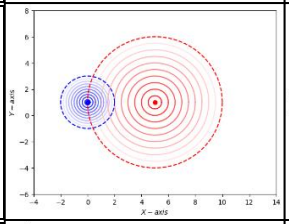
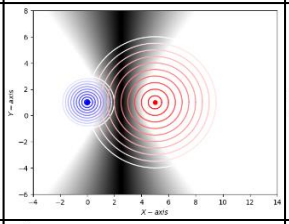
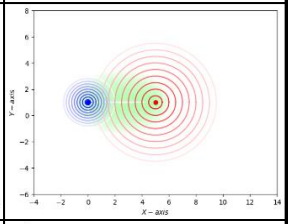
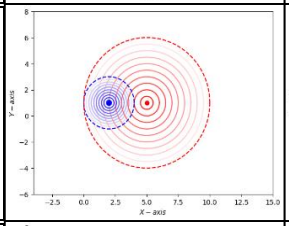
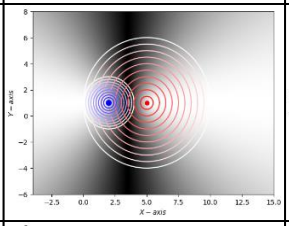
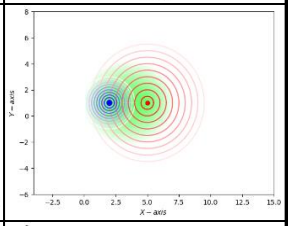
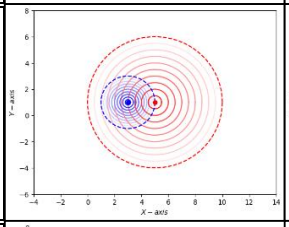
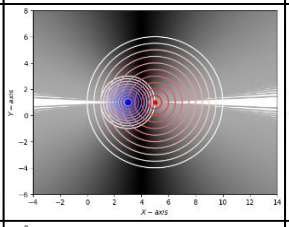
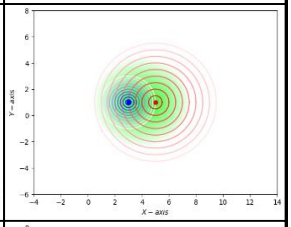
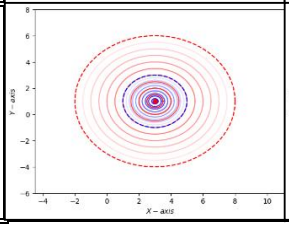
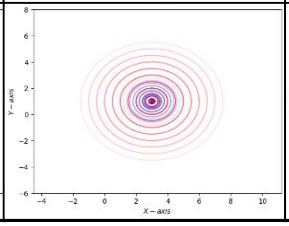
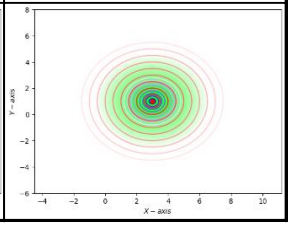
对于每个 $\alpha \in [0,1]$，等距集要么是 $d_1 - r_1(1-\alpha) = d_2 - r_2(1-\alpha)$，要么是 $d_1 - r_1(1-\alpha) = r_2(1-\alpha) - d_2$。第一种集合的表现类似于情形 1，即双曲型等距集。对于第二种集合，当 $\alpha = 0$ 时，模糊点部分重叠，从而形成一条椭圆线。随着 $\alpha$ 的值趋近于 1，模糊展布逐渐缩小；当达到某个值 $\alpha = n$（$say$）后，展布不再重叠。随后，从 $\alpha \in [n,1]$ 起，其表现类似于情形 1。因此，对于 $\alpha \in [0,n]$，会形成双曲型和椭圆型等距集；对于 $\alpha \in [n,1]$，则会生成双曲型等距集。

**情形 3：模糊点完全重叠**

对于每个 $\alpha \in [0,n_1]$，等距集为 $d_1 - r_1(1-\alpha) = r_2(1-\alpha) - d_2$，因此总是得到椭圆型等距集。但是，当 $\alpha$ 的值趋近于 1 时，模糊展布会减小；而对于 $\alpha = n_1$ ($say$)，模糊点变为部分重叠，此时其表现类似于情况 2。因此，当 $\alpha \in [n_1,1]$时，会得到两种类型的等距集：要么是$d_1 - r_1(1-\alpha) = d_2 - r_2(1-\alpha)$，要么是 $d_1 - r_1(1-\alpha) = r_2(1-\alpha) - d_2$。与情况 2 类似，对于 $\alpha \in [n_1,n_2]$的值（例如），会生成双曲型和椭圆型等距集。而对于 $\alpha \in [n_2,1]$ 的值，则会生成双曲型等距集。如果两个模糊点具有相同的核但扩展度不同，则总是得到椭圆型等距集。

等距集的一般方程为 $Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$。现在，根据上述模糊点的相对位置和模糊展布，可以得到以圆锥曲线为等距集的情形。

如果 $ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2=0$ and $AB-H^2=0$，等距集是一条直线。只有在圆形展布相等时，这一条件才成立，从而得到一条明确且精确的直线。反之，如果 $ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2 \neq 0$，等距集则为椭圆型或双曲型。如果 $AB-H^2>0$，等距集为椭圆型；否则为双曲型。但是，通过计算逆点可得到 $d_1-r_1(1-\alpha) = d_2-r_2(1-\alpha)$，而通过计算相同点可得到 $d_1-r_1(1-\alpha) = r_2(1-\alpha)-d_2$。为便于理解，后文将给出不同情形的图示。不过，根据模糊距离的定义 [（见定义 2.8 和 2.9] ），双曲型等距集是可接受的。

| 不同情形 | 模糊点 | 双曲等距集 | 椭圆等距集 |
| --- | --- | --- | --- |
| 不重叠 |  |  |  |
| 外部相切 |  |  |  |
| 部分重叠 |  |  |  |
| 内部相切 |  |  |  |
| 完全重叠 |  |  |  |
| 与.....同心不同扩展度 |  |  |  |

~ ~图5：不同模糊点 $A$ 与 $B$之间的模糊等距集15

| Nature of the Equidistant Set Between Two fuzzy points with circular spreads of different sizes | | | |
|---|---|---|---|
| **Relative Positions** | **Condition** | **Nature** | **Remarks** |
| fuzzy spreads are non overlapping | $d_c > (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [0,1]$ | hyperbolic | For all $\alpha \in [0,1]$ fuzzy spreads are separated and generates a fuzzy hyperbolic equidistant set. |
| fuzzy spreads are externally tangent | $d_c \geq (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [0,1]$ | hyperbolic | for $\alpha = 0$ one circle is externally tangent to another circle. And $\forall\alpha \in (0,1]$, fuzzy spreads are separated. For all cases, the equidistance set is hyperbolic. |
| fuzzy spreads are partially overlapping | $(r_1 - r_2)(1-\alpha) < d_c < (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [0,n]$ | elliptic + hyperbolic | for $\alpha \in [0,n]$ the spreads of fuzzy points are partially overlapping, so an elliptical equidistant set will generate $\forall\alpha \in [0,n]$ for the same points. And, a hyperbolic-type equidistant set will generate $\forall\alpha \in [0,n]$ for the inverse points. |
| | $d_c \geq (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [n,1]$ | hyperbolic | Here $n$ is any number between 0 and 1 and depends on the fuzzy spreads. As $\forall\alpha \in [n,1]$ the spreads start to separate and make a hyperbolic equidistant set. |
| fuzzy spreads are internally tangent | $(r_1 - r_2)(1-\alpha) \leq d_c < (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [0,n]$ | elliptic + hyperbolic | for $\alpha \in [0,n]$ the spreads of fuzzy points are internally tangent or partially overlapping and $\forall\alpha \in [0,n]$ both elliptical and hyperbolic-type equidistant set will be formed for same points and inverse points respectively. |
| | $d_c \geq (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [n,1]$ | hyperbolic | Here $n$ is any number between 0 and 1 and depends on the fuzzy spreads. As $\forall\alpha \in [n,1]$ the spreads start to separate and make a fuzzy hyperbolic equidistant set. |
| fuzzy spreads are fully overlapping | $d_c \leq (r_1 - r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [0,n_1]$ | elliptic | For $\alpha \in [0,n_1]$ fuzzy spreads are fully overlapping. And for $\alpha \in [n_1,n_2]$, fuzzy spreads are partially overlapping. |
| | $(r_1 - r_2)(1-\alpha) \leq d_c < (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [n_1,n_2]$ | elliptic + hyperbolic | For any numbers between 0 and 1, $0 \geq n_1 \geq n_2 \geq 1$ fuzzy elliptical equidistant set is obtained for $\alpha \in [0,n_1]$. And for $\alpha \in [n_1,n_2]$, both elliptic and hyperbolic-type equidistant sets are generated for the same points and inverse points respectively. |
| | $d_c \geq (r_1 + r_2)(1-\alpha)$, $\forall\alpha \in [n_2,1]$ | hyperbolic | For $\alpha \in [n_2,1]$ fuzzy spreads start to separate and form fuzzy hyperbolic equidistant set. |
| Concentric fuzzy points | $d_c = 0, \quad \forall\alpha \in [0,1]$ | elliptic | For all $\alpha \in [0,1]$ fuzzy spreads are co-centric and generates a fuzzy elliptic equidistant set. |

## 5 结论与评论

本文正式引入了由模糊$\tilde{}$度量空间（$X$，$M$，$*$）中的两个非空模糊子集生成的模糊等距集这一概念。对于固定参数 $t > 0$，两个集合之间的接近度被解释为一个模糊集。我们还分析发现，当 t 接近 0 或非常大时，接近度的不确定性较小。此外，已证明模糊等距集$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$（$EA$，$B$）在模糊度量空间（$X$，$M$，$*$）和（$X$，$d$，$L$，$R$）下是不变的。在大多数论文中，模糊集并未被视为模糊度量空间的子集。相反，研究者采用概率方法，根据参数 $t > 0$计算模糊度量空间中两个清晰点之间的距离。本文认为，接近度的不确定性源于模糊性而非随机性，因为距离度量本身就是模糊的。值得一提的是，本文将几何学应用于模糊凸集。类似研究也可用于非凸模糊集 [2]以及其他几何结构。对模糊等距集及其拓扑稳定性或度量稳定性的系统研究仍不充分。未来工作将对拓扑进行全面研究。

## 参考文献

[1] James J Buckley 和 Esfandiar Eslami. 模糊平面几何 I：点与直线. 《模糊集与系统》, 86(2):179–187, 1997年.[2] Debjani Chakraborty 和 Suman Das. 非凸模糊几何导论. 《模糊集与系统》, 475:108758, 2024年.[3] Debjani Chakraborty 和 Debdas Ghosh. 解析模糊平面几何 II. 《模糊集与系统》, 243:84–109, 2014年.[4] Z. Deng. 模糊伪度量空间. 《数学分析与应用杂志》, 86(1):74–95, 1982年3月.[5] D. Dubois 和 H. Prade. 《模糊集与系统：理论与应用》, 第144卷. 学术出版社，纽约，1980年.[6] L. Fox 和 J. Veerman. 亚历山德罗夫曲面上的等距集. 《微分几何及其应用》, 90:102042, 2023年10月.[7] A. George 和 P. Veeramani. 关于模糊度量空间的一些结果. 《模糊集与系统》, 64(3):395–399, 1994年6月.[8] Debdas Ghosh 和 Debjani Chakraborty. 解析模糊平面几何 I. 《模糊集与系统》, 209:66–83, 2012年.[9] Debdas Ghosh 和 Debjani Chakraborty. 解析模糊平面几何 III. 《模糊集与系统》, 283:83–107, 2016年.[10] Debdas Ghosh 和 Debjani Chakraborty. 解析模糊平面几何导论. 施普林格，2019年.[11] O. Kaleva 和 S. Seikkala. 关于模糊度量空间. 《模糊集与系统》, 12(3):215–229, 1984年4月.[12] I. Kramosil 和 J. Mich´alek. 模糊度量与统计度量空间. 《控制论》, 11(5):336–344, 1975 年 .[13] L. Loveland. 中点集何时是流形？ 《美国数学会会刊》 , 61(2):353–360, 1976 年 .[14] Ronald Manr´ıquez 和 Cristian Carvajal. 模糊中点集的一种方法. 载于*2025*年*IEEE*国际模糊系统会议（*FUZZ*）， 第1–4页. 电气电子工程师学会，2025年。

[15] J. Park. 直觉模糊度量空间. 《混沌、孤子与分形》, 22(5):1039–1046, 2004年12月.[16] M. Ponce. 关于等距集的思考. 《美国数学月刊》, 129(9):856–864, 2022年.[17] M. Ponce 和 P. Santib´anez. 关于等距集与广义圆锥曲线：新旧论述. 《美国数学月刊》, 121(1):18–32, 2014年.[18] M. Puri 和 D. Ralescu. 模糊函数的微分. 《数学分析与应用杂志》, 91(2):552– 558, 1983年.[19] J. Rodr´ıguez-L´opez 和 S. Romaguera. 紧集上的豪斯多夫模糊度量. 《模糊集与系统》, 147(2):273– 283, 2004年10月.[20] R. Saadati. 关于L-模糊拓扑空间. 《混沌、孤子与分形》, 37(5):1419–1426, 2008年9月.[21] B. Schweizer 和 A. Sklar. 统计度量空间. 《太平洋数学杂志》, 10(1):313–334, 1960年.[22] Y. Shi 和 W. Yao. 关于模糊度量空间的推广. 《控制论》, 59(6):880–903, 2023年.[23] P. Veeramani. 模糊度量空间中的最佳逼近. 《模糊数学杂志》, 9(1):75–80, 2001年.[24] J. Wilker. 等距集及其连通性. 《美国数学会会刊》, 47(2):446–452, 1975年.[25] Zun-Quan Xia 和 Fang-Fang Guo. 模糊度量空间. 《应用数学与计算杂志》, 16(1):371– 381, 2004年.[26] L. Zadeh. 模糊集. 《信息与控制》, 8(3):338–353, 1965年.[27] M. ˇZlepalo 和 E. Jurkin. 圆锥曲线与直线的等距集. 载于*ICGG 2018-第18*届国际几何与图形学会议论文集：*40*周年纪念，第277–289页，意大利米兰，2019年8月. 施普林格。