# 多范畴 伴随、单子性与量子资源 S

Shih-Yu Chang *

2025年12月19日

arXiv:2512.15951v1 [math.CT] 17 Dec 2025

**摘要**

本文是一个研究计划的第三部分，旨在为算子理论与量子过程建立统一的幺半群论与多范畴基础。本文以多范畴 HilbMult 和此前引入的协同算子为基础，考察复合量子动力学所依托的内在代数结构。本文围绕三个主要主题展开。首先，我们引入 n 重伴随，这是一套广义伴随运算的层级，将经典伴随推广至多范畴背景，并刻画高阶算子相互作用。我们证明了以 n 重伴随表述的斯廷斯普林定理的多范畴版本。其次，我们研究量子过程的代数语义，并证明完全正保迹映射具有典范的单子描述。具体而言，我们证明一个单子性定理：在幺半群操作等价意义下，量子过程可与由对称量子相互作用算子所诱导的协同单子的代数相对应，从而得到一种忠实表示，能够以统一方式涵盖顺序复合与并行复合。第三，我们通过将不可克隆定理等约束编码为幺半群理想，给出量子禁止原理的代数表述。总之，这些结果提供了一个连贯的代数框架，统一了算子理论、范畴论与量子信息。

索引词— 量子过程、算子与多范畴、单子语义、伴随结构、不可克隆定理。

## 1 引言

本文是一个研究计划的第三部分，旨在为算子理论和量子过程建立统一的算子与多范畴基础。在本系列的第一篇论文中，我们引入了多范畴 HilbMult，作为多线性结构和算子理论结构的语义框架 [1]。在第二篇论文中，我们构建了协同算子 **S**，为量子过程及其复合相互作用提供了连贯的句法描述 [2]。基于这两项工作，我们自然会提出一个根本性问题：支撑这一算子—算子宇宙的内在代数结构是什么？本文探讨了三个主要主题。

本文的第一个主题是寻求一种更深层的对偶性概念。经典伴随算子在算子理论中发挥着核心作用，但它们并不能充分刻画多范畴背景中固有的高阶相互作用。因此，我们引入了 $n$-伴随，这是一套广义伴随运算的层级，将熟悉的伴随算子与自伴性结构扩展至多范畴领域。

第二个主题是什么？我们的第二个主题是量子过程的代数语义。给定协同算子 **S**，我们探讨完全正迹保持（CPTP）映射是否具有规范的单子刻画。具体而言，我们研究量子过程范畴 **QProc** 能否忠实地表示为由自然诱导的单子的代数范畴。

*Shih-Yu Chang 任职于美国加利福尼亚州圣何塞的圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮箱：shihyu.chang@sjsu.edu）

许多基本的量子限制，例如不可克隆定理，传统上都表现为解析障碍。在本文中，我们表明，这些限制可以作为歌剧代数理想以代数方式编码；这是本研究探讨的第三个主题。具体而言，我们定义无克隆理想 $I_{\mathrm{noclone}}$，并证明商幺半群 $S/I_{\mathrm{noclone}}$ 如何导出一个连贯的模型，描述一个假想的、允许克隆的世界。

**主要贡献**。本文的主要结果如下：

1. 为多范畴建立一套 $n$-伴随理论，并给出以 $n$-伴随形式表述的多范畴 Stinespring 定理。2. 我们证明，对称量子相互作用算子 $\mathbf{S}$ 会诱导一个协同单子 $T_{\mathbf{S}}$，其 Eilenberg–Moore 代数为有限维完全正迹保持过程提供完备且具复合性的语义。特别地，我们证明了一个单子性定理：该定理将完全正迹保持过程（模去歌剧代数操作等价）与 $T_{\mathbf{S}}$-代数对应起来，并将 Stinespring 膨胀重新表述为多范畴背景中的通用单子构造。当 $\mathbf{S}$ 为对称幺半时，这一对应可提升为忠实的对称幺半表示，从而以统一方式涵盖量子过程的顺序复合与并行复合。3. 对不可能性定理作出范畴论和幺半群表述，其中包括通过歌剧代数理想对不可克隆定理进行结构性表达。

这些结果将解析、范畴论和物理学思想整合为一个连贯的框架，用以阐释量子过程的基础。此外，本文还提出了未来研究的新方向，例如富化歌剧代数结构、不可克隆定理的代数表示，以及在范畴量子力学和量子信息论中的潜在应用。

本文结构如下。第 2 节回顾我们先前工作中的必要背景和技术框架，并提供本文所需的范畴与解析工具。随后，在第 3 节中，我们引入 $n$-伴随的概念，并探讨其结构性质。本节的主要结果是多范畴斯坦斯普林定理的 $n$-伴随表述。接着，在第 4 节中，我们介绍协同单子以及完全正迹保持量子过程的范畴结构。这里将给出 CPTP 的单子性定理。最后，我们转向量子力学中的物理约束，展示如何通过幺半群刻画不可能性定理；这些也是第 5 节探讨的核心主题。

**注 1.** 本文提出的数学见解和理论方向均由作者独立负责。人工智能工具，包括 *OpenAI* 的 *ChatGPT* 和 *DeepSeek* 模型，仅用于协助验证想法、整理参考文献，并确保论述的内部一致性 *[3, 4]*。

## 2 预备知识

本节将回顾基础内容，并介绍我们先前工作的相关设定，以便后续各节进行阐述。

### 2.1 多范畴 HilbMult 的伴随性

多范畴 **HilbMult** 定义如下，见 [1]:

(a) **对象：** 对象是（可分）复希尔伯特空间 $H$，$K$，$\ldots$。

(b) **Hom 空间：**对于每个有限元组 $(H_1, \ldots, H_n; K)$，都有一个由有界多重线性映射构成的巴拿赫空间 $\mathrm{Hom}(H_1, \ldots, H_n; K)$，其范数为算子范数。

(c) **复合：** 多重线性复合有定义且是压缩的。

(d) **恒等态射：** 恒等态射 $\mathrm{id}_H$ 定义为恒等线性映射。

(e) **幺半结构：** 该范畴具有由希尔伯特空间张量积 $\otimes$给出的对称幺半结构，其单位为 $\mathbb{C}$。

接下来，我们介绍 **HilbMult** 中的 †-结构，为第 3 节的伴随理论奠定基础。

†-结构是 **HilbMult** 架构中的一个基本组成部分，为"反转"多态射提供了一种形式化方法。其定义基于多线性映射与希尔伯特空间对偶空间之间的相互作用。

**HilbMult 中 †-结构的定义**

**1. 对象映射：对偶空间** 对于一个对象（希尔伯特空间） $H$，我们将其定义为 $H^\dagger$ 的**对偶空间**，即由所有连续线性泛函组成的向量空间 $f\colon H \to \mathbb{C}$。

- **里斯表示定理：** 这个定理至关重要。它指出，对于每个连续线性泛函 $f \in H^\dagger$，都存在唯一的向量 $v_f \in H$，使得对于所有 $x \in H$，

$$f(x) = \langle x, v_f \rangle.$$

这在 $H$ 和 $H^\dagger$之间建立了一个**反线性同构**：映射 $v \mapsto \langle \cdot, v\rangle$ 是一个双射，¯但它满足 $\langle \cdot, \alpha v + \beta w\rangle = \bar{\alpha}\langle \cdot, v\rangle + \beta\langle \cdot, w\rangle$。

**2. 态射映射：多态射的伴随**

设 $\Phi \in \mathrm{Hom}(H_1, \ldots, H_n; K)$ 是实希尔伯特空间之间的有界多重线性映射。它关于最后一个变量的伴随是一个新的多线性映射：

$$\Phi^\dagger \in \mathrm{Hom}(K^\dagger, H_1^\dagger, \ldots, H_{n-1}^\dagger; H_n^\dagger)$$

由其对 $n$ 输入的作用定义：一个泛函 $f \in K^\dagger$ 和泛函 $g_1 \in H_1^\dagger$、……、$g_{n-1} \in H_{n-1}^\dagger$。

**定义 1**（多态射的伴随）。伴随 $\Phi^\dagger$ 由下式定义，对所有$x_n \in H_n$均成立：

$$[\Phi^\dagger(f, g_1, \ldots, g_{n-1})](x_n) = f\Big(\Phi\big(v_{g_1}, \ldots, v_{g_{n-1}}, x_n\big)\Big)$$

其中，$v_{g_j}$ 是 $H_j$ 中的唯一向量，它通过里斯表示定理表示泛函$g_j$。也就是说，$g_j(\cdot) = \langle \cdot, v_{g_j}\rangle_{H_j}$。

**备注 2**。对于复希尔伯特空间，里斯映射$g_j \mapsto v_{g_j}$ 是共轭线性的。在这种情况下，上述公式将 $\Phi^\dagger$ 定义为一个映射：当通过这一反同构将对偶空间与原空间等同后，它对每个自变量都是线性的。对于实希尔伯特空间，这种等同始终是线性的。

让我们仔细分析一下：

- **输入：** $\Phi^\dagger$ 接受 $n$ 个输入：一个来自原输出空间的对偶空间，另有 $n-1$ 个来自原输入空间的对偶空间（除最后一个外）。
- **输出：** 将 $\Phi^\dagger$ 作用于这些输入 $\Phi^\dagger(f, g_1, \ldots, g_{n-1})$ 所得到的结果本身是一个泛函，即 $H_n^\dagger$ 的一个元素。它是一个以向量 $x_n \in H_n$ 为输入的映射。

• **T作用：** 要计算这个输出泛函对 $x_n$ 的作用，我们进行如下操作 ：

1. 使用黎斯同构，找出与泛函 $g_1$、.....、$g_{n-1}$对应的唯一向量 $v_{g_1}$、.....、$v_{g_{n-1}}$，它们属于 $H_1$、.....、$H_{n-1}$。2. 将这些向量连同 $x_n$ 一起输入原始映射 $\Phi$。这将得到原输出空间 $K$中的一个向量 $\Phi(v_{g_1}$、.....、$v_{g_{n-1}}$, $x_n)$。3. 最后，将输入泛函 $f \in K^\dagger$ 作用于这个结果向量。

**3. 关键性质**

本部分将讨论多态射的伴随的两个性质。首先给出引理1，以识别双对偶。

**引理1**（双对偶识别）。 对于任意希尔伯特空间 $H$，由下式定义的映射 $\iota_H$： $H \to H^{\dagger\dagger}$：

$$\iota_H(x)(f) = f(x) \quad \textit{for all } x \in H, f \in H^\dagger$$

是一个等距线性单射。

*Fo*对于由 $R_H(f) = v_f$ 定义的里斯映射 $R_H$： $H^\dagger \to H$，其中 $f(\cdot) = \langle \cdot, v_f \rangle$，我们有 ：

$$\iota_H(x)(f) = \langle x, R_H(f) \rangle.$$

此外：

• 若 $H$ 是实 希尔伯特空间，则 $\iota_H$ 是等距的线性同构。

• 若 $H$ 是复 希尔伯特空间，则 $\iota_H$ 仍然是等距的线性单射，但通过双重里斯映射将 $H$ 与 $H^{\dagger\dagger}$ 进行自然识别是共轭线性的。

证明。 $\iota_H$的线性是显然的： $\iota_H(\alpha x + \beta y)(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = (\alpha \iota_H(x) + \beta \iota_H(y))(f)$。

关于等距性：根据哈恩–巴拿赫定理（或直接由里斯表示）， $\|\iota_H(x)\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$。

关系式 $\iota_H(x)(f) = \langle x, R_H(f) \rangle$ 由 $R_H$的定义立即得到。

在实数情形下， $\iota_H$ 是满射，因为任意 $\Psi \in H^{\dagger\dagger}$ 都通过 $\Psi(f) = \langle R_H(f)\ x \rangle = f(x)$ 对应于某个 $x \in H$。

在复数情形下， $\iota_H$ 仍然是单射且是等距映射，但不等于复合 $R_{H^\dagger} \circ R_H^{-1}$；后者将 $x$ 映射到 $[f \mapsto f(x)]$。 □

定理 1 是关于 † 对合性质的第一个性质。

**定理 1**（多态射伴随的对合）。 设 $H_1, \ldots, H_n, K$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的希尔伯特空间，并设

$$\Phi \in \mathrm{Hom}(H_1, \ldots, H_n; K)$$

是一个有界多重线性映射。那么，在典范识别 $\iota_H$： $H \to H^{\dagger\dagger}, x \mapsto [f \mapsto f(x)]$, 下，我们有

$$(\Phi^\dagger)^\dagger = \Phi$$

作为 $\mathrm{Hom}(H_1, \ldots, H_n; K)$ 中的元素。此处 $\Phi^\dagger$ 表示通过里斯表示定理定义的多态射伴随。

证明。 任取向量 $x_j \in H_j$ （ $j = 1,\ldots,n$ ）。根据定义，伴随

$$\Phi^\dagger \in \mathrm{Hom}(K^\dagger, H_1^\dagger, \ldots, H_{n-1}^\dagger; H_n^\dagger)$$

作用于泛函 $f \in K^\dagger$ 和 $g_j \in H_j^\dagger$ $(1 \le j \le n-1)$，通过

$$\Phi^\dagger(f, g_1, \ldots, g_{n-1})(x_n) = f\Big(\Phi(R_{H_1}(g_1), \ldots, R_{H_{n-1}}(g_{n-1}), x_n)\Big),$$

其中 $R_{H_j}$： $H_j^\dagger \to H_j$ 是里斯映射。

**步骤 1：再次应用伴随**。二重伴随

$$(\Phi^\dagger)^\dagger \in \mathrm{Hom}(H_n^{\dagger\dagger}, K^{\dagger\dagger}, H_1^{\dagger\dagger}, \ldots, H_{n-2}^{\dagger\dagger}; H_{n-1}^{\dagger\dagger})$$

作用于输入

$$\iota_{H_n}(x_n),\ \iota_K(f),\ \iota_{H_1}(x_1), \ldots, \iota_{H_{n-2}}(x_{n-2}).$$

为具体了解其作用，我们对泛函 $g_{n-1} \in H_{n-1}^\dagger$进行求值:

$$\begin{aligned}&(\Phi^\dagger)^\dagger(\iota_{H_n}(x_n), \iota_K(f), \iota_{H_1}(x_1), \ldots, \iota_{H_{n-2}}(x_{n-2}))(g_{n-1})\\ &= \iota_{H_n}(x_n)\Big(\Phi^\dagger(R_K(\iota_K(f)), R_{H_1}(\iota_{H_1}(x_1)), \ldots, R_{H_{n-2}}(\iota_{H_{n-2}}(x_{n-2})), g_{n-1})\Big).\end{aligned}$$

**步骤 2：应用 里斯同一化**。 根据双对偶和里斯映射的性质，我们有

$$R_K(\iota_K(f)) = f, \quad R_{H_j}(\iota_{H_j}(x_j)) = x_j \quad \text{for } j = 1, \ldots, n-2.$$

代入这些结果，得到

$$(\Phi^\dagger)^\dagger(\ldots)(g_{n-1}) = \iota_{H_n}(x_n)\Big(\Phi^\dagger(f, x_1, \ldots, x_{n-2}, g_{n-1})\Big).$$

**步骤 3：应用 $\Phi^\dagger$的定义**。根据定义:

$$\Phi^\dagger(f, x_1, \ldots, x_{n-2}, g_{n-1})(x_n) = f\Big(\Phi(x_1, \ldots, x_{n-2}, R_{H_{n-1}}(g_{n-1}), x_n)\Big).$$

因此,

$$\begin{aligned}(\Phi^\dagger)^\dagger(\ldots)(g_{n-1}) &= \iota_{H_n}(x_n)\Big(y \mapsto f(\Phi(x_1, \ldots, x_{n-2}, R_{H_{n-1}}(g_{n-1}), y))\Big)\\ &= f(\Phi(x_1, \ldots, x_{n-2}, R_{H_{n-1}}(g_{n-1}), x_n)).\end{aligned}$$

**步骤 4：得出 e 等式**。 由于左侧是在任意 $g_{n-1} \in H_{n-1}^\dagger$上取值，这表明 t

$$(\Phi^\dagger)^\dagger(\iota_{H_n}(x_n), \iota_K(f), \iota_{H_1}(x_1), \ldots, \iota_{H_{n-2}}(x_{n-2})) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

在通过 $\iota_{H_j}$ 得到的典范识别 $H_j \cong H_j^{\dagger\dagger}$ 下。这就完成了证明。 □

**例 1**（定理 1 的说明）。 令 $H_1 = H_2 = K = \mathbb{R}^2$ 配备标准内积

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$

定义双线性映射

$$\Phi : H_1 \times H_2 \to K, \qquad \Phi(x, y) = (x_1y_1,\ x_2y_2).$$

注意， $\Phi$ 有界（事实上是连续的），因为有限维空间上的所有多重线性映射都是有界的。

现在我们明确验证定理 ***1***。

步骤 ***1***：计算伴随 $\Phi^\dagger$。

根据定义，对于 $f \in K^\dagger$，伴随 $\Phi^\dagger(f)$ 是 $\mathrm{Hom}(H_1, H_2;\ \mathbb{R})$ 中的一个元素，满足

$$\Phi^\dagger(f)(x, y) = f(\Phi(x, y)) \quad \textit{for all } x \in H_1, y \in H_2.$$

利用 ***Ries*** $z$ 表示定理，将 $f \in K^\dagger$ 通过 $f(\cdot) = \langle \cdot$ 唯一对应于 $z \in K\ z\rangle$。然后

$$\Phi^\dagger(f)(x, y) = \langle \Phi(x, y), z\rangle = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2.$$

步骤 ***2***：计算二重伴随 $(\Phi^\dagger)^\dagger$。

二重伴随是一个映射

$$(\Phi^\dagger)^\dagger : H_1 \times H_2 \to K^{\dagger\dagger}$$

定义为

$$\big((\Phi^\dagger)^\dagger(x, y)\big)(f) = \Phi^\dagger(f)(x, y) = f(\Phi(x, y)) \quad \textit{for all } f \in K^\dagger.$$

步骤 ***3***：应用典范识别。

在典范映射 $\iota_K :\ K \to K^{\dagger\dagger}$ 下，每个 $w \in K$ 都对应于 $[f \mapsto f(w)]$ 中的求值泛函 $K^{\dagger\dagger}$。由步骤 *2* 可知，

$$(\Phi^\dagger)^\dagger(x, y) = [f \mapsto f(\Phi(x, y))] = \iota_K(\Phi(x, y)).$$

结论。 因此，在标识 $\iota_K$ 下，我们有

$$(\Phi^\dagger)^\dagger = \Phi,$$

这就在此有限维情形下明确验证了定理 ***1***。

**注 3**。 在这个例子中， $\Phi$ 的有界性是自动成立的，因为有限维空间上的所有多线性映射都是连续的。在无限维情形中，必须明确假设有界性，如定理 *1* 中所述。

下一个性质涉及反变函子性。

**定理 2**（ $\dagger$的反变函子性）。 设

$$\Psi \in \mathrm{Hom}(K_1, \dots, K_m;\ L), \qquad \Phi_j \in \mathrm{Hom}(H_{j,1}, \dots, H_{j,n_j};\ K_j) \quad (1 \le j \le m).$$

那么，伴随定义了多态射上的一个反变运算：

$$\big[\Psi \circ (\Phi_1, \dots, \Phi_m)\big]^\dagger = (\Phi_1^\dagger, \dots, \Phi_m^\dagger) \circ (\mathrm{id}_{L^\dagger}, \Psi^\dagger),$$

至多相差由多范畴结构所规定的槽位的规范置换。

证明。 我们采用如下约定：希尔伯特内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 对第一个变量是线性的，对第二个变量是共轭线性的。

**Riesz 对应**。 对于每个希尔伯特空间 $H$，记

$$R_H : H^\dagger \longrightarrow H$$

为黎斯同构，使得对于 $h \in H^\dagger$ 和 $y \in H$，

$$h(y) = \langle y, R_H(h)\rangle.$$

我们也用 $\widehat{y} \in H^\dagger$ 表示泛函 $\widehat{y}(z) = \langle z,\ y\rangle$。

**设定**。 令

$$\Theta := \Psi \circ (\Phi_1, \dots, \Phi_m) \in \mathrm{Hom}(H_{1,1}, \dots, H_{m,n_m};\, L).$$

取任意测试输入：

$$f \in L^\dagger, \qquad h_{j,i} \in H_{j,i}^\dagger \ (1 \le j \le m,\ 1 \le i \le n_j),$$

并对每个 $(j,\ i)$ 设定

$$v_{j,i} := R_{H_{j,i}}(h_{j,i}) \in H_{j,i}.$$

**步骤 1：计算左端**。根据 $\Theta^\dagger$的定义，

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS} &:= \Theta^\dagger(f, h_{j,i})(\,\cdot\,)\\ &= \text{the functional on } H_{m,n_m} \text{ given by}\\ &\qquad x \longmapsto f\big(\Theta(v_{1,1}, \dots, v_{m,n_m-1}, x)\big).\end{aligned}$$

由于 $\Theta = \Psi(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$，写作

$$y_j := \Phi_j(v_{j,1}, \dots, v_{j,n_j}) \in K_j.$$

因此，对于任意 $x \in H_{m,n_m}$，最后一个分量变为 $y_m = \Phi_m(v_{m,1}, \dots, v_{m,n_m-1}, x)$。因此

$$\mathrm{LHS}(x) = f\big(\Psi(y_1, \dots, y_m)\big). \tag{1}$$

**步骤 2：计算右端**。

首先将每个$y_j$ 转换为其对偶代表：

$$\widehat{y_j} \in K_j^\dagger.$$

将 $\Psi^\dagger$ 应用于 $(f, \widehat{y_1}, \dots, \widehat{y_{m-1}})$。这得到一个泛函

$$\beta := \Psi^\dagger(f, \widehat{y_1}, \dots, \widehat{y_{m-1}}) \in K_m^\dagger,$$

其特征在于

$$\beta(k_m) = f\big(\Psi(y_1, \dots, y_{m-1}, k_m)\big) \qquad (k_m \in K_m). \tag{2}$$

接下来，将 $\Phi_m^\dagger$ 应用于元组 $(\beta,\ h_{m,\ 1},\ \ldots\ldots,\ h_{m,\ n_m-1})$。在 $x \in H_{m,\ n_m}$ 处计算所得泛函，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}(x) &= \big[\Phi_m^\dagger(\beta, h_{m,1}, \ldots, h_{m,n_m-1})\big](x)\\ &= \beta\big(\Phi_m(v_{m,1}, \ldots, v_{m,n_m-1}, x)\big)\\ &= \beta(y_m)\\ &= f\big(\Psi(y_1, \ldots, y_m)\big),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式用到了 $\beta$ 的定义性质式（2）。

Thus

$$\mathrm{RHS}(x) = f\big(\Psi(y_1, \ldots, y_m)\big). \tag{3}$$

**步骤 3：得出等式**。比较式（1）和式（3），可得

$$\mathrm{LHS}(x) = \mathrm{RHS}(x) \qquad (\forall x \in H_{m,n_m}).$$

由于测试输入 $f$、$h_{j,\ i}$ 和 $x$ 是任意的，这两个多态射

$$\Theta^\dagger \quad \text{and} \quad (\Phi_1^\dagger, \ldots, \Phi_m^\dagger) \circ (\mathrm{id}_{L^\dagger}, \Psi^\dagger)$$

相等（至多相差多范畴复合所产生的标准槽位置换）。

这证明了 $\dagger$ 的反变函子性。 □

这些证明表明，**HilbMult** 中的 $\dagger$-结构满足多范畴背景下对合应具备的基本性质。对合性质表明，连续取两次伴随会回到原映射（至多相差一个自然同构）；反变函子性则表明，伴随运算以相反的顺序保持复合，从而使 **HilbMult** 成为一个良定义的 $\dagger$-多范畴。

**例 2**（反变函子性的显式验证）。 本例通过在 $\mathbb{C}^2$中的显式计算说明定理 *2*。

设置。 设 $m = 2$，并考虑以下希尔伯特空间：

$$K_1 = K_2 = L = H_{1,1} = H_{1,2} = H_{2,1} = H_{2,2} = \mathbb{C}^2,$$

它们都配备标准内积 $\langle x、\ y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$。定义以下双线性映射：

$$\begin{aligned}&\Psi : K_1 \times K_2 \to L, && \Psi(x,y) = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix},\\ &\Phi_1 : H_{1,1} \times H_{1,2} \to K_1, && \Phi_1(u,v) = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix},\\ &\Phi_2 : H_{2,1} \times H_{2,2} \to K_2, && \Phi_2(w,z) = \begin{pmatrix} w_1-z_1 \\ w_2-z_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

步骤 ***1***：复合 $\Theta = \Psi \circ (\Phi_1,\ \Phi_2)$。对于 $u,\ v \in H_{1,\ 1} \times H_{1,\ 2}$和 $w,\ z \in H_{2,\ 1} \times H_{2,\ 2}$：

$$\Theta(u,v,w,z) = \Psi(\Phi_1(u,v), \Phi_2(w,z)) = \begin{pmatrix} (u_1+v_1)(w_1-z_1) \\ (u_2+v_2)(w_2-z_2) \end{pmatrix}.$$

步骤 ***2***：理解　定槽位结构。映射 $\Theta$ 的元数为 *4*：它接受输入 $(u, v, w, z)$。因此　　：

- $\Theta^\dagger$ : $L^\dagger \times H_1^\dagger{}_{,1} \times H_1^\dagger{}_{,2} \times H_2^\dagger{}_{,1} \times H_2^\dagger{}_{,2} \to \mathbb{C}$
- 根据定理 *2*，我们需要验证：

$$\Theta^\dagger = (\Phi_1^\dagger, \Phi_2^\dagger) \circ (\mathrm{id}_{L^\dagger}, \Psi^\dagger)$$

显式槽位置换：我们将输入记为：

$$(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \quad \textit{where} \quad \alpha \in L^\dagger,\ \beta_i \in H_{1,i}^\dagger,\ \gamma_i \in H_{2,i}^\dagger.$$

定理指出，这些输入在等式两边的路由方式不同：

- ***LHS (direct):*** $\Theta^\dagger(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ *applies* $\Theta^\dagger$ *to all inputs simultaneously.*
- 右端（复合）：

  *1.* $\mathrm{id}_{L^\dagger}$ 仅作用于 $\alpha$，返回 $\alpha$。*2.* $\Psi^\dagger$ 作用于 $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$，
  生成一对 $(h_1, h_2)$，其中：

$$h_1 \in \mathrm{Hom}(H_{2,1}, H_{2,2}; \mathbb{C}), \quad h_2 \in \mathrm{Hom}(H_{1,1}, H_{1,2}; \mathbb{C}).$$

  更准确地说，$h_1$ 和 $h_2$ 是通过对 $\Psi^\dagger$ 进行部分应用得到的双线性泛函。
  *3.* $(\Phi_1^\dagger, \Phi_2^\dagger)$ 随后作用于 $(\alpha, (h_1, h_2))$，得到最终结果。

这种路由构成了定理 *2* 中提到的"槽位的规范置换"。步骤 ***3***：显式计算 $\Theta^\dagger$。对于 $f \in L^\dagger$，$g_1 \in H_1^\dagger{}_{,1}$, $g_2 \in H_1^\dagger{}_{,2}$, $g_3 \in H_2^\dagger{}_{,1}$和 $z \in H_{2,2}$，令 $u = R(g_1)$、$v = R(g_2)$、$w = R(g_3)$ 为里斯向量。于是：

$$[\Theta^\dagger(f, g_1, g_2, g_3)](z) = f\left(\begin{pmatrix}(u_1 + v_1)(w_1 - z_1)\\ (u_2 + v_2)(w_2 - z_2)\end{pmatrix}\right).$$

这里，$\Theta^\dagger(f, g_1, g_2, g_3)$ 本身就是 $H_{2,2}$ 上的一个线性泛函，我们在 $z$ 处对其求值。步骤 ***4***：计算右端复合。我们需要理解各个伴随算子：

$$\begin{aligned}
&\Psi^\dagger : L^\dagger \to \mathrm{Hom}(K_1, K_2; \mathbb{C})^\dagger \cong \mathrm{Hom}(K_1^\dagger, \mathrm{Hom}(K_2; \mathbb{C}))\\
&\Phi_1^\dagger : K_1^\dagger \to \mathrm{Hom}(H_{1,1}, H_{1,2}; \mathbb{C})^\dagger\\
&\Phi_2^\dagger : K_2^\dagger \to \mathrm{Hom}(H_{2,1}, H_{2,2}; \mathbb{C})^\dagger
\end{aligned}$$

具体而言，对于测试向量，我们有：

$$\begin{aligned}
\Psi^\dagger(f)(x, y) &= f(\Psi(x, y)),\\
\Phi_1^\dagger(h)(u, v) &= h(\Phi_1(u, v)),\\
\Phi_2^\dagger(k)(w, z) &= k(\Phi_2(w, z)).
\end{aligned}$$

步骤 ***5***：数值验证。为简便起见，取 $\mathbb{R}^2$ 中的所有向量，其中：

$$\begin{aligned}
f &= \langle \cdot, (1, 0) \rangle, \qquad & g_1 &= \langle \cdot, (1, 1) \rangle, \qquad & g_2 &= \langle \cdot, (0, 1) \rangle,\\
g_3 &= \langle \cdot, (1, 0) \rangle, \qquad & z &= (1, 1).
\end{aligned}$$

对应的里斯向量为：

$$u = R(g_1) = (1,1), \quad v = R(g_2) = (0,1), \quad w = R(g_3) = (1,0).$$

左端：

$$[\Theta^\dagger(f, g_1, g_2, g_3)](z) = f\left(\begin{pmatrix}(1+0)(1-1)\\(1+1)(0-1)\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\right) = 0.$$

右端：

我们可以将两端分别代入测试数据进行计算，并验证它们得出的结果相同，从而理解这个等式。我们已经计算出左端 = *0*。

对于右端：复合运算实际上会按相反的顺序应用原映射：

- 从 $z = (1,1)$开始
- 应用 $\Phi_2$，其中 $w = R(g_3) = (1,0)$，得到 $\Phi_2(w, z) = (0, -1)$
- 将 $\Phi_1$ 应用于 $u = R(g_1) = (1,1)$ 和 $v = R(g_2) = (0,1)$，得到 $\Phi_1(u, v) = (1, 2)$
- 将 $\Psi$ 应用于这些结果：$\Psi((1,2), (0,-1)) = (0, -2)$
- 最后应用 $f$：$f((0,-2)) = 0$

因此，右端也得到 *0*。

结论。在我们的测试数据上，两边的计算结果均为$0$，这证实了

$$[\Psi \circ (\Phi_1, \Phi_2)]^\dagger = (\Phi_1^\dagger, \Phi_2^\dagger) \circ (\mathrm{id}_{L^\dagger}, \Psi^\dagger)$$

在这个具体实例中，结论如定理 *2* 所述。

## 2.2 协同算子 S 概述

本节将回顾来自 [2]的**S**。

**S 的公理化定义**

**公理 1**（**S**的对象）**S** 的对象是有限的有序希尔伯特空间列表（元组），记作 $H = (H_1, \ldots, H_n)$。每个列表表示一个系统的输入/输出“端口”集合。允许空列表$()$。

**适定反馈**

设 $H_i : U_i \to Y_i$ 和 $H_j : U_j \to Y_j$ 是两个输入输出空间相容的系统，即 $Y_i = U_j$。它们的反馈互联由以下方程支配：

$$\begin{aligned} y_i &= H_i(y_j), \\ y_j &= H_j(u_j - y_i). \end{aligned}$$

将第一个方程代入第二个方程，可得到关于 $y_j$ 的不动点方程：

$$y_j = H_j(u_j - H_i(y_j)). \tag{1}$$

将闭环映射 $\Phi_{u_j}$ 定义为：对于给定输入 $u_j$，$Y_j \to Y_j$

$$\Phi_{u_j}(y_j) := H_j(u_j - H_i(y_j)).$$

如果对于每个允许的输入 $u_j$，方程 $\Phi_{u_j}(y_j) = y_j$ 都有唯一解，则该反馈互联是适定的。

**定义 2 (**适定反馈**)**。 如果对于每个 $u_j \in U_j$，方程 ***(1)*** 都有：则该反馈$\mathcal{F}_{i,\ j}$ 是适定的

*1.* 存在性： 至少一个解 $y_j \in Y_j$，*2.* 唯一性： 恰好一个解 $y_j \in Y_j$。

**公理 2 (S**的生成元**)**。 **S**的多态射由以下基本运算生成：

- 恒等运算：对每个对象 $H$，$\mathrm{id}_{\vec{H}}$： $\vec{H} \to \vec{H}$。
- 张量运算（$\otimes$）：张量积

$$\otimes : \mathrm{Ob}(\mathbf{S}) \times \mathrm{Ob}(\mathbf{S}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{S}), \quad (\vec{H}, \vec{K}) \mapsto \vec{H} \otimes \vec{K},$$

表示系统的并行复合。

- 置换 运算：对于 $\pi \in S_n$（置换群），$\sigma_\pi : (H_1, \ldots, H_n) \to (H_{\pi(1)}, \ldots, H_{\pi(n)})$ .
- 反馈运算 ***(***$\mathcal{F}_{i,j}$***):*** 对于不同的指标 $i \neq j$，定义反馈算子

$$\mathcal{F}_{i,j} : \vec{H} \to \vec{H}',$$

其中，$\vec{H}'$ 由 $\vec{H}$ 移除分量 $H_i$ 和 $H_j$后得到。仅当反馈互联适定时，才定义该运算。若环路增益是压缩的，则该互联是适定的，即，

$$\|H_j \circ H_i\| < 1,$$

这确保相应的不动点方程有唯一解。

- 控制运算 ***(***Ctrl***):*** $\mathrm{Ctrl} : (\vec{H}, \mathcal{U}) \to (\vec{H}')$，其中 $\mathcal{U}$是一个控制空间对象。对于固定的控制参数 $u \in \mathcal{U}$，定义参数化控制算子如下：

$$\mathrm{Ctrl}_u(\vec{H}) := \mathrm{Ctrl}(\vec{H}, u)$$

这得到映射$\mathrm{Ctrl}_u$： $\vec{H} \to \vec{H}'$。

**公理3 (S**的关系**)**。 生成元满足以下相干关系。将 $\equiv_S$ 定义为满足以下条件的最小同余关系：

*(i)* 幺半相干性： 张量积和置换满足对称幺半范畴关系。

*(ii)* 反馈抽线： 在压缩性假设下，连续应用两次反馈运算，可以等价地表示为一次反馈运算与端口重标记的复合。形式上，对于满足 $\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \emptyset$的适定互连，存在置换 $\pi$ 以及端口 $i'$、$j'$，使得：

$$\mathcal{F}_{i,j} \circ \mathcal{F}_{k,l} \equiv_S \mathcal{F}_{i',j'} \circ \sigma_\pi$$

其中，$i'$、$j'$ 由 $\{i,j,k,l\}$的具体互连结构确定。

*(iii)* 控制**-**反馈交换：

$$\mathrm{Ctrl} \circ \mathcal{F}_{i,j} \equiv_S \mathcal{F}_{i,j} \circ \mathrm{Ctrl}$$

当控制保持反馈适定性时。

*(iv)* 控制-张量分配律：

$$\mathrm{Ctrl}(\vec{H} \otimes \vec{K}) \equiv_S \mathrm{Ctrl}(\vec{H}) \otimes \mathrm{Ctrl}(\vec{K})$$

对于独立子系统。

*(v)* 控制-置换自然性：

$$\mathrm{Ctrl} \circ \sigma_\pi \equiv_S \sigma_\pi \circ \mathrm{Ctrl}$$

*(vi)* 顺序控制复合：

$$\mathrm{Ctrl}_{u_2} \circ \mathrm{Ctrl}_{u_1} \equiv_S \mathrm{Ctrl}_{u_1 \star u_2}$$

其中 $\star$： $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$。

*(vii)* 恒等控制：

$$\mathrm{Ctrl}_{u_0} \equiv_S \mathrm{id}$$

对于中性的 $u_0 \in \mathcal{U}$。

**语义表示**

**定义 3 (S的表示)。** 表示**S** 在**HilbMult**中的对称幺半函子$\rho : \mathbf{S} \to \mathbf{HilbMult}$，满足：

对象映射：

- $\rho(\vec{H}) = H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$
- $\rho(()) = \mathbb{C}$

生成元解释

- $\rho$(编号 $\vec{H}$) $=$编号$_{\rho(\vec{H})}$
- $\rho(\otimes)$：典范恒等同构
- $\rho(\sigma_\pi)$：酉置换映射
- $\rho(\mathcal{F}_{i,j})(T)$： $\xi = T(\mathrm{id}_X \otimes \xi \otimes \mathrm{id}_Y)$的唯一解
- $\rho(\mathrm{Ctrl})$：$\rho(\vec{H}) \otimes \mathcal{U} \to \rho(\vec{H'})$：有界多重线性控制映射

语义一致性条件： $\rho$必须满足：

*(SC1)* 幺半函子性： $\rho$ 保留对称幺半结构

*(SC2)* 反馈抽线： 对于适定的 $T$ 和适当的 $\pi$：

$$\rho(\mathcal{F}_{i,j} \circ \mathcal{F}_{k,l})(T) = \rho(\mathcal{F}_{i',j'} \circ \sigma_\pi)(T)$$

*(SC3)* 控制-反馈交换： 当控制保留反馈时：

$$\rho(\mathrm{Ctrl}) \circ \rho(\mathcal{F}_{i,j}) = \rho(\mathcal{F}_{i,j}) \circ \rho(\mathrm{Ctrl})$$

*(SC4)* 控制-张量分配律： 对于独立子系统：

$$\rho(\mathrm{Ctrl}(\vec{H}\otimes\vec{K}))=\rho(\mathrm{Ctrl}(\vec{H}))\otimes\rho(\mathrm{Ctrl}(\vec{K}))$$

*(SC5)* 控制-置换自然性：

$$\rho(\mathrm{Ctrl})\circ\rho(\sigma_\pi)=\rho(\sigma_\pi)\circ\rho(\mathrm{Ctrl})$$

*(SC6)* 顺序控制复合：

$$\rho(\mathrm{Ctrl}_{u_2})\circ\rho(\mathrm{Ctrl}_{u_1})=\rho(\mathrm{Ctrl}_{u_1\star u_2})$$

*(SC7)* 恒等控制：

$$\rho(\mathrm{Ctrl}_{u_0})=\mathrm{id}$$

# 3 HilbMult 中的高阶伴随

本节首先在定义 4 中引入 $n$-伴随的概念。随后，我们在定理3中给出多范畴斯坦斯普林定理的 $n$-伴随表述。

**定义 4**（$n$-伴随与之字形图）。 令

$$\Phi\ \in\ \mathrm{Hom}(A_1,A_2,\ldots,A_n;\ B)$$

是 *dagger*多范畴 (**HilbMult** †)中的一个 $n$ 元多态射。

对 $\Phi$ 的一个-伴随由一个多态射组成

$$\Phi^\dagger\ \in\ \mathrm{Hom}\Big(B^\dagger,\ A_1^\dagger,\ldots,A_{n-1}^\dagger;\ A_n^\dagger\Big)$$

以及 *2*-态射（即单位和 余单位）

$$\eta:\mathrm{id}_{A_n}\ \Rightarrow\ \Phi^\dagger\circ(\Phi,\mathrm{id}_{A_1}^\dagger,\ldots,\mathrm{id}_{A_{n-1}}^\dagger),$$
$$\varepsilon:\Phi\circ(\mathrm{id}_{A_1},\ldots,\mathrm{id}_{A_{n-1}},\Phi^\dagger)\ \Rightarrow\ \mathrm{id}_B,$$

满足之字形（***Z*** 形）相干恒等式：

*(1)* 第一之字形恒等式：复合态射

$$\Phi\ \xRightarrow{\mathrm{id}_\Phi\otimes\eta}\ \Phi\circ(\mathrm{id}_{A_1},\ldots,\mathrm{id}_{A_{n-1}},\Phi^\dagger)\circ(\Phi,\mathrm{id}_{A_1}^\dagger,\ldots,\mathrm{id}_{A_{n-1}}^\dagger)\ \xRightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}}\ \Phi$$

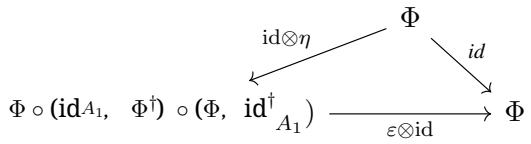
等于作用在 Φ上的恒等 *2*-态射。

*(2)* 第二 ***zig–zag*** 恒等式：复合态射

$$\Phi^\dagger\ \xRightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}_{\Phi^\dagger}}\ \Phi^\dagger\circ(\Phi,\mathrm{id}_{A_1}^\dagger,\ldots,\mathrm{id}_{A_{n-1}}^\dagger)\circ(\mathrm{id}_{A_1},\ldots,\mathrm{id}_{A_{n-1}},\Phi^\dagger)\ \xRightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon}\ \Phi^\dagger$$

等于 $\Phi^\dagger$上的恒等 *2*-态射。

之字形图： 对于 $n = 2$ （第一个非平凡的多态射情形），相干性可以直观地表示为：




这里，对角路径表示插入单位 $\eta$ （缠绕），水平箭头表示余单位 $\varepsilon$，而该图示编码了复合态射等于$\mathrm{id}_\Phi$这一要求。

**注 4**（$n$-伴随直觉与相干性）。 $n$-伴随的概念将通常的希尔伯特空间伴随（$n = 1$）推广到 *dagger* 多范畴中的 $n$ 元多态射。要点包括：

*(i)* 输入输出反转： 对于 $\Phi : (A_1, \ldots, A_n) \to B$， $n$-伴随 $\Phi^\dagger$： $B^\dagger \times A_1^\dagger \times \cdots \times A_{n-1}^\dagger \to A_n^\dagger$ 反转最后一个槽位，同时将前 $n - 1$ 个槽位视为参数，体现了受控的逆变流。

*(ii)* ***Z***形相干性： 单位 $\eta$ 和余单位 $\varepsilon$满足之字形恒等式，确保涉及 $\Phi$ 和 $\Phi^\dagger$ 的复合路径化简为单位元。*“Z*形*”*是弦图中伴随关系的直观体现，其中插入 $\eta$ 并应用 $\varepsilon$ 可以被*“*拉动*”*，使弦线变直。

*(iii)* 水平复合（缠绕）：恒等态射中的 $\otimes$ 表示 *2*-态射的水平复合，而不是希尔伯特空间的张量积。这确保了单位和余单位在多范畴复合中的正确位置。

*(iv)* 普适性与函子性：相干条件使 $\Phi^\dagger$ 成为典范的：它在多范畴复合下具有函子性，并保留逆变结构，正如 $\mathbb{C}^2$ 示例中明确验证的那样。

*(v)* 高阶范畴论意义：为 $n$ 元映射定义伴随算子，是高阶范畴和带对偶的多范畴中各种构造的基础。在量子信息等上下文中，这套形式体系捕捉了量子隐形传态或纠缠交换等过程中输入—输出流的受控反转。

将量子理论扩展到多体系统，需要刻画希尔伯特空间之间在物理上可容许的多元映射。尽管斯廷斯普林定理（1955）为线性完全正映射提供了膨胀，但许多量子协议涉及纠缠交换或量子隐形传态等多线性运算 [5]。定理3表明，以下三个性质等价：每个槽位上的完全正性、匕首多范畴中的 $n$-伴随算子，以及斯廷斯普林型膨胀。这种等价关系能够为一致地分析多线性量子过程提供概念框架和实用工具。

**定理3** （多线性完全正性、Choi表示、Stinespring膨胀与范畴分解的等价性）。 设 $\mathbf{C} = \mathbf{FdHilb}$ 为有限维希尔伯特空间范畴，或配备规范伴随结构和紧闭结构的有限维算子系统及完全正映射范畴。

*Let*

$$\Phi : A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \to B$$

*be a* $\mathbf{C}$中的多线性态射，其中 $A_1$、.....、 $A_n$、 $B$ 是有限维对象，属于 $\mathbf{C}$.

以下四个条件等价：

*(1)* 多重线性完全正性（***MCP***）。对于每个 $j=1$、.....、$n$，以及任意选取的正态射 $\rho_k:\ I\to A_k$ *for* $k\neq j$（其中 $I$ 是张量单位），所诱导的线性映射

$$\Phi_j^{(\rho_1,\dots,\rho_{j-1},\rho_{j+1},\dots,\rho_n)}:A_j\to B,$$

定义为

$$\Phi_j^{(\rho_1,\cdots)}(a_j)=\Phi(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_{j-1}\otimes a_j\otimes\rho_{j+1}\otimes\cdots\otimes\rho_n),$$

是完全正的。

*(2)* 具有可分结构的正 ***Choi*** 表示。存在一个正元素 *t*

$$C_\Phi\in(A_1^*\otimes\cdots\otimes A_n^*)\otimes B$$

使得对于所有 $a_j\in A_j$,

$$\Phi(a_1,\dots,a_n)=\mathrm{Tr}_{A_1^*\otimes\cdots\otimes A_n^*}\big[C_\Phi\cdot(a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes\mathrm{id}_B)\big],$$

并且 $C_\Phi$ 具有如下形式的可分解分解

$$C_\Phi=(V\otimes V^\dagger)\circ\bigotimes_{j=1}^{n}P_j,$$

其中 $P_j\in A_j^*\otimes A_j$ 是正元素，且对于某些有限维希尔伯特空间 $K_j$，$V$：$B\to K_1\otimes\cdots\otimes K_n$ 是等距映射。

*(3)* 对称多变量 ***Stinespring*** 膨胀。存在：

- 一个有限维希尔伯特空间 $K=K_1\otimes\cdots\otimes K_n$,
- 一个等距映射 $V$：$B\to K$,
- 对于每个 $j=1$、.....、$n$，一个 $*$-表示 $\pi_j$：$A_j\to B(K_j)$,

使得对于所有 $a_j\in A_j$,

$$\Phi(a_1,\dots,a_n)=V^\dagger\big(\pi_1(a_1)\otimes\cdots\otimes\pi_n(a_n)\big)V.$$

这些表示作用于不同的张量因子，因此彼此可交换。

*(4)* 通过紧闭结构的范畴分解。存在一个对象 $K\in\mathbf{C}$ 以及态射

$$\alpha_j:A_j\to K\otimes K^*\quad(j=1,\dots,n-1),\qquad\beta:A_n\to K^*\otimes B,$$

其中，每个 $\alpha_j$ *a* 都是一个 $*$-态射，而 $\beta$ *an* 是一个缩放意义下的等距映射，使得 $\Phi$ 可分解为：

$$\Phi=(\mathrm{id}_B\otimes\mathrm{ev}_K)\circ(\beta\otimes\mathrm{id}_K)\circ(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{n-1}\otimes\mathrm{id}_{A_n}).$$

此分解导出一种 $n$-伴随结构，其典范单位和余单位满足之字形恒等式。

此外，当 *(3)* 中的膨胀在以下意义下是极小的

$$K=\overline{\mathrm{span}}\{\pi_1(a_1)\cdots\pi_n(a_n)Vb:a_j\in A_j,b\in B\},$$

它在酉等价意义下唯一。

证明。我们证明蕴含循环 (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)。

## 记号与预备知识

为具体起见，我们在 $\mathbf{C} = \mathbf{FdHilb}$中讨论；这些论证可直接推广到有限维算子系统。所有对象都是有限维希尔伯特空间，正性指半正定算子。伴随结构为每个对象 $A$ 赋予一个对偶空间 $A^*$，其求值 $\mathsf{ev}_A\colon A^* \otimes A \to \mathbb{C}$ 和余求值 $\mathsf{coev}_A\colon \mathbb{C} \to A \otimes A^*$ 满足蛇形恒等式。

对于多线性映射 $\Phi\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B$，通过固定除第 $j$个位置之外所有位置上的态$\rho_k$，可得到部分求值 $\Phi^{(\rho_1,\cdots)j}$，它是一个线性映射 $A_j \to B$。

**步骤 1:** $(3) \Rightarrow (1)$ **（Stinespring 蕴含多重完全正性）**

假设条件 **(3)** 成立：存在 $K = K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$、一个等距映射 $V\colon B \to K$，以及 $*$-表示$\pi_j\colon A_j \to B(K_j)$，使得

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = V^\dagger(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n))V.$$

固定 $j \in \{1, \ldots, n\}$和正态 $\rho_k\colon \mathbb{C} \to A_k$，其中 $k \neq j$。每个 $\rho_k$都对应一个正算子 $\rho_k(1) \in A_k$。由于 $\pi_k$ 是一个 $*$-同态，$\pi_k(\rho_k(1)) \in B(K_k)$ 是正的。

定义作用在 $K$上的正算子：

$$P = \pi_1(\rho_1(1)) \otimes \cdots \otimes \pi_{j-1}(\rho_{j-1}(1)) \otimes \mathrm{id}_{K_j} \otimes \pi_{j+1}(\rho_{j+1}(1)) \otimes \cdots \otimes \pi_n(\rho_n(1)).$$

令 $P^{1/2}$ 为其正平方根。那么对于任意 $a_j \in A_j$,

$$\begin{aligned}\Phi_j^{(\rho_1,\cdots)}(a_j) &= \Phi(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_{j-1} \otimes a_j \otimes \rho_{j+1} \otimes \cdots \otimes \rho_n) \\ &= V^\dagger\big(\pi_1(\rho_1(1)) \otimes \cdots \otimes \pi_j(a_j) \otimes \cdots \otimes \pi_n(\rho_n(1))\big)V \\ &= (VP^{1/2})^\dagger\big(\mathrm{id}_{K_1} \otimes \cdots \otimes \pi_j(a_j) \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{K_n}\big)(VP^{1/2}).\end{aligned}$$

映射 $a_j \mapsto \mathrm{id}_{K_1} \otimes \cdots \otimes \pi_j(a_j) \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{K_n}$是完全正的（它是映入 $B(K)$的一个 $*$-同态）。有界算子 $VP^{1/2}$的共轭保持完全正性。因此，对于任意 $j$ 以及正的 $\rho_k$，$\Phi^{(\rho_1,\cdots)j}$都是完全正的，从而证明了条件（1）。

## 步骤 2：$(1) \Leftrightarrow (2)$（多重完全正性蕴含 Choi表示）

我们通过多线性 Choi-Jamiołkowski同构以及对 $n$的归纳法来证明这一点。

**引理 2** （多线性 Choi-Jamiołkowski同构）。 对于多线性映射 $\Phi\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B$，定义

$$C_\Phi = \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{d_n} \Phi(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_n}^{(n)}) \otimes \left(e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)}\right)^* \in B \otimes (A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^*,$$

其中，$\{e_{i_j}^{(j)}\}$ 是 $A_j$ 的正交归一基，且 $d_j =$ 维数 $A_j$。

那么，$\Phi$ 满足条件 *(1)* 当且仅当：

1. $C_\Phi$ 是半正定的，
2. $C_\Phi$ 存在可分解 $C_\Phi = (V \otimes V^\dagger) \circ \bigotimes_{j=1}^n P_j$，其中 $P_j \in A_j^* \otimes A_j$ 为正，且$V\colon B \to K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$ 是等距映射。

引理证明。我们对 $n$ 使用归纳法。

基例 $n=1$：条件 (1) 化为 $\Phi: A_1 \to B$ 的通常完全正性。标准丘定理断言，$\Phi$ 是完全正的，当且仅当 $C_\Phi \geq 0$，并且存在等距映射 $V: B \to K_1$ 以及正元素 $P_1 \in A_1^* \otimes A_1$，使得 $C_\Phi = (V \otimes V^\dagger) \circ P_1$。

归纳步骤：假设该引理对 $n-1$ 成立。写作 $\Phi(a_1, \ldots\ldots, a_n) = \Psi_{a_n}(a_1, \ldots\ldots, a_{n-1})$，其中对固定的 $a_n$，$\Psi_{a_n}: A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \to B$ 是 $(n-1)$-线性的。

根据条件 (1)，对每个 $a_n$，映射 $\Psi_{a_n}$ 满足针对 $n-1$ 个输入的 MCP 条件。根据归纳假设，对每个 $a_n$，存在等距映射 $V_{a_n}: B \to K^{(a_n)}_1 \otimes \cdots \otimes K^{(a_n)}_{n-1}$ 以及正元素 $P^{(a_n)}_j \in A_j^* \otimes A_j (j=1, \ldots\ldots, n-1)$，使得 $\Psi_{a_n}$ 的 $(n-1)$-线性 Choi 矩阵可分解为：

$$C_{\Psi_{a_n}} = (V_{a_n} \otimes V_{a_n}^\dagger) \circ \bigotimes_{j=1}^{n-1} P_j^{(a_n)}. \tag{\dagger}$$

现在考虑线性映射 $T: A_n \to B \otimes (A_1 \otimes \cdots \otimes A_{n-1})^*$，其定义为 $T(a_n) = C_{\Psi_{a_n}}$。我们断言$T$是完全正的。事实上，对于任意正的 $X = \sum_{p,\ q} x_p \otimes x_q^* \in M_m(A_n^* \otimes A_n)$，我们需要证明

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}_{M_m})(T \otimes \mathrm{id}_{M_m})(X) \geq 0.$$

这是因为，对 $n$号位置应用条件 (1)，并在前$n-1$ 个位置适当选取态，可得 $T$保持所有矩阵扩张的正性。

由于 $T$是线性完全正映射，根据标准丘定理，存在一个有限维希尔伯特空间 $K_n$、一个等距映射 $W: B \to (K_1 \otimes \cdots \otimes K_{n-1}) \otimes K_n$（其中我们可以令 $K_1 \otimes \cdots \otimes K_{n-1}$足够大，以包含所有 $K^{(a_n)}_1 \otimes \cdots \otimes K^{(a_n)}_{n-1}$），以及一个正的 $P_n \in A_n^* \otimes A_n$，使得

$$T(a_n) = W^\dagger \big(\mathrm{id}_{K_1 \otimes \cdots \otimes K_{n-1}} \otimes \pi_n(a_n)\big) W,$$

其中 $\pi_n: A_n \to B(K_n)$ 是通过对 $P_n$ 应用 GNS 构造得到的 $*$ 表示。

将此与 (†) 结合，可得一个等距映射 $V: B \to K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$，以及正的 $P_j \in A_j^* \otimes A_j (j=1, \ldots, n)$，使得

$$C_\Phi = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \Phi(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_n}^{(n)}) \otimes \left(e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)}\right)^* = (V \otimes V^\dagger) \circ \bigotimes_{j=1}^{n} P_j.$$

反向命题（(2) $\Rightarrow$ (1)）可通过反转论证得到：若 $C_\Phi$ 有这样的可分解分解，则部分求值会得到完全正映射。 □

此引理证明了 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。请注意，有限维性对于归纳构造至关重要，只有这样才能将所有中间空间一致地嵌入。

## 步骤 3：$(2) \Rightarrow (3)$（Choi表示蕴含 Stinespring）

假设 $C_\Phi = (V \otimes V^\dagger) \circ \bigotimes_{j=1}^n P_j$，其中 $P_j \geq 0$，且 $V: B \to K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$ 是一个等距映射。

对于每个 $j$，对正元素 $P_j \in A_j^* \otimes A_j$ 应用 GNS 构造。这将得到一个有限维希尔伯特空间 $K_j$ 以及一个 $*$-表示 $\pi_j: A_j \to B(K_j)$，使得

$$P_j = (\pi_j \otimes \mathrm{id}_{A_j})(\Omega_j),$$

其中，$\Omega_j = \sum_{k=1}^{\dim K_j} |k\rangle\langle k| \in K_j \otimes K_j^*$是一个最大纠缠态。

现在计算任意 $a_j \in A_j$:

$$\begin{aligned}\Phi(a_1,\dots,a_n) &= \mathrm{Tr}_{(A_1\otimes\cdots\otimes A_n)^*}[C_\Phi \cdot (a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes \mathrm{id}_B)] \\ &= \mathrm{Tr}\left[(V\otimes V^\dagger)\left(\bigotimes_{j=1}^{n}(\pi_j(a_j)\otimes \mathrm{id}_{A_j})(\Omega_j)\right)\right] \\ &= V^\dagger\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\pi_j(a_j)\right)V,\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\mathrm{Tr}_{A_j^*}[(\pi_j(a_j)\otimes \mathrm{id}_{A_j})(\Omega_j)] = \pi_j(a_j)$。

由于 $V$ 是等距映射，且这些 $\pi_j$ 作用于不同的张量因子上，因此我们已证明条件 (3)。

### 步骤 4：$(3) \Leftrightarrow (4)$（Stinespring 与范畴分解）

$(3) \Rightarrow (4)$

给定 Stinespring 膨胀 $\Phi(a_1,\dots,a_n) = V^\dagger(\pi_1(a_1)\otimes\cdots\otimes\pi_n(a_n))V$，定义：

- $K := K_1\otimes\cdots\otimes K_{n-1}$, so $K^* = K_1^*\otimes\cdots\otimes K_{n-1}^*$,
- $\alpha_j := \pi_j : A_j \to B(K_j) \cong K_j\otimes K_j^* \hookrightarrow K\otimes K^*$ for $j = 1,\dots,n-1$,
- $\beta : A_n \to K^*\otimes B$ by $\beta(a_n) = (\mathrm{id}_{K^*}\otimes V^\dagger)(\pi_n(a_n)\otimes \mathrm{id}_K)$.

那么 $\beta$ 满足 $\beta^\dagger\beta = \pi_n^\dagger\pi_n = \mathrm{id}_{A_n}$（若进行归一化，则需相应缩放）。现在计算：

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}_B\otimes \mathrm{ev}_K)\circ(\beta\otimes \mathrm{id}_K)\circ(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{n-1}\otimes \mathrm{id}_{A_n}) \\ &\qquad= (\mathrm{id}_B\otimes \mathrm{ev}_K)\circ\big[((\mathrm{id}_{K^*}\otimes V^\dagger)(\pi_n\otimes \mathrm{id}_K))\otimes \mathrm{id}_K\big]\circ(\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_{n-1}\otimes \mathrm{id}_{A_n}) \\ &\qquad= V^\dagger(\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_n)V \\ &\qquad= \Phi.\end{aligned}$$

中间的等式用到了紧闭范畴中的蛇形恒等式：$(\mathrm{ev}_K\otimes \mathrm{id}_K)\circ(\mathrm{id}_{K^*}\otimes \mathrm{coev}_K) = \mathrm{id}_K$，以收缩这些 $K^*\otimes K$ 对。

$n$-伴随结构通过经由该分解的匕首定义 $\Phi^\dagger$ 给出。之字形恒等式由求值/余求值的自然性以及 $\beta$ 的等距映射条件推出。

$(4) \Rightarrow (3)$

给定 (4) 中的分解，我们得到如下 Stinespring 膨胀。由于 $\beta:\ A_n \to K^*\otimes B$ 在缩放意义下是等距映射，其 Choi 矩阵是正的。根据线性完全正映射的标准 Stinespring 定理，存在一个希尔伯特空间 $K_n$、一个等距映射 $W:\ B\to K_n\otimes K$，以及一个 $*$-表示 $\pi_n:\ A_n\to B(K_n)$，使得 $\beta(a_n) = (\mathrm{id}_{K^*}\otimes W^\dagger)(\pi_n(a_n)\otimes \mathrm{id}_K)$。

同样地，每个作为 $*$-态射的 $\alpha_j:\ A_j\to K\otimes K^*$ 都通过 GNS 构造产生一个表示 $\pi_j:\ A_j\to B(K_j)$，其中 $K_j$ 是 $K$ 的一个直和项。

设定 $V = W^\dagger:\ K_n\otimes K\to B$ 并确定 $K = K_1\otimes\cdots\otimes K_{n-1}$，我们得到

$$\Phi = V^\dagger(\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_n)V,$$

这正是条件 (3)。

**结论**

我们已经证明了以下蕴含关系：

- (3) $\Rightarrow$ (1)（步骤 1：Stinespring 蕴含多重完全正性）
- (1) $\Leftrightarrow$ (2)（步骤 2：多重完全正性当且仅当存在 Choi表示）
- (2) $\Rightarrow$ (3)（步骤 3：Choi 蕴含 Stinespring）
- (3) $\Leftrightarrow$ (4)（步骤 4：Stinespring 当且仅当存在范畴分解）

由于 (3) $\Leftrightarrow$ (4)，我们有 (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)。结合 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 和 (2) $\Rightarrow$ (3)，这就证明了这四个条件彼此等价。

极小性和唯一性结论可由膨胀理论中的标准论证得出：在有限维情形下，任何膨胀都可以约化为一个极小膨胀，且该膨胀在酉等价意义下唯一。

□

**备注 5 (**关于多重线性完全正性的概念)。 条件 *(1)* 中的定义与可分完全正 或关于部分求值的联合完全正一致。在有限维情形下，这等价于更强的概念，即对所有输入同时进行所有矩阵扩张时的完全正性。这种等价性关键地依赖于有限维性假设。

**备注 6 (**定理的适用范围)。 该定理在$\mathbf{FdHilb}$中同样成立。对于算子系统，必须将 $*$-表示解释为保持算子系统结构的幺正完全正映射，并在算子系统的语境下应用 *GNS* 构造。由于有限维性，所有证明都可以直接改写。

**备注 7** ($n$-伴随解释)。 条件 *(4)* 中的分解可以解释为一种 $n$-伴随结构：通过分解的匕首定义 $\Phi^\dagger$，可得到典范单位 $\eta : \mathrm{id} \Rightarrow \Phi^\dagger\Phi$ 和余单位$\varepsilon$： $\Phi\Phi^\dagger \Rightarrow \mathrm{id}$，它们满足紧闭范畴的之字形恒等式。这将线性映射通常的伴随推广到了多重线性情形。

下面给出定义 5，以讨论极小 Stinespring 膨胀分量。

**定义 5 (**极小 Stinespring 膨胀分量)。 设

$$\Phi \in \mathrm{Hom}(A_1, \dots, A_n; B)$$

是一个 $n$ 元完全正多态射，属于一个 † 多范畴 (**HilbMult** †)，且存在 ***Stinespring*** 型膨胀

$$\Phi(a_1, \dots, a_n) = V^\dagger\big(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\big)V,$$

其中 $V\colon\ H \to K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$是一个等距映射，并且每个 $\pi_j\colon\ A_j \to B(K_j)$ 都是作用于相应张量因子上的 $*$–表示。

*(a)* 最小希尔伯特空间 $K_{\min}$:

$$K_{\min} := \overline{\mathrm{span}}\Big\{(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n))Vh \;\Big|\; a_j \in A_j,\, h \in H\Big\}.$$

这是包含 $V$的像且在所有 $\pi_j(a_j)$下不变的最小循环子空间 $K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$。

*(b)* 极小的 $*$-表示 $\pi_{j,\ \min}$**:** 对于每个 $j=1,\ \ldots\ldots,\ n$，定义

$$\pi_{j,\min}(a_j) := \pi_j(a_j)\big|_{K_{\min}} : K_{\min} \to K_{\min}.$$

等价地，对于任意写成线性组合的向量 $v \in K_{\min}$

$$v = \sum_k (\pi_1(a_1^{(k)}) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n^{(k)}))Vh^{(k)},$$

都有

$$\pi_{j,\min}(a_j)v = \sum_k (\pi_1(a_1^{(k)}) \otimes \cdots \otimes \pi_j(a_j)\pi_j(a_j^{(k)}) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n^{(k)}))Vh^{(k)} \in K_{\min}.$$

*(c)* 极小等距算子 $V_{\min}$:

$$V_{\min} := V\big|_{K_{\min}} : H \to K_{\min}.$$

由于 $K_{\min}$ 是 在所有 $\pi_{j,\min}$ 作用下不变，且包含 $V$ 的像，因此 $V_{\min}$ 是一个等距映射，并满足 *s*

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = V_{\min}^{\dagger}\big(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\big)V_{\min}.$$

三元组 $(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}, V_{\min})$ 称为 $\Phi$ 的最小 Stinespring 膨胀。根据构造，它是循环的，并满足泛性质，且如命题 *1*、*2* 和 *3* 所述，在酉等价意义下具有唯一性。

定义 6 采用另一种方法，即通过 $n$-伴随来确定最小 Stinespring 膨胀的构造。

**定义 6**（通过 $n$-伴随构造最小 Stinespring 膨胀）。 设

$$\Phi \in \mathrm{Hom}(A_1, \ldots, A_n; B)$$

是一个 †-多范畴 (**HilbMult** †) 中的 $n$ 元多态射，并设 $(\Phi^{\dagger}, \eta, \varepsilon)$ 是它的 $n$-伴随，其单位为$\eta : \mathrm{id}_{A_n} \Rightarrow \Phi^{\dagger} \circ (\Phi, \mathrm{id}_{A_1}^{\dagger}, \ldots, \mathrm{id}_{A_{n-1}}^{\dagger})$，余单位为 $\varepsilon : \Phi \circ (\mathrm{id}^{A_1}, \ldots, \mathrm{id}^{A_{n-1}}, \Phi^{\dagger}) \Rightarrow \mathrm{id}_B$。

我们如下定义最小 *Stinespring* 膨胀 $(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}, V_{\min})$:

*(a)* 最小希尔伯特空间 $K_{\min}$: 设

$$K_{\min} := \overline{\mathrm{span}}\big\{(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n))Vh \;\big|\; a_j \in A_j,\, h \in H\big\}.$$

赋予 $K$ 极小的，其内积继承自环境张量积 $K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$。

*(b)* 极小的 $*$-表示 $\pi_{j,\ \min}$: 对于每个 $j=1,\ \ldots\ldots,\ n$，定义

$$\pi_{j,\min}(a_j) := \pi_j(a_j)\big|_{K_{\min}} : K_{\min} \to K_{\min}.$$

等价地，对于任意向量

$$v = \sum_k (\pi_1(a_1^{(k)}) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n^{(k)}))Vh^{(k)} \in K_{\min},$$

有

$$\pi_{j,\min}(a_j)v = \sum_k (\pi_1(a_1^{(k)}) \otimes \cdots \otimes \pi_j(a_j)\pi_j(a_j^{(k)}) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n^{(k)}))Vh^{(k)} \in K_{\min}.$$

根据构造　在每个 $\pi_{j,\ \min}$ 都保持内积，并满足 $*$-表示性质　.

*(c)* 极小等距算子 $V_{\min}$：定义

$$V_{\min} := V\big|_{K_{\min}} : H \to K_{\min}.$$

由于 $K_{\min}$ 包含 $V$ 的像，且在所有 $\pi_{j,\ \min}$ 下不变，$V_{\min}$ 下不变，是一个等距映射，并满足 *s*

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = V_{\min}^{\dagger} \left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min}.$$

三元组 $(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}, V_{\min})$ 称为 $\Phi$ 的最小 Stinespring 膨胀 。根据构造，它是循环的，并且在酉等价意义下唯一。

下面的命题 1 讨论映射 $\Phi$ 的最小 Stinespring 膨胀。

**命题 1**（最小 Stinespring 膨胀）。 设

$$\Phi \in \mathrm{Hom}(A_1, \ldots, A_n; B)$$

是一个 †-多范畴中的 $n$元多态射，该范畴具有一个 $n$-伴随 $(\Phi^{\dagger}, \eta, \varepsilon)$。设

$$(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}, V_{\min})$$

为定义 *6* 中构造的三元组。那么对所有 $a_j \in A_j$,

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = V_{\min}^{\dagger}\big(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\big) V_{\min}.$$

此外，（$K_{\min}$、 $\{\pi_{j,\min}\}$、 $V_{\min}$）是极小的，因为

$$K_{\min} = \overline{\mathrm{span}}\big\{ \left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min} h \;\big|\; a_j \in A_j,\ h \in H \big\},$$

并且每个 $\pi_{j、\ \min}$ 都是一个 $*$-表示，而 $V_{\min}$ 是等距映射。

证明　命题 *1*。 设 $(K_{\min},\ \{\pi_{j,\min}\},\ V_{\min})$ 如定义 6 中所定义。根据定义,

$$K_{\min} = \overline{\mathrm{span}}\big\{ \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) V h \;\big|\; a_j \in A_j,\ h \in H \big\},$$

视为环境希尔伯特空间 $K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$ 的一个闭子空间。映射 $\pi_{j、\ \min}$ 是 $\pi_j$ 在 $K_{\min}$ 上的限制，而 $V_{\min}$ 是 $V$ 在其位于 $K_{\min}$ 内的值域上的限制。

现在我们来详细验证:

**1. 膨胀恒等式的验证**。

与伴随算子 $(\Phi^{\dagger},\ \eta,\ \varepsilon)$ 相关联的环境膨胀满足

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = V^{\dagger}\big(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\big) V.$$

由于 $K_{\min}$ 包含 $\mathrm{Im}(V)$，且在每个 $\pi_j(a_j)$ 作用下不变，将此恒等式限制到 $K_{\min}$ 可得

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = V_{\min}^{\dagger}\big(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\big) V_{\min}.$$

为了明确说明限制保持了恒等式，注意对于任意 $h \in H$,

$$V h = V_{\min} h \in K_{\min},$$

并且对于任意 $k \in K_{\min}$,

$$\left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) k = \left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) k.$$

此外，伴随关系 $V^{\dagger}{}_{\min} = V^{\dagger}\restriction_{K_{\min}}$ 成立，因为 $K_{\min}$ 包含 $V$ 的值域。因此，环境扩张公式恰好限制为所需的公式。

**2. 极小性的验证。**

由于 $K_{\min}$ 被定义为所有形如

$$(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n))\, Vh,$$

的向量的闭线性张成，因此它是满足以下条件的最小子空间：

(i) 包含 Im($V$)，并且

(ii) 在每个 $\pi_j(a_j)$ 下不变。

为验证循环性这一论断，设

$$\mathcal{S} = \operatorname{span}\big\{(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n))\, V_{\min} h\big\}.$$

显然，$\mathcal{S} \subseteq K_{\min}$ 由构造可得。反过来，$K_{\min}$ 的任意生成元都具有 $(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n))Vh$ 的形式，并且由于限制不会改变其在 $K_{\min}$ 上的作用，该向量已经属于张成空间$\mathcal{S}$。因此

$$K_{\min} = \overline{\mathcal{S}}.$$

因此，该膨胀是极小的。

**3. 验证 $\pi_{j,\ \min}$ 是一个 $*$-表示。**

由于每个 $\pi_j$ 都是定义在 $K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$ 上的 $*$-表示，且对每个$a_j \in A_j$，$K_{\min}$ 在 $\pi_j(a_j)$ 作用下保持不变，因此限制$\pi_{j,\ \min}(a_j) = \pi_j(a_j)|_{K_{\min}}$ 自动满足：

- $\pi_{j,\min}(a_j a_j') = \pi_{j,\min}(a_j)\pi_{j,\min}(a_j')$,
- $\pi_{j,\min}(a_j^{\dagger}) = \pi_{j,\min}(a_j)^{\dagger}$,
- $\pi_{j,\min}$ is linear.

因此，对每个 $j$，$\pi_{j,\ \min}$ 都是一个 $*$-表示。

**4. 验证 $V_{\min}$ 是等距映射。**

由于 $V$ 是等距映射，

$$\langle Vh, Vh' \rangle = \langle h, h' \rangle.$$

由于 $V_{\min} h = Vh$ 和 $Vh \in K_{\min}$，因此

$$\langle V_{\min} h, V_{\min} h' \rangle = \langle Vh, Vh' \rangle = \langle h, h' \rangle,$$

所以 $V_{\min}$ 也是等距映射。

综合以上验证，三元组 $(K_{\min},\ \{\pi_{j,\min}\},\ V_{\min})$ 是 $\Phi$ 的 Stinespring 膨胀，并且在所述意义下是极小的。□

U命题将讨论极小膨胀的唯一性与泛性质 2.

**命题 2（极小膨胀的唯一性与泛性质）**。设

$$\Phi \in \mathrm{Hom}(A_1, \dots, A_n; B)$$

并令

$$\big(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}_{j=1}^n, V_{\min}\big)$$

为定义 *6* 中构造的 $\Phi$的最小 ***Stinespring*** 膨胀，使得

$$\Phi(a_1, \dots, a_n) = V_{\min}^{\dagger}\big(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\big)V_{\min} \quad \textit{for all } a_j \in A_j.$$

任取 $\Phi$的另一个 ***Stinespring*** 膨胀 $(K, \{\pi_j\}_{j=1}^n, V)$，即

$$\Phi(a_1, \dots, a_n) = V^{\dagger}\big(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\big)V \quad \textit{for all } a_j \in A_j.$$

则存在唯一的部分等距算子

$$U : K_{\min} \to K$$

满足交织关系

$$U\left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) = \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) U, \tag{4}$$

对所有 $a_j \in A_j$，且

$$UV_{\min} = V. \tag{5}$$

此外，如果（$K$、$\{\pi_j\}$、$V$） 本身是极小的，那么 $U$是酉的。

命题 *2* 的证明。 设 **(**$K$， $\{\pi_j\}$， $V$**)** 是陈述中所述的 $\Phi$ 的任意一个 Stinespring 膨胀。

**步骤 1：在稠密子空间上构造** $U$。

根据定义 6，最小希尔伯特空间 $K_{\min}$ 定义为

$$K_{\min} = \overline{\mathrm{span}}\Big\{\big(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\big)Vh \;\Big|\; a_j \in A_j,\ h \in H\Big\},$$

将其视为 $K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$ 的一个闭子空间，并且

$$\pi_{j,\min}(a_j) := \pi_j(a_j)\big|_{K_{\min}}, \qquad V_{\min} := V\big|_H : H \to K_{\min}.$$

特别地， $K_{\min}$ 中的每个向量都是如下形式的向量的有限线性组合之极限

$$\left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min}h.$$

令 $\mathcal{D}_{\min}$ 表示这些生成元的线性张成：

$$\mathcal{D}_{\min} := \mathrm{span}\Big\{\left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min}h \;\Big|\; a_j \in A_j,\ h \in H\Big\}.$$

根据构造， $\mathcal{D}_{\min}$ 在 $K_{\min}$中稠密。

现在，我们在生成元上定义一个线性映射 $U_0$： $\mathcal{D}_{\min} \to K$：

$$U_0\big(\left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min}h\big) := \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) Vh.$$

将 $U_0$ 线性扩张到 $\mathcal{D}_{\min}$的全体元素上。

**步骤 2：** $U_0$ **定义良好且是等距的**。

我们首先证明 $U_0$ 在 $\mathcal{D}_{\min}$ 上保持内积。取两个任意的生成元

$$\xi = (\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n))\, V_{\min} h, \quad \eta = (\pi_{1,\min}(b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(b_n))\, V_{\min} k,$$

其中 $a_j, b_j \in A_j$ 和 $h, k \in H$。

在 $K_{\min}$ 上，利用 $\pi_{j,\min}$ 和 $V_{\min}$ 是由环境膨胀限制得到的这一点，我们计算得

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \eta \rangle_{K_{\min}} &= \big\langle (\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n))\, V_{\min} h,\ (\pi_{1,\min}(b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(b_n))\, V_{\min} k \big\rangle \\
&= \big\langle V_{\min} h,\ (\pi_{1,\min}(a_1^\dagger b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n^\dagger b_n))\, V_{\min} k \big\rangle \\
&= \big\langle h,\ V_{\min}^\dagger (\pi_{1,\min}(a_1^\dagger b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n^\dagger b_n))\, V_{\min} k \big\rangle_H \\
&= \big\langle h,\ \Phi(a_1^\dagger b_1, \ldots, a_n^\dagger b_n)\, k \big\rangle_H,
\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们用到了

$$\Phi(c_1, \ldots, c_n) = V_{\min}^\dagger \big(\pi_{1,\min}(c_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(c_n)\big) V_{\min} \quad \text{for all } c_j \in A_j.$$

另一方面，在膨胀 $(K, \{\pi_j\}, V)$ 中，对于这些像，我们有

$$U_0(\xi) = (\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n))\, Vh, \qquad U_0(\eta) = (\pi_1(b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(b_n))\, Vk,$$

类似地，

$$\begin{aligned}
\langle U_0(\xi), U_0(\eta) \rangle_K &= \big\langle (\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n))\, Vh,\ (\pi_1(b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(b_n))\, Vk \big\rangle_K \\
&= \big\langle Vh,\ (\pi_1(a_1^\dagger b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n^\dagger b_n))\, Vk \big\rangle_K \\
&= \big\langle h,\ V^\dagger (\pi_1(a_1^\dagger b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n^\dagger b_n))\, Vk \big\rangle_H \\
&= \big\langle h,\ \Phi(a_1^\dagger b_1, \ldots, a_n^\dagger b_n)\, k \big\rangle_H.
\end{aligned}$$

比较这两个表达式可得

$$\langle \xi, \eta \rangle_{K_{\min}} = \langle U_0(\xi), U_0(\eta) \rangle_K \quad \text{for all generators } \xi, \eta,$$

因此，根据线性和极化，对于所有 $\xi$， $\eta \in \mathcal{D}_{\min}$。

因此， $U_0$ 是 $\mathcal{D}_{\min}$上的等距映射。特别地，如果向量 $\zeta \in \mathcal{D}_{\min}$ 有两种表示为生成元的线性组合，则 $U_0(\zeta)$ 不依赖于所选择的表示。因此， $U_0$ 是良定义的。

根据连续性， $U_0$ 唯一延拓为一个等距映射

$$U : K_{\min} \to K.$$

**第 3 步：交织关系。**

*(a)* 与表示的相容性。令 $a_1, \ldots, a_n \in A_j$ 并取一个生成元

$$\xi = (\pi_{1,\min}(b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(b_n))\, V_{\min} h \in \mathcal{D}_{\min}.$$

Then

$$\begin{aligned}
& U\big((\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n))\, \xi\big) \\
&= U_0\big((\pi_{1,\min}(a_1 b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n b_n))\, V_{\min} h\big) \\
&= (\pi_1(a_1 b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n b_n))\, Vh \\
&= \big(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\big)(\pi_1(b_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(b_n))\, Vh \\
&= \big(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\big) U_0(\xi).
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{D}_{\min}$ 在 $K_{\min}$ 中稠密，且 $U$ 连续，这表明 (4) 在 $K_{\min}$的所有元素上都成立。

*(b)* 与 $V_{\min}$的相容性。对于 $h \in H$，根据 $U_0$ 的定义，我们有：

$$UV_{\min}h = U_0(V_{\min}h) = Vh,$$

因为取 在 $U_0$ 的定义中代入 $a_1 = \cdots = a_n = \mathbf{1}$，得到 $U_0(V_{\min}h) = Vh$。这证明了 (5) .

**步骤 4：** $U$ **的唯一性。**

假设 $U'\colon K_{\min} \to K$ 是满足相同交织关系 (4) 和 (5) 的另一个部分等距算子。我们证明 $U' = U$。

首先，对于每个 $h \in H$，我们有

$$UV_{\min}h = Vh = U'V_{\min}h,$$

因此 $U$ 和 $U'$ 在 $\mathrm{Im}(V_{\min})$ 上一致。现在注意到， $K_{\min}$ 是以下形式的向量的闭线性张成：

$$\left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min}h.$$

利用交织关系 (4)，对于这类向量，我们得到：

$$\begin{aligned} U\big(\left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min}h\big) &= \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) UV_{\min}h, \\ U'\big(\left(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\right) V_{\min}h\big) &= \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) U'V_{\min}h. \end{aligned}$$

由于 $UV_{\min}h = U'V_{\min}h$，可知 $U$和 $U'$在所有这类生成元上都一致，因而在它们的线性张成 $\mathcal{D}_{\min}$上也一致。由连续性可知， $U = U'$ 在整个 $K_{\min}$上成立。

因此 $U$ 是唯一的。

**步骤 5：当**$(K, \{\pi_j\}, V)$ **是极小的时，** $U$ **为酉算子。**

现在假设膨胀 $(K, \{\pi_j\}, V)$ 是极小的，即

$$K = \overline{\mathrm{span}}\Big\{ \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) Vh \;\Big|\; a_j \in A_j,\ h \in H \Big\}.$$

*(i)* $U$ 是单射。 由于 $U$ 是等距映射，对于任意 $\xi$， $\eta \in K_{\min}$ 我们有

$$\|U\xi - U\eta\|_K = \|\xi - \eta\|_{K_{\min}}.$$

特别地，如果 $U\xi = U\eta$，那么 $\|\xi - \eta\|_{K_{\min}} = 0$，所以 $\xi = \eta$。因此 $U$是单射。

*(ii)* $U$ 的值域在 $K$中稠密。 设

$$\mathcal{D} := \mathrm{span}\Big\{ \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) Vh \;\Big|\; a_j \in A_j,\ h \in H \Big\},$$

由极小性可得 $K = \mathcal{D}$。

对于任意 $a_j \in A_j$ 和 $h \in H$，我们有

$$\begin{aligned} \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) Vh &= \left(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_n(a_n)\right) UV_{\min}h \\ &= U\big(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\big) V_{\min}h, \end{aligned}$$

先使用 (5)，再使用 (4)。该向量

$$\big(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\big) V_{\min}h$$

属于 $K_{\min}$，因此也属于 $U$ 的定义域。因此 $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{ran}(U)$，所以

$$K = \overline{\mathcal{D}} \subseteq \overline{\mathrm{ran}(U)}.$$

*(iii)* 值域 $U$ 是闭的。 由于 $U$ 是等距映射，且 $K_{\min}$ 是完备的，$\mathrm{ran}(U)$ 在 $K$ 中是闭的。

结合 (ii) 和 (iii) 可得

$$K = \overline{\mathcal{D}} \subseteq \overline{\mathrm{ran}(U)} = \mathrm{ran}(U) \subseteq K,$$

因此 $\mathrm{ran}(U) = K$。所以 $U$ 是满射。

*(iv)* $U$ 是酉的。 我们已经证明 $U:\ K_{\min} \to K$ 是等距映射、单射且满射。因此， $U$是希尔伯特空间之间的双射等距映射，这意味着

$$U^{\dagger}U = I_{K_{\min}} \quad \text{and} \quad UU^{\dagger} = I_K,$$

因此 $U$ 是酉的。

证明完成。 □

循环极小性和普适性由命题3给出。

**命题 3** （循环极小性与普适性）。设$(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}_{j=1}^{n}, V_{\min})$ 是定义 *6* 中构造的 $\Phi \in \mathrm{Hom}(A_1, \ldots, A_n;\, B)$ 的最小 ***Stinespring*** 膨胀。则以下性质成立：

*(1)* 循环极小性： $K_{\min}$ 中的每个向量都由张量积表示作用于 $V_{\min}$的值域而生成，即

$$K_{\min} = \overline{\mathrm{span}}\big\{(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n))\, V_{\min} h \;\big|\; a_j \in A_j,\ h \in H\big\}.$$

*(2)* 普适性： $\Phi$ 的任意其他 ***Stinespring*** 膨胀$(K, \{\pi_j\}_{j=1}^{n}, V)$ 都可通过命题 *2* 中的部分等距算子 $U$，唯一地经由$(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}, V_{\min})$ 分解。

*(3)* 酉等价意义下的唯一性：如果另一膨胀是最小的，则交织算子 $U$ 是酉的。

命题*3*的证明。设 $(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}, V_{\min})$ 是定义 6 中构造的最小 Stinespring 膨胀。我们依次证明各项陈述。

**(1) 循环极小性**。根据定义 6(a) 中 $K_{\min}$ 的构造，我们有如下明确描述

$$K_{\min} = \overline{\mathrm{span}}\big\{(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n))\, V_{\min} h \;\big|\; a_j \in A_j,\ h \in H\big\}. \tag{6}$$

由于对所有 $h \in H$ 都有 $V_{\min} h \in K_{\min}$ ，且 $K_{\min}$ 在每个$\pi_{j,\ \min}$下不变，故每个形如

$$(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n))\, V_{\min} k, \qquad k \in K_{\min},$$

的向量都属于（6）中的闭线性张成。反过来，（6）中张成集合的每个向量显然都具有这种形式，其中 $k = V_{\min} h$。取闭包即可得到所述循环性条件。

**（2）普适性**。设 $(K,\ \{\pi_j\}_{j=1}^{n},\ V)$ 是 $\Phi$ 的另一种 Stinespring 膨胀。根据命题 2，存在唯一的部分等距算子

$$U : K_{\min} \longrightarrow K$$

使得，对所有 $a_j \in A_j$,

$$U\,(\pi_{1,\min}(a_1)\otimes\cdots\otimes\pi_{n,\min}(a_n)) = (\pi_1(a_1)\otimes\cdots\otimes\pi_n(a_n))\,U, \qquad U\,V_{\min} = V.$$

这些交织关系恰好表明 $(K,\ \{\pi_j\},\ V)$ 经由$U$分解为 $(K_{\min},\ \{\pi_{j,\min}\},\ V_{\min})$：

$$\begin{array}{ccccc} K_{\min} & \xrightarrow{\pi_{1,\min}\otimes\cdots\otimes\pi_{n,\min}} & K_{\min} & \xrightarrow{V_{\min}} & H \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_H} \\ K & \xrightarrow[\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_n]{} & K & \xrightarrow[V]{} & H \end{array}$$

$U$ 的唯一性直接由命题 2 得出。因此， $\Phi$的每个 Stinespring 膨胀都唯一地经由最小膨胀分解。

**(3) 酉等价意义下的唯一性**。 若 $(K,\ \{\pi_j\},\ V)$ 本身是极小的，则部分等距算子 $U$的值域稠密。由于 $U$ 已经是等距映射，因此 $U$ 是酉算子。因此， $\Phi$的任意两个极小 Stinespring 膨胀都酉等价。

证明至此完成。 □

要证明本节的主要定理 4，必须先用到引理 3。

**引理 3 (**扩张向量的有限维展开)。 设$(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}_{j=1}^{n}, V_{\min})$ 是 $\Phi \in \mathrm{Hom}(A_1, \ldots, A_n;\ B)$的极小膨胀，并假设所有希尔伯特对象 $A_1$、…、 $A_n$、 $B$ 都是有限维的。设 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{m}$ 是 $K_{\min}$的一组正交归一基。那么，对每个 $x_n \in A_n$，都有有限展开式

$$V_{\min}x_n = \sum_{\alpha=1}^{m} \langle e_\alpha, V_{\min}x_n\rangle_{K_{\min}}\, e_\alpha.$$

此外，对于每个 $\alpha$，系数泛函

$$L_\alpha(x_n) := \langle e_\alpha, V_{\min}x_n\rangle_{K_{\min}}$$

关于 $x_n$是线性的。

证明。 由于 $K_{\min}$ 是有限维的，每个向量都可以在某个正交归一基下展开。将此应用于 $V_{\min}x_n$，即可得到该公式。 $L_\alpha$ 的线性性源于 $V_{\min}$ 的线性性以及内积关于其第二个变量的线性性。

□

**定理 4** （有限维 Kraus／张量分解与伴随–扩张对应）。 设$\Phi$： $A_1 \times \cdots \times A_n \to B$是有限维希尔伯特空间或算子系统之间的完全正多重线性映射。

（*1*）有限 ***Kraus***／张量分解。 存在有限多个多线性的Kraus 多重态射$\{T_\alpha : A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \to B\}_{\alpha=1}^{m}$以及线性泛函 $\{L_\alpha :\ A_n \to \mathbb{C}\}_{\alpha=1}^{m}$，使得对于所有$x_j \in A_j$,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^{m} T_\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1})\, L_\alpha(x_n).$$

在有限维情形下，这一分解证明了 $\Phi$ 的完全正性。

*(2)* 伴随–扩张对应。 $n$-伴随 $\Phi^\dagger$ 可在极小的 ***Stine- spring*** 膨胀 $(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}_{j=1}^n, V_{\min})$上以规范方式实现。反过来，任何满足 *Z* 形相干性（见定义 *4*）的 $n$-伴随 $(\Phi^\dagger, \eta, \varepsilon)$，都唯一确定一个 ***Stinespring*** 膨胀（相差一个酉等价）。

相对于 $K_{\min}$ 的正交归一基 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$，其显式有限维形式为，

$$\Phi^\dagger(g, f_1, \dots, f_{n-1}) = \sum_{\alpha=1}^m g\big(T_\alpha(R(f_1), \dots, R(f_{n-1}))\big)\, L_\alpha^\dagger,$$

其中 $R:\ A_j^\dagger \to A_j$ 是黎斯同构，而 $L_\alpha^\dagger$ 是与 $L_\alpha$ 对偶的线性泛函。

定理 *4* 的证明。 设 $\Phi$ 如定理陈述所述，并设 $(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}_{j=1}^n, V_{\min})$ 是其最小 Stinespring 膨胀；该膨胀存在，且在酉等价意义下唯一。

**(1) 克劳斯/张量分解。**

由于 $K_{\min}$ 是有限维的，取 $K_{\min}$ 的一个正交归一基 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$。对每个 $\alpha$，定义：

- 一个多线性映射 $T_\alpha:\ A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \to B$，定义为

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_{n-1}) := V_{\min}^\dagger \big(\pi_{1,\min}(x_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n-1,\min}(x_{n-1})\big) e_\alpha.$$

- 一个线性泛函 $L_\alpha:\ A_n \to \mathbb{C}$ 通过

$$L_\alpha(x_n) := \langle e_\alpha, V_{\min} x_n \rangle.$$

现在利用基展开。对于任意 $x_j \in A_j$，使用 Stinespring 表示：

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, \dots, x_n) &= V_{\min}^\dagger \big(\pi_{1,\min}(x_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n-1,\min}(x_{n-1})\big) V_{\min} x_n \\ &= \sum_{\alpha=1}^m V_{\min}^\dagger \big(\pi_{1,\min}(x_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n-1,\min}(x_{n-1})\big) e_\alpha\, L_\alpha(x_n) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m T_\alpha(x_1, \dots, x_{n-1})\, L_\alpha(x_n).\end{aligned}$$

**证明完全正性。**表达式 $\Phi = \sum_{\alpha=1}^m T_\alpha \otimes L_\alpha$ 恰好是一个有限维 Kraus／张量分解。根据多线性映射完全正性的标准刻画，这种分解的存在等价于 Φ的完全正性。因此，该分解明确地证明了完全正性。

**(2) 伴随–扩张对应。**

*(a)* 从扩张到 $n$-伴随。给定极小扩张，定义 $\Phi^\dagger$ 如下：

$$\big[\Phi^\dagger(g, f_1, \dots, f_{n-1})\big](x_n) := g\big(\Phi(R(f_1), \dots, R(f_{n-1}), x_n)\big),$$

对所有 $g \in B^\dagger$、$f_j \in A_j^\dagger$ 和 $x_n \in A_n$，其中 $R:\ A_j^\dagger \to A_j$ 是黎斯同构。

定义单位 $\eta:\ A_n \to K_{\min}$ 通过 $\eta(x_n) := V_{\min} x_n$，以及余单位 $\varepsilon:\ K_{\min} \to B$ 通过 $\varepsilon(k) := V^\dagger$ 最小$k$。Z 形相干恒等式直接由 Stinespring 关系推出。

（*b*）从 $n$-伴随到膨胀。反之，给定一个满足 Z 形相干性的 $n$-伴随（$\Phi^\dagger$、$\eta$、$\varepsilon$），构造：

$$K_{\min} := \operatorname{span}\{\eta(x_n) \mid x_n \in A_n\}.$$

对于 $j = 1,\ldots,n-1$，定义 $\pi_{j,\min}\colon A_j \to \mathcal{B}(K_{\min})$ 如下：

$$\pi_{j,\min}(x_j)\eta(x_n) := \eta\big(\Phi^\dagger(\varepsilon^\dagger, f_{x_j}, \mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id})(x_n)\big),$$

其中 $f_{x_j} \in A_j^\dagger$ 是泛函 $f_{x_j}(y) = \langle x_j, y\rangle$。定义 $V_{\min}\colon B \to K_{\min}$ 为 $V_{\min}(b) := \varepsilon^\dagger(b)$。

Z形相干性确保这给出一个有效的 Stinespring 膨胀。

*(c)* 唯一性。根据极小性，任何由等价的 $n$-伴随算子产生的两个膨胀都酉等价，从而建立了双射对应关系。

*(d)* 显式有限维公式。关于基 $\{e_\alpha\}$ 并使用第 (1) 部分的分解：

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger(g, f_1, \ldots, f_{n-1})(x_n) &= g(\Phi(R(f_1), \ldots, R(f_{n-1}), x_n)) \\
&= g\left(\sum_{\alpha=1}^{m} T_\alpha(R(f_1), \ldots, R(f_{n-1}))L_\alpha(x_n)\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} g(T_\alpha(R(f_1), \ldots, R(f_{n-1})))L_\alpha(x_n) \\
&= \left[\sum_{\alpha=1}^{m} g(T_\alpha(R(f_1), \ldots, R(f_{n-1})))L_\alpha^\dagger\right](x_n).
\end{aligned}$$

因此，

$$\Phi^\dagger(g, f_1, \ldots, f_{n-1}) = \sum_{\alpha=1}^{m} g(T_\alpha(R(f_1), \ldots, R(f_{n-1})))L_\alpha^\dagger,$$

这就是所声称的显式公式。

证明至此完成。 □

**注 8**（与经典克劳斯分解的关系）。 我们使用克劳斯/张量分解 这一术语，以强调在多重线性情形下，克劳斯结构自然分解为：*(1)* 处理前 $n-1$ 个输入的多重线性映射$T_\alpha$，以及 *(2)* 作用于最后一个输入的线性泛函 $L_\alpha$。这一分解体现了膨胀空间 $K_{\min} = K_1 \otimes \cdots \otimes K_n$ 的张量积结构。

推论 1 确立了多重线性完全正映射的伴随-膨胀等价。

**推论 1**（多重线性完全正映射的伴随–膨胀等价）。 设 $\Phi \in \mathrm{Hom}(A_1, \ldots, A_n; B)$ 是有限维希尔伯特对象之间的 †-多范畴 (**HilbMult** †)中的一个完全正 $n$ 元多态射。那么，以下数据之间存在典范双射对应：

*(a)* 多重线性完全正映射 $\Phi$，以及

*(b)* 一个 *Z*-相容的 $n$-伴随$(\Phi^\dagger, \eta, \varepsilon)$，它由根据定义 *6* 与 $\Phi$ 相关联的最小 *Stinespring* 膨胀$(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}_{j=1}^n, V_{\min})$实现。

更准确地说：

• $n$-伴随 $\Phi^\dagger$ 在极小扩张 $(K_{\text{极小}}\ \{\pi_{j,\text{极小}}\}, V_{\text{极小}})$ 上唯一实现，并满足带有单位 $\eta$ 和余单位 $\varepsilon$的 *Z*形相干关系。

• 反过来，任何满足 *Z*形相干关系的 $n$-伴随$(\Phi^\dagger, \eta, \varepsilon)$ 都唯一确定一个 $\Phi$ 的 ***Stinespring*** 型膨胀，该膨胀是极小的，且在酉等价意义下唯一。

因此，存在一个典范对应关系

| 多重线性完全正　　多态射 $\Phi$ $\longleftrightarrow$ 与 $Z$ 相容的 $n$-伴随算子，可在极小扩张上实现 |
|---|

它将　　经典 ***Stinespring–Kraus*** 等价扩展到了多重线性和张量值情形。

证明。 我们分别建立两个方向上的对应关系，并验证这些构造在酉等价意义下互为逆运算。

**(1) 从多重线性 CP 映射到 Z-兼容的 $n$-伴随。**

令 $\Phi$ 为完全正多态射。根据定理 4 和定义 6，存在一个最小 Stinespring 膨胀

$$(K_{\min}, \{\pi_{j,\min}\}_{j=1}^n, V_{\min})$$

使得

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = V_{\min}^\dagger\big(\pi_{1,\min}(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n,\min}(a_n)\big) V_{\min}.$$

构造性定义以典范方式给出：

• 一个单位 $\eta$： $\mathrm{id}_{A_n} \Rightarrow \Phi^\dagger \circ (\Phi、\ \mathrm{id}_{A_1}^\dagger、\ \ldots\ldots、\ \mathrm{id}_{A_{n-1}}^\dagger)$，其像张成 $K_{\min}$，以及

• 一个余单位 $\varepsilon$： $\Phi \circ (\mathrm{id}_{A_1}、\ \ldots\ldots、\ \mathrm{id}_{A_{n-1}}、\ \Phi^\dagger) \Rightarrow \mathrm{id}_B$，具体通过压缩 $V_{\min}$ 实现。

定义 $n$-伴随 $\Phi^\dagger$： $B^\dagger \times A_1^\dagger \times \cdots \times A_{n-1}^\dagger \to A_n^\dagger$ 如下

$$\big[\Phi^\dagger(g, f_1, \ldots, f_{n-1})\big](x_n) := g\big(\Phi(R(f_1), \ldots, R(f_{n-1}), x_n)\big),$$

其中 $R(\cdot)$ 表示 Riesz 对应。等价地， $\Phi^\dagger$ 由伴随关系刻画：

$$g\big(\Phi(a_1, \ldots, a_n)\big) = \big[\Phi^\dagger(g, f_1, \ldots, f_{n-1})\big](a_n),$$

其中 $a_j$ 与 $f_j$配对。

根据构造，单位 $\eta$和余单位 $\varepsilon$ 满足Z形相干关系。这些恒等态射归结为标准的斯廷斯普林关系，表明 $V_{\min}$ 是等距映射，并且$\pi_{j,\ \min}$ 彼此相容 $*$-表示。因此，$(\Phi^\dagger,\ \eta,\ \varepsilon)$ 是在极小扩张上实现的、与 Z 相容的 $n$-伴随。

**(2) 从与 Z 相容的 $n$-伴随到极小扩张。**

反之，$(\eta, \varepsilon)$ 是满足 Z形相干关系的 $n$-伴随。定义一个希尔伯特空间

$$K := \overline{\mathrm{span}}\{\eta(x_n) \mid x_n \in A_n\},$$

其内积通过 Riesz 对应诱导得到。定义表示为

$$\big(\pi_1(a_1) \otimes \cdots \otimes \pi_{n-1}(a_{n-1})\big)\eta(x_n) := \eta\big(\Phi^\dagger(\cdot, f_{a_1}, \ldots, f_{a_{n-1}})(x_n)\big),$$

并定义一个等距映射

$$V(\eta(x_n)) := \varepsilon(\eta(x_n)) \in B.$$

Z 形相干恒等式确保这些赋值定义良好，并可通过线性延拓，从而得到一个 $*$-表示和一个等距映射。因此，$(K,\ \{\pi_j\},\ V)$ 是一个完全正多态射的 Stinespring 型膨胀，按构造它与 $\Phi$ 一致。这恰好重现了定义 6 的构造性方向。

根据命题 2，所得的膨胀是极小的，且在酉等价意义下唯一。

**(3) 互为逆映射**。

从 $\Phi$ 出发并应用 (1) 中的构造，可得到极小膨胀 $(K_{\min},\ \{\pi_{j,\min}\},\ V_{\min})$，以及一个与 Z 兼容的 $n$-伴随算子。将 (2) 中的构造应用于这个 $n$-伴随算子，可恢复一个与原极小膨胀酉等价的膨胀。反过来，从一个与 Z 兼容的 $n$-伴随算子出发，先应用 (2) 再应用 (1)，即可恢复相同的伴随数据。

因此，多线性完全正多态射与在极小 Stinespring 膨胀上实现的、与 Z 兼容的 $n$-伴随算子之间存在典范双射对应，且在酉等价意义下唯一。

□

# 4 协同单子与单子性定理

本节将介绍若干关于协同单子和完全正迹保持（CPTP）范畴的定义，然后通过定理 5 建立量子过程的幺半群表示。

## 4.1 核心框架

在本小节中，我们将介绍陈述定理 5 所需的基本定义和构造。其中包括量子过程的范畴、由幺半群构造的量子电路，以及协同单子 $\mathbf{T_S}$。三者共同为可复合的量子操作提供范畴框架。

**定义7**（量子交互运算子 **S**）。 量子交互运算子 **S** 是范畴 **集合** 中的一个对称幺半群，其运算是表示具有多个输入和一个输出的量子过程的形式符号。

***1.*** 核心结构

对于每个 $n \geq 0$, $S$（$n$），它都是一个集合（可能是无限集），其中包含元数为 $n$的形式运算符号 。这些符号满足对称幺半群的标准数据和公理：

- 运算子复合：对于 $f \in S$（$m$） 和 $g_1 \in S$（$n_1$） $\ldots, g_m \in S$（$n_m$），存在一个复合符号

$$\gamma(f; g_1, \ldots, g_m) \in S(n_1 + \cdots + n_m)$$

  满足通常的结合律。

- 单位元：一个特殊符号 $\mathrm{id} \in S(1)$，作为复合的单位。

- 对称作用：对于每个 $\sigma \in \Sigma_n$，一个映射 $S(n) \to S(n)$，记作 $f \mapsto \sigma \cdot f$，并在歌剧集的意义下与复合相容。

***2.*** 生成符号（示意）

尽管 $S(n)$ 可以是任意满足上述条件的集合，但在量子信息领域，人们常考虑由如下符号生成的幺半群：

- 零元 ***(***$S(0)$***)***：制备$\psi$，制备$\rho$ ***(***态制备***)***。

• 一元 (*$S(1)$*)：标识，酉算子 (*酉*)，$\mathsf{M}_i$ (*测量分支*)，噪声(*退相干*)。

• 二元（$S$（2））：受控非门、交换门、偏迹$_B$（偏迹）、贝尔态制备（贝尔态制备）。

• $n$-元（$n \geq 3$）：托福利门、量子傅里叶变换$_n$、多方纠缠（多方纠缠）。

因此，该幺半群是由这些生成元生成的自由对称幺半群；在此阶段不对复合态射之间施加任何方程。

***3.*** 语义解释
一个由**S**构成的量子解释包括：

• 一个有限维希尔伯特空间 $H$，

• 对于每个 $f \in S(n)$，一个完全正（不一定保迹）的线性映射

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle : \mathcal{B}(H)^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{B}(H),$$

• 满足：

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \gamma(f; g_1, \ldots, g_m) \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle f \rangle\!\rangle \circ \big( \langle\!\langle g_1 \rangle\!\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\!\langle g_m \rangle\!\rangle \big), \\ \langle\!\langle \mathrm{id} \rangle\!\rangle &= \mathrm{id}_{\mathcal{B}(H)}, \\ \langle\!\langle \sigma \cdot f \rangle\!\rangle (X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) &= \langle\!\langle f \rangle\!\rangle (X_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\sigma^{-1}(n)}). \end{aligned}$$

迹保持、酉等价和电路恒等式是特定解释的性质，而非符号本身的性质。

***4.*** 单子性定理中的作用
这个句法算子**S** 为标准的幺半群单子构造提供输入。相应的协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 定义在范畴$\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 上，如下所示：

$$T_{\mathbf{S}}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[S(n)] \otimes_{\Sigma_n} V^{\otimes n},$$

其中 $\mathbb{C}[S(n)]$ 是以 $S(n)$为基的自由复向量空间，而 $\otimes_{\Sigma_n}$ 表示关于对角对称群作用的余不变元。

$T_{\mathbf{S}}$ 的代数对应于配备了对**S**中所有相互作用模板的一致实现的系统。给定一个解释 $\mathcal{I} : \mathbf{S} \to$ **完全正迹保持**，我们便可通过以下方式在 $\mathcal{B}(H)$ 上构造一个 $T_{\mathbf{S}}$-代数结构：

$$\alpha_{\mathcal{I}}([s; X_1, \ldots, X_n]) = \mathcal{I}(s)(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n).$$

单子性定理由此确立了量子过程范畴与一个适当的 $T_{\mathbf{S}}$-代数范畴之间的等价关系。

**注9 (**协同算子S的句法形式与语义形式)。 本文中使用符号**S**来表示两个密切相关但概念上不同的含义。

(i) 句法算子。量子交互运算子**S** （定义7）是集合**Set** 上的对称幺半群，其元素是表示量子交互模板的形式符号。在这一层次上，**S** 纯属句法结构：它仅编码元数、置换和运算子复合，除了幺半群公理之外不施加任何方程。完全正性、迹保持或电路恒等式等语义性质，只有在选定具体解释后才会出现。

(ii)语义协同算子。第*2.2*节引入的协同算子通过希尔伯特空间类型标注、反馈、控制和明确的相干关系，丰富了这一句法结构。特别是，它纳入了解析适定性条件，并允许在**HilbMult**中作对称幺半表示，从而为量子过程提供组合语义。

关系。 句法算子**S** 是幺半群单子构造的自由表示级输入，由此得到协同单子 $T_{\mathbf{S}}$。语义协同歌剧可以看作这一自由幺半群的结构化实现——等价地说，是它的语义商与富化；该实现通过施加相干关系并固定一类可容许表示而获得。从这个意义上说，语义幺半群**S**是句法量子交互运算子的特化形式，旨在支持单子性和 *Stinespring* 型构造。

**定义8** （范畴 $\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}$ 和 $\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}}$）。 我们定义两个密切相关的对称幺半范畴，其对象是有限维 $C^*$代数，态射是完全正映射；它们充当量子过程解释的语义目标范畴。

## 1. $\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}$ 范畴

范畴$\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}$ 具有：

- 对象：有限维 $C^*$代数 $A$、$B$、$C$，.....根据有限维$C^*$代数的结构定理，每个这样的代数都与有限个全矩阵代数的直和 $*$同构：

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

- 态射：对于对象 $A$ 和 $B$，集合 $\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}(A, B)$ 由完全正线性映射构成 $\Phi:\ A \to B$。

  $A$ 线性映射 $\Phi:\ A \to B$ 称为完全正映射，当且仅当对每个 $n \geq 1$，其放大映射

$$\Phi \otimes \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{C})} : A \otimes M_n(\mathbb{C}) \to B \otimes M_n(\mathbb{C})$$

  将正元素映射为正元素。

- 复合：线性映射的通常复合。完全正映射的复合仍为完全正映射。

- 恒等态射：$\mathrm{id}_A:\ A \to A$，即恒等线性映射。
- 幺半结构：空间（极小的） $C^*$张量积 $\otimes$，其单位为 $\mathbb{C}$。对于 $\Phi:\ A \to A'$ 和$\Psi:\ B \to B'$，定义

$$(\Phi \otimes \Psi)(a \otimes b) = \Phi(a) \otimes \Psi(b)$$

  线性延拓。

## 2. $\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}}$范畴

范畴$\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}}$ 的对象和幺半结构与$\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}$相同，但态射仅限于保迹完全正映射：

- 态射：$\Phi:\ A \to B$ 必须同时满足以下条件：

*1.* 完全正性（如上所述）

*2.* 迹保持：对于所有 $a \in A$,

$$\mathrm{tr}_B(\Phi(a)) = \mathrm{tr}_A(a)$$

其中 $\mathrm{tr}_A$ 和 $\mathrm{tr}_B$ 表示典范归一化迹。对于 $A \cong \bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$，迹为：

$$\mathrm{tr}_A\left(\bigoplus_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N}\mathrm{tr}(a_i), \quad N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

其中 tr是每个直和项上的通常矩阵迹。

• 复合与恒等态射：与 $\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}$ 中一样，但请注意，当各组成映射保持迹时，复合态射和恒等态射也会自动保持迹。

## 3. 各范畴之间的关系

存在一个忠实对称幺半函子：

$$I : \mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}} \hookrightarrow \mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}$$

它在对象上是单位元，并将每个 *CPTP*映射视为完全正映射。这个包含是满的，但在态射上并非本质满射。

## 4. 与向量空间的联系

存在一个遗忘函子

$$U : \mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$$

它将每个 $C^*$-代数 $A$ 映射为其底层向量空间，并将每个完全正映射映射为其底层线性映射。这个函子是忠实且对称幺半的。

协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 定义在 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 上，因此我们可以通过$U$在这些范畴之间传递结构。具体来说：

• 一个解释 $\mathcal{I} : \mathbf{S} \to$ **完全正迹保持** 对于每个 $A \in \mathbf{FdCStar}$完全正迹保持，都会在$U(A)$上给出一个 $T\mathbf{s}$-代数结构。

•代数映射 $\alpha_{\mathcal{I}}$: $T\mathbf{s}(U(A)) \to U(A)$ 实际上是一个完全正映射 $T\mathbf{s}(U(A)) \to A$，前提是我们将 $C^*$-代数结构赋予其陪域。

## 5. 在单子性框架中的作用

这些范畴充当：

• 语义目标：量子过程的物理范畴是 $\mathbf{FdCStar}$完全正迹保持。

• 代数基础：尽管 $T\mathbf{s}$ 定义在 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 上，但由解释导出的代数$\mathcal{I}$： $\mathbf{S} \to$ **完全正迹保持** 通过遗忘函子 $U$ 自然地存在于 $\mathbf{FdCStar}$ 完全正迹保持 中。

• 等价目标：单子性定理将建立一个合适的 $T\mathbf{s}$-代数范畴（即由解释产生的代数）与 $\mathbf{FdCStar}$完全正迹保持 之间的等价。

Ac根据本节给出的这些定义，我们得到以下命题 4 .

**命题 4**（希尔伯特空间与 $C^*$-代数量子信道表述的等价性）。 令$\mathbf{CP}_{\mathrm{Hilb}}$ 表示这样一个范畴：其对象为有限维希尔伯特空间，其态射$H \to K$ 为完全正线性映射 $\Phi:\ \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$。令 $\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}}$ 表示其保迹态射的全子范畴。

令 $\mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}{}_{\mathrm{CP}}$ 表示$\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CP}}$ （定义8）的全子范畴，其对象为单- 代数（即全矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$），态射为完全正线性映射。令 $\mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}{}_{\mathrm{CPTP}}$ 表示相应的保迹子范畴。

那么，强对称幺半范畴之间存在等价关系

$$\mathbf{CP}_{\mathrm{Hilb}} \ \simeq\ \mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}_{\mathrm{CP}}, \qquad \mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}} \ \simeq\ \mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}_{\mathrm{CPTP}}.$$

证明。 我们证明完全正映射情形下的等价性；保迹情形可通过限制得到。

**步骤 1：函子的定义。**
定义一个函子

$$F : \mathbf{CP}_{\mathrm{Hilb}} \longrightarrow \mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}_{\mathrm{CP}}$$

by

- 在对象上：$F(H) := \mathcal{B}(H)$;
- on morphisms: for $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, set $F(\Phi) := \Phi$.

由于对于有限维的 $H$， $\mathcal{B}(H) \cong M_{\dim H}(\mathbb{C})$， $F$确实落在 $\mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}{}_{\mathrm{CP}}$ 中。
反过来，定义一个函子

$$G : \mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}_{\mathrm{CP}} \longrightarrow \mathbf{CP}_{\mathrm{Hilb}}$$

如下。对于每个对象 $A \cong M_n(\mathbb{C})$，选取一个希尔伯特空间 $H_A \cong \mathbb{C}^n$，并固定一个 $*$-同构

$$\iota_A : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(H_A).$$

（任意两个这样的选取都酉等价。）对于一个态射 $\Psi:\ A \to B$，定义

$$G(\Psi) := \iota_B \circ \Psi \circ \iota_A^{-1} : \mathcal{B}(H_A) \to \mathcal{B}(H_B).$$

由于 $\iota_A$ 和 $\iota_B$ 是 $*$-同构，且 $\Psi$ 是完全正的，因此 $G(\Psi)$是完全正的。

**步骤 2：** $F \circ G \cong$ 恒等。
对于每个对象 $A \in \mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}{}_{\mathrm{CP}}$，

$$(F \circ G)(A) = \mathcal{B}(H_A),$$

而选定的 $*$-同构 $\iota_A:\ A \to \mathcal{B}(H_A)$ 给出了一个自然同构

$$\iota : \mathrm{id}_{\mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}_{\mathrm{CP}}} \ \Rightarrow\ F \circ G.$$

自然性由以下性质得出：对于任意 $\Psi:\ A \to B$,

$$\iota_B \circ \Psi = (F \circ G)(\Psi) \circ \iota_A.$$

**第 3 步：** $G \circ F \cong$ 标识符。

对于任意有限维希尔伯特空间 $H$，

$$(G \circ F)(H) = H_{\mathcal{B}(H)}.$$

我们可以选择 $H_{\mathcal{B}(H)} = H$ 和 $\iota_{\mathcal{B}(H)} = \mathrm{id}$，因为 $\mathcal{B}(H)$ 已经是 $H$上的算子代数。采用这一选择，对于任意态射 $\Phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$，我们有

$$(G \circ F)(\Phi) = \Phi.$$

因此我们得到等式 $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbf{CP}_{\mathrm{Hilb}}}$，它显然是一个自然同构。

**第 4 步：幺半结构。**

$F$和 $G$ 都是强对称幺半函子。

- 对于 $F$，幺半结构由规范的 $*$-同构给出

$$\phi_{H,K} : \mathcal{B}(H \otimes K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(K), \qquad \phi_0 : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C},$$

  它们关于 $H$ 和 $K$是自然的。

- 对于 $G$，我们通过沿同构 $\iota_A$ 传递来定义幺半结构映射。对于 $A \cong M_m(\mathbb{C})$ 和$B \cong M_n(\mathbb{C})$，取 $H_A \cong \mathbb{C}^m$、$H_B \cong \mathbb{C}^n$，并定义

$$\psi_{A,B} : H_A \otimes H_B \xrightarrow{\sim} H_{A \otimes B}$$

  通过同构 $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{mn}$。然后，$\iota_{A\otimes B} \circ (\iota_A^{-1} \otimes \iota_B^{-1}) \circ \phi^{-1}_{H_A,\, H_B}$给出了所需的幺半相干性。

相干公理成立，因为涉及的所有同构在酉等价意义下都是典范的。

**步骤 5：保迹情形。**

限制到保迹态射后，可得到一个等价

$$\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}} \;\simeq\; \mathbf{FdCStar}^{\mathrm{simp}}_{\mathrm{CPTP}}.$$

在标识 $\iota_A$ 下，标准希尔伯特空间迹 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 对应于 $M_n(\mathbb{C})$ 上由 $\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{matrix}}(\cdot)$ 给出的典范归一化迹。由于两个函子都保持这些迹，因此迹保持性质也得到保留。

□

**注释 10**（对框架的重要性）。 这种等价关系对我们的框架至关重要，因为它表明我们可以在以下两种视角之间灵活切换：

*1.* 希尔伯特空间视角：将量子系统视为希尔伯特空间 $H$，将运算视为完全正映射 $\mathcal{B}$（$H$）$\to\mathcal{B}$（$K$）。

*2.* $C^*$-代数视角：将量子系统视为矩阵代数 $M_n$（$\mathbb{C}$），将运算视为代数之间的完全正映射。

对于范畴和代数构造（歌剧集、单子、代数），我们更倾向于采用 $C^*$-代数视角，因为：

- 态射直接作用于代数，而非通过 $\mathcal{B}$（$\cdot$）构造。
- $C^*$-代数的张量积比希尔伯特空间的张量积之后再进行 $\mathcal{B}$（$\cdot$）更适合幺半范畴论。

• 一般的有限维 $C^*$-代数（矩阵代数的直和）可以对经典信息和超选择扇区进行建模，而单代数情形（命题 *4*）则涵盖纯量子系统。

因此，尽管我们可以直观地用希尔伯特空间来思考，但所有形式化定义和证明都采用 $C^*$-代数表述。

**注 11**（关于记号 $\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}}$ 与**CPTP**）。 我们区分完全正保迹映射范畴的两种等价但概念上不同的表述。

• $\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}}$ 表示这样一个范畴：其对象是有限维希尔伯特空间 $H$，其态射 $H \to K$ 是完全正、保迹的映射 $\Phi:\ \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$。

• **CPTP** 表示范畴 $\mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}}$，其对象是有限维 $C^*$-代数 $A, B, \ldots$，其态射是完全正、保迹的映射 $A \to B$。

这两个范畴通过赋值 $H \mapsto \mathcal{B}(H)$ 作为对称幺半群范畴是等价的，其中态射在完全正映射上的作用相同。然而，$C^*$-代数表述**CPTP** 对于运算子、单子和代数构造具有正确的类型，因为完全正映射自然地作用于算子代数，而不是直接作用于希尔伯特空间。因此，本文中的所有单子和运算子语义都在 **CPTP**中表述，而$\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}}$ 仅用作非正式的或表述层面的简写。

**定义 9**（范畴 **S-电路** 量子电路）。 设 **S** 为一个量子交互运算子（定义 *7*）。范畴 **S-电路** 是由 S 生成的自由对称幺半范畴。

***1.*** 对象。 对象为自然数 $n \in \mathbb{N}$，表示 $n$ 并行线。幺半积：$n \otimes m := n + m$，单位：$0$。

***2.*** 生成态射。 对于每个 $f \in S(n)$，有一个生成态射 $f:\ n \to 1$。此外还有：恒等态射 $\mathrm{id}_n$：$n \to n$，对称态射 $\sigma:\ n \to n$*(*$\sigma \in \Sigma_n$*)*。

***3.*** 一般态射。 所有态射均由生成元通过以下方式得到：

• 顺序复合：$n \xrightarrow{\alpha} m \xrightarrow{\beta} k$ 得到 $\beta \circ \alpha$

• 并行复合：$\alpha \otimes \beta:\ n + n' \to m + m'$

• 对称性：线缆置换

仅须满足对称幺半范畴公理。

***4.*** 语义解释 给定一个语义解释 $\mathcal{I}:$ **S** $\to$ **完全正迹保持**（为每个 $f \in S(n)$ 完全正映射 $\mathcal{I}(f)$：$\mathcal{B}(H)^{\otimes n} \to \mathcal{B}(H)$），通过 $\mathcal{I}$ 自由性将其扩展为一个强对称幺半函子

$$[\![\cdot]\!]_{\mathcal{I}} : \mathbf{S\text{-}Circuit} \to \mathbf{CPTP}$$

借助自由性：$[\![n]\!]_{\mathcal{I}} = \mathcal{B}(H)^{\otimes n}$、$[\![f]\!]_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}(f)$，保持复合和张量积。

***5.*** 关于多个输出的说明。 虽然**S**是单输出的，但对于 $m \neq 1$ 的态射 $n \to m$ 通过以下方式构造：

$$n \to m \quad as \quad n \xrightarrow{f_1 \otimes \cdots \otimes f_m} m$$

其中每个 $f_i:\ n_i \to 1$ 满足 $\sum_i n_i = n$。对于 $m = 0$，使用唯一的态射 $n \to 0$ *(*空图*)*。

**定义10 (**协同单子 $T_{\mathbf{S}}$)。 设 **S** 是 **集合**上的一个（单输出）对称幺半群。令 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 表示复向量空间与线性映射所构成的范畴。

与协同单子相关联的**S** 是自函子

$$T_{\mathbf{S}} : \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$$

定义如下。

***1.*** 对象部分。

对于每个向量空间 $V$，定义

$$T_{\mathbf{S}}(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}[S(n)] \otimes_{\Sigma_n} V^{\otimes n},$$

其中:

- $\mathbb{C}[S(n)]$ 是集合 $S(n)$上的自由复向量空间,
- $V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$（$n$ 个因子），
- $\Sigma_n$ 通过 $\sigma \cdot (s \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (\sigma \cdot s) \otimes v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$在 $\mathbb{C}[S(n)] \otimes V^{\otimes n}$ 上对角作用,
- $\otimes_{\Sigma_n}$ 表示关于此作用的向量空间余不变量,
- $V^{\otimes 0} := \mathbb{C}$。

因此， $T_{\mathbf{S}}$（$V$）是由表达式 $[s;\ v_1, \ldots, v_n]$ 的形式线性组合构成的向量空间，这些表达式表示将 $n$ 元运算 $s \in S$ （$n$）应用于输入 $v_1, \ldots, v_n \in V$，并对置换对称性取模。

***2.*** 态射部分。

对于线性映射 $f:\ V \to W$，定义

$$T_{\mathbf{S}}(f) : T_{\mathbf{S}}(V) \longrightarrow T_{\mathbf{S}}(W)$$

在生成元上的作用为

$$T_{\mathbf{S}}(f)\big([s; v_1, \ldots, v_n]\big) := [s; f(v_1), \ldots, f(v_n)],$$

并将其线性扩张。等价地,

$$T_{\mathbf{S}}(f) = \bigoplus_{n\geq 0} \left(\mathrm{id}_{\mathbb{C}[S(n)]} \otimes_{\Sigma_n} f^{\otimes n}\right),$$

其中 $\mathrm{id}^{\mathbb{C}[S(n)]}$ 是自由向量空间 $\mathbb{C}[S(n)]$上的恒等映射。

***3.*** 单子单位。

单位 $\eta_V$:\ $V \to T_{\mathbf{S}}(V)$ 由幺半群单位元 $\mathbb{1} \in S(1)$诱导:

$$\eta_V(v) := [\mathbb{1}; v] \in \mathbb{C}[S(1)] \otimes_{\Sigma_1} V \subset T_{\mathbf{S}}(V).$$

***4.*** 单子乘法。

乘法

$$\mu_V : T_{\mathbf{S}}(T_{\mathbf{S}}(V)) \longrightarrow T_{\mathbf{S}}(V)$$

由运算子复合诱导。在形如以下形式的生成元上

$$[s; [t_1; \vec{v}_1], \ldots, [t_k; \vec{v}_k]],$$

其中 $s \in S(k)$、 $t_i \in S(n_i)$ 和$\vec{v}_i \in V^{\otimes n_i}$定义为

$$\mu_V\big([s;[t_1;\vec{v}_1],\ldots,[t_k;\vec{v}_k]]\big) := [\gamma(s;t_1,\ldots,t_k);\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k],$$

其中 $\gamma(s;\ t_1、\ldots\ldots、\ t_k)\ \in S(n_1+\cdots+n_k)$ 是算子复合。该映射线性延拓到$T_{\mathbf{S}}(T_{\mathbf{S}}(V)$ 的全部元素上。

***5.*** 单子律。

$\mu$ 和 $\eta$ 的结合律与幺元性直接由幺半群 $\mathbf{S}$ 的结合律和单位公理得出。因此，$(T_{\mathbf{S}},\eta,\mu)$ 是 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 上的一个单子。

***6.*** 量子过程的解释。

为应用于量子信息，我们考虑将 $T_{\mathbf{S}}$ 限制到$\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 的全子范畴，其对象形如 $\mathcal{B}(H)$，其中 $H$ 是有限维希尔伯特空间。给定一个量子解释

$$\mathcal{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{CPTP},$$

在 $\mathcal{B}(H)$上诱导的 $\mathbf{T_S}$-代数结构是线性映射

$$\alpha_{\mathcal{I}} : T_{\mathbf{S}}(\mathcal{B}(H)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

在生成元上定义为

$$\alpha_{\mathcal{I}}\big([s;X_1,\ldots,X_n]\big) := \mathcal{I}(s)(X_1\otimes\cdots\otimes X_n).$$

这使得 $(\mathcal{B}(H)\ \alpha_{\mathcal{I}})$ 成为 $\mathbf{T_S}$-代数，且当 $\mathcal{I}(s)$ 为完全正时， $\alpha_{\mathcal{I}}$ 继承与**完全正迹保持** 结构相容的正性。

**注释12** （协同单子的直观解释）。 定义*10*中构造的协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 概括了可复合量子相互作用的形式代数结构。让我们来阐释其概念含义。

幺半群 $\mathbf{S}$ 由量子过程的原始相互作用模板 构成：基本量子门（受控非门、H）、测量（$\mathsf{M}_i$）、态制备（$\mathsf{prep}_\psi$）、噪声通道等。每个符号 $s \in S(n)$ 都有指定的元数 $n$ （输入数量），并可依据幺半群的复合规则与其他符号复合。

单子 $T_{\mathbf{S}}$ 自由生成这些相互作用作用于向量空间 $V$元素上的所有可能形式复合。具体而言，一个元素

$$[s;v_1,\ldots,v_n] \in T_{\mathbf{S}}(V)$$

表示 *t*　　将相互作用形式化地应用于输入 $v_1,\ldots,v_n \in V$。直和

$$T_{\mathbf{S}}(V) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}[S(n)] \otimes_{\Sigma_n} V^{\otimes n}$$

收集所有此类形式表达式，并对余不变元 $\otimes_{\Sigma_n}$ 所施加的置换对称性取商。*T*

两个复合 $^{l}$基本视角　　$i^{\text{观点}}_{c}$ *larify the role of* $T_{\mathbf{S}}$*:*

*1.* 句法视角： $T_{\mathbf{S}}$ 是一个单子，其 *Kleisli* 范畴等价于由 **S-电路** *[6]*生成的自由对称幺半范畴。虽然 **S-电路**描述布线图（弦图），$T_{\mathbf{S}}$ 则以代数方式将相同的复合描述为形式线性组合。

*2.* 代数视角： $T_{\mathbf{S}}$ 是幺半群 $\mathbf{S}$的自由代数单子 。向量空间 $V$ 上的 *A* $T_{\mathbf{S}}$-代数结构，恰好就是幺半群 $\mathbf{S}$ 在 $V$上的作用，也就是说，如何将每个形式表达式$[s;\ v_1、\ldots\ldots、\ v_n]$ 解释为 $V$中的一个实际元素。

单子结构体现了这种复合代数：

• 单位 $\eta_V$： $V \to T\mathbf{s}(V)$ 将普通元素 $v \in V$ 嵌入为平凡交互 $[\mathbb{1};\ v]$，其中$\mathbb{1} \in S(1)$ 是多运算恒等元（不执行任何操作）。

• 乘法 $\mu_V$： $T\mathbf{s}(T\mathbf{s}(V)) \to T\mathbf{s}(V)$ 将嵌套交互展平。例如，

$$\mu_V\big([s;[t_1;\vec{v}_1],[t_2;\vec{v}_2]]\big) = [\gamma(s;t_1,t_2);\vec{v}_1,\vec{v}_2],$$

其中 $\gamma(s;\ t_1,t_2)$ 是算子复合。这对应于将 $t_1$ 和 $t_2$的输出代入 $s$作为输入。

关键区别：语法与语义。 协同单子本身纯粹是语法性的：它描述交互如何在形式上组合，而非它们在物理上做什么。物理意义只有通过解释函子才会引入

$$\mathcal{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{CPTP},$$

它为每个 $s \in S(n)$ 指定一个具体的完全正映射 $\mathcal{I}(s):\ \mathcal{B}(H)^{\otimes n} \to \mathcal{B}(H)$。随后，这种解释唯一地扩展为一个 $T_{\mathbf{S}}$-代数结构

$$\alpha_{\mathcal{I}} : T_{\mathbf{S}}(\mathcal{B}(H)) \longrightarrow \mathcal{B}(H),$$

将形式复合求值为实际的量子过程。

因此， $T_{\mathbf{S}}$ 是量子交互模式的通用句法容器。单子性定理（定理 *5*）将表明，量子过程范畴**完全正迹保持**等价于针对恰当选取的**S**所构成的 $T_{\mathbf{S}}$-代数范畴，从而为可组合的量子操作建立精确的代数刻画。

## 4.2 单子性对应

本节将建立量子过程与代数结构之间的核心等价关系。我们定义每个 CPTP 映射如何诱导一个$\mathbf{T_S}$-代数结构（定义 11），反过来，也说明每个此类代数如何导出一个 CPTP 映射（定义 12）。最后，定义 13 表明，这种对应关系可扩展至态射，从而完成范畴等价**完全正迹保持** $\cong$ $\mathbf{T_S}$**-代数**，这正是单子性定理的核心。

**定义 11**（$\mathbf{T_S}$-代数：由算子化解释诱导）。 设**S** 是一个量子交互运算子，并且设

$$\mathcal{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{CPTP}$$

是一个对称幺半函子，为**S**提供语义解释。对于 $A \in \mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}}$，我们将 $A$ 上的$\mathbf{T_S}$-代数结构定义为如下线性映射

$$\alpha_{\mathcal{I}} : T_{\mathbf{S}}(A) \longrightarrow A$$

其中 $T_{\mathbf{S}}(A)$ 的计算方式是将 $A$ 视为 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 中的一个对象（暂时忽略 $C^*$-代数结构）。

映射 $\alpha_{\mathcal{I}}$ 在生成元上的定义为

$$\alpha_{\mathcal{I}}\big([s;a_1,\ldots,a_n]\big) := \mathcal{I}(s)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n), \qquad s \in S(n),\ a_i \in A,$$

并线性地扩展到所有的 $T_{\mathbf{S}}(A)$。这里 $[s;\ a_1,\ldots,a_n]$ 表示 $\mathbb{C}[S(n)] \otimes_\Sigma$ 中的等价类 $_n$ $A^{\otimes n}$.

性质：

*(a)* 线性： $\alpha_{\mathcal{I}}$ 根据构造是线性的。

*(b)* 完全正性： 由于每个 $\mathcal{I}(s)$ 都是完全正的，而 $\alpha_{\mathcal{I}}$ 定义为这类求值的线性组合，因此 $\alpha_{\mathcal{I}}$ 是从向量空间 $T_{\mathbf{S}}(A)$ 到 $C^*$-代数$A$的完全正映射。

*(c)* 迹保持： 如果每个 $\mathcal{I}(s)$ 都是保迹的，那么将 $\alpha_{\mathcal{I}}$ 限制在适当的子空间上时，它会保持形式表达式上的典范迹。

*(d)* 单位律： 单子单位 $\eta_A : A \to T_{\mathbf{S}}(A)$ 满足

$$\alpha_{\mathcal{I}} \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$$

因为 $\mathcal{I}$ 将幺半群单位元 $\mathbb{1} \in S(1)$ 映射为 $A$上的恒等映射，而 $\eta_A(a) = [\mathbb{1}; a]$。

*(e)* 乘法律： 对于单子乘法 $\mu_A : T_{\mathbf{S}}(T_{\mathbf{S}}(A)) \to T_{\mathbf{S}}(A)$，我们有

$$\alpha_{\mathcal{I}} \circ \mu_A = \alpha_{\mathcal{I}} \circ T_{\mathbf{S}}(\alpha_{\mathcal{I}}),$$

这由 $\mathcal{I}$ 与运算子复合的相容性可得。

因此$(A, \alpha_{\mathcal{I}})$ 是一个$\mathbf{T_S}$-代数。考虑遗忘函子 $U : \mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$时，$(U(A)\ \alpha_{\mathcal{I}})$ 是$\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$中的一个$\mathbf{T_S}$-代数。

**注 13** （$\mathbf{T_S}$-代数构造背后的直觉）。 该构造连接了三个层次的结构：

*1.* 句法层面： 幺半群**S** 为具有指定元数和复合规则的量子操作提供形式符号。*2.* 代数层面： 单子 $T_{\mathbf{S}}$ 自由生成向量空间上所有可能的**S**-运算形式复合。元素 $[s; a_1, \ldots, a_n] \in T_{\mathbf{S}}(A)$ 表示"对输入 $a_1, \ldots, a_n$应用运算 $s$"。

*3.* 语义层面： 解释 $\mathcal{I}$ 将具体的量子信道赋予**S**中的符号。代数映射 $\alpha_{\mathcal{I}}$ 将形式复合求值为 实际的量子操作：

$$\alpha_{\mathcal{I}}([s; a_1, \ldots, a_n]) = \mathcal{I}(s)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

单子律确保这一求值过程具有一致性：

- 单位律指出，对平凡运算 $[\mathbb{1}; a]$ 求值会返回 $a$。
- 乘法律指出，对嵌套运算 $[s; [t_1; \vec{a}_1], [t_2; \vec{a}_2]]$ 求值，等同于先对内部运算求值，然后将 $s$ 应用于所得结果。

这一构造形式化地说明，任何配备了一组基本操作（量子门、测量等）的量子系统，自然都具有$\mathbf{T_S}$-代数的结构。所承诺的单子等价

$$\mathbf{CPTP} \simeq \mathbf{T_S\text{-}Alg}$$

将证明这种对应关系是双射：每个量子信道都来自这样的代数结构，而每个这样的代数结构都对应于一个具有指定基本操作的量子系统。单子性定理 *5* 将在后文讨论。

**定义 12 (来自 $\mathbf{T_S}$-代数的 CPTP 映射)。** 设$(A, \alpha\colon T_{\mathbf{S}}(A) \to A)$ 是$\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$中的一个$\mathbf{T_S}$-代数，其中$A$ 也是一个有限维 $C^*$代数。我们将相应的完全正迹保持（*CPTP*）映射 $\Phi_\alpha\colon A \to A$ 定义为将 $\alpha$ 限制在一个特殊子空间上。

***1.*** 通过单位嵌入定义 **。** ***CPTP***映射 $\Phi_\alpha\colon A \to A$ 定义为复合映射 *e:*

$$\Phi_\alpha := \alpha \circ \eta_A : A \xrightarrow{\eta_A} T_{\mathbf{S}}(A) \xrightarrow{\alpha} A,$$

其中 $\eta_A\colon A \to T_{\mathbf{S}}(A)$ 是单子单位。具体而言，对于任意 $a \in A$,

$$\Phi_\alpha(a) = \alpha\big([\mathbb{1}; a]\big),$$

其中 $\mathbb{1} \in S(1)$ 是多运算恒等元，而 $[\mathbb{1}; a]$ 表示 $\mathbb{C}[S(1)] \otimes_{\Sigma_1} A$中的等价类 .

***2.*** 完全正性。 $\Phi_\alpha$ 是完全正的，因为:

- 单子单位 $\eta_A$ 是保持正性的线性映射：如果 $a \in A$ 是正的，那么 $[\mathbb{1};\ a]$ 是向量空间 $T\mathbf{s}(A)$ 中的正元素（在适当意义下）。
- 代数映射 $\alpha$： $T\mathbf{s}(A) \to A$ 根据定义 ***11*** 中的构造是完全正的，因为它源自一个解释 $\mathcal{I}$： $\mathbf{S} \to$ **完全正迹保持。**
- 完全正映射的复合仍然是完全正映射。

***3.*** 迹保持。 $\Phi_\alpha$ 保持 $A$上的典范归一化迹，因为:

- 代数映射 $\alpha$ 满足单位律： $\alpha \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$。
- 然而，这将得到 $\Phi_\alpha = \mathrm{id}_A$，这表明我们需要一种不同的构造（参见注释 ***14***）。

***4.*** 线性。 $\Phi_\alpha$ 是线性的，因为 $\eta_A$ 和 $\alpha$ 都是线性映射。

***5.*** 替代构造（针对非恒等映射）。 对于一般的***CPTP***映射，我们会更充分地使用代数结构。给定 $a \in A$, 我们可以通过以下方式应用任意运算 $s \in S$（**1**）:

$$\Phi_\alpha^{(s)}(a) := \alpha\big([s; a]\big).$$

更一般地，对于多输入运算，我们通过以下方式定义映射 $\Phi_\alpha$： $A^{\otimes n} \to A$ :

$$\Phi_\alpha^{(s)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := \alpha\big([s; a_1, \ldots, a_n]\big), \quad s \in S(n).$$

对于所有 $s \in \mathbf{S}$，这一映射族构成了由代数（$A, \alpha$）所描述的完备量子过程。

**注释 14** （为什么 $\Phi_\alpha = \alpha \circ \eta_A$通常是单位元）。 这里有一个微妙之处：如果 $\alpha$满足*Eilenberg-Moore*代数律 $\alpha \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$，那么 $\Phi_\alpha = \alpha \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$。这似乎表明，每个$\mathbf{T_S}$-代数都只给出恒等映射，而这过于严格了。

解决方案在于，$\mathbf{T_S}$-代数实际上编码的不仅是单个***CPTP***映射，还包括一个映射族量子操作，对应于$\mathbf{S}$的所有元素。“恒等” $\Phi_\alpha = \mathrm{id}_A$ 来自应用多运算恒等元 $\mathbb{1} \in S$（**1**）。其他运算会产生不同的***CPTP***映射:

- 对于 $s \in S(1)$： $\Phi_{(s)\alpha}(a) = \alpha([s; a])$ 给出一元运算
- 对于 $s \in S(2)$： $\Phi_{(s)\alpha}(a \otimes b) = \alpha([s; a, b])$ 定义了一个二元运算

• 等等。

因此，$\mathbf{T_S}$-代数 $(A, \alpha)$ 应当被理解为：为 $A$ 配备适用于所有元数的一套一致的量子操作系统，而不只是单个自同态。单子性等价 **完全正迹保持** $\simeq$ $\mathbf{T_S}$-**代数**（单子性定理 *5* 将在后文讨论）是指以下两者之间的等价：

• 配备了所有 **S**-运算的系统范畴

• **Ts**-代数范畴

其中对应关系为：代数映射 $\alpha$ 将形式的**S**-表达式求值为具体的量子操作。

**定义 13 (**态射：完全正迹保持与 $\mathbf{T_S}$-代数之间的对应关系**)**。设 $A, B \in \mathbf{FdCStar}_{\mathrm{CPTP}}$是有限维的 $C^*$-代数，且 $\mathcal{I} : \mathbf{S} \to$ **完全正迹保持**是一个解释函子。

***1.*** **完全正迹保持-**态射。

**CPTP** 中的态射是完全正迹保持（*CPTP*）映射

$$f : A \longrightarrow B.$$

***2.*** $\mathbf{T_S}$-代数同态。

设$(A, \alpha_A)$ 和$(B, \alpha_B)$ 为$\mathbf{T_S}$-代数，其中 $\alpha_A : T_{\mathbf{S}}(A) \to A$ 和 $\alpha_B : T_{\mathbf{S}}(B) \to B$ 是代数结构映射。$\mathbf{T_S}$-代数同态是满足以下交换条件的线性映射 $f : A \to B$：

$$f \circ \alpha_A = \alpha_B \circ T_{\mathbf{S}}(f),$$

或者用图表示：

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbf{S}}(A) & \xrightarrow{T_{\mathbf{S}}(f)} & T_{\mathbf{S}}(B) \\ {\scriptstyle \alpha_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_B} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

具体而言，对于任意生成元 $[s;\ a_1, \ldots, a_n] \in T_{\mathbf{S}}(A)$,

$$f\big(\alpha_A([s; a_1, \ldots, a_n])\big) = \alpha_B\big([s; f(a_1), \ldots, f(a_n)]\big).$$

***3.*** 对应关系。

给定一个解释 $\mathcal{I}$：$\mathbf{S} \to$ **完全正迹保持**，我们有：

• 对于任意 $A \in$ **完全正迹保持**，我们得到一个 **Ts**-代数 $(A, \alpha_A)$，其中 $\alpha_A([s;\ a_1, \ldots, a_n]) = \mathcal{I}(s)$ $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$。

• *CPTP*映射 $f$：$A \to B$ 是 **Ts**-代数同态，在 $(A, \alpha_A)$ 与 $(B, \alpha_B)$ 之间，当且仅当对于所有 $s \in S(n)$ 以及 $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$f\big(\mathcal{I}(s)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)\big) = \mathcal{I}(s)\big(f(a_1) \otimes \cdots \otimes f(a_n)\big).$$

这个条件表示：先运用运算 $\mathcal{I}(s)$，再应用 $f$，所得结果与先对所有输入应用 $f$，再进行运算所得结果相同。

***4.*** $\boldsymbol{T_S}$**-代数范畴。**

令 $\mathbf{T_S}$**-Alg** 表示 $\mathbf{T_S}$-代数在 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ 中构成的 *Eilenberg–Moore* 范畴，其中：

- 对象是满足代数律的数对 $(V, \alpha\colon T_{\mathbf{S}}(V) \to V)$。
- 态射是满足 $f \circ \alpha_V = \alpha_W \circ T_{\mathbf{S}}(f)$ 的线性映射 $f\colon V \to W$。

当我们将范围限制为通过解释 $\mathcal{I}$ 从**完全正迹保持**对象得到的代数时，便得到一个全子范畴 $\mathbf{T_S}$-$\mathbf{Alg}_{\mathcal{I}}$。

**注 15 (**概念性解释**)。** 这种对应关系体现了关于量子过程的两种互补视角：

*1.* 动态视角（完全正迹保持）：态射 $f\colon A \to B$ 是一个量子信道，它将量子信息从系统 $A$ 传输到系统 $B$。

*2.* 代数视角 **(**$\mathbf{T_S}$-代数**)**：态射 $f\colon (A, \alpha_A) \to (B, \alpha_B)$ 是一个保结构映射，它尊重 **S**中的所有可能运算。条件 $f \circ \alpha_A = \alpha_B \circ T_{\mathbf{S}}(f)$ 确保：

- 对于任意形式操作 $[s;\ a_1, \ldots, a_n]$，
- 在 $A$ 中应用运算，然后通过 $f$传递，
- 这与先通过 $f$ 传递输入，再在 $B$中应用运算相同。

这些视角的等价性意味着，成为一个“良好”的量子映射（保持物理运算）与成为代数同态（保持代数结构）完全相同。这就是单子性定理的要义：具有指定基本运算（**完全正迹保持** 及其解释 $\mathcal{I}$）的量子系统范畴，等价于抽象编码这些运算的代数结构范畴（$\mathbf{T_S}$-**代数**$_{\mathcal{I}}$）。

## 4.3 支持性结果

本节将基于先前有关协同单子的定义，推导若干事实。

**命题5 (**量子相互作用的歌剧结构**)。** 定义7中定义的量子交互运算子$\mathbf{S} = (S(n)\ \gamma$,单位元 $\Sigma_n)$ 满足**集合**中的对称幺半群公理。

具体而言，对于所有 $f \in S(m)$、$g_i \in S(n_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ 和 $h_{i,j} \in S(k_{i,j})$ $(j = 1, \ldots, n_i)$，以下性质均成立：

***1.*** 结合律：

$$\gamma\Big(\gamma(f; g_1, \ldots, g_m); h_{1,1}, \ldots, h_{m,n_m}\Big) = \gamma\Big(f; \gamma(g_1; h_{1,1}, \ldots, h_{1,n_1}), \ldots, \gamma(g_m; h_{m,1}, \ldots, h_{m,n_m})\Big).$$

***2.*** 单位元：对于指定元素 单位元 $\in S(1)$，

$$\gamma(\mathrm{id}; f) = f \quad \textit{and} \quad \gamma(f; \underbrace{\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}}_{m \text{ times}}) = f.$$

***3.*** 等变性：对于 $\sigma \in \Sigma_m$ 和 $\tau_i \in \Sigma_{n_i}$ $(i = 1,\ \ldots\ldots,\ m)$，

$$\gamma(\sigma \cdot f; \tau_1 \cdot g_1, \ldots, \tau_m \cdot g_m) = (\sigma \circ (\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_m)) \cdot \gamma(f; g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(m)}),$$

其中 $\oplus$ 表示置换的块和，右侧的作用通过置换 $\sigma \circ (\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_m) \in \Sigma_{n_1+\cdots+n_m}$。

证明。 我们利用这样一个事实来验证每条公理：**S**是由基本量子相互作用符号生成的自由对称幺半群。

**关于结合律：** 由于**S**是由一组生成元自由构造的幺半群，因此，按照定义，任何产生相同括号化的形式复合都被视为相同。结合性方程表明，对三个元素进行复合时，两种不同的括号化方式会得到相同的形式表达式。在自由幺半群的构造中，这一点已包含在运算子复合的定义之中 $\gamma$。

**关于单位元：** 元素 id $\in S(1)$ 被定义为自由构造中的幺半群单位元。根据自由幺半群的泛性质，它满足关于复合 $\gamma$ 的单位律。

**关于等变性：** $S(n)$ 上的对称群作用是对称幺半群数据的一部分。在自由幺半群的构造中，这些作用的定义保持一致，从而满足等变性条件。具体来说，如果将 $S(n)$中的元素视为树，其中叶子标记为生成元，内部节点标记为运算子复合，那么对称群通过置换叶子来作用，并且这一作用与树的嫁接相交换。

下面，我们还将通过电路给出这一证明的另一种方法。若将 $S(n)$解释为由基本门构成、具有 $n$ 个输入和 1 个输出的形式量子电路集合，并将 $\gamma$ 解释为将电路接入另一个电路的输入端的运算，那么：

- 结合律成立，因为无论连接顺序如何，布线图都可以明确无误地绘制出来。

- 那么单位元公理呢？单位元公理成立，因为不含量子门的线（即单位电路）与其他电路复合时会透明地传递信号。
- 等变性成立，因为对输入线进行置换与电路复合的层次结构相容。

由于自由幺半群构造恰好刻画了电路复合的这些直观性质，因此这些公理均成立。

□

**备注 16** (与单子结构的联系)。 命题*5*中验证的幺半群公理，正是保证定义*10*中定义的相关函子 $T_{\mathbf{S}}$ 构成单子的条件。具体而言：

*1.* 结合律公理确保单子乘法 $\mu$： $T_{\mathbf{S}} \circ T_{\mathbf{S}} \Rightarrow T_{\mathbf{S}}$ 是结合的。*2.* 单位元公理

确保单子单位 $\eta$： id $\Rightarrow T_{\mathbf{S}}$ 相对于 $\mu$满足单位律。

*3.* 等变性公理确保 $T_{\mathbf{S}}$ 在配备适当的自然变换后是一个对称幺半函子。

因此，命题*5*提供了必要的基础验证，以确立 $T_{\mathbf{S}}$ 确实是一个定义良好的单子，这对于单子性定理至关重要。

**注17** （物理解释）。 在本注释中，我们将从物理角度重新审视命题*5*。幺半群公理在量子电路复合方面具有自然的物理解释：

- 结合律 体现为：当从较简单的电路构建复杂电路时，连接子电路的顺序并不重要——决定所得运算的只有整体连通模式。

- 单位元 体现了“什么都不做”的运算（普通导线）作为透明元素的作用：将任何电路与单位导线复合，都不会改变它。

• 等变性 体现了输入线的置换与分层组合可交换。这对应于这样一个物理事实：在施加复合操作之前重新标记量子系统，与使用重新标记后的输入来施加该运算，结果相同。

这些并非任意的数学条件，而是体现了量子运算如何复合的基本性质，因此幺半群是描述可复合量子过程的自然数学框架。

**命题 6** （量子运算子的普适性条件）。 设**S** 是一个量子交互运算子（定义7）。我们称**S**为量子计算通用，如果它满足以下条件：

*1.* 酉普适性：对于每个 $n \geq 1$，*S* 都包含在 $n$ 个量子多能级系统上实现酉计算通用性的生成元。也就是说，一元运算集合 $\{f \in S(1) : \langle\langle f \rangle\rangle$ 是酉的$\}$ 生成酉群 $U(d)$ 的一个稠密子群，而二元运算集合 $\{f \in S(2) : \langle\langle f \rangle\rangle$ 具有纠缠性$\}$提供充足的纠缠资源。*2.* 态制备： $S(0)$ 包含用于制备任意纯态（或其稠密子集）的生成元。*3.* 测量能力： $S(1)$ 包含可实现任意投影测量（通过奈马克扩张）或其通用集合的运算。*4.* 偏迹： $S(2)$ 包含偏迹运算 $tr_B : \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(K) \to \mathcal{B}(H)$。*5.* 凸闭包：*S* 在完全正迹保持映射中的解释在凸组合下是闭的，或者 *S* 包含能够实现概率混合的运算。

如果**S** 满足这些条件，那么对于任何能够忠实表示这些生成元的解释 $\mathcal{I} : \mathbf{S} \to$ **完全正迹保持**，以下结论成立：

*(a)* 任何有限维酉电路都可以由**S**中的元素复合而任意精确地近似。*(b)* 通过奈马克扩张，任何量子测量（*POVM*）都可以由**S**中的元素复合来实现。*(c)* 通过 *Stinespring* 膨胀，任何完全正迹保持（*CPTP*）映射都可以由**S** 中的元素复合来实现。

**注 18** （与标准量子普适性结果的关系）。 命题 *6* 中的条件对应于量子信息理论中确立已久的结果：

• 酉普适性 对应于 *Solovay-Kitaev* 定理：任何酉运算都可以用有限通用门集近似。

• 态制备普适性 源于这样一个事实：任何纯态都可以通过酉运算从固定的参考态（例如 $|0\rangle$）制备出来。

• 测量普适性 可通过奈马克扩张实现：任何 *POVM* 都可以在更大的系统上实现为投影测量。

• ***CPTP***映射的普适性 通过 *Stinespring* 膨胀实现：任何 *CPTP*映射都可以表示为在更大的系统上施加酉运算后再进行偏迹。

• 凸闭包 体现了量子操作空间的凸结构。

我们框架的新意不在于这些单独的结果，而在于将它们整合到单一的运算子结构**S**中，使我们能够将量子普适性视为幺半群本身的一种性质。这使得我们能够运用范畴论推理来探讨量子计算完备性。

命题 *6* 的证明。 假设**S** 满足所列条件。我们逐一证明各项断言 :

**1. 酉电路的近似**。 设 $U$: $H^{\otimes n} \to H^{\otimes n}$ 为一个酉算子。根据 Solovay-Kitaev 定理（针对量子比特）或其对量子多能级系统的推广，存在一列由**S** 中的通用门集构成的电路 $C_k$ ，使得 $\|U - C_k\| < \epsilon_k$ ，其中 $\epsilon_k \to 0$。每个 $C_k$ 都对应于**S**中的一个元素，该元素由通用生成元经运算子复合得到。因此，$U$ 可以由**S**中的元素任意精确地近似。

**2. 测量的实现**。 设 $\{M_i\}_{i=1}^m$ 为 $H$上的一个 POVM。根据 Naimark 扩张定理，存在一个辅助希尔伯特空间 $K$、一个等距映射 $V$: $H \to H \otimes K$以及一个作用于$H \otimes K$ 上的投影测量 $\{P_i\}$ ，使得 $M_i = V^\dagger P_i V$。利用**S**中的元素:

1. 使用 $S(0)$将 $K$ 制备为固定态 $|0\rangle_K$ 。2. 使用**S** 中的酉算子实现等距映射 $V$（因为任意等距映射都可以扩展为更大空间上的酉算子）。3. 使用 $S(1)$中的测量操作实现投影测量 $\{P_i\}$ 。

该复合态射给出了POVM $\{M_i\}$的一种实现。

**3. CPTP映射的实现**。设 $\Phi$ : $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$是一个CPTP映射。根据Stinespring 扩张定理，存在一个辅助空间 $E$和一个等距映射 $W$: $H \to K \otimes E$，使得 $\Phi(\rho) = \mathrm{tr}_E(W\rho W^\dagger)$。使用**S**中的元素:

1. 使用 $S(0)$将 $E$ 制备为态 $|0\rangle_E$ 。2. 将等距映射 $W$ 实现为 $H \otimes E \otimes F$ 上的酉算子（其中 $F$ 是额外的辅助空间，用于使 $W$ 成为酉算子）。3. 对 $S(2)$施加偏迹$\mathrm{tr}_E$ 。

该复合态射实现 $\Phi$。

**4. 对凸组合的封闭性**。 给定 $f_1$， $f_2 \in S(n)$ 被解释为完全正映射 $\Phi_1$， $\Phi_2$ : $\mathcal{B}(H)^{\otimes n} \to \mathcal{B}(H)$， 以及 $p \in [0,1]$， 凸组合 $p\Phi_1 + (1-p)\Phi_2$ 可通过以下方式实现:

1. 利用从 $S(0)$ 出发的态制备以及此类态的凸组合，将经典寄存器制备为态 $p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$ 。

2. 应用受控操作：若寄存器为 $|0\rangle$，则应用 $f_1$；若为 $|1\rangle$，则应用 $f_2$。
3. 丢弃（对经典寄存器取偏迹）。

该构造仅使用**S**中的元素及其复合态射。 □

**注 19**（对单子性定理的重要性）。 命题 *6* 对单子性定理（定理 *5*）很重要，因为它确保如果 **S** 是通用的，那么范畴 $\mathbf{T_S}$**-Alg** 涵盖了所有量子过程，而不仅仅是某个受限类别。

具体而言，如果**S** 满足普适性条件，那么:

• 每个*CPTP*映射都源自某种**Ts**代数结构。

• 这种等价关系 $\mathbf{CPTP} \simeq \mathbf{Ts\text{-}Alg}$ 确实涵盖全面，覆盖了所有有限维量子计算。

• 单子 $T\mathbf{s}$ 确实体现了量子可组合性的完整结构。

如果 $\mathbf{S}$ 不是通用的，我们仍然可以得到一种等价关系，但仅限于 $\mathbf{CPTP}$ 与由 $\mathbf{S}$ 中的运算构建而成的量子过程子范畴之间。

**推论 2(**通用幺半群是量子完备的**)**。 设 $\mathbf{S}$ 是一个满足命题 *6* 中普适性条件的量子交互运算子。那么，对于任何能够忠实表示生成元的解释 $\mathcal{I} : \mathbf{S} \to \mathbf{CPTP}$ ，**S**在以下意义下是量子完备的：

对于任意有限维 $C^*$代数之间的完全正迹保持映射 $\Phi : A \to B$ ，以及任意 $\epsilon > 0$，存在一个元素 $f_\epsilon \in T_{\mathbf{S}}(A, B)$ （一个由 **S**-运算构成的形式表达式），使得：

$$\|\mathcal{I}(f_\epsilon) - \Phi\|_\diamond < \epsilon,$$

其中 $\|\cdot\|_\diamond$ 是完全正迹保持映射上的菱形范数，而 $\mathcal{I}(f_\epsilon)$ 表示对形式表达式$f_\epsilon$ 的解释，即将其视为具体量子信道。

证明。 假设**S** 满足普适性条件。我们分几个步骤构造该近似：

**步骤 1：化归为单代数**。 根据命题 4，任意有限维的$C^*$代数都与 $*$同构于矩阵代数的直和。由于直和的量子完备性可由每个直和项的完备性推出，因此只需对 $A = B = M_n(\mathbb{C})$证明该结果。

**步骤 2：菱形范数与近似**。 CPTP映射 $\Phi$， $\Psi$： $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$的菱形范数 $\|\cdot\|_\diamond$ 定义如下：

$$\|\Phi - \Psi\|_\diamond = \sup_{m \geq 1} \sup_{\rho \geq 0, \mathrm{tr}(\rho)=1} \|(\Phi \otimes \mathrm{id}_m)(\rho) - (\Psi \otimes \mathrm{id}_m)(\rho)\|_1,$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 是 迹范数。这衡量了量子信道在最坏情况下的可区分性。

**步骤 3：通过 Solovay-Kitaev 定理近似酉变换**。 首先考虑 $\Phi$ 为酉信道的情形：$\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger$。根据命题 6，**S**包含一个通用门集。Solovay-Kitaev 定理保证，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个由**S** 中的量子门构成的电路 $C_\epsilon$，使得：

$$\|U - \mathcal{I}(C_\epsilon)\| < \epsilon,$$

其中， $\|\cdot\|$ 是算子范数， $\mathcal{I}(C_\epsilon)$是将电路解释为酉算子。对于相应的量子信道，我们有：

$$\|\Phi - \mathcal{I}(C_\epsilon)(\cdot)\mathcal{I}(C_\epsilon)^\dagger\|_\diamond \leq 2\|U - \mathcal{I}(C_\epsilon)\| < 2\epsilon.$$

**步骤 4：通过 Stinespring 膨胀处理一般的 CPTP 映射**。对于一般的 CPTP 映射 $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, Stinespring 扩张定理给出了一个等距映射 $V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^d$，使得 $\Phi(\rho) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^d}(V\rho V^\dagger)$。根据命题 6，**S** 包含以下运算：

1. 在 $\mathbb{C}^d$中制备辅助态
2. 在扩展系统上将等距映射实现为酉变换

3. 执行偏迹

对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以:

1. 选取足够大的 $d$，以构造一个 $\epsilon/3$-近似膨胀

2. 近似用作用于 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^d$ 上的酉算子 $U_\epsilon$ 近似膨胀等距算子 $V$，其中 $\|V - U_\epsilon\| < \epsilon/3$

3. 用由 $\mathbf{S}$ 元素构成的电路 $C_\epsilon$ 近似 $U_\epsilon$，其中 $\|U_\epsilon - \mathcal{I}(C_\epsilon)\| < \epsilon/$ 3

令 $\Phi_\epsilon$ 为通过以下步骤得到的量子信道：1. 将辅助系统制备在 $|0\rangle\langle 0|$ 2中。2. 应用 $\mathcal{I}(C_\epsilon)$。3. 对辅助系统进行偏迹

根据三角不等式以及偏迹的压缩性:

$$\|\Phi - \Phi_\epsilon\|_\diamond < \epsilon.$$

**步骤 5：在 $T_{\mathbf{S}}$ 中的形式表达式**。 近似 $\Phi_\epsilon$ 由特定的$\mathbf{S}$-运算复合实现。此复合对应于一个元素 $f_\epsilon \in T_{\mathbf{S}}(M_n(\mathbb{C}) \ M_n(\mathbb{C}))$，其中 $T_{\mathbf{S}}(A, B)$ 表示由$\mathbf{S}$-运算构成、类型为 $A \to B$ 的形式表达式集合（通过对多元运算进行柯里化得到）。

根据构造，$\mathcal{I}(f_\epsilon) = \Phi_\epsilon$，因此:

$$\|\mathcal{I}(f_\epsilon) - \Phi\|_\diamond < \epsilon.$$

**步骤 6：扩展到所有有限维 $C^*$-代数**。 对于一般的 $A \cong \bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$ 和 $B \cong \bigoplus_j M_{m_j}(\mathbb{C})$，CPTP映射 $\Phi: A \to B$ 可分解为分量 $\Phi_{ij}: M_{n_i}(\mathbb{C}) \to M_{m_j}(\mathbb{C})$。每个分量都可以按上述方法进行近似，而这些近似的直和则给出 $\Phi$ 的一个近似。

□

**注 20** (对单子性定理的意义)。 推论 *2* 对单子性定理至关重要，因为它确保当$\mathbf{S}$ 是通用的时，**完全正迹保持** 与$\mathbf{T_S}$**-代数** 之间的对应关系在适当意义下是稠密的:

- 每个量子信道都可以通过$\mathbf{T}$s-代数任意精确地逼近（具体来说，是通过某个逼近形式表达式的解释所得到的代数来逼近）。
- 单子 $T$s 刻画了量子计算的逼近结构，而不仅仅是精确的可实现性。
- 这证明将**完全正迹保持** $\simeq$ $\mathbf{T}$s-**代数** 之间的等价称为基础性结果是合理的：它表明，$T$s-代数的代数结构完整地编码了量子过程的计算结构。

如果$\mathbf{S}$ 不是通用的，我们仍然可以得到**完全正迹保持** 与$\mathbf{T_S}$**-代数**之间的精确等价，但这仅适用于能够使用$\mathbf{S}$-运算精确实现的量子过程子范畴。逼近这一方面使通用情形尤其强大。

**推论 3** （电路范畴的良定义性）。 定义 *9* 中定义的$\mathbf{S}$-**电路** 确实是一个良定义的对称幺半范畴。

证明。 由于$\mathbf{S}$-**电路** 被定义为由$\mathbf{S}$生成的自由对称幺半范畴，其良定义性可由范畴论中的标准结果推出。不过，我们将明确验证其关键性质:

**1. 范畴结构**。

• **对象：** 自然数 $n \in \mathbb{N}$，表示 $n$并行线。这个集合定义良好。

• **态射：** 生成态射的形式复合：

– 对每个 $s \in S(n)$，都有一个态射 $s : n \to 1$– 对每个 $n$，都有单位元态射 $\mathrm{id}_n : n \to n$– 对每个 $n$、$m$，都有对称态射 $\sigma_{n,m} : n + m \to m + n$

在顺序复合 $\circ$ 和并行复合 $\otimes$下封闭。

• **复合：** 通过连接形式表达式来定义。由于复合是在形式表达式上以语法方式定义的，因此它自动定义良好且满足结合律。

• **单位元：** 对每个 $n$，单位元 $\mathrm{id}_n$ 定义为空复合（只有线）。它们满足：

$$f \circ \mathrm{id}_n = f = \mathrm{id}_m \circ f$$

对于任意 $f : n \to m$，根据自由范畴的定义。

**2. 自由构造保证。**

由幺半群 **S** 生成的自由对称幺半范畴 $F(\mathbf{S})$ 具有以下泛性质：对于任意对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 以及任意幺半群态射 $J : \mathbf{S} \to \mathcal{C}$ （将 $\mathcal{C}$ 视为通过其幺半结构得到的幺半群），存在唯一的对称幺半函子 $J : F(\mathbf{S}) \to \mathcal{C}$延拓 $J$。

这一通用构造确保：

1. $F(\mathbf{S})$ 存在，并且在唯一同构意义下唯一。

2. $F(\mathbf{S})$ 中的所有态射都是生成元的有限形式复合，因此同态集是定义良好的。

3. 复合由构造保证是结合的且具有单位。

**3. 对称幺半结构。**

幺半结构由以下内容给出：

• 对象上：$n \otimes m = n + m$ （自然数的加法）

• 单位对象：0（没有线）

• 态射上：$f \otimes g$ 是形式平行复合

• 对称性：$\sigma_{n,\ m} : \ n + m \to m + n$ 是一个生成态射

对称幺半范畴公理已内置于自由构造中。

**4. 另一种证明。**

下面给出一种基于构造性方法的另一种证明。我们也可以将**S-电路**显式构造如下：

• 对象：有限序数 $[n] = \{1, \ldots, n\}$（或仅用自然数 $n$）

• 态射 $n \to m$：形式弦图（平面装饰图），具有 $n$ 输入、$m$ 输出，且节点标记为 **S** 中的元素

- 复合：将输出接入输入
- 恒等态射：直线

这一显式构造清楚地给出了一个范畴，其中结合律和恒等律源自字符串图的几何结构。

由于所有范畴公理都得到满足（无论是依据泛性质还是通过显式构造），**S-电路**是一个良定义的对称幺半范畴。 □

**注释 21(**自由构造的重要性**)。** 将**S-电路**定义为自由范畴至关重要，原因如下：

*1.* 数学上的清晰性： 自由构造无需繁琐地验证相干条件，即可保证良定义性。*2.* 语义灵活性：不同的解释 $\mathcal{I} : \mathbf{S} \to$ **完全正迹保持**会为相同的形式电路提供不同的具体实现。*3.* 单子性定理：**S-电路**与**完全正迹保持**之间的自由-遗忘伴随生成协同单子 $T_{\mathbf{S}}$，并由此导出单子性等价。

因此，虽然原先基于希尔伯特空间和等价类的定义直观上很有吸引力，但自由范畴定义在数学上更简洁，也更有利于证明单子性定理。

## 4.4 单子性定理

本节旨在证明单子性定理5。我们从定义14所给出的量子过程范畴的定义开始。

在介绍本节的主要定理之前，需要先给出下面的定义14。

**定义14** （量子过程范畴）。 令**QProc** 表示有限维量子过程范畴，其定义如下：

- 对象： 完全正迹保持（*CPTP*）映射

$$\Phi : A \longrightarrow B,$$

其中， $A$、 $B$ 是有限维的 $C^*$代数。

- 态射： ***</style}***对于两个 ***CPTP***映射***：*** $A \to B$ 和 $\Psi : A' \to B'$，一个态射

$$(f, g) : \Phi \longrightarrow \Psi$$

由完全正映射组成

$$f : A \longrightarrow A', \quad g : B \longrightarrow B'$$

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \xrightarrow[\Psi]{} & B' \end{array}$$

即， $g \circ \Phi = \Psi \circ f$。

• 复合： 给定态射 $(f,g)\colon \Phi \to \Psi$ 和 $(f',g')\colon \Psi \to \Theta$，定义

$$(f',g')\circ(f,g) := (f'\circ f,\, g'\circ g).$$

• 恒等态射：对于每个对象 $\Phi$： $A \to B$，恒等态射为

$$\mathrm{id}_\Phi := (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B).$$

**引理4**（Synergy 单子的 Stinespring 表达能力）。设 $\Phi$： $A \to B$ 是有限维 $C^*$-代数之间的完全正迹保持映射。则对于每个态 $\rho \in A$，存在一个元素

$$[(\mathcal{C}_\rho, \psi_\rho)] \in T_{\mathbf{S}}(A)$$

使得

$$\alpha_\Phi\big([(\mathcal{C}_\rho, \psi_\rho)]\big) = \Phi(\rho).$$

此外，可以选择 $\mathcal{C}_\rho$ 和 $\psi_\rho$，使得解释 $[\![\mathcal{C}_\rho]\!]$： $A^{\otimes k} \to B$ 实现了将 $\Phi$ 应用于 $\rho$所得映射的 *Stinespring* 膨胀。

证明。设 $\Phi$： $A \to B$ 是完全正迹保持映射，满足 $A = \mathcal{B}(H_A)$、 $B = \mathcal{B}(H_B)$，并设 $\rho \in A$ 为一个固定的态。

**步骤 1： 和 $\Phi$ 以及 $\rho$的 Stinespring 膨胀**。根据有限维 Stinespring 定理，存在一个希尔伯特空间 $E$ 和一个等距映射

$$V : H_A \longrightarrow H_B \otimes E$$

使得对所有 $\xi \in A$,

$$\Phi(\xi) = \mathrm{Tr}_E\big(V\xi V^\dagger\big).$$

特别地，对于我们选定的 $\rho$,

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_E\big(V\rho V^\dagger\big).$$

**步骤 2：将膨胀编码为一个伴随代数元素**。令 $E_{\mathrm{alg}} = \mathcal{B}(E)$ 为与该环境关联的 $C^*$-代数。根据量子交互运算子的普适性假设 $\mathbf{S}$，存在一个运算

$$\mathcal{C}_{\mathrm{dil}} \in \mathbf{S}(2)$$

其解释

$$[\![\mathcal{C}_{\mathrm{dil}}]\!] : A \otimes E_{\mathrm{alg}} \longrightarrow B$$

满足

$$[\![\mathcal{C}_{\mathrm{dil}}]\!](\xi \otimes \omega) = \mathrm{Tr}_E\big(V\xi V^\dagger\big)$$

对所有 $\xi \in A, \omega \in E_{\mathrm{alg}}$，其中 $\mathrm{Tr}(\omega) = 1$。

选择一个纯态向量 $\eta_{\mathrm{dil}} \in E$，并设定 $\omega_{\mathrm{dil}} = \eta_{\mathrm{dil}}\eta^\dagger{}_{\mathrm{dil}} \in E_{\mathrm{alg}}$。定义

$$\psi_\rho := \rho \otimes \omega_{\mathrm{dil}} \in A \otimes E_{\mathrm{alg}}.$$

**步骤 3：在协同单子中实现**。这一对 $(\mathcal{C}_{\mathrm{dil}}, \psi_\rho)$ 确定了一个元素

$$[(\mathcal{C}_{\mathrm{dil}}, \psi_\rho)] \in T_{\mathbf{S}}(A \otimes E_{\mathrm{alg}}).$$

由于 $A \hookrightarrow A \otimes E_{\mathrm{alg}}$ 通过 $a \mapsto a \otimes \omega_{\mathrm{dil}}$具有规范性，我们可以通过与这个嵌入预复合，将 $[(\mathcal{C}_{\mathrm{dil}}, \psi_\rho)]$ 视为 $T_{\mathbf{S}}(A)$ 的一个元素。

应用 $T_{\mathbf{S}}$-代数结构 $\alpha_\Phi$，我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_\Phi\big([(\mathcal{C}_{\text{dil}}, \psi_\rho)]\big) &= [\![\mathcal{C}_{\text{dil}}]\!](\psi_\rho) \\ &= [\![\mathcal{C}_{\text{dil}}]\!](\rho \otimes \omega_{\text{dil}}) \\ &= \text{Tr}_E\big(V\rho V^\dagger\big) \\ &= \Phi(\rho).\end{aligned}$$

**步骤 4：结论**。如上所述，令 $\mathcal{C}_\rho := \mathcal{C}_{\text{dil}}$ 且 $\psi_\rho$，即可得到所需的 $T_{\mathbf{S}}(A)$ 中的元素，并满足$\alpha_\Phi([(\mathcal{C}_\rho,\ \psi_\rho)]) = \Phi(\rho)$。该构造明确表明，$\mathcal{C}_\rho$ 编码了作用于特定输入 $\rho$的 $\Phi$ 的 Stinespring 膨胀。 □

接下来，我们可以陈述定理 5。

**定理 5**（量子过程的幺半表示与算子化语义）。设 $\mathbf{S}$ 是一个对称量子交互运算子，满足命题 *6* 中的普适性和状态分离条件；设 $T_{\mathbf{S}}$ 是对称幺半范畴 $\mathbf{FdC}^*$ 上相关的协同单子，其中对象为有限维 $C^*$-代数。

（1）存在一个忠实函子

$$\mathcal{R} : \mathbf{QProc} \longrightarrow T_{\mathbf{S}}\text{-}\mathbf{Alg},$$

它将每个 *CPTP* 映射 $\Phi:\ A \to B$ 映射为规范的 $T_{\mathbf{S}}$-代数结构 $(B,\ \alpha_\Phi)$，并将每个交织算子 $(f,\ g)$ 映射为诱导的 $T_{\mathbf{S}}$-代数同态。

此外，若 $T_{\mathbf{S}}$ 是强对称幺半单子，且算子化解释 $[\![-]\!]$ 是对称幺半的，则 $\mathcal{R}$ 可典范地细化为一个忠实的对称幺半函子

$$\mathcal{R}^\otimes : \mathbf{QProc}^\otimes \longrightarrow T_{\mathbf{S}}\text{-}\mathbf{Alg}^\otimes,$$

保持张量积、单位对象和对称同构。

(2) 令$\mathbf{QProc}_\sim$ 为$\mathbf{QProc}$关于相对于 $\mathbf{S}$的操作等价关系所得的商，其中，若两个 *CPTP* 映射 $\Phi$ 和 $\Psi$ 在由$\mathbf{S}$生成的所有复合电路上诱导出相同的解释，则将它们视为等同。于是，$\mathcal{R}$ 下降为范畴等价

$$\overline{\mathcal{R}} : \mathbf{QProc}_\sim \ \simeq\ T_{\mathbf{S}}\text{-}\mathbf{Alg}.$$

因此，协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 为有限维量子过程提供了一种完备、可复合且在算子意义上通用的代数语义，能够刻画由$\mathbf{S}$所诱导的操作等价意义下的顺序与并行复合。

定理 *5* 的证明。 我们将证明分为四个步骤。

**步骤 1. 表示函子 $\mathcal{R}$ 的构造**。

对于每个 CPTP映射 $\Phi:\ A \to B$，定义 $T_{\mathbf{S}}$-代数

$$\mathcal{R}(\Phi) := (B, \alpha_\Phi),$$

其中，结构映射

$$\alpha_\Phi : T_{\mathbf{S}}(A) \longrightarrow B$$

在生成元 $[(\mathcal{C},\psi)]$ 上定义为

$$\alpha_\Phi\big([(\mathcal{C},\psi)]\big) := \Phi\big([\![\mathcal{C}]\!](\psi)\big), \quad \mathcal{C}\in\mathbf{S}(n),\ \psi\in A^{\otimes n}.$$

对于态射 $(f,g):\ \Phi\to\Psi$ 属于 **QProc**，令

$$\mathcal{R}(f,g) := g.$$

**步骤 2. 函子性与忠实性。**

函子性可直接由定义得出。为验证 $\mathcal{R}(f,g)$ 是一个 $T_{\mathbf{S}}$-代数同态，注意对任意生成元 $[(\mathcal{C},\psi)]$,

$$\begin{aligned} g\big(\alpha_\Phi([(\mathcal{C},\psi)])\big) &= g\big(\Phi([\![\mathcal{C}]\!](\psi))\big)\\ &= \Psi\big(f([\![\mathcal{C}]\!](\psi))\big)\\ &= \alpha_\Psi\big([(\mathcal{C}, f^{\otimes n}(\psi))]\big)\\ &= \alpha_\Psi\big(T_{\mathbf{S}}(f)([(\mathcal{C},\psi)])\big), \end{aligned}$$

这是利用了 $f$ 的完全正性。忠实性则由 **QProc** 中交织算子的定义得出。

**步骤 3. 对称幺半精化。**

假设 $T_{\mathbf{S}}$ 是一个强对称幺半单子，且 $[\![-]\!]$ 是对称幺半的。那么，根据关于强幺半单子的标准结果，$T_{\mathbf{S}}$-**Alg** 继承典范对称幺半结构。张量积与单位通过单子强度定义，对称性则继承自 $\mathbf{FdC}^*$。

对于完全正迹保持映射 $\Phi_i:\ A_i\to B_i\,(i=1,\ 2)$，定义

$$\mathcal{R}^{\otimes}(\Phi_1\otimes\Phi_2) := (B_1\otimes B_2, \alpha_{\Phi_1\otimes\Phi_2}), \quad \alpha_{\Phi_1\otimes\Phi_2}([(\mathcal{C},\psi)]) := (\Phi_1\otimes\Phi_2)([\![\mathcal{C}]\!](\psi)).$$

于是，$[\![-]\!]$ 的对称幺半性与 $T_{\mathbf{S}}$ 的强度保证

$$\alpha_{\Phi_1\otimes\Phi_2} = (\alpha_{\Phi_1}\otimes\alpha_{\Phi_2})\circ \mathrm{st}_{A_1,A_2},$$

因此，$\mathcal{R}^{\otimes}(\Phi_1\otimes\Phi_2)$ 与代数 $\mathcal{R}(\Phi_1)\otimes\mathcal{R}(\Phi_2)$ 的张量积相一致。函子性也可类似地扩展。

**第 4 步：操作等价与本质满射。**

定义操作等价如下

$$\Phi\sim\Psi \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha_\Phi = \alpha_\Psi,$$

并令 $\mathbf{QProc}_\sim$ 表示由此得到的商范畴。

为证明本质满射，设 $(A,\alpha)$ 是一个 $T_{\mathbf{S}}$-代数。根据引理4，对于每个 CPTP映射 $\Phi:\ A\to B$以及所有 $\rho\in A$，都存在一个生成元 $[(\mathcal{C}_\rho,\psi_\rho)]\in T_{\mathbf{S}}(A)$，使得

$$\alpha([(\mathcal{C}_\rho,\psi_\rho)]) = \Phi(\rho).$$

由于 $T_{\mathbf{S}}(A)$ 中的任意元素都可通过单子乘法由这类生成元构成，因此每个 $T_{\mathbf{S}}$-代数都源自某个量子过程 $\Phi$，且在运算等价意义下成立。因此，

$$\overline{\mathcal{R}}:\mathbf{QProc}_\sim \ \simeq\ T_{\mathbf{S}}\text{-}\mathbf{Alg}$$

是范畴等价。 □

**注释 22 (**单子性与表示)。 定理 *5* 确立了有限维量子过程与协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 上的代数之间强大的表示等价 。然而，这种等价不应与原始 *CPTP* 映射层面上的严格 *Eilenberg–Moore* 单子性相混淆。

确实，对于普通的 $T_{\mathbf{S}}$-代数$(A, \alpha)$，单位律要求

$$\alpha \circ \eta_A = \mathrm{id}_A.$$

相比之下，对于量子过程 $\Phi$： *{v4>*，相应的结构映射

$$\alpha_\Phi : T_{\mathbf{S}}(A) \longrightarrow B$$

满足

$$\alpha_\Phi \circ \eta_A = \Phi,$$

一般而言，这并非恒等态射，除非 $\Phi = \mathrm{id}_A$。

因此，*CPTP*映射并不对应于 $T_{\mathbf{S}}$ 上任意的 *Eilenberg–Moore* 代数，而是对应于相对代数，其结构映射的陪域可能与定义域不同。正如定理 *5(2)* 所示，通过对操作等价取商$\mathbf{QProc}_{\sim}$，便可恰好消除这种不匹配，此时单位律在等价意义下成立。

从这一角度看，协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 不仅编码代数结构，还刻画了量子过程的操作语义：其 *Eilenberg–Moore* 范畴完整地刻画了复合、张量积和观察等价。从这个意义上说， $T_{\mathbf{S}}$ 为量子过程提供了真正的单子语义，但仅在操作不可区分的意义下。

**推论 4** （量子计算的操作—代数对偶）。 令$\mathbf{QProc}_{\sim}$ 表示有限维量子过程模去操作等价后构成的范畴，并令 $T_{\mathbf{S}}$-**Alg** 为协同单子的*Eilenberg–Moore*范畴。于是，定理 *5* 得出以下基本对偶关系。

*1.* 描述的对偶性。 每个量子过程都有一个等价的操作描述，即一个完全正迹保持映射，以及一个代数描述，即一个 $T_{\mathbf{S}}$-代数；这两种描述由范畴等价联系起来

$$\mathbf{QProc}_{\sim} \;\simeq\; T_{\mathbf{S}}\text{-}\mathbf{Alg}.$$

*2.* 组合性的单子编码。 量子计算的组合结构由单子 $T_{\mathbf{S}}$完全刻画：

- 单位 $\eta$ 将基本系统嵌入形式计算空间；
- 乘法 $\mu$ 编码复合过程的代入和顺序复合 ；
- 代数公理确保复合与并行化之间的相互作用协调一致。

*3.* 量子计算的范畴语义。 量子计算具有严谨的范畴语义，其中过程的操作等价类由泛代数结构分类。

证明。 每个陈述都是定理 5 的直接推论。

**（1）描述的对偶**。定理的第（2）部分确立了范畴等价

$$\mathbf{QProc}_{\sim} \;\simeq\; T_{\mathbf{S}}\text{-}\mathbf{Alg},$$

由互为拟逆的函子 $\mathcal{R}$和 $\mathcal{L}$实现。在这种等价关系下，CPTP映射 $\Phi$由代数（$B$， $\alpha_\Phi$）表示，而任意代数（$A$, $\alpha$）都唯一确定一个量子过程 $\Phi_\alpha$（至操作等价）。因此，操作描述与代数描述包含相同的信息。

**(2) 组合性的单子编码**。根据构造，对象 $T_{\mathbf{S}}(A)$ 表示由 **S** 中的基本操作构成、以 $A$ 为输入的所有形式计算。单位 $\eta_A$ 对应于平凡的（一步）计算，而乘法 $\mu_A$ 则将嵌套计算归并为单个复合态射。对于任意代数 $(A, \alpha)$，代数公理

$$\alpha \circ \eta_A \;\sim\; \mathrm{id}_A, \qquad \alpha \circ T_{\mathbf{S}}(\alpha) = \alpha \circ \mu_A$$

分别表达恒等态射在操作意义上的平凡性以及复合的结合律，且均以操作等价为准。因此，量子计算的整个组合结构都通过单子编码。

**(3) 范畴语义**。由于该等价是对称幺半的（定理5(1)），$T_{\mathbf{S}}$-**Alg** 中的范畴构造——例如自由代数、张量积和泛态射——都能忠实地转化为量子过程上的操作构造。因此，代数框架中的图示论证和泛性质论证为量子计算提供了可靠且完备的推理原则。

由此我们可以得出什么结论？量子过程族可以通过转化为相应的代数，在 $T_{\mathbf{S}}$-**Alg** 中进行范畴构造，再将结果传回$\mathbf{QProc}_{\sim}$ 来加以组合。

□

**推论 5** (协同单子的希尔伯特空间实现)。 令 $\mathbf{FdC^*}_{\mathrm{CPTP}}$ 表示有限维 $C^*$代数及海森堡绘景下完全正迹保持（*CPTP*）映射构成的对称幺半范畴，并令 $\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}}$ 表示薛定谔绘景下有限维希尔伯特空间及*CPTP*映射构成的对称幺半范畴。

根据量子力学海森堡表述与薛定谔表述之间标准的有限维对偶性，

$$\mathbf{FdC^*}_{\mathrm{CPTP}} \;\simeq\; \mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}},$$

协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 传递为一个强对称幺半单子

$$T_{\mathbf{S}}^{\mathrm{Hilb}} \;:=\; \mathcal{D} \circ T_{\mathbf{S}} \circ \mathcal{D}^{-1}$$

作用于 $\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}}$ 上。

因此，定理 *5* 中的等价关系诱导出一个范畴等价

$$\mathbf{QProc}_{\sim}^{\mathrm{Hilb}} \;\simeq\; T_{\mathbf{S}}^{\mathrm{Hilb}}\text{-}\mathbf{Alg},$$

其中 $\mathbf{QProc}_{\sim}^{\mathrm{Hilb}}$表示希尔伯特空间形式体系中有限维量子过程在由幺半群 **S** 所诱导的操作等价下构成的范畴。

特别是，量子过程的歌剧集–单子语义独立于选择 $C^*$-代数表示还是希尔伯特空间表示。

证明。 证明通过结构传递，沿着海森堡图像与量子力学的薛定谔图像之间标准的有限维等价来进行。

**步骤 1：形式体系的对称幺半等价**。

存在一个众所周知的对称幺半等价

$$\mathcal{D} : \mathbf{FdC^*}_{\mathrm{CPTP}} \;\simeq\; \mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}},$$

定义如下:

• 在对象上， $\mathcal{D}$ 将每个有限维 $C^*$-代数 $A \cong \bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$ 映射为一个希尔伯特空间 $H_A := \bigoplus_i \mathbb{C}^{n_i} \otimes \mathbb{C}^{n_i}$，并赋予其希尔伯特–施密特内积。

• 对于态射，海森堡绘景中的 CPTP 映射 $\Phi : A \to B$ 被映射到其薛定谔绘景对偶 $\mathcal{D}(\Phi) : \mathcal{S}(H_A) \to \mathcal{S}(H_B)$，并由以下关系唯一确定

$$\mathrm{Tr}[\rho\, \Phi(X)] = \mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\Phi)(\rho)\, X] \quad \text{for all } \rho \in \mathcal{S}(H_A),\ X \in B.$$

该等价保持张量积、单位对象和完全正性，因为 $\mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H_2) \cong \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$。

**步骤 2：协同单子的传输。**

Let

$$T_{\mathbf{S}} : \mathbf{FdC^*}_{\mathrm{CPTP}} \longrightarrow \mathbf{FdC^*}_{\mathrm{CPTP}}$$

设其为由对称量子相互作用算子$\mathbf{S}$诱导的协同单子。通过沿 $\mathcal{D}$的共轭，在$\mathbf{CPTP}_{\mathrm{Hilb}}$上定义一个单子：

$$T_{\mathbf{S}}^{\mathrm{Hilb}} := \mathcal{D} \circ T_{\mathbf{S}} \circ \mathcal{D}^{-1}.$$

根据一般的范畴原理，沿幺半等价的传输保持单子结构。由于 $T_{\mathbf{S}}$ 是强对称幺半单子，而 $\mathcal{D}$ 是非对称幺半等价，传输后的单子 $T_{\mathbf{S}}^{\mathrm{Hilb}}$继承了一个规范的强对称幺半结构，包括其强度和相干数据。

**步骤 3：代数范畴的等价。**

范畴论中的一项标准结果指出，等价 $\mathcal{D} : \mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ 可提升为相应传递单子的 Eilenberg–Moore 范畴之间的等价。因此，存在一个典范等价

$$T_{\mathbf{S}}\text{-}\mathbf{Alg} \simeq T_{\mathbf{S}}^{\mathrm{Hilb}}\text{-}\mathbf{Alg}.$$

将此等价与定理 5 结合起来——定理 5 将 $T_{\mathbf{S}}$-代数与相对于$\mathbf{S}$、模去操作等价后的量子过程对应起来——即可得到所需的等价

$$\mathbf{QProc}_{\sim}^{\mathrm{Hilb}} \simeq T_{\mathbf{S}}^{\mathrm{Hilb}}\text{-}\mathbf{Alg}.$$

证明至此完成。 □

**注释 23 (**有限维性**)。** 上述结果实质上依赖于有限维性。在无限维情形下， $C^*$-代数与希尔伯特空间之间的等价不再成立，张量积变得更加微妙，并会出现额外的拓扑问题。要将歌剧集–单子语义扩展到无限维量子系统，需要采用截然不同的技术。

**注释 24 (**表示无关性**)。** 推论 *5* 表明，由协同单子 $T_{\mathbf{S}}$ 给出的歌剧集–单子语义在有限维情形下具有表示无关性 。尽管这种构造以 $C^*$-代数（海森堡）图景表述最为自然——在该图景中，复合与张量积可以通过特别简洁的代数方式处理——但所得语义结构可通过对称幺半等价忠实地传递到希尔伯特空间（薛定谔）图景。

特别是：

• 由幺半群 $\mathbf{S}$ 诱导的操作等价概念，在海森堡表示与薛定谔表示之间转换时保持不变。

• 协同单子 $T\mathbf{s}$ 所编码的对称幺半结构和复合结构，在典范幺半等价下得以保留。

• 由此得到的量子过程代数刻画，捕捉的是其内在的操作行为，而非特定数学表示所带来的表象。

那么，我们可以由此推断出什么？协同单子提供了一个统一且与表示无关的语义框架，连接了范畴量子力学、运算子电路描述和标准希尔伯特空间量子信息理论。

## 5 幺半群理想与不可能性定理

不可克隆定理是量子力学中的一项基本限制，它禁止对未知量子态进行完美复制。在我们的运算子框架中，我们可以将这一物理限制编码为幺半群理想，以系统地从允许的量子过程空间中排除克隆操作。必须首先定义无克隆理想 $I_{\text{noclone}}$，其定义见定义 15。

**定义 15 (**幺半群理想 $I_{\text{noclone}}$**)。** 设**S** 为量子交互运算子（定义7）。**S** 中的幺半群理想 $I$ 是一个子集族

$$I(X_1,\dots,X_n;Y)\subseteq S(X_1,\dots,X_n;Y)$$

对于所有有限输入希尔伯特空间序列$(X_1,\dots,X_n)$和输出希尔伯特空间 $Y$，满足：

*(i)* 在运算子复合下封闭：如果 $f\in I(X_1,\dots,X_n;\,Y)$ 和 $g_i\in S(Y_{i1},\dots,Y_{ik_i};\,X_i)$ 对所有$i=1,\dots,n$均成立，则

$$\gamma(f;g_1,\dots,g_n)\in I(Y_{11},\dots,Y_{1k_1},\dots,Y_{n1},\dots,Y_{nk_n};Y).$$

*(ii)* 在前复合下封闭：如果 $f\in I(X_1,\dots,X_n;\,Y)$ 和 $h\in S(Y,Z_1,\dots,Z_m;\,W)$，则

$$\gamma(h;f,\mathrm{id}_{Z_1},\dots,\mathrm{id}_{Z_m})\in I(X_1,\dots,X_n,Z_1,\dots,Z_m;W).$$

*(iii)* 在对称作用下封闭：如果 $f\in I(X_1,\dots,X_n;\,Y)$ 和 $\sigma\in\Sigma_n$，则

$$\sigma\cdot f\in I(X_{\sigma^{-1}(1)},\dots,X_{\sigma^{-1}(n)};Y).$$

无克隆理想 $I_{\text{noclone}}$ 定义为 **S** 中最大的理想，其中不包含任何在任意上下文中可通过复合形成完美克隆映射的元素。更准确地说：
对于任意希尔伯特 空间 $H$，令 $\mathrm{Clone}_H\in S(H;H\otimes H)$ 为定义如下的完美量子克隆映射

$$\mathrm{Clone}_H(\psi)=\psi\otimes\psi\quad \textit{for all}\ \psi\in H.$$

那么，$I_{\text{noclone}}$ 是极大理想；对于所有 $f\in I_{\text{noclone}}$ 以及所有上下文（与其他**S**元素的复合），所得映射都不可能等于$\mathrm{Clone}_H$，对于任意 $H$皆如此。
等价地，$I_{\text{noclone}}$ 包含所有与完美克隆在复合意义下正交的量子操作：无论如何对包含 $I_{\text{noclone}}$ 元素的运算进行复合，都无法产生精确克隆操作。

这个定义采用自上而下的方法来刻画不可克隆约束：

• **极大性：** 通过取能够避免克隆的最大理想，我们确保排除的是防止克隆所必需的极小运算集合。这在物理上很自然——我们希望尽可能允许更多量子操作，只是不允许那些会导致克隆的操作。

• **组合安全性：** 理想结构保证，如果我们从非克隆运算出发，并以任意方式（顺序地、并行地或通过置换）将它们复合，就绝不会意外地产生克隆操作。这对于安全地构建复杂的量子协议至关重要。

• **上下文无关性：** "在任意上下文中"这一条件确保，若某个运算可以与其他运算复合后用于克隆，即使它本身并不执行克隆，也会被排除。这可以防止隐藏的克隆能力。

这种表述符合物理直觉：不可克隆定理所关注的不只是单个运算，还包括通过复合构建模块能够实现什么。

**例 3**（不可克隆理想的一个具体幺半群实现）。我们构造一个具体的量子交互运算子 $S$ 和一个幺半群理想 $I_{\text{noisy}}$，以说明定义 *15* 中抽象的无克隆理想 $I_{\text{noclone}}$如何在具有物理意义的模型中实现。

幺半群 $S$：***CPTP***映射。

• 对象：有限维希尔伯特空间（例如，$\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$）。

• 运算：$S(X_1, \ldots, X_n;\ Y)$ 是从 $\mathcal{L}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$ 到 $\mathcal{L}(Y)$的所有完全正迹保持（CPTP）映射的集合。这些映射代表所有物理上可允许的量子操作。

• 复合 $\gamma$：给定 $f \in S(X_1, \ldots, X_n;\ Y)$ 和 $g_i \in S(Y_{i1}, \ldots, Y_{ik_i};\ X_i)$，复合$\gamma(f;\ g_1, \ldots, g_n)$ 是通过将 $g_1, \ldots, g_n$ 的输出连接到 $f$ 相应输入而形成的 ***CPTP*** 映射。

• 单位元：$\mathrm{id}_X$ 是作用于 $\mathcal{L}(X)$的恒等完全正迹保持映射。

理想 $I_{\text{noisy}}$。我们将 $I_{\text{noisy}}$ 定义为所有非等距 ***CPTP***映射组成的族。形式化地说：

$$I_{\text{noisy}}(X_1, \ldots, X_n; Y) = \{f \in S(X_1, \ldots, X_n; Y) \mid f \textit{ is not an isometry}\}.$$

该理想包含所有噪声信道（例如退极化信道、振幅阻尼）和丢弃信息的运算（例如迹映射 $\mathrm{Tr}(\rho)$）。

验证 $I_{\text{noisy}}$ 是一个幺半群理想。

*(i)* 在运算子复合下封闭：如果 $f$ 是非等距映射，而 $g_i$ 是任意 ***CPTP***映射，那么 $\gamma(f;\ g_1、\ldots\ldots、\ g_n)$ 仍然是非等距映射。复合无法将 ***Kraus*** 秩降至 ***1***。

*(ii)* 在前复合下封闭：如果 $f \in I_{\text{noisy}}(X_1、\ldots\ldots、\ X_n;\ Y)$ 和 $h \in S(Y,\ Z_1、\ldots\ldots、\ Z_m;\ W)$，那么

$$\gamma(h; f, \mathrm{id}_{Z_1}, \ldots, \mathrm{id}_{Z_m}) \in I_{\text{noisy}}(X_1, \ldots, X_n, Z_1, \ldots, Z_m; W).$$

与非等距映射进行前复合不能产生等距映射。

*(iii)* 在对称作用下封闭：如果 $f \in I_{\text{noisy}}(X_1、\ldots\ldots、\ X_n;\ Y)$ 和 $\sigma \in \Sigma_n$，那么

$$\sigma \cdot f \in I_{\text{noisy}}(X_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, X_{\sigma^{-1}(n)}; Y).$$

对输入进行置换可保持非等距性质。

因此， $I_{\text{noisy}}$ 确实是 $S$ 中的幺半群理想。

与无克隆理想的关系 $I_{\text{no}}$ 克隆。

在这个幺半群中，所有运算都是线性完全正迹保持映射。完美克隆运算

$$\text{Clone}_H(\psi) = \psi \otimes \psi \quad \textit{for all } \psi \in H$$

是非线性的，因此不属于 $S$。因此，在 $S$ 中进行任何复合序列都无法为任意希尔伯特空间 $H$生成克隆$_H$ 。

理想 $I_{\text{noisy}}$ 提供了一个满足不可克隆约束的幺半群理想的具体示例：

- $I$中的元素噪声无法通过复合产生克隆。
- 即使补集（等距映射）也无法克隆，因为它们仍然是线性操作。
- 理想结构确保了复合安全性：来自 $I_{\text{含噪}}$ 的运算序列不可能意外地产生克隆能力。

因此， $I_{\text{noisy}} \subseteq I_{\text{noclone}}$，这表明一种具有物理意义的理想如何自然地满足抽象无克隆理想的条件，同时仅排除含噪的信息损失操作。 □

虽然定义 15 提供了一种优雅的自上而下刻画，但出于构造性目的和数学分析的需要，采用一种明确指出问题运算的生成式描述也很有用。这一概念由定义 16 形式化。

**定义 16** （通过生成定义的无克隆理想）。 令**S** 为 ***CPTP*** 映射构成的量子交互运算子。

对于每个希尔伯特空间 $H$，令 $\zeta_H : H \to H \otimes H$ 表示由$\zeta_H(\psi) = \psi \otimes \psi$ 定义的形式克隆操作，该定义对所有纯态 $\psi \in H$均成立。注意， $\zeta_H$ 并非***CPTP***映射（它是非线性的），因此不属于**S**。

定义 $\mathcal{F}_{\text{clone}}$ 为所有满足以下条件的 $f \in S$ 的集合：存在一个幺半群上下文 $C[-]$ （由 **S** 中的元素构成的复合模式），使得复合运算 $C[f]$ 在扩展为作用于态时，与 $\zeta_H$ 在它们的共同定义域上相一致。

克隆生成理想 $J_{\text{clone}} \subseteq S$ 是所有包含 $\mathcal{F}_{\text{clone}}$ 的幺半群理想的交集。等价地， $J_{\text{clone}}$ 是包含所有可能参与克隆复合的运算的最小理想。

该无克隆理想于是为

$$I_{\text{noclone}} = S \setminus J_{\text{clone}},$$

它由所有与克隆在复合意义上正交的运算组成：由 $I_{\text{noclone}}$ 构成的上下文无法产生克隆模式 $\zeta_H$。

**注释 25** （定义的等价性）。 定义 *15* 和定义 *16* 对同一理想给出了互为补充的刻画：

- 定义 *15 d* 将 $I_{\text{noclone}}$ 描述为避免克隆的最大理想（自上而下的语义方法 *）*
- 定义 *16* 将 $I_{\text{无克隆}}$描述为包含克隆型运算的最小理想的补集（自下而上的句法方法）

这种对偶性体现了量子力学中的一个基本事实：不可克隆性既是对整个运算空间的全局约束，也是局部约束，可追溯到特定的问题模式。

**引理 5.** 如果**S** 是一个由线性完全正迹保持映射构成的幺半群，那么**S** 中的任何元素都无法实现形式生成元$\zeta_H$。因此， $J_{\text{clone}}$ 是真理想，且 $I_{\text{noclone}}$ 非空。

证明。 形式克隆操作 $\zeta_H$ 是非线性的，而**S** 中的所有元素都是线性完全正迹保持映射。由于线性在运算子复合下保持不变，因此**S** 中的元素无论经过怎样的复合，都无法产生 $\zeta_H$。因此， $J_{\text{clone}} \neq S$，使得 $I_{\text{noclone}}$ 非空。 □

这个生成式定义 16 采用自底向上 的方法，与前一个定义互为补充:

• **构造性:** 它明确指出了能够生成整个不可克隆约束的"种子"运算（即那些可嵌入克隆形状上下文的运算）。这为验证提供了实用的判据。

• **数学上自然:** "由禁用模式生成的理想"这一构造在代数理论中十分常见，并能确保良好的范畴性质。使用形式生成元 $\zeta_H$ 避免了要求与非 CPTP 映射相等所导致的数学不一致。

• **物理意义清晰:** 通过直接引用克隆操作 $\zeta_H$，该定义明确关联到物理上的不可克隆定理，同时妥善处理了克隆并非有效量子操作这一事实。

**注 26** （与例 3 的联系）。 在例 *3* 中，非等距映射的理想 $I_{\text{noisy}}$ 满足$I_{\text{noisy}} \subseteq I_{\text{noclone}}$，恰恰是因为 $I_{\text{noisy}}$ 中没有任何元素能参与产生克隆的上下文。生成式定义提供了一种方法，用于检验更宽松的理想是否仍遵循不可克隆原理。

**定理 6** （通过算子代数商构造兼容克隆的扩张）。 设 $S$ 为 *CPTP* 映射的量子相互作用幺半群，$I_{\text{noclone}} \subseteq S$ 为定义 *15* 中定义的无克隆理想。

考虑以下两步构造:

*1.* 构造商幺半群 $Q := S/I_{\text{noclone}}$，将所有在复合意义上与克隆正交的运算归并为平凡等价类。

*2.* 对每个希尔伯特空间 $H$，形式上添入一个生成元 **克隆**$_H$： $H \to H \otimes H$，表示完美克隆，从而得到扩展算子代数 $Q$[克隆]。

那么 $Q$[克隆] 满足:

*(1)* 克隆的存在性：克隆映射 **克隆**$_H$ 是幺半群中定义良好的元素，这与原幺半群 $S$ 形成对比，后者中不存在这些映射（因为它们是非线性的，且不满足完全正迹保持）。

*(2)* 兼容结构的保持： $S$ 中所有不依赖不可克隆性来成立的幺半群运算律，都在 $Q$[克隆]中得以保留。

*(3)* 一致性：克隆运算的存在不会导致矛盾，因为通常用于证明不可克隆定理的特定运算已在商 $Q$中被识别出来，从而打断了导致矛盾的推理链条。

证明。我们分三部分进行，分别对应定理的三个断言。

**第 1 部分：商幺半群 $Q = S/I_{\text{noclone}}$的构造。**

由于 CPTP 映射范畴并非富化于阿贝尔群之上，我们采用集合论商构造。对于每个希尔伯特空间元组 $\vec{X} = (X_1、\ldots\ldots、X_n)$ 和输出希尔伯特空间 $Y$，在同态集 $S(\vec{X}; Y)$ 上定义等价关系 $\sim_{\vec{X};Y}$:

$$f \sim_{\vec{X};Y} g \quad \text{if and only if} \quad \big(f = g\big) \text{ or } \big(f \in I_{\text{noclone}}(\vec{X};Y) \text{ and } g \in I_{\text{noclone}}(\vec{X};Y)\big).$$

也就是说，给定同态集内属于理想 $I_{\text{noclone}}$ 的所有元素都被识别为同一个等价类，而理想之外的元素则保持彼此不同。该关系是局部于同态集的：它只关联元数及输入/输出类型完全相同的运算。

商幺半群 $Q$ 具有：

- **对象：** 与 $S$ 相同的希尔伯特空间。
- **运算：** $Q(\vec{X};Y) = S(\vec{X};Y)/\sim_{\vec{X};Y}$。
- **复合：** 由 $S$：

$$\gamma_Q([f];[g_1],\ldots,[g_n]) = [\gamma_S(f;g_1,\ldots,g_n)].$$

  这是定义良好的，因为 $I_{\text{noclone}}$ 是一个幺半群理想：只要有任一参数属于该理想，复合运算就属于结果类型对应的理想。

- **恒等态射与对称作用：** $\mathrm{id}_X^Q = [\mathrm{id}_X^S]$ 和 $\sigma \cdot [f] = [\sigma \cdot f]$，根据理想的性质，这些也都是定义良好的。

**第 2 部分：添加克隆生成元。**

完美克隆操作 $\mathsf{Clone}_H(\psi) = \psi \otimes \psi$ 不是原幺半群 $S$的元素，因为它既不是线性的，也不是完全正的。因此，我们将它形式地添加为一个新的生成元。

对每个希尔伯特空间 $H$，在幺半群 $Q$中添加一个形式符号 $\mathbf{Clone}_H$，并声明它是 $Q(H; H \otimes H)$的元素。令 $Q[\mathsf{Clone}]$ 为由 $Q$ 与所有 $\mathbf{Clone}_H$自由生成的幺半群。更准确地说，$Q[\mathsf{Clone}]$ 由幺半群范畴中的以下推出得到：

$$\begin{array}{ccc} F(\{\mathbf{Clone}_H\}_H) & \xrightarrow{\ \iota\ } & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\{\mathbf{Clone}_H\}_H) & \longrightarrow & Q[\mathrm{Clone}] \end{array}$$

其中，$F(\{\text{克隆}_H\}_H)$ 是由克隆生成元生成的自由幺半群，$\iota$将每个生成元映射到平凡元 $[0] \in Q$（即理想的等价类），而右侧的竖直箭头是典范嵌入。这个推出自由地添加克隆生成元，同时保留它们先前已被识别为平凡元这一点。

因此 **克隆 克隆**$_H$ 成为 $Q[\mathsf{Clone}](H; H \otimes H)$ 中定义良好的运算，从而确立了断言 (1 ).

**第 3 部分：相容律的保持与一致性。**

由于 $Q$ 是 $S$ 对一个理想取商所得，$S$ 中任何不依赖于是否可以进行克隆的运算等式，*independentlyof whether cloning is possible* 都会下降为 $Q$ 中的等式。根据推出的泛性质，只要这些等式并未实质性地涉及克隆生成元，它们还会进一步扩展到 $Q[\mathsf{Clone}]$, 。

如果一条律可以在不提及属于 $I_{\text{noclone}}$ 的运算、也不依赖于在 $\mathbf{Clone}_H$ 中失效的线性性质的情况下表达，那么它就与克隆相容。例如：

- 顺序复合的结合律依然成立。
- 并行复合与顺序复合的交换律依然成立。
- 对称同构依然成立。

相比之下，不可克隆定理的标准证明利用了一些与克隆不相容的特定性质，例如：

- 所有CPTP映射的线性。
- 转置映射或某些纠缠操作的具体行为；根据构造，它们属于 $I_{\text{不可克隆}}$。

由于这些运算已在商 $Q$ 中被等同，导致在存在克隆时产生矛盾的推理链便被打断。因此， $Q[\text{Clone}]$ 是一个一致的幺半群，它包含完美克隆操作，同时保留了不依赖于不可克隆性的量子理论的复合结构。

这就证明了命题（2）和（3）。 □

**注释 27** （解释）。 构造 $Q[\text{Clone}]$ 应被视为允许克隆的量子理论的句法或形式扩展，而非可在物理上实现的理论。它以幺半群的方式展示了量子力学的哪些结构特征对于不可克隆定理至关重要，哪些则无关紧要。对 $I_{\text{noclone}}$ 取商，恰好识别出若存在克隆便会导致不一致的那些运算。

**定义 17** （广播操作）。 设 $H$ 是一个希尔伯特空间。广播操作是一个形式映射

$$\xi_H : H \longrightarrow H \otimes H$$

满足所有纯态 $\psi \in H$的以下边缘态保持性质：

$$\text{Tr}_1(\xi_H(\psi)) = \psi \quad \textit{and} \quad \text{Tr}_2(\xi_H(\psi)) = \psi,$$

其中$\text{Tr}_1$ 和$\text{Tr}_2$ 表示偏迹。

此定义是对广播应实现何种效果的规范。在下文的幺半群发展中， $\xi_H$ 将被视为具有此规范的形式生成元，而非可实现的量子操作。

**备注 28 (**从规范到生成元**)**。 定义 *17* 提供了广播的语义内容：它应该实现什么效果。在接下来的幺半群构造中，我们将:

*1.* 将 $\xi_H$ 视为具有此规范的形式生成元

*2.* 基于能够实现这一模式的运算构造理想

*3.* 使用引理 *6* 中的规格证明不可嵌入性

因此，该定义提供了指导形式化幺半群构造的含义 。

**推论 6** （不可广播定理的幺半群表述）。 设 $S$ 为 ***CPTP*** 映射的量子交互运算子。存在一个不可广播理想 $I_{\text{nobroadcast}} \subset S$，满足:

（*i*）商幺半群 $S/I_{\text{nobroadcast}}$ 在形式上添加广播生成元 $\xi_H$ 后，包含一个完美广播操作。

（*ii*）不存在忠实的幺半群态射 $\Phi : (S/I_{\text{nobroadcast}})[\xi] \hookrightarrow \text{LinOp}$ 到任何线性运算幺半群，能将 $\xi_H$ 映射为满足广播条件的线性映射。

这为量子不可广播定理提供了一种范畴编码：不可广播性体现为形式扩展后的幺半群无法嵌入任何线性映射幺半群。

证明。 我们分四步进行，与不可克隆思想的构造相平行 al.

**步骤 1：形式化广播模式**。 令 $\xi_H$ 表示如上所定义的形式化广播生成元。关键的是， $\xi_H$ **不是** 原幺半群 $S$中的元素，因为 $S$ 中的任何完全正迹保持映射都是线性的，而完美广播则需要非线性。

**步骤 2：构造与广播相关的理想**。 将 $\mathcal{F}_{\text{broadcast}}$ 定义为所有满足以下条件的运算的集合：存在一个幺半群上下文 $C[-]$ ，使得复合模式 $C[f]$ 与广播模式 $\xi_H$相匹配。

令 $J_{\text{broadcast}}$ 为 $S$ 中包含 $\mathcal{F}_{\text{broadcast}}$的**最小幺半群理想**。直观地说， $J_{\text{broadcast}}$ 汇集了所有可能参与广播复合的运算。

将 $I_{\text{nobroadcast}}$ 定义为 $S$ 中与 $J_{\text{broadcast}}$不相交的**最大幺半群理想**。等价地，

对所有上下文 $C[-]$, $C[f]$ 都不能与广播模式 $\xi_H$}.相匹配

$I_{\text{nobroadcast}}$ 中的运算与广播在复合意义下正交：任何涉及这些运算的复合都无法产生广播模式。

**步骤 3：商幺半群与广播的形式伴随**。 使用集合论构造形成商幺半群 $Q = S/I_{\text{nobroadcast}}$ ： 对于每个同态集，将理想中的所有元素归为同一个等价类，同时保持理想之外的元素彼此不同。

然后，我们通过幺半群范畴中的推出构造，形式上添入广播生成元 $\xi_H$ ：

$$\begin{array}{ccc} F(\{\xi_H\}_H) & \xrightarrow{\iota} & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\{\xi_H\}_H) & \longrightarrow & Q[\xi] \end{array}$$

其中， $F(\{\xi_H\}_H)$ 是由广播生成元生成的自由幺半群，而 $\iota$ 将每个生成元映射到 $Q$ 中的平凡元（即理想的等价类）。所得幺半群 $Q[\xi]$ 包含形式上的广播运算 **广播**$_H := [\xi_H]$。

**步骤 4：不可嵌入线性幺半群**。 以下关键引理确立了这一结果与物理学中的不可广播定理之间的联系。

**引理 6** (不可嵌入性)。 不存在单射幺半群态射

$$\Phi : Q[\xi] \hookrightarrow \text{LinOp}$$

映射到任意线性映射幺半群，且将 **广播**$_H$ 映射为满足所有态的广播条件的线性映射 $L$ ： $H \to H \otimes H$ 。

引理证明。 反设这样的态射 $\Phi$ 存在，并令 $L = \Phi$(**广播**$_H$) 为一个线性映射。

对于任意纯态 $\psi \in H$，广播条件要求：

$$\text{Tr}_1(L(\psi\psi^\dagger)) = \psi\psi^\dagger \quad \text{and} \quad \text{Tr}_2(L(\psi\psi^\dagger)) = \psi\psi^\dagger.$$

对所有纯态都满足这些条件的唯一映射，就是（必然是非线性的）克隆映射$\psi\psi^\dagger \mapsto \psi\psi^\dagger \otimes \psi\psi^\dagger$。

如果 $L$ 是线性的，它就必须在所有纯态上与这个克隆映射一致。根据线性，它随后会扩展到混合态，形式为 $L(\rho) = \rho \otimes \rho$，对所有密度算符 $\rho$都成立。但这个映射是非线性的：对于不同的密度算符 $\rho_1 \neq \rho_2$ 和正标量 $\alpha$，$\beta$ 且满足 $\alpha + \beta = 1$,

$$\begin{aligned} L(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2) &= (\alpha\rho_1 + \beta\rho_2) \otimes (\alpha\rho_1 + \beta\rho_2) \\ &= \alpha^2\rho_1 \otimes \rho_1 + \alpha\beta(\rho_1 \otimes \rho_2 + \rho_2 \otimes \rho_1) + \beta^2\rho_2 \otimes \rho_2, \end{aligned}$$

而线性性则要求

$$\alpha L(\rho_1) + \beta L(\rho_2) = \alpha\rho_1 \otimes \rho_1 + \beta\rho_2 \otimes \rho_2.$$

只要 $\rho_1 \neq \rho_2$ 和 $\alpha\beta \neq 0$，这些表达式就不相同。

因此，不存在能满足广播条件的线性映射 $L$，这与“ $\Phi$将**广播**$_H$ 映射到 LinOp 中的一个元素”这一假设相矛盾。 □

这个引理告诉我们一个重要事实。尽管 $Q[\xi]$ 形式上包含一个广播运算，但它无法在任何线性映射幺半群中得到忠实表示。这种范畴不可嵌入性恰好刻画了量子不可广播定理。

□

**例 4** （量子比特示例）。 让我们考虑一个量子比特情形，其希尔伯特空间为 $H = \mathbb{C}^2$。偏迹映射 $\mathrm{Tr}_2 : H \otimes H \to H$ 属于 $I_{\mathrm{nobroadcast}}$，因为仅由偏迹和其他 *CPTP* 映射构成的复合无法产生一个能够广播任意态的映射。相比之下，一个假想的完美克隆映射（若其存在）则属于 $J_{\mathrm{broadcast}}$，因为克隆显然能够实现广播。

**注 29(**歌剧方法的普适性**)**。 上述构造具有普适性：对于任何禁戒物理操作 $\zeta$ （克隆、删除、信号传递等），都可以：

*1.* 定义一个表示禁戒模式的形式生成元 $\xi_\zeta$。 *2.* 构造由可能参与产生 $\zeta$ 的运算组成的理想 $J_\zeta$。 *3.* 将 $I_\zeta$ 定义为与 $J_\zeta$ 不相交的最大理想。 *4.* 构造商 $S/I_\zeta$，并在形式上添入 $\xi_\zeta$。 *5.* 证明其无法嵌入适当的目标歌剧中。

这为量子禁止定理提供了一种统一的幺半群语言，揭示了它们共同的结构根源：它们约束的是复合模式，而非彼此孤立的物理事实。

**注 30 (**与不可克隆定理的比较**)**。 无广播约束严格弱于不可克隆约束。为什么？虽然克隆蕴含广播，但反过来并不成立，因为混合态不满足这一关系。在幺半群框架下，这种层级关系体现为理想包含关系：

$$I_{\mathrm{noclone}} \subseteq I_{\mathrm{nobroadcast}} \subset S.$$

任何能够参与克隆的运算当然也能够参与广播，但反之则不成立。这种包含关系为这些基本量子约束之间的逻辑关系提供了一种幺半群刻画。

## 参考文献

[1] S.-Y. Chang, 《Hilbmult：用于算子代数的巴拿赫富集多范畴》，2025。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/2511.13674[2]S.-Y. Chang, 《复合与相干性：算子网络的语法》，2025。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/2511.13706[3] OpenAI, 《ChatGPT（GPT-5）模型》，https://chat.openai.com/，2025，用于想法验证和参考资料辅助的大语言模型。[4] DeepSeek-AI, 《DeepSeek 大语言模型》，https://www.deepseek.com/，2025，用于交叉验证概念和数据的 AI 助手。[5] W. F. Stinespring, 《C*-代数上的正函数》，《美国数学会会刊》，第 6 卷，第 2 期，第 211–216 页，1955。[6] P. S. Mulry, 《Kleisli 范畴的提升定理》，载于《程序语义数学基础国际会议》。Springer，1993，第 304–319 页。