arXiv:2512.16003v1 [math.RA] 17 Dec 2025

分离图的 Leavitt 逆半群

PERE ARA、ALCIDES BUSS 和 ADO DALLA COSTA

谨以此文献给我们的朋友和同事 *Gene Abrams*，祝贺他退休并迎来*70*岁生日

摘要。我们引入并研究了一个与分离图（E，C）相关联的新逆半群，称为 *Leavitt* 逆半群。该半群是分离图逆半群 $\mathcal{S}$（E，C）的一个商；分离图逆半群由我们在前一篇论文 [9], 中引入，并为交换含幺环 K 上的驯化Leavitt路径代数 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}$（$E$，$C$）提供了一个规范的逆半群模型。

我们的第一个主要结果将 Leavitt 逆半群 $\mathcal{LI}$（E，C）描述为一个受限半直积：自由群作用于 E 的边上的某个半格，并且该半格与 $\mathcal{LI}$（E，C）的幂等元半格同构。这个以 Leavitt–Munn 树为基础的描述给出了 $\mathcal{LI}$（E，C）中元素的标准形。

我们得到了 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中元素的标准形，由此得出 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的显式线性基。基于这一结果以及 $\mathrm{LI}(E,C)$ 的结构性质，我们证明了从 $\mathrm{LI}(E,C)$ 到 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的自然同态是单射，因此 $\mathrm{LI}(E,C)$ 可嵌入为 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中由典范部分等距元生成的逆半群。其他应用包括确定从温和 Cohn 代数 $\mathrm{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 到温和 Leavitt路径代数 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的自然映射之核 Q 的自然基、计算根基，以及刻画谱的孤立点。文中还讨论了若干例子，例如 Cuntz 分离图和自由分离，以阐释这一理论。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识 4 2.1. 有向图 4 2.2. 分离图 4 2.3. 逆半群 4 2.4. 图的基本群胚、C-分离路径和 C-相容树 5 2.5. 分离图的逆半群、驯化Cohn路径代数和驯化Leavitt路径代数 6 3. 分离图的 Leavitt 逆半群 7 4. $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$中的标准形 12 5. Cohn路径代数与Leavitt路径代数之间的关系 19 6. 理想$\mathcal{Q}$ 的线性基 21 7. Leavitt 逆半群的谱和紧谱 26 8. 群胚的孤立点。根基。 30 9. 例子 33 参考文献 38

2020 数学主题分类。 16S88, 20M18。关键词与短语。 逆半群，分离图，Leavitt路径代数。第一作者获得了西班牙国家研究署的部分资助（资助项目编号：PID2023- 147110NB-I00 和 CEX2020-001084-M），以及加泰罗尼亚自治区政府大学与研究委员会的资助（资助项目编号：2021-SGR-01015）。第二作者获得了国家科学技术发展委员会和巴西圣卡塔琳娜州研究与创新基金会的资助，第三作者获得了国家科学技术发展委员会的资助（项目编号：402924/2022-3）。

1. 引言

Leavitt路径代数由 Abrams 和 Aranda Pino [1]以及 Moreno、Pardo 和第一作者 [15], 独立引入，作为 Cuntz–KriegerC^*-代数的代数类比。此后，它们成为代数、泛函分析与符号动力系统交叉领域中的核心研究对象，与K-理论、代数分类和非交换几何有着深刻联系，参见 [2,3,23] 及其中的参考文献。理解 Leavitt路径代数的一种特别富有成效的视角源自逆半群和群胚理论，承袭 Paterson[38] 和 Exel [25], 的开创性思想；这些思想随后由 Steinberg [40] 以及 Clark、Farthing、Sims 和 Tomforde [21]独立转化到代数框架中。在这一框架下，逆半群编码了图中路径所生成的部分对称。

近年来，分离图及其相关的 Leavitt路径代数受到了广泛关注，参见例如 [7–12,14,30]。分离图通过允许对从一个顶点发出的边集进行多重“分离”，从而推广了通常的有向图。这一框架涵盖了图代数的经典版本和自由版本，并展现出更加丰富的结构行为。特别地，分离图产生了一个代数层次结构——Cohn路径代数、Leavitt路径代数及其温和版本——其中，温和版本可以通过逆半群和群胚进行自然描述。

有向图的逆半群由 Ash 和 Hall 在 [17] 中引入。此后，人们在多篇论文中对其进行了研究，通常涉及 Leavitt路径代数的结构，参见例如 [29,33,35–37]。特别地，在 [35] 中引入并研究了图逆半群 $\mathcal{S}(E)$ 的某个商$\mathcal{LI}(E)$。这个逆半群$\mathcal{LI}(E)$ 被称为 E 的 Leavitt 逆半群，其特征在于：它与 Leavitt路径代数$\mathcal{L}_K(E)$ 中由 $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ 的自然副本生成的乘法子半群重合。

本文旨在通过引入一种新的逆半群——分离图 (E,C) 的 *Leavitt* 逆半群 $\mathcal{LI}(E,C)$, 系统地建立分离图的驯化 Leavitt 路径代数的标准形 理论。该半群定义为分离图逆半群 $\mathcal{S}(E,C)$ 的一个商；后者由 [9], 引入，并通过施加某些额外的自然关系得到该商。它可以用 Leavitt–Munn 树具体描述（详细定义见第 3 节）。Leavitt 逆半群$\mathcal{LI}(E,C)$ 将此前描述的同名半群$\mathcal{LI}(E)$推广到一般情形；当对 E 取平凡分离时，它便退化为后者。我们在定理 4.9 中证明，$\mathcal{LI}(E,C)$ 与驯化 Leavitt 路径代数$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中由 $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ 生成的子半群自然同构。

我们的观点是，在研究任意分离图的驯化 Leavitt 路径代数时，Leavitt 逆半群 $\mathrm{LI}(E,C)$ 是合适的逆半群；这与研究温和 Cohn 代数 $\mathrm{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 时，图逆半群 $\mathrm{S}(E,C)$ 是自然的研究对象如出一辙。因此，考察 Leavitt 逆半群不仅自然地为 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中的元素导出一种新的标准形，也自然地带来对 $\mathrm{S}(E,C)$ 的紧谱 $\mathrm{E}^{\mathrm{tight}}$ 中$\widehat{\ }$点的另一种描述。事实上，我们直接证明 $\mathrm{LI}(E,C)$ 的紧谱与 $\mathrm{S}(E,C)$ 的紧谱等变同胚；这一事实进而为该分离图的紧群胚 $\mathrm{G}^{\mathrm{tight}}(E,C)$ 带来一种新的模型，我们称之为 $\mathrm{G}^{\mathrm{tight}}(E,C)$ 的 Leavitt 模型，见第 7 节。顺带一提，这也引出了这样一个问题：半群 $\mathrm{S}(E,C)$ 和 $\mathrm{LI}(E,C)$ 是否共鸣；这是 Ruy Exel [26] 最近引入的一个新概念。证明思路见注 7.8。

利用这些工具以及关于 Steinberg 代数根基的一项近期结果 [22] ，我们能够完整刻画驯化 Leavitt 路径代数 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 的根基。根基的确定是一个重要的结构问题，已在

多类组合代数中得到研究，包括非分离图的 Leavitt 路径代数 [16]、与 k-图 [20] 相关的 Kumjian-Pask代数，以及单边移位代数 [27]。

温和 Cohn 代数 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 与驯顺Leavitt代数 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 由以下正合列联系起来

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C) \longrightarrow \mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C) \longrightarrow 0,$$

其中，$\mathcal{Q}\ =\mathcal{Q}(E,\ C)$ 是$\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 中由所有元素 $q_X\ =v-\sum_{e\in X} ee^*$ 生成的理想，其中 $X\in C_v$、 $v\in E^0$ 和 $|X|<\infty$。对于非分离图的 Leavitt路径代数，理想 $\mathcal{Q}$ 的结构在研究（双变） K理论及其在分类中的应用时起着核心作用；参见 [23, 24]。在这种情况下，根据命题 1.5.8 和 1.5.11], , 理想 $\mathcal{Q}$ 总是包含在 Cohn路径代数的根基中；但本文将表明，对于分离图而言，情况通常并非如此，因为其理想 $\mathcal{Q}$ 的结构复杂得多。不过，我们在此能够计算任意分离图 $(E,\ C)$ 的理想 $\mathcal{Q}(E,\ C)$ 的线性基，这是进一步深入理解其结构的第一步。

我们以概述本文内容作为引言的结尾。经过一节预备知识后，我们的第一个主要定理（定理 3.15）将$\mathcal{LI}(E,C)$描述为自由群 $\mathbb{F}(E^1)$在一个半格上的半直积；该半格与(E,C)自然相关，并且同构于$\mathcal{LI}(E,C)$的幂等元半格。这为$\mathcal{LI}(E,C)$提供了清晰的结构图景，以及其元素的标准形。

第4节介绍我们关于驯化Leavitt路径代数 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中元素标准形的结果。事实上，我们为其典范部分交叉积分解的所有分量给出了显式线性基（定理 4.6）。我们在例4.7 中指出，对于非分离图 E，我们为 $\mathrm{L}_K(E)$ 构造的基与 Alhamadi、Alsulami、Jain 和 Zelmanov 在 [5]中得到的基密切相关。与 [5], 中一样，我们为 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 找到的基依赖于一个选择函数；它是一个函数 $\mathfrak{E}\colon\ C^{\mathrm{fin}}\to E^1$，满足$\mathfrak{E}(X)\in X$，对所有 $X\in C^{\mathrm{fin}}$均成立，其中 C^{fin} 是满足 $|X|<\infty$的集合 $X\in C$ 的集族。利用 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的基以及 $\mathrm{LI}(E,C)$ 的结构，我们在定理 4.9 中证明，$\mathrm{LI}(E,C)$ 忠实嵌入 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$，并且是由典范部分等距元生成的逆半群。

在第 5 节中，我们证明，对于任意分离图 $(E,\ C)$，驯化Cohn路径代数 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 与另一个分离图 $(E,\ C)$ 的 Leavitt 路径代数密切相关，而后者是由 $(E,\ C)$ 显式构造出来的。事实上，我们更一般地在（驯化的）Cohn-Leavitt 路径代数这一类中开展研究，这类代数也称为相对科恩路径代数，介于科恩代数与利维特代数之间。这种灵活性非常方便，正如在非分离情形中（例如 [39]）已经显示的那样。我们利用驯化Leavitt路径代数与 Cohn路径代数之间的这种关系，以及我们先前的结果，得到理想 $\mathcal{Q}(E,\ C)$ 的一个线性基；该理想是典范投影$\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)\ \to\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 的核（定理 6.11）。

第 7 节计算了 Leavitt 逆半群 $\mathcal{LI}(E,\ C)$ 的谱和紧谱。如上所述，我们证明，$\mathcal{S}(E,\ C)$ 与 $\mathcal{LI}(E,\ C)$ 的紧谱是等变同胚的。因此，我们为分离图的紧群胚提供了三种不同的模型：完备模型、标准模型和 *Leavitt* 模型。对于每个具体问题，其中一种模型可能比其他模型更适用。Leavitt 模型对于处理驯化Leavitt路径代数的根基计算问题尤其有用。我们在第 8 节中彻底解决了这一问题，将我们的方法与 Steinberg 代数根基的一个最新结果 [22] 相结合。

最后，第9节讨论例子和应用。我们运用这些技巧，明确计算任意分离图 (E,C) 和任意域 K 上的理想 $\mathcal{Q}(E,C)\ \cap\ \mathrm{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$（定理 9.4）。接着，我们考察赋予自由分离的 Cuntz 分离图

图（例 9.7），以及重要的例子：集合 X 上自由逆幺半群 $\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)$ 的半群代数（例 9.9）。对于后者，我们利用自由逆幺半群代数的一种表示，将其视为某个分离图的温和 Cohn 代数的全角；该表示在例 4.10] 中得到。我们得到，有限集合 X 上的自由逆幺半群的半群代数的根基是该代数的本质理想，并计算了其结构。然而，当 X 为无限集合时，半群代数 $K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$ 的根基为零。

我们的结果统一并拓展了现有的 Leavitt路径代数标准形理论，表明可以通过逆半群系统地处理分离情形。我们预计，Leavitt 逆半群将成为未来研究 Leavitt路径代数及其相关 C^*-代数的结构与分类的基础工具。

2. 预备知识

本节回顾 [9]中的基本定义与结果。更多信息请参阅 [9] 。

2.1. 有向图。 有向图 E是一个四元组 $E=(E^0,\ E^1,\ s,\ r)$，由两个集合 E^0 和 E^1 以及两个映射 $s,\ r:\ E^1\to E^0$组成。 E^0 和 E^1 中的元素称为顶点和边，而映射 $s,\ r$ 分别称为源映射和靶映射。我们不要求图是有限或可数的。

E中的有限路径是形如 $\mu:=e_1\dots e_n$ 的边序列，其中对所有 $i\in\{1,\dots,n-1\}$，均有 $r(e_i)=s(e_{i+1})$。 μ的长度记为 $|\mu|:=n$，长度为 0 的路径与 E 的顶点相对应（我们令 $s(v)=r(v)=v$）。我们用 E^n 表示长度为 n 的所有有限路径的集合，而 $\mathrm{Path}(E):=\cup_{n=0}^{\infty}E^n$ 表示 E的所有路径的集合。显然，可以将源映射与靶映射扩展到 $\mathrm{Path}(E)$：若 $\mu=e_1\dots e_n\in \mathrm{Path}(E)$，则 $s(\mu)=s(e_1)$，且 $r(\mu)=r(e_n)$。给定 $\mathrm{Path}(E)$ 中的两条路径 $\mu,\nu\in$，且 $r(\mu)=s(\nu)$，通过与 $|\mu\nu|=|\mu|+|\nu|$拼接可得到一条新路径 $\mu\nu$。

给定一个图 E，我们将其扩展图 （也称为 E 的双图 ）定义为新图 $\hat{}E=(E^0,\ E^1\cup E^{-1},\ r,\ s)$，其中包含 E 作为子图，并设定$s(e^{-1}):=r(e)$，$r(e^{-1}):=s(e)$，对所有 $e\in E^1$ 均成立。这一构造是逆半群方法中的标准做法，因为它允许引入边的形式逆元。

2.2. 分离图。引入分离图是为了在经典构造与自由构造之间进行调和，并且它们自然会产生更丰富的逆半群。分离图是一个二元组 (E,C)，由一个图 $E=(E^0,E^1,s,r)$ 和定义在 E 上的分离$C=\bigsqcup_{v\in E^0}C_v$ 组成；该分离由划分 C_v 构成，这些划分将 $s^{-1}(v)\subseteq E^1$ 分为两两不相交的非空子集（若 v 是汇点，即 $s^{-1}(v)=\emptyset$，则 $C_v=\emptyset$）。平凡分离是指对所有非汇点 $v\in E^0$，均有 $C_v=\{s^{-1}(v)\}$ 的分离；具有平凡分离的图也称为平凡分离图或非分离图。 E 的自由分离是最细的分离，其中每个 $s^{-1}(v)$ 都被分成单元素集合，即$C_v=\{\{e\}:e\in s^{-1}(v)\}$。

2.3. 逆半群。 逆半群是一个半群 S，配备了满足以下条件的对合 $s\mapsto s^{-1}$

$$(1)\ ss^{-1}s=s\quad\text{and}\quad(2)\ (ss^{-1})(tt^{-1})=(tt^{-1})(ss^{-1})\quad\text{for all } s,t\in S.$$

在这种情况下， $s\in S$ 的伪逆 s^{-1} 由关系$ss^{-1}s=s$ 和 $s^{-1}ss^{-1}=s^{-1}$唯一确定。我们用 $\mathcal{E}(S)$ 表示 S的幂等元半格。逆半群自然地带有偏序：

$$s\le t\Leftrightarrow ts^{-1}s=s\Leftrightarrow ss^{-1}t=s.$$

给定一个半群 S，我们总可以添加一个（形式的）零元 0，从而得到一个带零元 $S_0=S\sqcup\{0\}$ 的半群；同样，也可以添加一个单位元 1，从而得到一个带单位元的半群（即幺半群）

$S_1 = S \sqcup \{1\}$。我们所关注的半群通常已经带有零元，有时还带有单位元。如果 S 已经带有单位元，我们通常记作 $S^* = S\backslash\{1\}$；如果 S 带有零元，则记作 $S^\times = S\backslash\{0\}$。注意，这些集合通常不是子半群。

关于逆半群的更多信息，请参阅 [31]。

设 S 是一个带零元的逆半群，Γ 是一个群。若映射 $\pi\colon S^\times \to \Gamma$ 满足：只要 $st \neq 0$，就有 $\pi(st) = \pi(s)\pi(t)$，则称其为从 S 到 Γ 的部分同态。在将逆半群描述为（受限）半直积时，这一概念经常出现。若部分同态 π 满足 $\pi^{-1}(1) = \mathcal{E}(S)^\times$，则称其为幂等纯。若存在这样的幂等纯部分同态，则称 S 是强 E^*-单位元的。根据[9, 命题 2.1], ，带零元的逆半群是强 E^*-单位元的，当且仅当它是受限半直积 $S = \mathcal{E}(S) \rtimes_\theta^r \Gamma$，其中 (D_g, θ_g) 是 Γ 在 $\mathcal{E}(S)$ 上的部分作用。

2.4. 图的基本群胚、 C-分离路径与 C-相容树。回顾一下，集合 X 上由 $X \cup X^{-1}$ 生成的自由群 $\mathbb{F}(X)$，可以定义为自由幺半群中约化词的集合，其乘积定义为 $\alpha \cdot \beta = \mathrm{red}(\alpha\beta)$，其中 $\alpha\beta$ 是 α 与 β 的拼接，而 $\mathrm{red}(-)$ 表示对词进行约化。给定一个有向图 E，类似的过程可得到 E 的基本群胚 $\mathfrak{Gr}(E)$，它在本文中发挥着重要作用。首先考虑路径半群 $\mathrm{P}(E)$，其非零元恰好是 E 上的路径；两条路径 λ 与 μ 的乘积，在 $r(\lambda) = s(\mu)$ 时，定义为它们的拼接 $\lambda\mu$；若 $r(\lambda) \neq s(\mu)$，则定义为 0。基本群胚 $\mathfrak{Gr}(E)$ 是 $\mathrm{P}(E)$ 中约化路径的集合，即不包含形如 xx^{-1} 的子路径（其中 $x \in \hat{}E^1$）的路径。$\mathfrak{Gr}(E)$ 中的乘积定义为

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{red}(\alpha\beta)$$

当 $r(\alpha) = s(\beta)$ 时，其中 $\mathrm{red}(-)$ 再次表示约化过程。这是一个群胚，其单位元集为 E^0。注意，对于所有 $g \in \mathfrak{Gr}(E)$，$g \cdot g^{-1} = s(g)$ 且 $g^{-1} \cdot g = r(g)$。需要注意的是，我们始终用记号 $\alpha \cdot \beta$ 表示 $\mathfrak{Gr}(E)$ 中的乘积，而记号 $\alpha\beta$ 则用于表示拼接乘积。对于 $\mathfrak{Gr}(E)$ 中的元素，只要表达式形如 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，我们通常就认为该表达式已经是约化形式。

$\mathcal{P}(E)$ 的一般非零元素称为路径，而 $\mathfrak{Gr}(E)$ 的元素称为约化路径。

我们在$\mathcal{P}(E)$ 上定义前缀序 $\leq_p$ ：若存在 $\gamma \in \mathcal{P}(E)$ 使得$\nu = \mu\gamma$，则 $\mu \leq_p \nu$ 。$\mathcal{P}(E)$ 的一个下子集 是$\mathcal{P}(E)$ 的一个子集 L ，并且对于 $\lambda \in L$，只要 $\nu \leq_p \lambda$，就有$\nu \in L$ 。

我们将 $\mathfrak{Gr}(E)$ 的凯莱图记为 Γ_E。我们有 $\Gamma_E^0 = \mathfrak{Gr}(E)$，并且当 $g, g\cdot e \in \mathfrak{Gr}(E)$ 时，对于 $e \in E^1$，从 g 到 $g\cdot e$ 存在一条边 (g, e)。我们有 $\Gamma_E = \bigsqcup_{v\in E^0} K_v$，其中 K_v 是 Γ_E 的连通分支，由所有满足 $s(\gamma) = v$ 的路径 γ 组成。

现在我们引入 C-分离路径的概念。

定义 2.1。 [9, 定义 3.6] 设 (E, C) 是一个分离图。 C-分离路径是一个约化路径 $w = y_1 \cdots y_n \in \mathfrak{Gr}(E)$，其中 $y_i \in \hat{}E^1$，且不包含任何形如 $x^{-1}y$ 的子路径，其中 $x, y \in X$ ，对任意 $X \in C$ 均成立。对于 $v \in E^0$，我们用 $\mathbb{F}_C(v)$ 表示所有满足 $s(\gamma) = v$ 的 C-分离路径 γ 的集合。集合 $\mathbb{F}_C := \bigsqcup_{v\in E^0} \mathbb{F}_C(v)$ 是所有 C-分离路径的集合。

现在我们来讨论 C-分离路径的 C-相容性这一关键概念。

定义 2.2. [9, 定义 3.7] 设 $v \in E^0$ 和 $\gamma, \nu \in \mathbb{F}_C(v)$。若 γ 和 ν满足 C-相容 ，则称它们为 C-相容，当且仅当 $\nu^{-1} \cdot \gamma = \mathrm{red}(\nu^{-1}\gamma) \in \mathbb{F}_C$。否则，称 γ 和 ν 为C-不相容。若子集 T 包含于 $\mathbb{F}_C(v)$，且其中每一对元素 T 都 C-相容，则称 T 为 C-相容。

从 E的凯莱图 Γ_E 来看，对于 $v \in E^0$， $\mathbb{F}_C(v)$的非空下子集是 Γ_E的连通分支 K_v 中的一棵子树 T，且包含 K_v的基点 v。当且仅当连接 γ, ν 中任意两个顶点的测地路径是一条 C-分离路径时，这样的非空下子集 T 才是 C-相容的，参见 [9, 备注 3.8]。$\mathbb{F}_C(v)$中所有非空有限的 C-相容下子集组成的集合记为 $\mathcal{X}(v)$。如上所述，$\mathcal{X}(v)$可以看作 $K_v \subseteq \Gamma_E$ 的一族特定有限子树，它们在第 3 节对 $\mathcal{LI}(E, C)$ 的描述中起着核心作用。

对于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$ 的非空子集 A，我们将 $A^{\downarrow} = \{x \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E) : x \leq_p a, \text{for some } a \in A\}$ 记作相对于前缀序由 A 生成的下子集。若 $A = \{a\}$ 是单元素集，我们也写作 $a^{\downarrow} := \{a\}^{\downarrow}$，以简化记号。注意，当 $A \subseteq \mathbb{F}_C$ 时， $A^{\downarrow} \subseteq \mathbb{F}_C$。

2.5.**分离图的逆半群、驯化Cohn路径代数与驯化Leavitt路径代数**。 我们从分离图的逆半群定义开始，它推广了通常的图逆半群构造。

定义 2.3。 [9] 设 (E, C) 是一个分离图。(E, C) 的逆半群 是由 $E^0 \cup \hat{} E^1 = E^0 \cup E^1 \cup E^{-1}$ 生成、满足以下关系的泛逆半群$\mathcal{S}(E, C)$:

(1) $vw = \delta_{v,\ w} v$ 对所有 $v,\ w \in E^0$; (2) $s(x)x = x$ 对所有 $x \in \hat{} E^1$; (3) $xr(x) = x$ 对所有 $x \in \hat{} E^1$; (4) $e^{-1} f = \delta_{e,\ f} r(e)$ 对所有满足 $X \in C$ 的 $e,\ f \in X$。

定义 2.4。 [12] 设 K 是一个带有对合 $*$ 的交换环，且 $(E,\ C)$ 是一个分离图。Cohn路径代数 $\mathcal{C}_K(E,\ C)$ 是由自伴元素 $v \in E^0$ 和满足以下关系的元素 $e \in E^1$ 在 K 上生成的泛 $*$-代数:

(V) $vw = \delta_{v,\ w} v$ 对所有 $v,\ w \in E^0$; (E1) $s(e) e = e = er(e)$ 对所有 $e \in E^1$; (E2) $e^* s(e) = e^* = r(e)e^*$ 对所有 $e \in E^1$; (SCK1) $e^* f = \delta_{e,\ f} r(e)$ 对所有满足 $X \in C$ 的 $e,\ f \in X$。

Leavitt路径代数$\mathcal{L}_K(E,\ C)$ 是由上述相同生成元和关系生成的、定义在 K 上的泛 $*$-代数，并额外满足 Cuntz–Krieger关系:

(SCK2) $\sum_{e \in X} ee^* = v$ 对于每个满足 $v \in E^0$ 的有限子集 $X \in C_v$。

给定一个 $*$-代数 A，以及由部分等距元组成的子集 $D \subseteq A$ （即对于所有 $s \in D$，都有 $ss^*s = s$），可以用一种规范方式降低代数 A 的复杂度，具体如下。令 S 为由 D 生成的 A 的 $*$-子半群，并令 $J = J(D)$ 为由满足 $x,\ y \in S$ 的所有交换子 $[e(x)\ e(y)]$ 生成的 A 的双边理想，其中$e(x) := xx^*$。那么 $A_{\mathrm{ab}} := A/J$ 是与 D 相关联的$tame$ $*$-代数。它具有这样的性质：由 A_{ab} 中 D 的规范像生成的 A_{ab} 的 $*$-子半群是一个逆半群。

定义 2.5. 设 K 是带有对合 $*$ 的交换环，且 (E, C) 是一个分离图。(E, C) 的驯化 ***Cohn***路径代数 是与部分等距元族 E^1 相关联的驯化 $*$-代数 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$，其中 E^1 是 $\mathcal{C}_K(E, C)$ 中的部分等距元族。类似地，(E, C) 的驯化***Leavitt***路径代数 是与同一部分等距元族 E^1相关联的驯化 $*$-代数 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$，其中 E^1是 $\mathcal{L}_K(E, C)$ 中的部分等距元族。

由 [9, 引理 6.15], 可得 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C) \cong \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)/\mathcal{Q}$，其中 $\mathcal{Q}$ 是由投影 $q_X := v - \sum_{e \in X} ee^*$ 生成的 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的双边理想，对所有有限集合 $X \in C_v$,$v \in E^0$ 均成立。这表明，$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 可视为温和 Cohn 代数的商，其中施加了所有有限类型的 Cuntz–Krieger关系。

接下来的两个定理概述 $*$-代数 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 和$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的结构。对于逆半群 S，我们用 $\mathcal{G}(S)$ 表示S的泛群胚，并用 $\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S)$ 表示 S的紧群胚。对于分离图，令

$$\mathcal{G}(E,C) := \mathcal{G}(\mathcal{S}(E,C)), \qquad \mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C) := \mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(\mathcal{S}(E,C)).$$

丰群胚 $\mathcal{G}$ 的 Steinberg 代数记作 $A_K(\mathcal{G})$。

定理 2.6。 [9, 命题 6.5 和推论 6.10] 设 (E,C) 是一个分离图 .
那么我们有 $*$-同构

$$\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C) \cong K[\mathcal{S}(E,C)] \cong A_K(\mathcal{G}(E,C)) \cong C_K(\widehat{\mathcal{E}}) \rtimes \mathbb{F},$$

其中 $\widehat{E}$ 是 $E = E(\mathcal{S}(E,C))$ 的谱，且 $\mathbb{F} = \mathbb{F}(E^1)$ 是由 E^1 生成的自由群。

定理 2.7。 [9, 定理 6。20] 设 (E,C) 是一个分离图。那么我们有 $*$-同构

$$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C) \cong A_K(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C)) \cong C_K(\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{tight}}) \rtimes \mathbb{F},$$

这里 $\widehat{E}_{\mathrm{tight}}$ 是 E 的紧谱 $= E(\mathcal{S}(E,C))$，而 $\mathbb{F} = \mathbb{F}(E^1)$ 是由 E^1.

上述定理中的同构 $A_K(\mathcal{G}(E,C)) \cong C_K(\mathcal{E}) \rtimes \mathbb{F}$ 和 $A_K(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C)) \cong C_K(\mathcal{E}_{\mathrm{tight}}) \rtimes \mathbb{F}$分别来自典范部分作用 $\mathbb{F} \curvearrowright \mathcal{E}$ 及其在紧谱$\mathcal{E}_{\mathrm{tight}}$ 上的限制 $\mathbb{F} \curvearrowright \mathcal{E}_{\mathrm{tight}}$，其中 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S}(E,C))$。详情见 [9]。

3. 分离图的 Leavitt 逆半群

本节介绍一个与分离图 (E,C) 相关的新逆半群，即 (E,C) 的*Leavitt* 逆半群。这是对有向图的 Leavitt 逆半群的推广，后者由 [35] 引入。

定义 3.1。 设 (E,C) 是一个分离图。(E,C) 的*Leavitt* 逆半群是由 $E^0 \cup \hat{E}^1 = E^0 \cup E^1 \cup E^{-1}$ 生成、满足以下关系的泛逆半群 $\mathcal{LI}(E,C)$:

(1) 对所有 $v,\ w \in E^0$，$vw = \delta_{v,w} v$；(2) 对所有 $x \in \hat{E}^1$，$s(x)x = x$；(3) 对所有 $x \in \hat{E}^1$，$xr(x) = x$；
(4) 对所有满足 $X \in C$ 的 $e,\ f \in X$，$e^{-1}f = \delta_{e,f} r(e)$。
(5) 对所有满足 $\{e\} \in C$ 的 $e \in E^1$，$ee^{-1} = s(e)$。

换言之，$\mathcal{LI}(E,C)$ 是 (E,C) 的逆半群 $\mathcal{S}(E,C)$ 关于由关系 (5) 生成的同余的商（如定义 2.3 所述）。

我们稍后将证明，对于任意交换含幺环 K，$\mathcal{LI}(E,C)$ 同构于交换化 Leavitt 路径代数 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中由$E^0 \cup E^1$ 生成的逆半群（见定理 4.9）。在 [35] 中，非分离情形下已证明这一点。

我们首先为$\mathcal{LI}(E,C)$中的元素建立标准形。为此，我们需要回顾 [9]中的基本概念和术语。

我们将使用 [9]中的记号。回忆定义2.1，对于 $v \in E^0$，$\mathbb{F}_C(v)$是所有满足 $s(w) = v$ 的 C-分离路径 w 的集合。集合$\mathcal{X}(v)$是 $\mathbb{F}_C(v)$的所有非空有限下 C-相容子集组成的集合，而$\mathcal{X} = \bigsqcup_{v \in E^0} \mathcal{X}(v) \bigsqcup \{0\}$。按照 [9, 定义3.13]，，我们令$\mathcal{Y} = \mathcal{X}/\sim$，其中 $\sim$ 是由$g^{\downarrow} \sim (gx^{-1})^{\downarrow}$生成的$\mathcal{X}$ 上的同余，其中 $g \in \mathbb{F}_C$、$x \in E^1$，且 gx^{-1} 按其本身已约化。

对于 $v \in E^0$，集合$\mathcal{X}_0(v)$是由满足以下条件的那些 $I \in \mathcal{X}(v)$组成的：$\max(I)$中的每个元素都不以 E^{-1}结尾；我们令$\mathcal{X}_0 = \bigsqcup_{v \in E^0} \mathcal{X}_0(v)$（[9, 记号3.17]）。根据[9, 命题3.16]，，每个元素 $I \in \mathcal{X}$ 都有唯一代表元 $I_0 \in \mathcal{X}_0$。

我们用 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$ 表示 E 的基本群胚（参见第 2.4 小节）。

定义 3.2。 设 (E, C) 为一个分离图。对于每个 $g \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$，记

$$g = g_L w,$$

其中 g_L 或者是 $s(g)$，或者是以边 $e \in E^1$ 结尾的 g 的前缀，且满足 $e \in X \in C$，其中 $|X| > 1$，并且 $w = x_1 \cdots x_r$, $r \geq 0$，其中对每个 i，或者 $x_i \in E^{-1}$，或者 $\{x_i\} \in C$。

注意，由于定义 3.1 中的关系 (4) 和 (5)，对于每个 $g \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$，我们有 $g_L g_L^* = g g^*$ 属于$\mathcal{LI}(E, C)$。

回忆一下，逆范畴 是一个范畴 C，其中对每个箭头 γ，都存在唯一的箭头 γ^{-1}，使得 $\gamma = \gamma\gamma^{-1}\gamma$ 且 $\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\gamma\gamma^{-1}$。

对于每个图 E，都有一个自由逆范畴 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{ic}}(E)$。它是对 $\hat{}E$ 上的自由范畴取商，模去由关系 $\gamma \sim \gamma\gamma^{-1}\gamma$ 和 $(\gamma\gamma^{-1})(\nu\nu^{-1}) \sim (\nu\nu^{-1})(\gamma\gamma^{-1})$生成的同余，其中 $s(\gamma) = s(\nu)$，参见 [34, 第 4]节。

给定一个逆范畴 C，我们可以通过向 C 添加一个零元，并规定任何未定义的乘积均为 0，构造逆半群 $S(C)$。我们用 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)$ 表示与自由逆范畴 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{ic}}(E)$ 相关联的逆半群 $S(\mathfrak{F}_{\mathfrak{ic}}(E))$。我们称 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)$ 为 E 的自由逆半群。

设 Γ_E 为群胚 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$ 的凯莱图。因此，我们有 $\Gamma_E^0 = \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$；并且当 g，$g \cdot e \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$，$e \in E^1$ 时，存在一条从 g 到 $g \cdot e$ 的边 (g, e)。

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{ic}}(E)$ 的元素可以解释为 Γ_E 中的某些 Munn 树，参见 [34, 第4] 节和 [9, 第 4]节。这一点将在下文中发挥核心作用，因此我们在此回顾这一描述。

定义 3.3。 [9, 定义 4.1(a)] 设 E 为一个有向图。E 中的一个$Munn$ -树是一个有序对 (T, g)，其中 T 是 Γ_E 的一个有限连通子图（因而也是一棵子树），它包含与 T 对应的连通分支 K_v 的单位元 v；而 g 是 T 的一个顶点。

现在我们回顾 [9] 中的两个基本结果。

命题 3.4. [9,命题 4.2] 设 E 是一个有向图。那么，与 E 相关联的自由逆半群 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)$ 同构于所有 *Munn* E- 树与 0 组成的半群，其乘积定义为

$$(T_1, g_1) \cdot (T_2, g_2) = \begin{cases} (T_1 \cup g_1 \cdot T_2,\ g_1 \cdot g_2) & \text{if } r(g_1) = s(g_2) \\ 0 & \text{if } r(g_1) \neq s(g_2) \end{cases}.$$

Munn E-树 (T, g) 的逆元由下式给出

$$(T, g)^{-1} = (g^{-1} \cdot T, g^{-1}).$$

推论 3.5. [9, 推论 4.3] 设 E 是一个有向图。那么 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)$ 是强E^*-单位元的，因此它是一个受限半直积

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E) = \mathcal{E}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)) \rtimes_\theta^r \mathbb{F},$$

其中 $\mathbb{F} = \mathbb{F}(E^1)$ 是以 E^1 为基的自由群。

对于任意有向图 E，我们可以考虑 E 中由边组成的子集 U，并施加定义 3.1 中的关系 (1)-(3)、对 E 中所有边 e 的关系 $e^{-1}e = r(e)$，以及关系

$(5)_U$ $ee^{-1} = s(e)$ for all $e \in U$,

从而得到一个特定的逆半群，本文将其记为 $\mathcal{T}_U(E)$。正如我们将在命题 3.10 中看到的，这些逆半群都遵循相同的模式。

定义 3.6. 设 E 为一个有向图，且 U 为 E^1的一个子集。对于每个$g \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}$（$E$），我们可以唯一地写成 $g = g_U w$，其中 g_U 要么是一个顶点，要么是 g的一个前缀，使得 g_U 不以 E^{-1} 结尾，也不以属于 U的一条边结尾，而 w 是由形如 f^{-1}（其中 $f \in E^1$）的元素以及形如 e（其中 $e \in U$）的元素组成的乘积。

我们称 $g = g_U w$ 为 g 关于 U 的典范分解。对于 $U = \emptyset$，我们由 [9, 得到分解 $g = g_0 w$（记号 3.15]）。当（E，C）是一个分离图，且 U 是满足 $\{e\} \in C$ 的元素 $e \in E^1$ 所组成的集合时，这与定义 3.2 中的分解 $g = g_L w$ 一致。

定义 3.7。设 E 是一个有向图，且 U 是 E^1 的一个子集。我们将 $Toeplitz\text{-}Munn(E, U)$-树 定义为一对 (T, g)，其中 T 是 Γ_E 的一个包含根 v 的有限连通子图，该根对应于它的连通分支，并且 T 的所有极大元都不以 E^{-1} 结尾，也不以边 $e \in U$ 结尾，且 $g = g_U w$ 满足 $g_U \in T$。

从现在起，我们将带有 E 的自由逆半群 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)$ 与 Munn E-树的逆半群 $\mathcal{M}(E)$ 以及零元 0 等同起来（见命题 3.4）。我们将 Munn E-树 (T, g) 的第一分量 T 简称为 E-树。E-树的集合与 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)$ 的非零幂等元集合 $\mathcal{E}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E))^{\times}$ 等同。

设 U 是 E^1的一个子集。设 $\sim_U$ 是 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E) \cong \mathcal{M}$ 上由以下关系生成的同余：对 $e \in E^1$，有 $e^{-1}e \sim_U r(e)$；对 $e \in U$，有 $ee^{-1} \sim_U s(e)$。在表示为 Munn E-树的意义下，$\sim_U$ 是由以下关系生成的同余：对于所有满足 $ge^{-1} \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$的 $e \in E^1$，有 $(ge^{-1})^{\downarrow} \sim_U g^{\downarrow}$；对于所有满足 $ge \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$的 $e \in U$，有 $(ge)^{\downarrow} \sim_U g^{\downarrow}$。

显然，我们有

$$\mathcal{T}_U(E) \cong \mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)/\sim_U \cong \mathcal{M}/\sim_U.$$

引理 3.8。设 U是 E^1的一个子集，并令 $M_U = M/\sim_U$。对于每棵 E-树 T，T在 M 中的 $\sim_U$-等价类 $[T]_U$相对于逆半群 M 上的自然序包含一个最大元 T_U。该最大元是 $[T]_U$ 中唯一满足以下条件的元素T_U：T_U 的每个极大元都不以 E^{-1} 结尾，也不以 e 结尾，其中 $e \in U$。

证明。设 T 是一个 E-树。对于每个 $g \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$，我们考虑其关于 U 的典范分解 $g = g_U w$（参见定义 3.6）。

现在令 $A := \{g_U : g \in T\}$，并令 $T_U = \max(A)^{\downarrow}$。那么，$T_U$ 的极大元集合恰为 $\max(A)$，因此 T_U 的所有极大元都不以 E^{-1} 结尾，也不以 U 结尾。由于 $T_U \subseteq T$，可得 $T \leq T_U$。

此外，与引理 3.16], 的证明中一样，我们有 $T_U \sim_U T$。

现在我们要证明，若 S 是一个 E-树且 $T \sim_U S$ 属于 M，则 $S_U = T_U$。设 (T_0, g_0)、(T_1, g_1)、.....、(T_n, g_n) 是一列 Munn E-树，其中 $(T_0, g_0) = (T, 1)$，且 $(T_n, g_n) = (S, 1)$，并且对于每个 $0 \leq i < n$，我们都可以通过以下形式的单步操作，从 (T_i, g_i) 转到 (T_{i+1}, g_{i+1})，或从 (T_{i+1}, g_{i+1}) 转到 (T_i, g_i):

$$(X, h)(\{r(e)\}, r(e))(Y, k) \sim_U (X, h)((e^{-1})^{\downarrow}, r(e))(Y, k)$$

对于 $e \in E^1$，或具有以下形式

$$(X, h)(\{s(e)\}, s(e))(Y, k) \sim_U (X, h)(e^{\downarrow}, s(e))(Y, k)$$

对于 $e \in U$。

在这两种情况下，我们都有 $(Z, h\cdot k) \sim_U (Z \cup h\cdot x^{\downarrow}, h\cdot k)$，其中 $x \in E^{-1} \cup U$，且 $Z = X \cup h\cdot Y$ 是一个 E-树，满足 $h \in Z$。因此，只需证明在这种情形下，有 $Z_U = (Z \cup h\cdot x^{\downarrow})_U$。若 hx 不是约化的，则 $h\cdot x \in Z$，并且确实有 $Z = Z \cup h\cdot x^{\downarrow}$。若 hx 是约化的，则 $h_U = (hx)_U$，从而 $\{z_U : z \in Z\} = \{z_U : z \in Z \cup h\cdot x^{\downarrow}\}$，这表明 $Z_U = (Z \cup h\cdot x^{\downarrow})_U$，正如所需。将这一事实归纳地应用于序列 $\{(T_i, g_i)\}$ 中所有相邻的元素对，可得 $T_U = S_U$。因此，对于所有 $S \in [T]_U$，都有 $S \leq T_U$，且 T_U 是 M_U 中 $[T]_U$ 的最大元素。此外，由这一事实显然可知，T_U 是 $[T]_U$ 中唯一满足以下性质的元素：每个极大元都不以 $E^{-1} \cup U$ 结尾。□

下面的引理可直接由引理 3.8 得出。证明留给读者。

引理 3.9. 采用上述记号，对于 *Munn* E-树 (T,g) 和 (S,h)，

(1) $(T,g) \sim_U (S,h)$ 当且仅当 $S_U = T_U$ 和 $g = h$。*(2)* $\sim_U$-等价类 $[T,g]_U$ 有一个最大元，即 $(T_U \cup g^{\downarrow}, g)$。

命题 3.10. 设 E 是一个有向图，U 是 E^1 的一个子集，并令 $M_U = M/\sim_U$。那么，逆半群 M_U 同构于逆半群 $T_U M$，它由所有 *Toeplitz-Munn* (E,U)-树 (T,g) 组成，并配备乘积

$$(T_1,g_1)\cdot(T_2,g_2) = \begin{cases} \Big((T_1' \cup g_1 \cdot T_2')_U,\ g_1 \cdot g_2\Big) & \text{if } r(g_1) = s(g_2) \\ 0 & \text{if } r(g_1) \neq s(g_2) \end{cases}$$

其中 $T_1', T_2' \in E(\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E))$ 分别是 T_1 和 T_2 的代表元，且满足 $g_1 \in T_1'$ 和 $g_2 \in T_2'$。逆元由 $(T,g)^{-1} = ((g^{-1}\cdot T')_U, g^{-1})$ 给出，其中 T' 是 T 的任意一个代表元，且满足 $g \in T'$。

此外，映射 $(T,g) \mapsto \omega(g)$ 确定了一个幂等纯部分同态 $\mathcal{T}_U M \to \mathbb{F}$。

证明。我们定义一个映射 $\Phi\colon \mathrm{M}_U \to \mathrm{T}_U\mathrm{M}$，使得 $\Phi([T,g]_U) = (T_U, g)$。注意，该映射定义良好，因为对于 $(T,g) \in \mathrm{M}$，按定义有 $g \in T$，因此 $g_U \in T_U$；此外，由引理 3.9(1)，当 $(T,g) \sim_U (S,h)$ 时，$T_U = S_U$ 且 $g = h$。此外，由引理 3.9(1)，映射 Φ 也是单射。若 (T,g) 是一个 Toeplitz-Munn (E,U)-树，则 $(T \cup g^{\downarrow}, g)$ 是一个 Munn E-树，并且 $\Phi([T \cup g^{\downarrow}, g]) = (T,g)$，这表明 Φ 是满射。

由于 Φ 是一个双射，我们可以将 $\mathcal{M}_U$ 中的乘积转化为 $\mathcal{T}_U\mathcal{M}$ 中的乘积，从而使 Φ 成为半群同构。这就得到陈述中所描述的乘积。

令 $\omega\colon \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)^{\times} \to \mathbb{F}$ 为显然的幂等纯部分同态。则映射 $\pi\colon \mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)^{\times} \to \mathbb{F}$，$\pi(T,g) = \omega(g)$ 是 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E) \cong \mathcal{M}$ 的典范幂等纯部分同态，见 [9, 推论 4.3]。显然，π 可通过一个幂等纯部分同态 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)^{\times}/\sim_U \to \mathbb{F}$ 分解。□

注 3.11。注意，若 (T,g) 是一个 Toeplitz-Munn (E,U)-树（见定义 3.7），则 (T,g) 可能不是 Munn E-树，因为可能出现 $g \notin T$，尽管根据定义，我们总有 $g_U \in T$。这意味着，在逆半群 $\mathcal{T}_U\mathcal{M} \cong \mathcal{T}_U(E)$ 中进行计算时，我们必须谨慎选择 T 在 $\mathcal{E}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E))$ 中的代表元 T'，使得 $g \in T'$，从而 (T',g) 是一个 Munn E-树。我们总能作出选择 $T' = T \cup g^{\downarrow}$。我们有以下公式

$$(T,g)(T,g)^{-1} = T, \qquad (T,g)^{-1}(T,g) = (g^{-1}\cdot T \cup \{g^{-1}\}^{\downarrow})_U$$

Toeplitz-Munn $(E,\ U)$-树 $(T,\ g)$。

设 $(E,\ C)$ 是一个分离图。$\mathcal{X}^{\times} = \bigsqcup_{v\in E^0} \mathcal{X}(v)$ 中的元素可以解释为某些 E-树。具体而言，属于 $\mathcal{X}^{\times}$ 的 E-树 T 的特征是：T 的任意两个顶点之间的测地路径都是一条 C- 分离路径（见 $[9,$ 备注 3.8$]$）。$\mathcal{X}^{\times}$ 中的元素将称为 C- 相容 E- 树。

对于下一个定义，请回顾：当 $(E,\ C)$ 是一个分离图且有 $g \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{gr}}(E)$ 时，我们在定义 3.2 中引入了一个典范分解 $g = g_L w$。

定义 3.12。设 $(E,\ C)$ 是一个分离图。

(a) 对于 $v \in E^0$，我们用 $\mathcal{X}_L(v)$ 表示 $\mathcal{X}(v)$ 中所有满足以下条件的元素 T 的集合：T 的每个极大元都不以 E^{-1} 结尾，也不以满足 $\{e\} \in C$ 的边 $e \in E^1$ 结尾。注意，$\mathcal{X}_L(v) \subseteq \mathcal{X}_0(v) \subseteq \mathcal{X}(v)$。令 $\mathcal{X}_L = \bigsqcup_{v\in E^0} \mathcal{X}_L(v)$。我们将 $\mathcal{X}_L$ 的元素称为 $Leavitt\,(E,C)$-树。

(b) 一个 $Leavitt\text{-}Munn(E,C)$-树 是一个有序对 (T,g)，其中 $T\in\mathcal{X}_L$，且 $g=g_Lw\in\mathbb{F}_C$ 满足 $g_L\in T$。

当 (E,C) 是一个分离图时，我们可以将上述结果特化为取 E^1 的子集U，该子集由所有满足 $\{e\}\in C$ 的边 $e\in E^1$ 组成。由此得到以下概念。

定义 3.13。设 (E,C) 是一个分离图。我们将 $\mathfrak{F}_{\mathrm{is}}(E)$ 上由关系 $e^{-1}e\sim_L r(e)$（对所有 $e\in E^1$ ）以及当 $e\in E^1$ 且 $\{e\}\in C$ 时的 $ee^{-1}\sim_L s(e)$ 所生成的同余记为 $\sim_L$。相应的等价类记为$[T,g]_L$；当 $T\in\mathcal{E}(\mathfrak{F}_{\mathrm{is}}(E))$ 时，也记为 $[T]_L$。

对于每个 E-树 T，我们将 T_L 记为引理 3.8 中描述的唯一元素 T_U，其中 U 是 E^1 的子集，由所有满足 $\{e\}\in C$ 的边 $e\in E^1$ 组成。因此，对于满足 $\{e\}\in C$ 的 $e\in E^1$，T_L 是 $[T]_L$ 中的唯一元素，使得 T_L 的每个极大元既不以 E^{-1} 结尾，也不以 e 结尾。

现在我们注意到，$\mathcal{X}$ 关于等价关系 $\sim_L$ on$\mathfrak{F}_{\mathrm{is}}(E)\cong\mathcal{M}$是饱和的。

引理 3.14. 设(E,C) 是一个分离图，且 T 是一个 C-相容的 E-树。那么，每个满足 $S\sim_L T$ 的 $S\in\mathfrak{F}_{\mathrm{is}}(E)$ 也都是 C-相容的。特别地，若(T,g) 是一个 ***Leavitt-Munn***(E,C)-树，则 $T\cup g^{\downarrow}$ 是 C-相容的，因此它属于 X。

证明。根据引理 3.8，只需证明：若 T是一个 E-树，且 T_L 是 C-相容的，那么 T 也同样是 C-相容的。

设 T是一个 E-树，且 T_L 是 C-相容的。给定 T中的两个顶点 g 和 h，我们需要证明 $g^{-1}\cdot h$ 是一条 C-分离路径。

我们首先注意到，T的所有元素都是 C-分离的。取 $g\in T$。根据 T_L 的构造，我们有 $g_L\in T_L$，因此可以写成 $g=g_Lw$，其中 $g_L\in T_L$ 和 w 是逆边与边 e 的乘积，使得$\{e\}\in C$。由于 T_L 是 C-相容的，g_L 是C-分离的，由此可知，$g=g_Lw$ 不可能包含形式为 $e^{-1}f$的子词，其中 e,f是 E中的不同边，且对于 $X\in C$有 $e,f\in X$。

现在考虑两个顶点 g、$h\in T$。如果其中一个是另一个的前缀，那么由上述内容可推出 $g^{-1}\cdot h$ is C-分离。因此，我们可以假设 $g=dxg'$ and$h=dyh'$，其中 x、$y\in E^1\cup E^{-1}$and $x\neq y$。我们需要证明 $g^{-1}\cdot h=(g')^{-1}x^{-1}yh'$is C-分离。由于 $(g')^{-1}x^{-1}$ and yh' 是 C-分离的，我们只需证明 $x^{-1}y$不是 $e^{-1}f$ 的形式，其中 e、f 是划分 C 中同一集合里的不同边。如果 dx 是 g_L 的前缀，且 dy 是 h_L的前缀，那么上述性质成立，因为 g_L、$h_L\in T_L$，并且 T_L 是 C-相容的。如果 g_L 是 dx的真前缀，那么要么 $x\in E^{-1}$，要么 $x\in E^1$and $\{x\}\in C$，因此 $x^{-1}y$ 不是上述所述的 $e^{-1}f$ 形式。若 h_L 是 dy的真前缀，也可得出相同结论。证明至此完成。□

我们终于可以得到逆半群 $\mathcal{LI}(E,\ C)$ 的主要结果。

定理 3.15。设 $(E、\ C)$ 是一个分离图。则 ***Leavitt*** 逆半群 $LI(E、\ C)$ 与由所有 ***Leavitt-Munn*** $(E、\ C)$-树组成的逆半群同构，该逆半群赋予如下乘积

$$(T_1,g_1)\cdot(T_2,g_2)=\begin{cases}\Big((T_1'\cup g_1\cdot T_2')_L,\ g_1\cdot g_2\Big) & \text{if } T_1'\cup g_1\cdot T_2' \text{ is } C\text{-compatible}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中，$T_1',T_2'\in X$ 是 T_1和 T_2 的任意代表元，分别满足 $g_1\in T_1'$ 且$g_2\in T_2'$。逆元由$(T,g)^{-1}=((g^{-1}\cdot T')_L,g^{-1})$给出，其中 T'是 T的任意代表元，且满足 $g\in T'$。映射$(T,g)\mapsto\omega(g)$ 给出一个幂等纯部分同态 $LI(E,C)^{\times}\to\mathbb{F}$，它确定了一个半直积分解

$$\mathcal{LI}(E,C)\cong\mathcal{Y}^L\rtimes_\theta^r\mathbb{F},$$

其中 $Y^L = X/\sim_L \cong E(LI(E,C))$。部分作用 θ^L（其中 $\theta^L_g\colon D^L_{g^{-1}} \to D^L_g$）定义如下：对于每个 $g \in \mathbb{F}_C(v)\setminus\{v\}$，$D^L_g$可识别为所有满足 $g_L \in T$ 的$T \in X_L(v)$ 的集合；作用 θ^L_g 定义为 $\theta^L_g(T) = (g\cdot T')_L$，其中 T'是包含 g^{-1}的 T 的一个代表元。

证明。 证明遵循 [9, 定理 4.5]证明的思路。为方便读者，我们给出详细证明。

若 S 是任意一个强 E^*-单位元逆半群，且带有幂等纯部分同态 $\theta\colon S^\times \to \Gamma$，而 I 是 S的一个理想，则 S/I 也是强 E^*-单位元，且具有相同的群 Γ。这是显然的，因为 $(S/I)^\times$ 可识别为 $S\setminus I$，因此将 θ 限制在 $S\setminus I$ 上，便得到所需的幂等纯部分同态。

现在设 (E,C) 是一个分离图。由于 Leavitt 逆半群 $\mathcal{LI}(E,C)$ 是逆半群 $\mathcal{M}_L = \mathfrak{F}_{\mathfrak{is}}(E)/\sim_L$ 对由所有形如 $(e^{-1}f)^\downarrow$ 的元素（其中 $e,f\in X$, $X\in C$ 互不相同）生成的理想取的 Rees 商，由命题 3.10 和上述观察可知，$\mathcal{LI}(E,C)$ 是一个强 E^*-单位元半群，并带有幂等纯部分同态 $\pi\colon \mathcal{LI}(E,C)^\times \to \mathbb{F}$。结论现由 [9, 命题 2.1] 和命题 3.10 得出。□

4. $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 中的标准形

为了找出 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 的线性基，我们将采用 [12], 使用 Diamond 引理的路线，不过这次针对的是交换代数。

考虑由$\mathcal{S}(E,\ C)$ 的幂等元生成的 $\mathcal{C}$ 子代数 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$。根据 [9, 定理 4.8], , $\mathcal{S}(E,\ C)$ 中的每个幂等元都唯一对应于一个E-树 $T\in\mathcal{X}_0$, , 而与 T 对应的 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 中的幂等元为

$$\mathbf{e}(T) := \prod_{\lambda\in\max(T)} \lambda\lambda^* \in \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C).$$

因此，$\mathcal{C}$ 与族$\{\mathbf{e}(T) :\ T\in\mathcal{X}_0\}$的线性张成相重合，并且它是收缩半群代数 $K[\mathcal{E}(\mathcal{S}(E,\ C))]$。

对于每个 $g\in\mathbb{F}_C(v)\setminus\{v\}$，用 $\mathcal{C}_g$ 表示 D_g的线性张成，其中 D_g 是满足 $g_0\in T$的那些 $T\in\mathcal{X}_0(v)$ 的集合，见 [9, 定理 4.5]。若$g\in\mathbb{F}\setminus\mathbb{F}_C$，则置 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}_g = \{0\}$ 。于是，$\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 作为部分交叉积的典范结构为

$$\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C) = \bigoplus_{g\in\mathbb{F}_C} \mathcal{C}_g \rtimes g.$$

理想 $\mathcal{Q}$ 由来自中性分量 $\mathcal{C}$ 的齐次元生成，因此商代数 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 具有部分交叉积的结构

$$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C) = \bigoplus_{g\in\mathbb{F}_C} \mathcal{L}_g \rtimes g,$$

其中 $\mathcal{L}_g = \mathcal{C}_g/\mathcal{Q}_g$，且 $\mathcal{Q}_g = \mathcal{C}_g\cap\mathcal{Q}_1$, , 其中 $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}\cap\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 中相应的不变理想。

类似地，我们可以将 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 视为收缩半群代数 $K[\mathcal{LI}(E,\ C)]$ 的商，其中 $\mathcal{LI}(E,\ C)$ 是 $(E,\ C)$ 的 Leavitt 逆半群，如第 3 节所述。根据定理 3.15，$\mathcal{LI}(E,\ C)$ 的元素可以与 Leavitt-Munn $(E,\ C)$-树（见定义 3.12）对应起来；下文将证明，与其中某个子族相关联的元素为 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 提供了一个线性基。

定义 4.1. 设 (E,C) 是一个分离图，并令 C^{fin} 表示由满足 $|X|<\infty$ 的元素 $X\in C$ 构成的 C 的子集。我们将函数 $\mathfrak{E}\colon C^{\mathrm{fin}}\to E^1$ 定义为一个选择函数 , 使得对所有 $X\in C^{\mathrm{fin}}$，都有 $\mathfrak{E}(X)\in X$ 。如果对任意 $X\in C^{\mathrm{fin}}$，$\lambda\in\mathbb{F}_C$ 不以 $\mathfrak{E}(X)$ 结尾，我们就称 $\lambda\in\mathbb{F}_C$ 是 $\mathfrak{E}$-约化的。

如果 T 的每个极大元都是 $\mathfrak{E}$-约化的，我们就称元素 $T \in \mathcal{X}_0$ 是 $\mathfrak{E}$-约化 的。注意，如果 T 是 $\mathfrak{E}$-约化的，那么 $T \in \mathcal{X}_L$，因为 T 的极大元不会以 E 中满足 $\{e\} \in C$ 的边 e 结尾。

上述定义适用于求出$\mathcal{L}_1 = \mathcal{C}_1/\mathcal{Q}_1$的一组线性基。稍后我们将对其作适当修改，以便求出$\mathcal{L}_g = \mathcal{C}_g/\mathcal{Q}_g$的一组基。之所以如此，是因为为求出元素的标准形所需的约化过程，并不保留这些元素属于 D_g的线性张成这一事实，其中 $g \in \mathbb{F}_C \setminus \{1\}$。

注意，由于关系 (SCK1) 和 (SCK2)，我们有 $gg^* = g_L g_L^*$ in$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$；事实上，这在 Leavitt 逆半群中也成立。因此，与$\mathcal{LI}(E, C)$相关联的部分作用的正确定义域具有如下形式： $D_g^L := \{T \in \mathcal{X}_L : g_L \in T\}$，见定理 3.15。

下面这个极端例子阐明了这一情形。

例 4.2。 设 $(E,\ C)$ 是 Cuntz 分离图，该图由一个顶点组成，且 C 的所有元素都是单元素集合（见 [8, 例 3.4]）。那么对于每个 $g \in \mathbb{F} \setminus \{1\}$，$D_g^L$ 是平凡的。更一般地，若 $(E,\ C)$ 是具有自由分离的分离图，即 C 的所有元素都是单元素集合，那么 $\mathcal{LI}(E,\ C)$ 的唯一幂等元就是 E 的顶点，并且当 $g \in \mathbb{F}_C(v) \setminus \{v\}$ 时， $D_g^L = \{\{v\}\}$。

我们首先抽象地描述由 $\mathcal{S}(E,\ C)$ 的幂等元生成的 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 的交换子代数 $\mathcal{C}$。

引理 4.3。 设 $\mathcal{C}$ 是由 $S(E, C)$ 的幂等元生成的 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的（交换）子代数。则

$$\mathcal{C} \cong \mathrm{Pol}_K[\mathbb{F}_C]/N,$$

其中，$\mathrm{Pol}_K[\mathbb{F}_C]$ 表示集合 $\mathbb{F}_C$ 上的交换多项式代数，而 N 是由以下元素生成的 $\mathrm{Pol}_K[\mathbb{F}_C]$ 的理想

(1) $\lambda \cdot \mu$，若 $s(\lambda) \neq s(\mu)$。*(2)* 对于 $\mu \leq_p \lambda$， $\lambda \cdot \mu - \lambda$。*(3)* 若 λ 和 μ 是 C-不相容的，则 $\lambda \cdot \mu$。
(4) $\lambda e^{-1} - \lambda$，其中 $\lambda e^{-1} \in \mathbb{F}_C$ 和 $e \in E^1$。

证明。 令 $R :=$Pol$_K[\mathbb{F}_C]$。存在一个 K-代数同态

$$\varphi \colon R/N \to \mathcal{C}$$

由 $\varphi(\lambda) = \lambda\lambda^*$ 给出，对所有 $\lambda \in \mathbb{F}_C$均成立。根据 [9, 定理 4.8], ，该映射是满射。此外，注意到利用 N的关系，我们可以将 R/N 的每个单项式化为如下形式的单项式

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_r,$$

其中每个 $\lambda_i \in \mathbb{F}_C$，所有 λ_i都不以 E^{-1}结尾，并且 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ 是 $\mathbb{F}_C(v)$ 中某个 $v \in E^0$ 的一个不可比且C-相容的子集。由此可知，这组单项式线性张成 R/N。再次根据 [9, 定理 4.8], ，这些单项式在 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 中经 φ 映射后的像线性无关，因此它们在 R/N 中也线性无关，且 φ 是单射。□

注意到，在引理 4.3 的证明中出现的 $\mathrm{Pol}_K[\mathbb{F}_C]$ 中的单项式集合，恰好对应于 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S}(E, C))$ 中以 Scheiblich 标准形表示的元素集合。利用 [18], 中的结果，并应用由下一个引理中的 (1)–(4) 对组成的约化系统，可以直接推出这些元素构成 R/N 的基。添加一组新的对 (5) 后，将得到中性分量 $\mathcal{L}_1$ of$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的基，如下所示:

定理 4.4。 设 (E,C) 是一个分离图，且 $\mathfrak{E}\colon C^{\mathrm{fin}} \to E^1$ 是一个选择函数。那么，$L_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的中性分量 $L_1 = C_1/Q_1$ 的 K-基由以下集合给出：

$$\overline{\mathcal{B}}_1(E,C) = \{\mathbf{e}(T) : T \text{ is } \mathfrak{E}\text{-reduced }\}.$$

证明。我们证明，幂等元集合 $\{\mathbf{e}(T) : T$ 是 $\mathfrak{E}$-约化的$\}$ 是 $\mathcal{L}_1$ 的一个 K-基。令 $e_X := \mathfrak{E}(X) \in X$，对所有 $X \in C^{\mathrm{fin}}$ 均成立。

我们应用交换代数的 Bergman 的菱形引理 [18], 尤其参见[18, 定理 1.2 和第 10 节。3]。我们定义 $\mathrm{wt}(e_X) = 2$，并对任意其他$x \in E^1 \cup E^{-1}$定义 $\mathrm{wt}(x) = 1$。我们在 $\mathbb{F}_C$ 上考虑一个权函数，使得 $\lambda \in \mathbb{F}_C$ 的权重等于 λ 的边的权重之和；若 $\lambda = v \in E^0$，则 $\mathrm{wt}(\lambda) = 1$。我们将此权函数扩展到由 $\mathbb{F}_C$ 生成的自由交换半群 $W := [\mathbb{F}_C]$，规定单项式 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ 的权重为权重 $\mathrm{wt}(\lambda_i)$，$i = 1, \ldots, r$ 之和。

对于 $X \in C^{\mathrm{fin}}$，设 $X' := X \setminus \{e_X\}$。

现在我们考虑半群代数 $\mathrm{Pol}_K[\mathbb{F}_C] = KW$ 上的以下约化系统 $\mathcal{S}$：

(1) $(\lambda \cdot \mu, 0)$，若 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_C$ 且 $s(\lambda) \neq s(\mu)$。(2) $(\lambda \cdot \mu, \lambda)$，若 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_C$ 且 $\mu \leq_p \lambda$；(3) $(\lambda \cdot \mu, 0)$，若 λ 与 μ 是 C-不相容的，其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_C$。(4) $(\lambda e^{-1}, \lambda)$，其中 $\lambda e^{-1} \in \mathbb{F}_C$ 且 $e \in E^1$。
(5) $(\lambda e_X, \lambda - \sum_{e \in X'} \lambda e)$，对于 $X \in C^{\mathrm{fin}}$ 和 $\lambda e_X \in \mathbb{F}_C$。

注意，由 (1)–(4) 中的对构成的约化系统 $\mathcal{S}'$ 给出了 $\mathcal{C}$ 的基，该基由 Scheiblich 标准形中的幂等元组成。

定义 $W = [\mathbb{F}_C]$ 上的偏序 $\leq$：

$$\lambda \leq \mu \iff \lambda = \mu \text{ or } \mathrm{wt}(\lambda) < \mathrm{wt}(\mu).$$

那么， W 上的偏序 $\leq$ 是一个与约化系统$\mathcal{S}$相容的半群偏序。此外， $\leq$ 满足降链条件。为了应用菱形引理，我们必须检查所有歧义是否都可解。我们留给读者验证涉及（1）–（4）各对的所有歧义均可解。我们将检查属于族（5）的约化对所涉及的歧义；这些歧义必然是与（2）或（3）之一构成的包含歧义。

假设有一个形如 $\lambda e_X \cdot \mu$ 的元素，且满足 $\mu \leq_p \lambda e_X$。那么我们有一个包含歧义

$$\lambda e_X \cdot \mu \overset{(2)}{\to} \lambda e_X, \qquad \lambda e_X \cdot \mu \overset{(5)}{\to} \lambda \cdot \mu - \sum_{e \in X'} \lambda e \cdot \mu.$$

对第一个应用（5），得到

$$\lambda e_X \cdot \mu \overset{(2)}{\to} \lambda e_X \overset{(5)}{\to} \lambda - \sum_{e \in X'} \lambda e.$$

现在分两种情况讨论。若 $\mu \leq_p \lambda$，则有

$$\lambda \cdot \mu - \sum_{e \in X'} \lambda e \cdot \mu \overset{(2)}{\to} \lambda - \sum_{e \in X'} \lambda e,$$

于是歧义得到解决。若 $\mu = \lambda e_X$，则

$$\lambda \cdot \lambda e_X - \sum_{e \in X'} \lambda e \cdot \lambda e_X \overset{(2)}{\to} \lambda e_X - \sum_{e \in X'} \lambda e \cdot \lambda e_X \overset{(3)}{\to} \lambda e_X,$$

而且我们也解决了这种歧义。

如果 $\lambda e_X \leq_p \mu$，那么我们就能解决 $\lambda e_X \cdot \mu$ jus 对应的包含关系歧义 t 如同 $\mu = \lambda e_X$ 的情况。

最后，我们考虑涉及 (3) 和 (5) 的包含歧义。假设 λe_X 和μ 是 C不相容的。如果 λ 和 μ 已经是 C不相容的，那么我们有

$$\lambda e_X \cdot \mu \xrightarrow{(2)} 0, \quad \lambda e_X \cdot \mu \xrightarrow{(5)} \lambda \cdot \mu - \sum_{e \in X'} \lambda e \cdot \mu \xrightarrow{(2)} 0 - 0 = 0.$$

若 $\mu = \lambda e \mu'$，其中 $e \in X'$，则

$$\lambda e_X \cdot \mu \xrightarrow{(5)} \lambda \cdot \lambda e \mu' - \sum_{f \in X'} \lambda f \cdot \lambda e \mu' \xrightarrow{(2),(3)} \lambda e \mu' - \lambda e \cdot \lambda e \mu' \xrightarrow{(2)} \mu - \mu = 0.$$

不可约形式恰好是对应于族$\mathcal{B}_1(E, C)$的元素，即元素

$$\lambda_1 \cdots \lambda_r,$$

其中 λ_i不以 E^{-1}结尾，对任意 $X \in C^{\mathrm{fin}}$均不以 e_X 结尾，并且 $\lambda_1, \cdots \lambda_r$是由某个 $v \in E^0$ 确定的、由 C 相容的 $\mathbb{F}_C(v)$ 元素的不可比族。

因此，我们得到了中性分量所需的结果。 □

为了得到$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$的非中性分量的线性基，我们需要以下概念:

定义 4.5. 设 (E, C) 是一个分离图，设 $\mathfrak{E}$: $C^{\mathrm{fin}} \to E^1$ 是一个选择函数，并设 $g \in \mathbb{F}_C$。我们称 $T \in D_g^L$ 相对于 g_L 是 $\mathfrak{E}$-约化的，如果 $\max(T) \setminus \{g_L\}$ 中的每个元素都是 $\mathfrak{E}$-约化的。也就是说，如果 g_L 是 $\mathfrak{E}$-约化的，或者 g_L 在T中不是极大元，那么 T 相对于 g_L 是 $\mathfrak{E}$-约化的，当且仅当 T 是 $\mathfrak{E}$-约化的；而如果 g_L 不是$\mathfrak{E}$-约化的，且 g_L 是 T中的极大元，那么 T 相对于 g_L 是 $\mathfrak{E}$-约化的，当且仅当 T 的所有极大元中除 g_L 之外的元素都是 $\mathfrak{E}$-约化的。

定理 4.6. $L_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的一组基由如下形式的元素给出

$$\overline{\mathcal{B}}(E, C) := \{\mathbf{e}(T) \rtimes g : T \in D_g^L \text{ and } T \text{ is } \mathfrak{E}\text{-reduced relatively to } g_L\}.$$

证明。 我们在 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 中进行讨论。这里有一个自然的线性基，即 $\mathcal{S}(E, C)$，其元素具有唯一的标准形，即 Scheiblich 标准形 [9, 定理 4.6]。对于 $g \in \mathbb{F}_C(v) \setminus \{v\}$，$\mathcal{C}_g$ 的理想是 $\mathcal{C}$ 中元素 $\mathbf{e}(T)$ 的线性张成，其中$T \in \mathcal{X}_0(v)$ 且 $g_0 \in T$；分量 $\mathcal{C}_g \rtimes g$则是对应项 $\mathbf{e}(T) \rtimes g$在 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 中的线性张成。

称单项式 在$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ 中形如 $\lambda_1 \lambda_1^* \lambda_2 \lambda_2^* \cdots \lambda_r \lambda_r^*$的元素，其中 $\lambda_i \in \mathbb{F}_C$。由定理 4.4 的证明可知，$\mathcal{C}$中的每个元素写成单项式的线性组合后，都可以通过对这些单项式应用约化 (1)–(5)，变换为 $\mathfrak{E}$- 约化 Scheiblich 标准形的单项式线性组合，即形如 $\mathbf{e}(T)$ 的单项式，其中 T 是一个 $\mathfrak{E}$-约化、 C-相容的 E-树。此外，该线性组合不依赖于所采用的具体约化方式。我们将 $a \in \mathcal{C}$ 的 $\mathfrak{E}$-约化 Scheiblich 标准形记为 $n(a)$。显然， n 是线性的: $n(\sum \alpha_i a_i) = \sum \alpha_i n(a_i)$，其中 α_i是标量，且 $a_i \in \mathcal{C}$。

现在，若 $g \in \mathbb{F}_C$ 且 $a \in \mathcal{C}_g$ ，则无法保证 $n(a) \in \mathcal{C}_{g_L}$。我们定义

$$n^g(a) = n(a) g_L g_L^*,$$

我们将 $n^g(a)$ 称为相对于 g 的 $\mathfrak{E}$-约化 Scheiblich 标准形。注意， n^g 在 $\mathcal{C}_g$ 上是线性的。

由于 $a \in \mathcal{C}_g = gg^* \mathcal{C}_1$，且 $g_L g_L^* g g^* = g g^*$ ，我们有 $a g_L g_L^* = a$，因此

$$a - n^g(a) = g_L g_L^* (a - n(a)) \in g_L g_L^* \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_{g_L}.$$

特别地， a 和 $n^g(a)$ 表示 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 中的同一个元素。

此外，显然 $n^g(a)$ 是相对于 g_L 而言处于 $\mathfrak{E}$-约化形式的单项式的线性组合。

我们想证明，$n^g(a)$ 是相对于 g_L 而言处于 $\mathfrak{E}$-约化形式且表示 a 的单项式的唯一线性组合。设 $\sum \alpha_i a_i$ 是单项式的线性组合，其中的单项式a_i 相对于 g_L 而言处于 $\mathfrak{E}$-约化形式，并且 $\sum \alpha_i a_i$ 表示 a。

假设我们能够证明，对于所有 i， $n^g(a_i) = a_i$ 。那么我们将证明$n^g(a) = \sum \alpha_i a_i$。事实上，注意到由于 a 和 $\sum \alpha_i a_i$ 在$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$中表示同一个元素，因此我们有

$$n(a) = n(\sum \alpha_i a_i) = \sum \alpha_i n(a_i).$$

因此

$$n^g(a) = g_L g_L^* n(a) = \sum \alpha_i g_L g_L^* n(a_i) = \sum \alpha_i n^g(a_i) = \sum \alpha_i a_i,$$

其中最后一步用到了：对于所有 i， $n^g(a_i) = a_i$ 。

因此，我们只需证明，对于每个在相对于 g_L 的 $\mathfrak{E}$-约化形式中的单项式 a ，都有 $n^g(a) = a$ 。令 a 为这样的一个单项式，并将 $a = \mathbf{e}(T)$记作 $T \in \mathcal{X}_L$。我们可以假设 $g_L \in \max(T)$，且 g_L 不是 $\mathfrak{E}$-约化的。令 $A = \max(T) \setminus \{g_L\}$。记

$$g_L = g_1 w_1 e_{X_1} \cdots w_r e_{X_r},$$

其中 $X_i \in C^{\mathrm{fin}}$，每个 w_i 要么是平凡的，要么是形如 x^* （$x \in E^1$）的元素之积；并且，要么 $g_1 \in A^{\downarrow}$ 和 $g_1 w_1 e_{X_1} \notin A^{\downarrow}$，要么 $g_1 \notin A^{\downarrow}$ 和 g_1 是 $\mathfrak{E}$-约化的。令$X' = X \setminus \{e_X\}$ （ $X \in C^{\mathrm{fin}}$）。无论哪种情况，我们都有

$$n(a) = \mathbf{e}((\{g_1\} \cup A)^{\downarrow}) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{e \in X_i'} \mathbf{e}((\{g_1 w_1 e_{X_1} \cdots w_i e\} \cup A)^{\downarrow}).$$

现在注意到

$$g_L g_L^* \mathbf{e}((\{g_1\} \cup A)^{\downarrow}) = \mathbf{e}((\{g_L\} \cup A)^{\downarrow}) = a$$

并且对于所有的 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 以及 $e \in X_i'$

$$g_L g_L^* \mathbf{e}((\{g_1 w_1 e_{X_1} \cdots w_i e\} \cup A)^{\downarrow}) = 0,$$

因为 g_L 和 $g_1 w_1 e_{X_1} \cdots w_i e$ 是 C-不相容的。我们得出

$$n^g(a) = [g_L g_L^* n(a)] = a,$$

正如所需。

因此，$\mathcal{L}_g \rtimes g$ 的所有元素都有唯一的表示，即相对于 g_L处于 $\mathfrak{E}$-约化形式的单项式的线性组合。由此我们得出，$\mathcal{B}(E, C)$是$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$的线性基。□

我们称元素$\mathbf{e}(T) \rtimes g \in \mathcal{B}(E, C)$处于$\mathfrak{E}$-约化的Scheiblich标准形。元素 $a \in \mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的 $\mathfrak{E}$-约化的*Scheiblich*标准形 是基$\mathcal{B}(E, C)$中表示 a的元素的唯一线性组合。

例4.7。我们在此注意到，在非分离情形下，定理 4.6 中的基 $\mathcal{B}(E, C)$ 与 [5, 定理 1]中给出的基密切相关（另见 [3,推论 1.5.12]）。事实上，我们将在下文证明，这两个基实质上通过 Scheiblich 标准形联系起来。这进一步表明，它是 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的恰当基。

设 $a = \lambda\mu^*$ 是非分离图 E 的 Cohn路径代数$\mathcal{C}_K(E)$ 中的一个基元素，其中 $r(\lambda) = r(\mu)$。于是我们写作

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2, \qquad \mu = \mu_1 \lambda_2,$$

其中 λ_1 和 μ_1 的末尾不是同一条边。现在 $\lambda_1 \mu_1^{-1} \in \mathbb{F}_C$ 是一个约化字，并且

$$a = \lambda\mu^* = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_2^* \mu_1^* = \lambda_1 (\lambda_2 \lambda_2^*)(\lambda_1^* \lambda_1) \mu_1^* = (\lambda\lambda^*)(\lambda_1 \mu_1^*),$$

使得 a 的 Scheiblich 标准形恰好为

$$a = (\lambda\lambda^*)(\lambda_1 \mu_1^*).$$

设 $\mathfrak{C}$ 是 E 的选择函数，也就是说，对于 E 的每个正则顶点 v，我们有 $e_v := \mathfrak{C}(v) \in s^{-1}(v)$。

设 $a = \lambda\mu^*$ 关于选择函数 $\mathfrak{C}$ 处于 $\mathfrak{C}$-约化形式，即 [5] 所述的意义下。这意味着，对于 E 中的正则顶点 v，表达式 $\lambda\mu^*$ 不包含子词 $e_v e_v^*$。

首先，设上述分解中的 λ_2 是非平凡的。于是，对于 $g := \lambda_1\mu_1^{-1} \in \mathbb{F}_C$，$\mathbf{e}(\lambda) \rtimes g$ 处于 $\mathfrak{C}$-约化 Scheiblich 标准形中，并且显然有 $g_L <_p \lambda$。

反之，若 $a = \mathbf{e}(\lambda) \rtimes g$ 处于 $\mathfrak{C}$-约化 Scheiblich 标准形，且 $g_L <_p \lambda$，那么我们可以在 $\mathbb{F}_C$ 中将 $g = g_L x_1 \cdots x_r \mu^{-1}$ 写成约化形式，其中，对于 $i = 1, \dots, r$，$s^{-1}(s(x_i)) = \{x_i\}$，此外，λ 按照定义 4.1 的意义是 $\mathfrak{C}$-约化的。因此，对于一个非平凡的 $\mathfrak{C}$-约化路径 λ_2，有 $\lambda = g_L x_1 \cdots x_r \lambda_2$，于是得到

$$\begin{aligned} a =& \mathbf{e}(\lambda) \rtimes g = g_L x_1 \cdots x_r \lambda_2 \lambda_2^* x_r^* \cdots x_1^* g_L^* g_L x_1 \cdots x_r \mu^* \\ =& g_L x_1 \cdots x_r \lambda_2 \lambda_2^* \mu^* = (\lambda_1 \lambda_2)(\mu\lambda_2)^*, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_1 = g_L x_1 \cdots x_r$，并且 $a = \lambda(\mu\lambda_2)^* = (\lambda_1\lambda_2)(\mu\lambda_2)^*$ 是 $\mathfrak{C}$-约化标准形（a 的 [5] 意义下）。

现在假设 λ_2 是平凡的。那么 $g := \lambda\mu^{-1}$ 已经是 $\mathbb{F}_C$ 中的一个约化字，而 a 的 $\mathfrak{C}$-约化 Scheiblich 标准形是 $\mathbf{e}(g_L) \rtimes g$，其中 $\lambda = g_L x_1 \cdots x_r$，并且对于所有 i 和 $r \geq 0$，$s^{-1}(s(x_i)) = \{x_i\}$。在这种情况下，根据定义 4.1，g_L 可能是 $\mathfrak{C}$-约化的，也可能不是；但无论如何，$\mathbf{e}(g_L) \rtimes g$ 相对于 g_L 都是 $\mathfrak{C}$-约化的。反过来，如果我们有 $\mathbb{F}_C$ 中的一个（约化）元素 $g = \lambda\mu^{-1}$，那么 $\mathbf{e}(g_L) \rtimes g$ 是 $\lambda\mu^*$ 的 $\mathfrak{C}$-约化 Scheiblich 标准形，而 $\lambda\mu^*$ 是其 $\mathfrak{C}$-约化标准形（按照 [5] 的意义）。顺便指出，当 λ_2 是平凡的时，这两种标准形都不依赖于选择函数 $\mathfrak{C}$。

现在我们可以刻画由 $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ 生成的 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的（逆）半群。首先，我们需要给出一个定义和一个简单的引理。

对于一个 E-树 T，我们将总长度 $|T|$ 定义为 T 中边的数量。这里，T 中的一条边是一个有序对 (g, gx)，其中 $g, gx \in T$ 且 $x \in \hat{}E^1$。

引理 4.8。设 T 是一个非平凡的 E-树，且 $hx \in \max(T)$，其中 $x \in \hat{}E^1$。那么，$T \setminus \{hx\}$ 也是一棵 E-树，并且 $|T \setminus \{hx\}| = |T| - 1$。

证明。显然，从一棵树中移除一个极大元会得到另一棵树。公式 $|T \setminus \{hx\}| = |T| - 1$ 也显然成立，因为 $T \setminus \{hx\}$ 比 T 恰好少一条边，即边 (h, hx)。□

定理 4.9. 设 (E, C) 是一个分离图。那么自然同态 $\iota: LI(E, C) \to L_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 是单射。因此，由 $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ 生成的 $L_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的半群与 *Leavitt* 逆半群 $LI(E, C)$ 自然同构。

证明。我们将使用定理 3.15 中建立的 LI (E, C) 的图像。根据这一图像，对于任意 Leavitt-Munn (E, C)-树 (T, g)，有 $\iota((T, g)) = \mathbf{e}(T) \rtimes g$。我们为 (E, C) 固定一个选择函数 $\mathfrak{C}$: $C^{\mathrm{fin}} \to E^1$。

设 (T, g) 是一个 Leavitt-Munn (E, C)-树。则 $T \in \mathrm{X}_L$ and $g_L \in T$。令 $A := \max(T) \setminus \{g_L\}$，且 $B := \{g \in A : g$不是 $\mathfrak{C}$-约化的 $\}$。若 $B = \emptyset$，则 $\mathbf{e}(T) \rtimes g$ 相对于 g_L 是 $\mathfrak{C}$-约化的，因此 $\iota((T, g)) = \mathbf{e}(T) \rtimes g \in \mathrm{B}(E, C)$

如果 $B \neq \emptyset$，则写作 $B = \{h_1 e_{X_1}, \dots, h_r e_{X_r}\}$，其中 $X_i \in C^{\mathrm{fin}}_{r(h_i)}$，且 $|X_i| \geq 2$ 对于 $i = 1, \dots, r$。对于任意满足 $|X| \geq 2$ 的 $X \in C^{\mathrm{fin}}$，令 $X' = X \setminus \{e_X\}$。

利用关系 $r(h_1) = e_{X_1} e_{X_1}^* + \sum_{x \in X_1'} xx^*$，我们可以在 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 中写出

$$\mathbf{e}(T) \rtimes g = -\sum_{x \in X_1'} \mathbf{e}((T \setminus \{h_1 e_{X_1}\}) \cup \{h_1 x\})) \rtimes g + \mathbf{e}(T \setminus \{h_1 e_{X_1}\})) \rtimes g.$$

根据引理 4.8，$|T\setminus\{h_1e_{X_1}\}|=|T|-1$，并注意到

$$|(T\setminus\{h_1e_{X_1}\})\cup\{h_1x\}|=|T|$$

并且，对每个 $x\in X_1'$，$\max((T\setminus\{h_1e_{X_1}\})\cup\{h_1x\})\setminus\{g_L\}=(A\setminus\{h_1e_{X_1}\})\cup\{h_1x\}$。另一方面，$E$-树 $T\setminus\{h_1e_{X_1}\}$ 显然是 C-相容的，但它不一定属于 $\mathcal{X}_0$ 或 $\mathcal{X}_L$。然而，它约化为 $\mathcal{X}_L$ 中的一棵树后，即 $(T\setminus\{h_1e_{X_1}\})_L$，其总长度将严格小于 $|T|$。

对于 $(x_1,\dots,x_r)\in X_1'\times\cdots\times X_r'$，定义

$$T_{(x_1,\dots,x_r)}=(T\setminus\{h_1e_{X_1},\dots,h_re_{X_r}\})\cup\{h_1x_1,\dots,h_rx_r\}.$$

另外，定义 $U:=\mathfrak{E}(C^{\mathrm{fin}})=\{e_X\colon X\in C^{\mathrm{fin}}\}$，并注意到边集 $e\in E^1$ such that $s^{-1}(s(e))=\{e\}$ 是 U 的子集。令 T_U 为 T 的 U-约化，如引理 3.8 所示。

将上述过程重复有限次后，我们得到 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中如下形式的一个恒等式

$$\mathbf{e}(T)\rtimes g=(-1)^r\sum_{(x_i)\in\prod_{i=1}^r X_i'}\mathbf{e}(T_{(x_i)})\rtimes g+\tau+\mathbf{e}(T_U\cup g_L^{\downarrow})\rtimes g, \tag{4.10}$$

其中，τ 是如下形式项的线性组合：$\mathbf{e}(S)\rtimes g\in\mathcal{B}(E,C)$，满足

$$|T_U\cup g_L^{\downarrow}|<|S|<|T_{(x_i)}|=|T|$$

对所有 $(x_i)\in\prod_{i=1}^r X_i'$ 均成立。注意，(4.10) 给出了 $\mathbf{e}(T)\rtimes g$ 的 $\mathfrak{E}$-约化 Scheiblich 标准形，因为所有 $T_{(x_i)}$ 以及 $T_U\cup g_L^{\downarrow}$ 相对于 g_L 都是 $\mathfrak{E}$-约化的。

现在我们可以证明 ι 的单射性。设对于 Leavitt-Munn (E,C)-树 (T,g) 和 (T',h)，有 $\iota((T,g))=\iota((T',h))$。由于它们分别是次数为 g 和 h 的齐次元，我们必有 $g=h$。令 A' 和 B' 为上述与 T' 对应的集合。设 $B'=\{h_1'e_{Y_1},\dots,h_s'e_{Y_s}\}$，其中 $Y_j\in C^{\mathrm{fin}}_{r(h_j')}$ 且对于 $j=1,\dots,s$ 有 $|Y_j|\geq 2$。对于 T'，我们有一个类似于 (4.10) 的公式，其中涉及相对于 g_L 的 $\mathfrak{E}$-约化树 $T'_{(y_1,\dots,y_s)}$，其中 $(y_j)\in\prod_{j=1}^s Y'^j$，以及 $T'_U\cup g_L^{\downarrow}$。

由于 $\mathbf{e}(T)\rtimes g=\mathbf{e}(T')\rtimes g$ 属于 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$，因此它们的 $\mathfrak{E}$-约化 Scheiblich 标准形相等。考察 (4.10) 中 $\mathbf{e}(T)\rtimes g$ 和 $\mathbf{e}(T')\rtimes g$ 的展开式中长度最长项和长度最短项，我们得出

$$(-1)^r\sum_{(x_i)\in\prod_{i=1}^r X_i'}\mathbf{e}(T_{(x_i)})=(-1)^s\sum_{(y_j)\in\prod_{j=1}^s Y_j'}\mathbf{e}(T'_{(y_j)}) \tag{4.11}$$

以及 $T_U\cup g_L^{\downarrow}=T'_U\cup g_L^{\downarrow}$。我们断言 $A\setminus B=A'\setminus B'$。由对称性，只需验证其中一个包含关系。设 $g\in A\setminus B$。显然 $g\notin B'$。我们要验证 $g\in A'$。为导出矛盾，假设 $g\notin A'$。那么由 (4.11) 可知，存在 $j\in\{1,\dots,s\}$ 和 $y\in Y'^j$，使得 $g=h_j'y$。但是，由于 $g\in A=\max(T)\setminus\{g_L\}$，且 g 是 $\mathfrak{E}$-约化的，可知 $g\in\max(T_U)$。因此，利用 $T_U\cup g_L^{\downarrow}=T'_U\cup g_L^{\downarrow}$，得到 $g=h_j'y\in T'_U$，这就产生了矛盾，因为 T'_U 不包含任何形如 $h_j'z$ 的路径，其中 $z\in Y_j$。这表明 $A\setminus B=A'\setminus B'$。现在再次利用 (4.11)，容易看出 $B=B'$。事实上，假设 $g=h_{i_0}e_{X_{i_0}}\in B$，并固定一条边 $x\in X'_{i_0}$。那么 $h_{i_0}x$ 是某些树 $T_{(x_i)}$ 中的一个极大元，因此由 (4.11) 可知，它必定是某些树 $T'_{(y_j)}$ 中的极大元。如果 $h_{i_0}x\in A'\setminus B'$，那么 $h_{i_0}x\in A\setminus B$，但这样一来 $h_{i_0}x,h_{i_0}e_{X_{i_0}}\in T$，这是不可能的，因为 T 是 C-相容的。因此 $h_{i_0}x\notin A'\setminus B'$，于是存在 $j_0\in\{1,\dots,s\}$ 和 $y\in Y'^{j_0}$，使得 $h_{i_0}x=h'_{j_0}y$，这意味着 $h_{i_0}=h'_{j_0}$ 且 $x=y$。特别地，$X_{i_0}=Y_{j_0}$，因此

$$g=h_{i_0}e_{X_{i_0}}=h'_{j_0}e_{Y_{j_0}}\in B'.$$

因此 $B\subseteq B'$，类似地 $B'\subseteq B$。由于 $A\setminus B=A'\setminus B'$ 且 $B=B'$，我们得到 $A=A'$，从而有 $(T,g)=(T',h)$，如所求。

证明到此结束。 □

5. Cohn 路径代数与 Leavitt路径代数之间的关系

这里我们希望确定 Cohn 代数与利维特代数之间的关系。 [3, 定理1.5118] 证明了，每个非分离图的 Cohn路径代数都同构于另一个非分离图的 Leavitt路径代数。在分离图的情形下，这显然无法实现，但仍存在一种很好的关系。

我们将更一般地讨论 Cohn-Leavitt 代数与 Leavitt路径代数这两个类之间的联系。分离图的 Cohn-Leavitt 路径代数已在 [12]中引入。这里我们将回顾其定义，并考察这些代数的阿贝尔化（或驯化）版本。

定义 5.1。 参见 [12, 定义 2.5] 设 (E, C) 是一个分离图，且 S 是 C^{fin} 的一个子集。令 $CL_K(E, C, S)$ 为由生成元 $E^0 \cup E^1$ 生成、满足定义 2.4 中的关系 (V)、(E1)、(E2) 和 (SCK1)，以及仅对集合 $X \in S$ 满足关系 (SCK2) 的 $*$-代数。 $*$-代数 $CL_K(E, C, S)$ 称为 (E, C, S) 的*Cohn-Leavitt* 路径代数。

我们将由 $E^0 \cup E^1$ 这一典范生成元集所关联的温和 $*$-代数 $CL_K^{\mathrm{ab}}(E, C, S)$ 记作如此。我们称其为三元组 (E, C, S) 的温和 Cohn-Leavitt 路径代数。注意， $CL_K^{\mathrm{ab}}(E, C, S) = \mathsf{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)/\mathsf{Q}_S$，其中 Q_S 是 $\mathsf{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 中由投影 q_X 生成的理想，其中 $X \in S$。

$CL_K(E, C, S)$ 的线性基已在 [12, 定理 2.7] 中给出。现在我们将展示，也可以用我们在定理 4.6 中处理 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 时采用的相同方法，给出 $CL_K^{\mathrm{ab}}(E, C, S)$ 的线性基。

We n需要将定义 3.12 扩展到这个新的情形 g.
给定 $S \subseteq C^{\mathrm{fin}}$，我们令

$$S^1 = \{e \in E^1 : \{e\} \in S\}.$$

每个元素 $g \in \mathbb{F}_C$ 都可以唯一地写成 $g = g_S w$，其中 g_S 要么是一个顶点，要么以一条不属于 S^1 的边 $e \in E^1$ 结尾，而 w 是 E^{-1} 中元素与 S^1 中元素的乘积。

对于 $v \in E^0$，定义 $\mathcal{X}_S$ 为满足以下条件的那些 $T \in \mathcal{X}_0$ 的集合：T 的所有极大元都不以边 $e \in S^1$ 结尾。对于 $g \in \mathbb{F}_C \setminus E^0$，我们用 D_g^S 表示满足 $g_S \in T$ 的元素 $T \in \mathcal{X}_S$ 的集合。对于 $S = C^{\mathrm{fin}}$，有 $g_S = g_L$，$\mathcal{X}_S = \mathcal{X}_L$，以及 $D_g^S = D_g^L$。

定义 5.2. 设 (E, C) 是一个分离图，且 S 是 C^{fin} 的子集。我们将 S-选择函数 定义为一个函数 $\mathfrak{E}$: $S \to E^1$，满足对所有 $X \in S$，均有 $\mathfrak{E}(X) \in X$。若对所有 $X \in S$， $\lambda \in \mathbb{F}_C$ 不以 e_X 结尾，则称 $\lambda \in \mathbb{F}_C$ 是 $\mathfrak{E}$-约化的。

我们称元素 $T \in \mathcal{X}_0$ 是 $\mathfrak{E}$ -约化的，如果其每个极大元都 T 是 $\mathfrak{E}$ -约化的。令 $g \in \mathbb{F}_C$。我们称 $T \in D_g^S$ 相对于 g_S 是 $\mathfrak{E}$-约化的，如果 max(T) 中的每个元素 $\setminus \{g_S\}$ 都是 $\mathfrak{E}$- 约化的。也就是说，如果 g_S 是 $\mathfrak{E}$- 约化的，或者 g_S 在 T 中不是极大元，那么 T 相对于 g_S 是 $\mathfrak{E}$-约化的，当且仅当 T 是 $\mathfrak{E}$-约化的；而如果 g_S 不是$\mathfrak{E}$-约化的，且 g_S 是 T中的极大元，那么 T 相对于 g_S 是 $\mathfrak{E}$-约化的，当且仅当 T 中除 g_S 外的所有极大元都是 $\mathfrak{E}$-约化的。

有了这些定义，我们可以陈述以下结果，其证明思路与定理 4.6 的证明相同。

定理 5.3。 设 (E, C) 是一个分离图，且 S 是 C^{fin}的一个子集，并设 $\mathfrak{E}$是 (E, C)的一个 S- 选择函数。那么， $CL_K^{\mathrm{ab}}(E, C, S)$ 的一组线性基由以下形式的元素构成

$$\overline{\mathcal{B}}(E, C, S) := \{\mathbf{e}(T) \rtimes g : T \in D_g^S \text{ and } T \text{ is } \mathfrak{E}\text{-reduced relatively to } g_S\}.$$

注意，在 $S = \emptyset$ 和 $S = C^{\mathrm{fin}}$这两种极端情形下，我们分别得到已知的$\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$和$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$的基。

现在我们可以开始研究它与 Leavitt路径代数之间的关系了。

设 (E,C) 是一个分离图， S C^{fin} 的一个子集。我们按如下方式构造一个新的分离图 (E_S,C^S)。首先，令

$$(E_S)^0 = E^0 \sqcup \{v_X : X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S\}$$

$$(E_S)^1 = E^1 \sqcup \{d_X : X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S\},$$

E_S 中的源映射与靶映射满足以下条件：自然映射 $E \to E_S$ 是图同态，而且

$$s(d_X) = v, \quad r(d_X) = v_X \ \text{ if } X \in C_v^{\mathrm{fin}} \setminus S.$$

划分 C_v^S 定义为 $C_v^S = \{X : \ X \in C_v\}$，其中 $X = X \cup \{d_X\}$ 若 $\overline{X} \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S$，否则为 $X = X$。

在 $S = \emptyset$ 的情况下，Cohn-Leavitt 路径代数与 Cohn路径代数重合，我们将分离图 $(E_\emptyset, C^\emptyset)$ 记作 (E,C)。

命题 5.4。设 (E,C) 是一个分离图，且 S 是 C^{fin} 的子集。设 $p := \sum_{v\in E^0} v \in M(L_K(E_S,C^S))$。那么存在自然的 $*$-同构

$$\varphi\colon CL_K(E,C,S) \cong p\mathcal{L}_K(E_S,C^S)p$$

使得对所有 $v \in E^0$， $\varphi(v) = v$；并且对所有 $e \in E^1$， $\varphi(e) = e$。

特别地，$C_K(E,C) \cong pL_K(E,C)p$。

证明。我们有一个自然的 $*$-同态 $\varphi\colon CL_K(E,C,S) \to pL_K(E_S,C^S)p$，其定义为 $\varphi(v) = v$ 以及 $\varphi(e) = e$，对所有 $v \in E^0$ 和 $e \in E^1$均成立。注意， $R := pL_K(E_S,C^S)p$ 作为 $*$-代数由 $E^0 \cup E^1$ 以及投影 $d_X d_X^*$（其中 $X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S$）生成， $E^0 \cup E^1$中的元素满足 Cohn 路径代数关系，所有 $X \in S$均满足 Leavitt 路径代数关系 $v = \sum_{e\in X} ee^*$，此外还有关系： $d_X d_X^*$ 是一个投影，并且

$$v = \sum_{e\in X} ee^* + d_X d_X^*$$

对每个 $X \in C_v^{\mathrm{fin}} \setminus S$, $v \in E^0$均成立。注意，这些关系自动蕴含：对所有 $e \in X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S$, $e^* d_X d_X^* = 0 = d_X d_X^* e$成立；并且当 $X \in C_v^{\mathrm{fin}} \setminus S$时， $d_X d_X^* \le v$成立。注意，对于 $X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S$， $\varphi(q_X) = d_X d_X^*$。

我们可以定义一个映射 $\psi\colon p\mathcal{L}_K(E_S,C^S)p \to CL_K(E,C,S)$，令 $\psi(v) = v$, $\psi(e) = e$ for $v \in E^0$ and $e \in E^1$，并令 $\psi(d_X d_X^*) = q_X = v - \sum_{e\in X} ee^*$ for $X \in C_v^{\mathrm{fin}} \setminus S$。根据上述观察可知，该映射保持 $p\mathcal{L}_K(E_S,C^S)p$ 的生成元之间的所有关系，因此诱导出一个 $*$-同态，它显然是 φ 的逆元。证明完毕。□

现在我们将上述结果推广到驯化代数。

定理 5.5. 设 (E,C) 为一个分离图，且 S 是 C^{fin}的一个子集。设 $p := \sum_{v\in E^0} v \in M(L_K(E_S,C^S))$。则存在一个自然的 $*$-同构

$$\overline{\varphi}\colon CL_K^{\mathrm{ab}}(E,C,S) \cong p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S)p$$

使得，对于所有 $v \in E^0$， $\varphi(v) = v$；对于所有 $e \in E^1$， $\varphi(e) = e$。

特别地，$C_K^{\mathrm{ab}}(E,C) \cong pL_K^{\mathrm{ab}}(E,C)p$。

证明。注意，命题 5.4 中的 $*$-同态 φ 诱导出一个满射 $*$-同态 $\varphi\colon CL_K^{\mathrm{ab}}(E,C,S) \twoheadrightarrow pL_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S)p$。为证明它是单射，我们证明 φ 将 $CL_K^{\mathrm{ab}}(E,C,S)$ 的一个基映到 $L_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S)$ 中的一个线性无关族。令 $\mathfrak{E}$ 为 (E,C) 的一个 S-选择函数。这意味着存在一个映射 $\mathfrak{E}\colon S \to E^1$，使得对所有 $X \in S$，都有 $\mathfrak{E}(X) \in X$。我们将 $\mathfrak{E}$ 扩展为选择函数 $\mathfrak{E}\colon (C^S)^{\mathrm{fin}} \to E_S^1$，令对每个 $X = X \in S$, $\overline{\mathfrak{E}(X)} = \mathfrak{E}(X) \in \overline{X}$，并且对所有 $X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S$, $\mathfrak{E}(X) = d_X \in X = X \cup \{d_X\}$。

我们考虑定理 5.3 中给出的 $\overline{C}L_K^{\mathrm{ab}}(E,C,S)$ 的基 $\mathrm{B} := \mathrm{B}_{\mathfrak{E}}(E,C,S)$，该基对应于 S-选择函数 $\mathfrak{E}$；还考虑定理 4.6 中给出的 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S)$ 的基 $\overline{\mathrm{B}} := \overline{\mathrm{B}}_{\mathfrak{E}}(E_S,C^S)$，该基对应于选择函数 $\mathfrak{E}$。若 $\mathsf{e}(T) \rtimes g$ 是基 B 中的一个元素，则 $g_S \in T$，并且 T 相对于 g_S 是 $\mathfrak{E}$-约化的。但是，由于 g 的边和 T 的边都不具有 $X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S$ 中的 d_X 或 d_X^{-1} 的形式，我们可知 $g_L = g_S$，且 T 相对于 g_L 是 $\mathfrak{E}$-约化的。此处的 g_L 是相对于分离图 (E_S,C^S) 计算的；并且我们注意到，对所有 $X \in C^S \setminus S$，都有 $|X| \geq 2$。因此，$\mathsf{e}(T) \rtimes g$ 属于基 $\overline{\mathrm{B}}$。于是，φ 将 $CL_K^{\mathrm{ab}}(E,C,S)$ 的基 B 单射地映入 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S)$ 的基 $\overline{\mathrm{B}}$，正如所需。□

设 (E,C) 是一个二部划分图，见 [6, 11, 14]。这意味着我们有一个分解 $E^0 = E^{0,0} \sqcup E^{0,1}$，使得 $s(E^1) = E^{0,0}$ 且 $r(E^1) = E^{0,1}$。于是我们定义 $*$-代数 $\mathrm{L}V_K^{ab}(E,C) = V\mathrm{L}_K^{ab}(E,C)V$，其中 $V = \sum_{v \in E^{0,0}} v \in \mathrm{M}(\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C))$，例如见 [6]。类似地，我们可以考虑 $\mathrm{C}V\mathrm{ab}_K(E,C) = V\mathrm{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)V$。注意，由于对于 $w \in E^{0,1}$，任意满足 $r(e) = w$ 的边 $e \in E^1$ 都有 $w = e^*e$，因此 $\mathrm{L}V_K^{ab}(E,C)$ 总是 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的一个全角；类似地，$\mathrm{C}V\mathrm{ab}_K(E,C)$ 是 $\mathrm{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中的一个全角。

根据这些定义，定理 5.5 中的 $*$-同构 φ 自然地限制为一个 $*$-同构，连接相应的全角。为此，注意当 $(E,\ C)$ 是二部图时，与 C^{fin} 的子集 S 相关联的分离图 $(E_S,\ C^S)$ 也以自然的方式成为二部图，即我们令 $E_S^0 = E^{0,}{}_{S^0} \sqcup E^{0,}{}_{S^1}$，其中 $E^{0,}{}_{S^0} = E^{0,0}$ 和 $E^{0,}{}_{S^1} = E^{0,1} \sqcup \{v_X :\ X \in C^{\mathrm{fin}} \setminus S\}$。

推论 5.6。设 (E,C) 是一个二部划分图，设 S 是 C^{fin} 的一个子集，并设 (E_S,C^S) 是上述构造的二部划分图。则有

$$V \cdot CL_K^{\mathrm{ab}}(E,C,S) \cdot V \cong \mathcal{L}V_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S).$$

特别地，$CV_{\mathrm{ab}K}(E,C) \cong LV_{\mathrm{ab}K}(\overline{E},\overline{C})$。

证明。令 $\varphi\colon CL_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C,\ S) \to p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E_S,\ C^S)p$ 为定理 5.5 中构造的同构。由于 $\varphi(V) = V$，

$$VCL_K^{\mathrm{ab}}(E,C,S)V \cong Vp\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S)pV = V\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E_S,C^S)V = \mathcal{L}V_K^{ab}(E_S,C^S)$$

即可得出所述结果。□

6. A linear basis of the ideal $\mathcal{Q}$

回顾一下，$\mathcal{Q}$ 是由幂等元 q_X 生成的 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)$ 的理想，其中 $X \in C^{\mathrm{fin}}$ 取遍所有相应对象，因此 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C) \cong \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,\ C)/\mathcal{Q}$。本节的目标是找出 $\mathcal{Q}$ 的线性基。对于非分离图，找出这样的基并不困难，例如可参见[3, 命题 1.5.11] 以及下文的例 9.6。然而，分离图的情形要复杂得多。

我们先回顾 [9]中的一些必要记号和术语。

记号 6.1。对于长度为 $n \geq 1$ 的元素 $g = x_1 \cdots x_n \in \mathbb{F}$，其中 $x_j \in E^1 \cup E^{-1}$ 且 $1 \leq i \leq n$，我们将 $[g]_i$ 记作 g 的长度为 i 的前缀，即 $[g]_i := x_1 \cdots x_i \in \mathbb{F}$。

记号 6.2。 [9,记号 5.10(1),(2)]

(1) 对于 $v \in E^0$，记作

$$\mathcal{N}(v) = \{x_1^{-1}x_2^{-1} \cdots x_n^{-1}y \in \mathbb{F}_C(v) : n \geq 0, x_1, \ldots, x_n, y \in E^1\}.$$

(2) 对于每个 $T \in \mathcal{X}_0$，，记作

$$\mathcal{N}(T) := \{gg' \in \mathbb{F}_C : g \in T,\ g' \in \mathcal{N}(r(g)),\ g[g']_1 \notin T,\ \text{and } T \cup \{gg'\}^{\downarrow} \in \mathcal{X}_0\}.$$

我们将 $\mathcal{N}(T)$ 视为 T 的邻居集合。现在，对于每个 $T \in \mathcal{X}_0$ 以及 $\mathcal{N}(T)$ 的每个有限子集，我们可以如下定义 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中的幂等元：

定义 6.3。 [9, 定义 4.3] 设(E,C)是一个分离图，且 $T \in \mathcal{X}_0$。

(1) 与 T 关联的幂等元 $\mathbf{e}(T)$ 是

$$\mathbf{e}(T) = \prod_{\lambda \in \max(T)} \lambda\lambda^*.$$

(2) 现在假设 $\lambda \in \mathcal{N}(T)$。那么存在唯一分解 $\lambda = \lambda_0\lambda_1$，其中 $\lambda_0 \in T, \lambda_1 = x_1^{-1}\cdots x_r^{-1}y, r \geq 0, x_1, \ldots, x_r, y \in E^1$ 和 $\lambda_0[x_1^{-1}\cdots x_r^{-1}y]_1 \notin T$。定义

$$\mathbf{e}(\lambda_0 \setminus \lambda) = \lambda_0\lambda_0^* - \lambda\lambda^* = \lambda_0(r(\lambda_0) - \lambda_1\lambda_1^*)\lambda_0^* \in \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C).$$

(3) 对于 $\mathcal{N}(T)$ 的有限子集 F，定义幂等元 $\mathbf{e}(T\setminus F)$ 如下：

$$\mathbf{e}(T \setminus F) = \mathbf{e}(T) \cdot \prod_{\lambda_0\lambda_1 \in F} \mathbf{e}(\lambda_0 \setminus \lambda_0\lambda_1) = \prod_{\lambda_0\lambda_1 \in F} \mathbf{e}(T \setminus \{\lambda_0\lambda_1\}).$$

(4) 对于 $v \in E^0$ 和 $e \in s^{-1}(v)$，我们定义

$$\mathbf{e}(v \setminus e) = v - ee^*.$$

(5) 对于 $v \in E^0$ 和 $X \in C_v^{\mathrm{fin}}$，定义

$$q_X = \mathbf{e}(v \setminus X) = \prod_{e \in X} \mathbf{e}(v \setminus e) = v - \sum_{e \in X} ee^* \in \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C).$$

注意，如果 $\mu = \mu_0\mu_1$ 与 $\mu_1 = x_1^*\cdots x_r^*$ 和 μ_0 不以 $(E^1)^*$ 结尾，其中$x_1, \ldots, x_r \in E^1$，且 $X \in C^{\mathrm{fin}}$，那么

$$\mu q_X \mu^* = \mathbf{e}(\mu_0 \setminus \mu_0(\mu_1 X)) = \prod_{e \in X} \mathbf{e}(\mu_0 \setminus \mu_0(\mu_1 e)),$$

这里使用定义 6.3 中引入的记号。直观地说，在考虑$\mathbf{e}(\mu_0 \setminus \mu_0(\mu_1 X))$ 时，我们阻塞路径 $\mu = \mu_0\mu_1$中朝向 X 的出口。这引出了以下定义：

定义 6.4。 设 (E,C) 是一个分离图，且 $T \in \mathcal{X}_0$。一个阻塞族 由 T 由 F 的有限子集构成，该子集属于$\mathcal{N}(T)$，其中

$$F = \bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_0^i(\gamma_1^i X_i)$$

其中 $\gamma_0^i \in T$，且 $\gamma_0^i\gamma_1^i X_i = \{\gamma_0^i\gamma_1^i x : x \in X_i\}$ 对于 $X_i \in C_r^{\mathrm{fin}}{}_{(\gamma_0^i\gamma_1^i)}$，其中 $\gamma^i x = (\gamma_0^i)(\gamma_1^i x)$ 是元素 $\gamma^i x \in \mathcal{N}(T)$ 的标准形式，如定义 6.3(2) 中所述。

我们称阻塞族 F 为素的，当且仅当它只包含一个集合，也就是说，当 $X \in C^{\mathrm{fin}}$ 只有一个时，$F = \gamma X$。请注意，

$$\mathbf{e}\Big(T \setminus \big(\bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_0^i(\gamma_1^i X_i)\big)\Big) = \prod_{i=1}^{r} \mathbf{e}(T \setminus \gamma_0^i\gamma_1^i X_i).$$

同样，直观地说，当考虑上述 T 的阻塞族 F 的 $\mathbf{e}(T\setminus F)$ 时，我们是在路径 $\gamma_0^i\gamma_1^i$ 处阻挡朝向集合 X_i 的各个出口，$i = 1, \ldots, r$。注意，如果 C-分离词 $\gamma_0^i\gamma_1^i$ 以 y^{-1} 结尾，且 $y \in E^1$，那么 $y \notin X_i$，因为对于 $x \in X_i$，所有路径 $\gamma_0^i\gamma_1^i x$ 都必须是 C-分离的。

我们将始终使用元素 $\mathbf{e}(T \setminus gX)$ 的以下表达式。对于 $T \in \mathcal{X}_0$以及 $F = gX$ 的一个素阻塞族 T，记作 $g = g_0 w$，其中 $g_0 \in T$ 不以 E^{-1} 结尾，且 w 是元素 $x_i^{-1} \in E^{-1}$ 的乘积。那么，元素 $\mathbf{e}(T \setminus gX)$ 可写为：

$$\mathbf{e}(T \setminus gX) = \mathbf{e}(T) - \sum_{x \in X} \mathbf{e}(T \cup \{gx\}^{\downarrow}). \tag{6.5}$$

事实上，我们有

$$\mathbf{e}(T \setminus gX) = \mathbf{e}(T)g_0(r(g_0) - \sum_{x\in X} wxx^*w^*)g_0^* = \mathbf{e}(T)(g_0g_0^*) - \sum_{x\in X}\mathbf{e}(T\cup\{gx\}^{\downarrow})$$
$$= \mathbf{e}(T) - \sum_{x\in X}\mathbf{e}(T\cup\{gx\}^{\downarrow})$$

因为 $g_0 \in T$，我们有 $\mathbf{e}(T)(g_0g_0^*) = \mathbf{e}(T)$。这就得到了公式 (6.5)。

以下基本引理将在引理 6.7 的证明中使用。

引理 6.6. 设 (E, C) 是一个分离图，设 $I, J \in X_0$，且 $F \in N(I)$、$G \in N(J)$。则有

$$\mathbf{e}(I \setminus F)\mathbf{e}(J \setminus G) = \begin{cases} \mathbf{e}((I\cup J)\setminus(F\cup G)) & \text{if } I\cup J \text{ is } C\text{-compatible and} \\ & F\cap J = G\cap I = \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明。这由以下恒等式得出

$$\mathcal{Z}(I \setminus F)\cap\mathcal{Z}(J \setminus G) = \begin{cases} \mathcal{Z}((I\cup J)\setminus(F\cup G)) & \text{if } I\cup J \text{ is } C\text{-compatible and} \\ & F\cap J = G\cap I = \emptyset \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

这已在 [9,引理 5.11] 中证明。 □

在下面的引理中，我们得到理想 $\mathcal{Q}$ 的一个生成族。

引理 6.7. 设 (E, C) 是一个分离图。考虑集合

$B'' = \{\mathbf{e}(T\setminus F) \rtimes g \colon T \in X_0, [T] \in D_g$ 且 $F = \gamma X$ 是 T 的一个素阻塞族$\}$。

那么，Q 是 B'' 的 K-线性张成。

证明。只需证明，对于 $\mathbf{e}(I) \rtimes g, \mathbf{e}(J) \rtimes h \in \mathcal{S}(E, C)$，元素

$$(\mathbf{e}(I) \rtimes g)q_X(\mathbf{e}(J) \rtimes h)$$

属于 $\mathcal{B}''$ 的 K-线性张成。我们可以假设这个乘积非零。在这种情况下，我们有 $r(g) = v$，其中 $X \in C_v$，因此有

$$(\mathbf{e}(I) \rtimes g)q_X = \mathbf{e}(I \setminus gX) \rtimes g.$$

现在将 $((gg^{-1}) \rtimes g)(\mathbf{e}(J) \rtimes h) = \mathbf{e}(J') \rtimes (g \cdot h)$ 写成某个 $J' \in \mathcal{X}_0,$，由引理 6.6 可得：

$$(\mathbf{e}(I) \rtimes g)q_X(\mathbf{e}(J) \rtimes h) = (\mathbf{e}(I \setminus gX)e(J')) \rtimes (g \cdot h) = \mathbf{e}((I\cup J')\setminus gX) \rtimes (g \cdot h) \in \mathcal{B}''.$$

□

注 6.8。引理 6.7 中给出的 $\mathcal{B}''$ 的 $\mathcal{Q}$ 生成族一般并非线性无关。我们通过一个例子说明这一点。设 (E, C) 为 Cuntz 分离图，其中有 $|C| > 1$，令 a，b 为 E 中的两条不同边，并设 $E^0 = \{v\}$。令 $A = \{a\}$ 和 $B = \{b\}$。于是有

$$\mathbf{e}(A \setminus B) = aa^* - aa^*bb^*, \qquad \mathbf{e}(B \setminus A) = bb^* - aa^*bb^*.$$

因此，对于以下不同元素 $\mathbf{e}(A\setminus B)$，$\mathbf{e}(B\setminus A)$，$\mathbf{e}(v\setminus A)$，$\mathbf{e}(v\setminus B)$，得到如下非平凡线性关系：

$$\mathbf{e}(A \setminus B) + \mathbf{e}(v \setminus A) = \mathbf{e}(B \setminus A) + \mathbf{e}(v \setminus B).$$

另一方面，利用我们先前的结果，可以证明元素 $\mathbf{e}(I\setminus F)$（其中 $I \in \mathcal{X}_0$ 且 F 是 I 的阻塞族）在 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 中均不相同：

引理 6.9. 设 (E, C) 是一个分离图，$I, J \in X_0$，F 是 I 的一个阻塞族，G 是 J 的一个阻塞族。若 $\mathbf{e}(I\setminus F) = \mathbf{e}(J\setminus G)$，则 $I = J$ 且 $F = G$。

证明. 记 $\varphi(\mathbf{e}(I\setminus F))=\mathbf{e}(T)$，以及 $\varphi(\mathbf{e}(J\setminus G))=\mathbf{e}(T')$，其中 $T,T'\in\mathcal{X}_L(E,C)$，而 φ 是定理 5.5 中建立的同构。这里

$$T=I\cup\{\gamma_1 d_{X_1},\dots,\gamma_r d_{X_r}\}^{\downarrow},$$

其中 $F=\bigsqcup_{i=1}^{r}\gamma_i X_i$，类似地，对 T' 也成立。由于 $\mathbf{e}(T)=\mathbf{e}(T')$，由定理 4.9 和 3.15 可得 $T=T'$。因此，只需注意到可以从 T 中恢复 I 和 F。事实上，$I=S_0$，其中 S 是由下式给出的树

$$S=T\setminus\{\gamma d_X:\gamma d_X\in T\},$$

于是 F 是 $I=S_0$ 的阻塞族$\{\gamma X:\ \gamma d_X\in T\}$。 □

现在，我们可以运用之前的结果，求得理想 $\mathcal{Q}$ 的一个线性基。稍令人意外的是，这个线性基是通过选取形如 $\mathbf{e}(T\setminus F)\rtimes g$ 的某些元素构成的，其中 F 是 T 的一个阻塞族，而 T 避开了某些边。

在下面的关键定义中，我们将使用以下术语和记号。对于 $T\in\mathrm{X0}$、F（T 的一个阻塞族）以及 $h\in\max(T)$，若 h 被 F 阻塞，即 F 包含一个形如 hwX 的块，其中 w 是逆边的乘积，且 $X\in C^{\mathrm{fin}}$，则称之为被阻塞。相应地，若 F 不包含这样的块，则称 h 未被 F 阻塞；这意味着 T 中沿 h 方向的出口均未被阻塞。T 中被 F 阻塞的极大元集合记为 $\text{B-max}(T\setminus F)$，而 T 中未被 F 阻塞的极大元集合记为 $\text{NB-max}(T\setminus F)$。设 $\mathfrak{E}$ 是 (E,C) 的一个选择函数。若 $g\in\mathbb{F}_C$ 且 $g_0\in T$，则称 $\mathbf{e}(T\setminus F)$ 相对于 g_0 是 $\mathfrak{E}$-约化的，如果 $\text{NB-max}(T\setminus F)\setminus\{g_0\}$ 中的所有元素都是 $\mathfrak{E}$-约化的。换言之，若 T 中除 g_0 外的所有未被 F 阻塞的极大元都是 $\mathfrak{E}$-约化的，则称 $\mathbf{e}(T\setminus F)$ 相对于 g_0 是 $\mathfrak{E}$-约化的。

定义 6.10。设 (E,C) 是一个分离图，并设 $\mathfrak{E}\colon C^{\mathrm{fin}}\to E^1$ 是 (E,C) 的一个选择函数。典范 $\mathfrak{E}$-基 $\mathcal{Q}$ 是由所有形如 $\mathbf{e}(T\setminus F)\rtimes g$ 的元素组成的集合 $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$，其中 $T\in\mathcal{X}_0$，F 是 T，$g_0\in T$ 的一个非空阻塞族，且 $\mathbf{e}(T\setminus F)$ 相对于 g_0 是 $\mathfrak{E}$-约化的。

现在我们证明集合 $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ 确实是 $\mathcal{Q}$ 的一个线性基。

定理 6.11。设 (E,C) 是一个分离图，且 $\mathfrak{E}$ 是 (E,C) 的一个选择函数。则典范的 $\mathfrak{E}$-基 $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ 是 $\mathcal{Q}$ 的一个线性基。

证明。首先注意，对于 $\mathbf{e}(T\setminus F)\rtimes g\in\mathcal{B}(\mathcal{Q})$，有 $\mathbf{e}(T\setminus F)\in\mathcal{Q}$，因为 F 是 T 的一个非空阻塞族，因此 $\mathbf{e}(T\setminus F)\rtimes g\in\mathcal{Q}$。

现在令 $(\overline{E},\overline{C})$ 为与 (E,C) 相关联的分离图，因此根据定理 5.5，我们有一个 $*$-同构 $\varphi\colon \mathrm{C}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)\to p\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)p$。回想一下，$\overline{E}^0=E^0\sqcup\{v_X:X\in C^{\mathrm{fin}}\}$、$\overline{E}^1=E^1\sqcup\{d_X:X\in C^{\mathrm{fin}}\}$ 和 $\overline{C}_v=\{X:\ X\in C_v^{\mathrm{fin}}\}\sqcup C_v^{\mathrm{inf}}$，其中对于每个 $X\in C^{\mathrm{fin}}$，$X=X\sqcup\{d_X\}$，且 $\overline{C}^{\mathrm{inf}}=\{X\in C:\ |X|=\infty\}$。我们为 (E,C) 定义一个选择函数 $\widetilde{\mathfrak{E}}\colon C^{\mathrm{fin}}\to E^1$，如下：

$$\widetilde{\mathfrak{E}}(\overline{X})=\mathfrak{E}(X)\in E^1.$$

$\mathcal{B}:=\mathcal{B}\widetilde{\mathfrak{E}}(\overline{E},\overline{C})$ 是与选择函数 $\widetilde{\mathfrak{E}}$ 相关联的 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{E},\overline{C})$ 的线性基，参见定理 4.6。$\mathcal{B}$ 中的元素具有 $\mathbf{e}(S)\rtimes g$ 的形式，其中 $S\Subset D_g^L$ 相对于 g_L 是 $\widetilde{\mathfrak{E}}$-约化的，且 $g\in\mathbb{F}_C$。注意，边 d_X 是终止的，意即任何满足 $s(\gamma)\in E^0$ 且以某个 d_X（$X\in C^{\mathrm{fin}}$）结尾的路径 $\gamma\in\mathbb{F}_C$，都不能在 $\mathbb{F}_C$ 中继续延伸为更长的路径。

设 $\mathcal{Q}:=\varphi(\mathcal{Q})\subset p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{E},\overline{C})p$。根据前面的观察，任意基元素 $\mathbf{e}(S)\rtimes g\in\mathcal{B}\cap p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)p$ 都满足 $g\in\mathbb{F}_C$，也就是说，g 不能包含任何形如 d_X 的边，其中 $X\in C^{\mathrm{fin}}$。因此，$\mathcal{Q}$ 的一组基由所有满足以下条件的元素 $\mathbf{e}(S)\rtimes g\in\mathcal{B}$ 给出：S 包含某条形如 hd_X 的路径，其中 $h\in\mathbb{F}_C$ 且 $X\in C^{\mathrm{fin}}$，并且 $g\in\mathbb{F}_C$。注意，这些路径 hd_X 必然是 S 中的极大路径，因为它们无法再适当延伸。我们将 $\mathcal{Q}$ 的这组基记作 $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$

为了完成证明，我们必须验证 $\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{Q})) = \mathcal{B}(\mathcal{Q})$。首先，假设 $\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$。那么 $T \in \mathcal{X}_0$, $F = \bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_i^0(\gamma_i^1 X_i)$ 是 T 的一个非空阻塞族，符合定义 6.4，$g_0 \in T$，并且 T 的所有未被 F 阻塞的极大元（可能除 g_0 外）都是 $\mathfrak{E}$-约化的。现在注意到 $\varphi(\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g) = \mathbf{e}(S) \rtimes g$，其中

$$\max(S) = \text{NB-max}(T \setminus F) \bigsqcup \{\gamma_i^0 \gamma_i^1 d_{X_i} : i = 1, \dots, r\}.$$

另一方面，由于对所有 $X \in C^{\text{fin}}$ 都有 $|X| \geq 2$，因此对所有 $g \in \mathbb{F}_C$ 都有 $g_L = g_0$，从而 $g_L \in S$。由于

$$\max(S) \setminus \{g_L\} = (\text{NB-max}(T) \setminus \{g_0\}) \bigsqcup \{\gamma_i^0 \gamma_i^1 d_{X_i} : i = 1, \dots, r\}$$

且 $\mathbf{e}(T \setminus F)$ 相对于 g_0 是 $\mathfrak{E}$-约化的，因此 S 相对于 $g_L = g_0$ 是 $\mathfrak{E}$-约化的。此外，由于 F 非空，故 $r \geq 1$，于是 $\mathbf{e}(S) \rtimes g \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$。

反过来，假设 $\mathbf{e}(S) \rtimes g \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$。我们可以写成 $\max(S) = M_1 \sqcup M_2$，其中 M_1 是 S 中末尾为 E^1 的极大元，M_2 是 S 中末尾为 d_X 的极大元，且对某个 $X \in C^{\text{fin}}$ 成立。我们可以写成

$$M_2 = \{\gamma_i d_{X_i} : i = 1, \dots, r\},$$

其中 $\gamma_i \in \mathbb{F}_C$ 和 $X_i \in C^{\text{fin}}$，对于 $i = 1, \dots, r$。

令 $S' := S \setminus M_2$，并注意到 $S' \in \mathcal{X}(= \mathcal{X}(E))$，因为 S' 中没有路径包含边 d_X，对于 $X \in C^{\text{fin}}$。现在令

$$A := \max\{h_0 : h \in S'\} \quad \text{and} \quad T = A^{\downarrow}.$$

于是 $T \in \mathcal{X}_0$，和 $T \subseteq S' \subseteq S$。现在我们将为 T 定义一个合适的阻塞族 F。取一个元素 $\gamma_i d_{X_i} \in M_2$。我们可以写成 $\gamma_i = \gamma_i^0 \gamma_i^1$，其中 γ_i^0 是 γ_i 的一个极大前缀，满足性质 $\gamma_i^0 \in T$。注意，γ_i^1 可能是平凡的。定义

$$F := \bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_i^0(\gamma_i^1 X_i).$$

我们断言 F 是 T 的一个阻塞族。对此我们唯一需要验证的是 $F \cap T = \emptyset$。假设对于某个 $x \in X_i$，有 $\gamma_i^0 \gamma_i^1 x \in T$。如果 γ_i^1 非平凡，这种情况不可能发生，因此我们可以假设 γ_i^1 是平凡的。在这种情况下，$\gamma_i x \in S$，因为 $T \subseteq S$，并且还有 $\gamma_i d_{X_i} \in S$，其中 x，$d_{X_i} \in X_i$，这不可能，因为 S 与 C 相容。因此我们得到 F 是 T 的一个阻塞族。此外，$g_0 = g_L \in S'$，因此根据 T 的定义，$g_0 \in T$。

现在我们来验证 NB-极大$(T \setminus F) = M_1$。根据构造，我们有 $M_1 \subseteq$ NB-极大$(T \setminus F)$。假设 $\gamma \in$ NB-极大$(T \setminus F)$。特别地，$\gamma \in \max(T)$，且由于 $T \subseteq S$，我们可以将 γ 扩展为 S 的一个极大元 h。若 $h \in M_1$，则 $h \in T$，因此根据 γ 在 T 中的极大性，$\gamma = h \in M_1$。若 $h \in M_2$，则对某个 $i \in \{1, \dots, r\}$，有 $\gamma \leq_p \gamma_i^0 \gamma_i^1 d_{X_i}$。但是，由于 $\gamma \in \max(T)$，可知 $\gamma = \gamma_i^0$，这意味着 $\gamma \in$ B-极大$(T \setminus F)$，与我们的假设矛盾。因此，我们已证明 NB-极大$(T \setminus F) = M_1$。由于 S 相对于 g_0 是 $\mathfrak{E}$- 约化的，因此 $\mathbf{e}(T \setminus F)$ 相对于 g_0 是 $\mathfrak{E}$- 约化的。由此可得 $\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g \in$ B(Q)。

最后我们证明 $\varphi(\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g) = \mathbf{e}(S) \rtimes g$。根据证明的第一部分，我们有

$$\overline{\varphi}(\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g) = \mathbf{e}(S'') \rtimes g,$$

由于 $\max(S'') =$ NB-$\max(T \setminus F) \bigsqcup \{\gamma_i d_{X_i} : i = 1 \dots, r\}$，且 NB-$\max(T \setminus F) = M_1$，我们得到 $\max(S'') = M_1 \sqcup M_2 = \max(S)$，这表明 $S = S''$。因此，$\varphi(\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g) = \mathbf{e}(S) \rtimes g$，如所需。证明至此完成。□

7. Leavitt 逆半群的谱与紧谱

本节中，我们计算分离图（E, C）的 Leavitt 逆半群 $\mathcal{LI}(E, C)$ 的谱和紧谱。我们直接证明，$\mathcal{LI}(E, C)$ 的紧谱与逆半群 $\mathcal{S}(E, C)$ 的紧谱自然同胚。非分离情形请参见 [35, 命题 5。1] 。因此，与 $\mathcal{S}(E, C)$ 和 $\mathcal{LI}(E, C)$ 相关联的紧群胚自然同构。受这些进展的启发，本节最后部分将展示该紧群胚的三种不同表述。

本节中的所有结果都是相应结果的“Leavitt”版本，见 [9, 第5]节。证明是对 [9], 中证明的简单改写，因此我们将略去。尽管如此，清楚陈述所有定义和定理仍然很有必要。一般而言，我们将沿用 [9], 中的记号，但加上一个 L 装饰，以便区分此处使用的概念与 [9]中引入的概念。

我们从定义 5.1]中的集合 $\mathfrak{F}$ 出发，给出一个“Leavitt”类比。

定义 7.1. (1) 对于 $v \in E^0$，令 $\mathfrak{F}_L(v)$ 表示所有（可能无限的）非空 C-相容下子集 Z 的集合，其中 $\mathbb{F}_C(v)$ 的每个 $z \in Z$ 都可以扩展为 Z 中的一个元素，该元素不以 E^{-1} 结尾，且不以边 e 结尾，使得 $\{e\} \in C$。令 $\mathfrak{F}_L = \bigsqcup_{v \in E^0} \mathfrak{F}_L(v)$。(2) 我们按包含关系对 $\mathfrak{F}_L$ 排序，并令 $\mathfrak{U}_L$ 为 F_L 的所有极大元组成的集合。

注意到 $\mathfrak{F}_L \subseteq \mathfrak{F}$，且 $\mathcal{X}_L$ 是 $\mathfrak{F}_L$ 中有限树的集合，也就是说，

$$\mathcal{X}_L = \{Z \in \mathfrak{F}_L : |Z| < \infty\}.$$

回忆定理 3.15，$\mathcal{Y}^L := \mathcal{X}/\sim_L$ 与半格$\mathcal{E}(\mathcal{LI}(E, C))$ 同构；后者是 Leavitt 逆半群 $\mathcal{LI}(E, C)$ 的幂等元集合。

命题 7.2。（参见 [9, 命题 5。1]）采用上述记号，我们有

(1) Y^L 上的滤子集合 F_L 与 $\mathfrak{F}_L$序同构。*(2)* Y^L 上的超滤子集合与 $\mathfrak{U}_L$同构。

同构 $\iota\colon \mathcal{F}_L \to \mathfrak{F}_L$ 定义如下。对于$\mathcal{Y}^L$上的滤子 η，我们考虑由所有形如 g_L 的元素组成的集合 C，其中 $[g^\downarrow] \in \eta$，而 $g = g_L w$ 是 g的典范分解。令 Z 为由 C生成的 $\mathbb{F}_C$ 的下子集。则 $\iota(\eta) = Z$。

回顾 [9, 定义 5.5] 中极大局部构型的概念。 [9, 定理 5.7] 中指出，$\mathcal{E}(\mathcal{S}(E,\ C))$上的超滤子集合 $\mathfrak{U}$ 与集合 $\mathfrak{U}'$ 相对应； $\mathfrak{U}'$ 由 $\mathbb{F}_C(v)$的所有非平凡下集 Z' 构成，且对于所有$g \in Z'$， Z'_g 都是极大局部构型，其中 v 遍历 E的所有顶点。

我们在此证明，同一集合 $\mathfrak{U}'$ 与超滤子集合 $\mathfrak{U}_L$ 同构 n $\mathcal{E}(\mathcal{LI}(E, C))$.

定理 7.3. 设 $\mathfrak{U}'$ 为 $\mathbb{F}_C$（v）的所有非平凡下集 Z' 中满足以下条件的集合：对于所有 $g \in Z'$, Z'_g 都是极大局部构型，其中 v 遍历 E的所有顶点。则存在 $\mathfrak{U}'$ 与超滤子集合 $\mathfrak{U}_L$之间的双射 $\mathfrak{U}' \cong \mathfrak{U}_L$ 。

证明。 证明是对 [9, 定理 5.7] 证明的改编。映射 $\varphi\colon \mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}_L$定义为将 $Z' \in \mathfrak{U}'$ 映至 $Z := Z' \setminus S$，其中 S 是 Z' 中满足以下条件的路径 γ所构成的子集： γ 以逆边或一条满足 $\{e\} \in C$ 的边 e 结尾，且 γ 不能延伸为一条路径 $\lambda \in Z'$，使得 λ 以一条满足 $e \in X \in C$ with$|X| \geq 2$ 的边 $e \in E^1$ 结尾。

φ 的逆元是映射 $\psi\colon \mathfrak{U}_L \to \mathfrak{U}'$，其定义为

$$\psi(Z) = Z \bigsqcup \{gw : gw \in \mathrm{NC}(g)\},$$

其中，NC(g) 是满足 $w = w_1 \cdots w_r$ 的所有路径 $gw \in \mathbb{F}_C$ 的集合，其中某个 $r \geq 1$ 使得每个 w_i 都是逆边或边，并且 $\{w_i\} \in C$，且 $gw_1 \notin Z$。

有了这些定义，证明遵循 [9, 定理 5.7] 中证明的步骤。□

对于任意非空下子集 Z of $\mathbb{F}_C(v)$, $v \in E^0$，我们将 Z_L 记作包含于 Z 中的 $\mathfrak{F}_L$ 的最大元素（按包含关系排序），也就是说 $Z_L = Z \setminus S$，其中S 是 Z 的子集，由以逆边或满足$\{e\} \in C$的边结尾的路径 γ 组成；而且， γ 不能延伸为以满足 $e \in X \in C$ 且 $|X| \geq 2$的边 $e \in E^1$结尾的路径 $\lambda \in Z$。集合 Z_L 也可以描述为由形如 g_L的元素所生成的 $\mathbb{F}_C$ 的下子集，其中 g 遍历 Z。注意，此定义扩展了定义 3.13 中给出的定义。

现在，我们以多种方式扩展 [9, Notation 5.10]中引入的概念和记号。具体而言，我们纳入无限树的情形，考虑来自$\mathcal{X}_L$ （以及$\mathfrak{F}_L$）的元素，并区分“邻域”$\mathcal{N}(Z)$中的有限元素和无限元素。

记号 7.4。 (1) 对于 $v \in E^0$，记 $\mathcal{N}_L^{\inf}(v)$ 为满足以下条件的元素 $\gamma y \in \mathbb{F}_C(v)$ 的集合：γ 是逆边与边的乘积 $e \in E^1$，使得 $\{e\} \in C$，且 $y \in X$ 满足 $X \in C^{\inf}$。类似地，我们用 $\mathcal{N}_L^{\mathrm{fin}}(v)$ 表示相应的元素 γy 的集合，其中 $y \in X$，且 $X \in C$ 和 $1 < |X| < \infty$。

(2) 对于每个 $Z \in \mathfrak{F}_L$，记

$$\mathcal{N}_L^{\inf}(Z) := \{gg' \in \mathbb{F}_C : g \in Z,\, g' \in \mathcal{N}_L^{\inf}(r(g)),\, g[g']_1 \notin Z, \text{ and } Z \cup \{gg'\}^{\downarrow} \in \mathfrak{F}_L\}.$$

(3) 对于每个 $Z \in \mathfrak{F}_L$，记

$$\mathcal{N}_L^{\mathrm{fin}}(Z) := \{gg' \in \mathbb{F}_C : g \in Z,\, g' \in \mathcal{N}_L^{\mathrm{fin}}(r(g)),\, g[g']_1 \notin Z, \text{ and } Z \cup \{gg'\}^{\downarrow} \in \mathfrak{F}_L\}.$$

We also set $\mathcal{N}_L(Z) = \mathcal{N}_L^{\mathrm{fin}}(Z) \sqcup \mathcal{N}_L^{\inf}(Z)$.

(4) 对于每个 $T \in \mathcal{X}_L$，由一个有限子集 F of $\mathcal{N}_L(T)$，我们设

$$\mathcal{Z}_L(T \setminus F) = \{Z \in \mathfrak{F}_L : T \subseteq Z \text{ and } F \cap Z = \emptyset\},$$

以及 $\mathcal{Z}_L(T) := \mathcal{Z}_L(T \setminus \emptyset) = \{Z \in \mathfrak{F}_L : T \subseteq Z\}$。

注意，对于 $T = \{v\} \in \mathcal{X}_L(v)$，我们有 $\mathcal{N}_{\inf L}(T) = \mathcal{N}_{\inf L}(v)$，并且 $\mathcal{N}_{\mathrm{fin}L}(T) = \mathcal{N}_{\mathrm{fin}L}(v)$，因此，(1)、(2) 和 (3) 中引入的记号是一致的。

现在我们引入一个基本定义。

定义 7.5. 设 $Z \in \mathfrak{F}_L$。$\mathcal{N}_L^{\inf}(Z)$ 中的一个元素称为 Z 的无限出口。$\mathcal{N}_L^{\mathrm{fin}}(Z)$ 中的一个元素称为 Z 的有限出口。如果 Z 没有有限（分别地，无限）出口，则称 Z 没有有限（分别地，无限）出口，当且仅当 $\mathcal{N}_L^{\mathrm{fin}}(Z) = \emptyset$ （分别地，$\mathcal{N}_L^{\inf}(Z) = \emptyset$）。如果$Z$没有出口，则称$Z$没有出口，当且仅当$\mathcal{N}_L^{\inf}(Z) = \mathcal{N}_{\mathrm{fin}L}(Z) = \emptyset$。

下面给出引理 5.11] 的 [9, Leavitt 版本。

引理 7.6. 采用上述记号，集合族 $Z_L(T \setminus F)$（其中 T遍历 X_L， F 遍历 (T) 的所有有限子集 N_L）构成 $\mathfrak{F}_L$ 的开紧子集的基。$\mathfrak{F}_L$ 的每个开紧子集都是形如 $Z_L(T \setminus F)$ 的集合的有限不交并。

逆半群 $\mathcal{S}(E, C)$ 的紧谱 $\Omega(E, C)$ 在 [9,定理 5.14] 中被识别为空间 $\mathfrak{T}' \cup E^{0,\,r}_{\infty}$，其中 $\mathfrak{T}'$ 是 $\mathbb{F}_C(v)$ 的所有非平凡下集Z 的集合，并且对于所有 $g \in Z$， Z_g 都是有限极大局部构型；对于 $v \in E^0$，而 $E^{0,\,r}_{\infty}$ 是 E ([9, 定义 5.13]) 的无限源。类似的证明可将该空间识别为 $\mathcal{LI}(E, C)$ 的紧谱，如下所示。

定理 7.7。 设 (E, C) 是一个分离图。那么空间 $\Omega(E, C)$ 与 $LI(E, C)$ 的紧谱是 $\mathbb{F}$-等变同胚。因此我们有等变同胚

$$\Omega(E, C) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{tight}}(\mathcal{S}(E, C)) \cong \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{tight}}(\mathcal{LI}(E, C)).$$

此外，空间$\Omega(E, C)$ 可以与由所有满足 Z 没有有限出口的 $Z \in \mathfrak{F}_L$ 所构成的空间 $\mathfrak{T}_L$ 等同；该空间赋予由紧开集基生成的拓扑

，这些开集由所有形如 $Z_L(T\setminus F)\cap\mathfrak{T}_L$ 的集合构成，其中 T 取遍 X_L，而 F 取遍 $N_{\inf L}(T)$ 的所有有限子集。

注记7.8。Exel [26] 最近引入了协和逆半群的概念。粗略地说，两个逆半群若具有相同的紧群胚，就称它们是共鸣的；精确表述见 [26, 定理 9.5] 。这里我们注意到，对于任意分离图 (E,C)，自然满射 $\pi\colon \mathcal{S}(E,C)\to\mathcal{LI}(E,C)$ 都是一个共鸣。

设 S 是一个逆半群，并令 $\Delta\colon S\to \mathrm{Bis}^{\mathrm{oc}}(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S))$ 为 [26], 中定义的自然映射，其中 $\mathrm{Bis}^{\mathrm{oc}}(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S))$ 是紧群胚$\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S)$ 的开紧双截片所构成的逆半群。则存在一个自然的单射半群同态 $U\mapsto 1_U$，将 $B:=\mathrm{Bis}^{\mathrm{oc}}(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S))$ 映入 Steinberg 代数 $A_K(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S))$ 的乘法半群。因此，我们可以将 B 视为 $A_K(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S))$ 的乘法半群的一个逆子半群。特别地， $\Delta(S)$ 可视为 $A_K(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(S))$ 的一个逆子半群。

现在设 (E,C) 是一个分离图，并设 $S:=\mathrm{S}(E,C)$ 是分离图 (E,C) 的逆半群。由定理 2.7, 存在一个自然的 $*$-同构 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)\cong A_K(\mathrm{G}_{\mathrm{tight}}(S))$。在此同构下， $\Delta(S)$ 对应于 S 在 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 中的自然像，而它是由 $E^0\cup E^1\cup(E^1)^*$ 生成的 $\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)$ 的子半群。但由定理 4.9，这个半群同构于 $\mathrm{LI}(E,C)$。因此，存在一个同构 $\Delta\colon \mathrm{LI}(E,C)\to\Delta(S)$，使得 $\Delta\circ\pi=\Delta$。由于根据 [26, 命题 8.11],Δ， $S\to\Delta(S)$ 是一个协调，故 $\pi\colon \mathrm{S}(E,C)\to\mathrm{LI}(E,C)$ 也是如此。

我们将定理 7.7 中给出的 $\Omega(E,C)$ 的具体描述称为 $\Omega(E,C)$ 的 ***Leavitt*** 模型 。由定理 7.7 可立即得到:

定理 7.9。 设 (E,C) 是一个分离图。那么存在一个群胚同构

$$\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C):=\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(\mathcal{S}(E,C))\cong\mathfrak{T}_L\rtimes\mathbb{F}.$$

此外

$$\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C)\cong A_K(\mathfrak{T}_L\rtimes\mathbb{F})\quad and\quad \mathcal{O}(E,C)\cong C^*(\mathfrak{T}_L\rtimes\mathbb{F}).$$

证明。 这由定理 7.7, [9, 命题 6.8] 和 [9, 定理 6.20] 得出。 □

紧群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C)$ 也有相应的模型。将 $\Omega(E,C)$ 与空间

$$\mathfrak{T}_L=\{Z\in\mathfrak{F}_L : Z \text{ does not admit finite exits }\},$$

我们得到如下图示

$\mathcal{G}_{\text{紧}}(E,C)\cong\{(Z',g,Z)\colon Z,Z'\in\mathfrak{T}_L,g\in\mathbb{F}_C,(g^{-1})_L\in Z\text{且 }Z'=[g\cdot(Z\cup\{g^{-1}\}^{\downarrow})]_L\}$。

O注意， $g\cdot(Z\cup\{g^{-1}\}^{\downarrow})=g\cdot Z\cup g^{\downarrow}$。

(Z',g,Z) 的逆元为

$$(Z',g,Z)^{-1}=(Z,g^{-1},Z').$$

(Z_1',g_1,Z_1) 与 (Z_2',g_2,Z_2) 的乘积有定义，当且仅当 $Z_1=Z_2'$；此时乘积为

$$(Z_1',g_1,Z_1)\cdot(Z_2',g_2,Z_2)=(Z_1',g_1\cdot g_2,Z_2).$$

$\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C)$ 上的拓扑由柱集 $\mathcal{Z}(T,g,T)$ 生成，其中 $T,T'\in\mathcal{X}_L,(g^{-1})_L\in T$，以及 $T'=[g\cdot(T\cup\{g^{-1}\}^{\downarrow})]_L$，其中

$$\mathcal{Z}(T',g,T)=\{(Z',g,Z)\in\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C):T\subseteq Z\}.$$

按照以下方式检验上述定义是否合理，是很有启发性的。

引理 7.10。 $\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}$ 中上述给出的逆元和乘积(E,C) 定义良好，并且对应于(E,C)的紧群胚上的群胚结构。

证明。我们首先检查逆元是否定义良好，即对于 $(Z', g, Z) \in \mathcal{G}^{\text{tight}}(E, C)$，有 $(Z, g^{-1}, Z') \in \mathcal{G}^{\text{tight}}(E, C)$。根据定义，$Z \in \mathfrak{F}_L$，$(g^{-1})_L \in Z$，以及$Z' = [g \cdot Z \cup g^{\downarrow}]_L$。因此我们看到 $g_L \in Z'$。

我们断言 $Z' \cup g^{\downarrow} = g \cdot Z$。事实上，显然 $Z' \cup g^{\downarrow} = (g \cdot Z \cup g^{\downarrow})_L \cup g^{\downarrow}$ 包含于 $g \cdot Z$。现在令 $z \in Z$。我们可以将 $g = x_1 \cdots x_r x_{r+1} \cdots x_n$, $z = x_n^{-1} \cdots x_{r+1}^{-1} y_1 \cdots y_m$ 写成约化形式，其中 $m \geq 0$，且当 $m \geq 1$ 时 $y_1 \neq x_r$。若 $m = 0$，则$g \cdot z = x_1 \cdots x_r \in g^{\downarrow} \subseteq [g \cdot Z \cup g^{\downarrow}]_L \cup g^{\downarrow}$。若 $m \geq 1$，则 $g \cdot z = x_1 \cdots x_r y_1 \cdots y_m$，并且由于 $Z \in \mathfrak{F}_L$，存在 $y_{m+1}, \ldots, y_{m+k} \in E^1 \cup E^{-1}$，使得 $k \geq 0$，从而

$$x_n^{-1} \cdots x_{r+1}^{-1} y_1 \cdots y_m y_{m+1} \cdots y_{m+k} \in Z \quad \text{and} \quad y_{m+k} \in X \in C^{>1},$$

并且由此可得 $x_1 \cdots x_r y_1 \cdots y_{m+k} \in (g \cdot Z)_L$，进而得到 $g \cdot z \in (g \cdot Z)_L$，因为 $(g \cdot Z)_L$ 是一个下集。因此，这种情况下 $g \cdot z \in (g \cdot Z \cup g^{\downarrow})_L \cup g^{\downarrow}$ 也成立。

现在我们来验证乘积是良定义的。设 (Z_1', g_1, Z_1),(Z_2', g_2, Z_2) 是两个满足 $Z_1 = Z_2'$ 的三元组。我们知道 $(g_1^{-1})_L \in Z_1$，并且 $(g_2)_L \in Z_2' = Z_1$。因此，假设 $Z_1 \in \mathfrak{F}_L(v)$，可得

$$s(g_2) = s((g_2)_L) = v = s((g_1^{-1})_L) = r(g_1),$$

于是 $s(g_2) = r(g_1)$。因此 $g_1 \cdot g_2$ 至少属于 $\mathfrak{F}_{\mathfrak{gt}}(E)$。因此，要证明 $g_1 \cdot g_2$ 属于 $\mathbb{F}_C$，只需证明 $g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$ 属于 $\mathbb{F}_C$；而这又等价于验证 $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L \in \mathbb{F}_C$。

我们将验证 $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L \in Z_2$，这尤其意味着 $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L \in \mathbb{F}_C$。将 $g_2 = x_1 \cdots x_n$ 和 $g_1 = y_1 \cdots y_t x_r^{-1} \cdots x_1^{-1}$ 写成约化形式，其中 $y_t \neq x_r$、$y_t \neq x_{r+1}^{-1}$、$0 \leq r \leq n$，以及 x_i，$y_j \in E^1 \cup E^{-1}$。于是我们有 $g_1 \cdot g_2 = y_1 \cdots y_t x_{r+1} \cdots x_n$，并且

$$(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} = x_n^{-1} \cdots x_{r+1}^{-1} y_t^{-1} \cdots y_1^{-1}.$$

我们区分两种情形：

(1) $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L = x_n^{-1} \cdots x_{r+1}^{-1} y_t^{-1} \cdots y_i^{-1}$，其中 $i \leq t$。

(2) $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L = x_n^{-1} \cdots x_j^{-1}$，其中 $j \geq r+1$。

若情形（2）发生，则有 $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L \leq_p (g_2^{-1})_L \in Z_2$，从而 $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L \in Z_2$。若（1）成立，则有 $(g_1^{-1})_L = x_1 \cdots x_r y_t^{-1} \cdots y_i^{-1}$，并且由于

$$(g_1^{-1})_L \in Z_1 = Z_2' = g_2 \cdot Z_2 \cup g_2^{\downarrow},$$

我们得到

$(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L = x_n^{-1} \cdots x_{r+1}^{-1} y_t^{-1} \cdots y_i^{-1} = g_2^{-1} \cdot (g_1^{-1})_L \in g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot Z_2 \cup g_2^{\downarrow}) = Z_2 \cup (g_2^{-1})^{\downarrow}$.若 $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L \in Z_2$，则得证。否则有 $(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})_L \in (g_2^{-1})^{\downarrow}$，这不可能，因为 $x_r \neq y_t$。

现在验证 $[(g_1 \cdot g_2) \cdot Z_2 \cup (g_1 \cdot g_2)^{\downarrow}]_L = Z_1'$。事实上，我们有

$$\begin{aligned} g_1 \cdot Z_1 \cup g_1^{\downarrow} &= g_1 \cdot (g_2 \cdot Z_2 \cup g_2^{\downarrow}) \cup g_1^{\downarrow} \\ &= (g_1 \cdot g_2) \cdot Z_2 \cup g_1 \cdot g_2^{\downarrow} \cup g_1^{\downarrow} \\ &= (g_1 \cdot g_2) \cdot Z_2 \cup (g_1 \cdot g_2)^{\downarrow} \cup g_1^{\downarrow}. \end{aligned}$$

因此 $Z_1' = [g_1 \cdot Z_1 \cup g_1^{\downarrow}]_L = [(g_1 \cdot g_2) \cdot Z_2 \cup (g_1 \cdot g_2)^{\downarrow} \cup g_1^{\downarrow}]_L$，只需证明 $(g_1)_L \subseteq (g_1 \cdot g_2) \cdot Z_2 \cup (g_1 \cdot g_2)^{\downarrow}$。先假设对于某个 $l \leq t$，有 $(g_1)_L = y_1 \cdots y_l$。于是我们有

$$(g_1)_L = y_1 \cdots y_l \leq_p (g_1 \cdot g_2)_L.$$

现在假设对于某个 $s \leq r$，有 $(g_1)_L = y_1 \cdots y_t x_r^{-1} \cdots x_s^{-1}$。那么 $x_n^{-1} \cdots x_{r+1}^{-1} x_r^{-1} \cdots x_s^{-1} = (g_2^{-1})_L$，因此

$$(g_1)_L = (y_1 \cdots y_t x_{r+1} \cdots x_n) \cdot (x_n^{-1} \cdots x_s^{-1}) = (g_1 \cdot g_2) \cdot (g_2^{-1})_L \in (g_1 \cdot g_2) \cdot Z_2.$$

因此，在这种情况下，$(g_1)_L \in (g_1 \cdot g_2) \cdot Z_2$。

最后，很容易看出，这个结构与 $\mathfrak{T}_L \rtimes \mathbb{F}$ 的群胚结构一致。根据定理 7.9，它同构于 $\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C)$。证明到此结束。□

因此，我们有紧群胚 $\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C)$ 的三种不同图示或模型：

- 完备模型是这样一种模型：$\Omega(E,C)$ 的元素是构形，即下子集 Z，满足所有局部构形 Z_g 都是有限极大的，并且还包含集合 $E^{0,r}_{\infty}$（E 的无限源）；参见 [9, 定义 5.13 和定理 5.14]。例如，在有限分离图的情形下，[32] 中考虑的就是这一模型。这个图示中的群胚模型稍微简单一些：群胚的元素具有 $(Z'g,Z)$ 的形式，其中 $Z,Z'\in \mathfrak{T}'\cup E^{0,r}_{\infty}$, $g^{-1}\in Z$，且 $Z' = g\cdot Z$。$(Z'g,Z)$ 的逆元是 (Z,g^{-1},Z')，而 $(Z_1,g,Z_2)(Z_2,h,Z_3) = (Z_1,g\cdot h,Z_3)$。

- 所谓标准模型 是指我们在 [9, 节 5]中引入的模型。它基于将$\mathcal{S}(E,C)$中的元素描述为$\mathcal{X}_0$中的元素。我们称其为标准模型，因为在非分离图的情形下，通常用这个模型来描述空间 $\Omega(E,C)$。乘积和逆元的公式与Leavitt模型中的相应公式类似，只需将装饰 L 替换为装饰 0。其拓扑由相应的柱集生成。

- 所谓*Leavitt* 模型 是我们在此引入的模型。它基于对元素的描述 of，将$\mathcal{LI}(E,C)$中的元素描述为$\mathcal{X}_L$中的元素。

我们认为，这三种模型各有优缺点。针对某个具体问题，其中一种模型可能比其他模型更合适。注意，当 $|X|\geq 2$ 对所有 $X\in C$都成立时，标准模型与Leavitt模型一致。我们将在下一节看到，Leavitt模型特别适合描述分离图的驯化Leavitt路径代数的根基。

8. 群胚的孤立点。根基。

本节中，我们利用关于 Steinberg 代数 [22] 的根基的最新结果，计算分离图的驯顺Leavitt 代数 $\mathcal{L}^{\mathrm{ab}}_K(E,\ C)$ 的根基。

本节中，K 表示一个域，而代数指的是定义在 K上的代数。

我们先汇总一些基本定义。

回顾一下，若拓扑空间 X 中的点 x 满足孤立点 的定义，即$\{x\}$ 是 X的开子集，则称其为孤立点。注意，若 X 是豪斯多夫的（这是本文唯一关心的情形），则点是闭集，因此对于 X中的每个孤立点x，$\{x\}$ 都是 X 的既开又闭子集。我们用 X^{iso}表示 X 的孤立点集。

设$\mathcal{G}$ 是一个丰局部紧豪斯多夫群胚。令 $X:=\mathcal{G}^{(0)}$，即$\mathcal{G}$的单位空间。注意，对于 $\gamma\in\mathcal{G}$，当且仅当 $\gamma\in\mathcal{G}^{\mathrm{iso}}$ 时，有 $s(\gamma)\in X^{\mathrm{iso}}$，而当且仅当 $r(\gamma)\in X^{\mathrm{iso}}$。我们在 X 上定义等价关系$\mathcal{R}$ 如下：$x\mathcal{R}y$ 当且仅当存在 $\gamma\in\mathcal{G}$ 使得 $s(\gamma)=x$ 且 $r(\gamma)=y$。也就是说，X 中的两个点相关，当且仅当它们属于同一轨道。注意，孤立点轨道中的所有元素也都是孤立点。

若 $x\in X^{\mathrm{iso}}$，则 $\{x\}$ 是 $\mathcal{G}$ 的紧开子集，因此 $1_{\{x\}}$ 是 $A_K(\mathcal{G})$ 中的一个投影。

对于 $x\in X^{\mathrm{iso}}$，令 Λ_x 为 $\mathcal{G}_x/\mathcal{G}_x^x$ 的一个截面，其中包含 x；也就是说，Λ 对每个左陪集 $\gamma\mathcal{G}_x^x$ 都恰好包含一个代表元，其中 $\gamma\in\mathcal{G}_x$。于是得到以下结果。对于 $\gamma\in\mathcal{G}^{\mathrm{iso}}$，我们将 $1_{\{\gamma\}}$ 简记为 1_γ。

定理 8.1. 设 $x\in X^{\mathrm{iso}}$。则有

(1)

$$1_xA_K(\mathcal{G})1_x\cong K\mathcal{G}_x^x,$$

也就是说，角 $*$代数 $1_xA_K(\mathcal{G})1_x$ 与各向同性群 $\mathcal{G}_x^x$的群 $*$代数$K\mathcal{G}_x^x$ 同构。

(2)

$$A_K(\mathcal{G})1_xA_K(\mathcal{G}) \cong M_{\Lambda_x}(K\mathcal{G}_x^x),$$

也就是说，由 1_x 生成的双边理想 $A_K(\mathcal{G})1_xA_K(\mathcal{G})$ 与 $*$代数，其矩阵的系数取自 $K\mathcal{G}_x^x$。

证明。(1)由 [4,命题 2.3] 得出。下面直接证明(2)。首先注意到， $A_K(\mathcal{G})1_xA_K(\mathcal{G})$由特征函数 1_γ 线性张成，其中 $\gamma \in \mathcal{G}_y^z$，且 y, z 属于 $r(\mathcal{G}_x)$ 中 x 在 X 中的轨道。

给定这样的 $\gamma \in \mathcal{G}_y^z$，存在唯一的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_x$，使得 $r(\lambda_1) = y$ 且 $r(\lambda_2) = z$。于是，元素 1_γ 被映射到一个矩阵，其中唯一的非零分量位于 (λ_2, λ_1) 位置，且该分量为 $\lambda_2^{-1}\gamma\lambda_1 \in \mathcal{G}_x^x$。现在很容易证明，这一对应在 $A_K(\mathcal{G})1_xA_K(\mathcal{G})$ 与 $M_{\Lambda_x}(K\mathcal{G}_x^x)$ 之间定义了一个同构。□

现在我们汇集一些关于各向同性的有用信息。对于拓扑空间 X 上离散群 Γ 的部分作用 (U_t, θ_t)，以及 $z \in X$，我们将 z 的各向同性记为 F_z，即满足 $z \in U_{t^{-1}}$ 和 $\theta_t(z) = z$ 的元素 $t \in \Gamma$ 所组成的集合。这是一个众所周知的一般事实： F_z 是 Γ 的子群。此外，如果 $\mathcal{G} = X \rtimes \Gamma$ 是与该部分作用相关联的变换群胚，那么 $\mathcal{G}_z^z \cong F_z$，因此各向同性群 $\mathcal{G}_z^z$ 同构于 Γ 的子群。

定义 8.2。 [32, 定义 1.9] 分离图 (E, C) 中的非平凡 C-分离路径 α，如果 $r(\alpha) = s(\alpha)$，则称为一条闭路径；如果 $\alpha^2 := \alpha\alpha$ 也是一条 C-分离路径，则称为一个圈。在这种情况下，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$， α^n 都是 C-分离的。[1] 如果一条闭路径 α 满足唯一的顶点重复发生在末端，即 $\alpha_1 <_p \alpha_2 \leq_p \alpha$，并且 $r(\alpha_1) = r(\alpha_2)$ 蕴含 $\alpha_1 = s(\alpha)$ 和 $\alpha_2 = \alpha$，则称其为一条简单闭路径。

引理 8.3. 沿用上述记号，设 $Z \in \Omega(E, C)_v$，其中 $v \in E^0$。那么集合

$$F_Z = \{\alpha \in \mathbb{F} : Z \in D_{\alpha^{-1}} \text{ and } \theta_\alpha(Z) = Z\}$$

是 $\mathbb{F}$的一个子群，由属于 $\mathbb{F}_C(v)$的元素组成。如果 α 是 F_Z的非平凡元素，那么 $\alpha = \beta\gamma\beta^{-1}$，其中 γ 是一个圈，且 $\gamma \in F_{\theta_{\beta^{-1}}(Z)}$。

证明。如上所述， F_Z 是 $\mathbb{F}$的一个子群。注意，对所有$\gamma \in F_Z^*$， $\gamma \in \mathbb{F}_C(v)$。如果 α 是 F_Z 的非平凡元素，那么我们可以唯一地写成 $\alpha = \beta\gamma\beta^{-1}$，其中$\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$是一个闭路径，且 $\gamma_r \neq \gamma_1^{-1}$。由于 $\alpha \cdot \alpha = \beta\gamma\gamma\beta^{-1} \in \mathbb{F}_C$，我们看到 γ是一个圈。显然，$\gamma \in F_{\theta_{\beta^{-1}}(Z)}$。□

对于带局部单位元的环 A， A 的左本原根是由 A的所有极小左理想生成的左理想。左本原根是 A的一个双边理想。类似地，可定义 A的右本原根。如果 A 是半素的，即 A 不含非零幂零理想，那么左本原根与右本原根相同，并且每个极小左理想（或右理想）都由一个幂等元生成，参见 [28, 第四节.3]。

当代数 A 存在对合时，左本原根也与右本原根重合。在这种情况下，我们简称其为根基，记作 $\mathrm{soc}(A)$。请注意，当 $A = A_K(\mathcal{G})$ 是丰群胚 $\mathcal{G}$ 的 Steinberg 代数时，这一条件总是成立。

现在我们可以陈述代数 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的一个基本性质。我们将始终使用 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 同构于交叉积 $C_K(\Omega(E, C)) \rtimes \mathbb{F} \cong A_K(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E, C))\widehat{\ }$这由定理 2.7 以及 $\mathcal{E}_{\mathrm{tight}} \cong \Omega(E, C)$ 这一事实得出（定理 7.7）。

命题8.4。 设 (E, C) 是一个分离图。则代数 $L_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 是半素的。

[1]这里我们将 α^0 解释为顶点 $s(\alpha) = r(\alpha)$ 处的平凡路径，并且对于 $n < 0$，我们设定 $\alpha^n := (\alpha^{-1})^{-n}$。特别地，如果 $\alpha\alpha$ 是 C-分离的，那么 α^{-1} 及其所有整数次幂 α^n 也都是如此。

证明。 根据 $[41, 定理4.10], \mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E,C) \cong A_K(\mathcal{G}_{\mathrm{tight}}(E,C))$，若对于每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$， $K\mathcal{G}_x^x$ 都是半素的，则该代数是半素的。由于在我们的情形中，$\mathcal{G}_x^x$ 始终是自由群，因此结论成立。 □

定义 8.5。 [22] 设 $\mathcal{G}$ 是一个充足豪斯多夫群胚。我们称$\mathcal{G}$ 满足 s
条件 (LP)，如果对于每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$,

$$\mathrm{soc}(K(\mathcal{G}_x^x)) \neq 0 \iff \mathcal{G}_x^x = \{x\}.$$

定理 8.6。 [22]设 G 是一个满足条件 (LP) 的充足豪斯多夫群胚，且$X = G^{(0)}$。 $A_K(G)$ 的根基$\mathrm{soc}(A_K(G))$ 与由所有示性函数 1_x生成的理想一致，其中 x 是 $X = G^{(0)}$ 中的一个孤立点，满足 $G_x^x = \{x\}$。此外

$$\mathrm{soc}(A_K(\mathcal{G})) \cong \bigoplus_{[x]\in X_0^{\mathrm{iso}}/\mathcal{R}} M_{|[x]|}(K),$$

其中 X_0^{iso}是满足 $G_x^x = \{x\}$ 的元素 $x \in X^{\mathrm{iso}}$ 的集合，因此 X_0^{iso}/R 是 X_0^{iso}的轨道集合。

下文中，我们将使用空间 $\Omega(E, C)$ 的 Leavitt 模型，以及 $\mathbb{F} = \mathbb{F}(E^1)$ 在其上的典范作用，见第 7 节。回顾一下，Leavitt (E, C)-树的概念已在定义 3.12(a) 中引入。

记号 8.7. 设 (E, C) 是一个分离图。我们将不含出口的 Leavitt (E, C)-树集合记为 Ω^{iso}，并将 Ω^{iso} 中满足不存在闭路径 $\alpha = \beta\gamma\beta^{-1}$（其中 γ 是一个圈，$(\alpha^{-1})_L \in T$ 且 $(\alpha \cdot T \cup \alpha^{\downarrow})_L = T$）的 Leavitt (E, C)- 树 T 所构成的子集记为 Ω_0^{iso}。若需指明分离图 (E, C)，我们将分别写作 $\Omega(E, C)^{\mathrm{iso}}$ 和 $\Omega(E, C)_0^{\mathrm{iso}}$。

现在我们刻画 $\Omega(E, C)$ 中孤立点的集合，其中 (E, C) 是一个分离
g图。

命题 8.8. 设 (E, C) 是一个分离图。那么，$\Omega(E, C)$ 的孤立点集合与所有不含出口的（有限）*Leavitt* (E, C)-树构成的集合 Ω^{iso} 相同。此外，集合 Ω_0^{iso} 是 $\Omega(E, C)$ 中各向同性平凡的孤立点 $z \in$ 。

证明。假设 Z 是 $\Omega(E, C) = \mathfrak{T}_L$ 中的一个孤立点。那么根据定理 7.7，Z 是 $\mathfrak{F}_L$ 中一个没有有限出口的元素。此外，存在一个形如 $V := \mathrm{Z}_L(T \setminus F) \cap \mathfrak{T}_L$ 的开集，其中 $T \in \mathrm{X}_L$（也就是说， T 是一棵 Leavitt (E, C)-树），且 F 是 $\mathrm{N}\,\mathrm{inf}_L(T)$ 的有限子集，使得 $V = \{Z\}$。但是，如果 T 有出口，那么我们就能构造出至少两个不同的元素 $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Z}_L(T \setminus F)$，继而可将它们扩展为两个不同的元素 $Z_1', Z_2' \in \mathrm{Z}_L(T \setminus F) \cap \mathfrak{T}_L$，由此便得到矛盾。因此， T 没有出口；再根据定理 7.7，$T \in \Omega(E, C)$。此外， $F = \emptyset$，因为 T 没有无限出口。因此， $Z = T$ 是一棵没有出口的 Leavitt (E, C)-树。

反过来，若 T 是一个没有出口的 Leavitt (E, C)-树，则 $T \in \Omega(E, C)$ 且 $\mathcal{Z}_L(T) = \{T\}$，因此 T 是 $\Omega(E, C)$ 中的一个孤立点。

最后一个结论由引理 8.3 得出。 □

$T \in \Omega^{\mathrm{iso}}$ 这一条件施加了严格的限制，而对于许多分离图，$\Omega^{\mathrm{iso}} = \emptyset$ 。

引理 8.9. 设(E, C) 是一个分离图，使得 $|X| \geq 2$ 对所有 $X \in C$ 都成立，并假设 T 是一个无出口的 *Leavitt*(E, C)-树。假设 $h \in \mathbb{F}_C$ 满足$T \cup h^{\downarrow} \in X$ 和 $h \notin T$，并记 $h = gg'$，其中 $g \in T$, $g[g']_1 \notin T$。那么， g' 的所有边都是逆边 $e^{-1} \in E^{-1}$，且具有性质 $|C_{s(e)}| = 1$。此外， $T \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}$，因此 $\Omega^{\mathrm{iso}} = \Omega_0^{\mathrm{iso}}$。

证明。如果 g' 的某些边取正向，则会得到 T 的一个出口，因为对所有 $X \in C$，$|X| \geq 2$ 都成立。因此，g' 的所有边都是逆边。设 e^{-1} 是其中一条边，并假设 $e \in X \in C_{s(e)}$。于是，对于 g' 的某个初始段 g''，有 $gg''e^{-1} \leq_p h$。如果存在 $Y \in C_{s(e)}$ 使得 $X \neq Y$，那么选取 $y \in Y$，便会得到 T 的一个出口 $gg''e^{-1}y$，这就产生了矛盾。因此 $|C_{s(e)}| = 1$。

现在我们证明 T 处的各向同性群是平凡的。反设 $\alpha \in F_T$ 是 T的各向同性群中的一个非平凡元素。由引理 8.3，得 $\alpha = \beta\gamma\beta^{-1}$，其中 γ 是一个圈。此外，由引理 8.3，对于所有$n \in \mathbb{Z}$，$\alpha^n = \beta\gamma^n\beta^{-1}$ 也是 F_T 中的一个元素。必要时用 α^{-1} 替换 α，我们可以假设 γ 包含一条边 $e \in E^1$。特别地，对于所有 $n > 0$，$\beta\gamma^{n-1}\gamma_L = \beta\gamma^{n-1}\gamma_0 \leq_p (\alpha^n)_L$，因此路径 $(\alpha^n)_L$ 的长度无界。由于对于所有 n，$\alpha^n)_L \in T$，且 T 是一棵有限树，这是不可能的，因此得出矛盾。于是 F_T 是平凡的，所以$T \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}$。□

定理 8.10。设(E, C) 是一个分离图。那么$\mathrm{soc}(L^{\mathrm{ab}}(E, C))$ 等于由所有投影$\mathbf{e}(T)$生成的理想，其中 $T \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}$。此外

$$\mathrm{soc}(\mathcal{L}^{\mathrm{ab}}(E, C)) \cong \bigoplus_{[T] \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}/\mathcal{R}} M_{|[T]|}(K).$$

对于固定的 $T \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}$，我们可以通过如下方式，在分量 $M_{|[T]|}(K)$ 中指定一组矩阵单位：T

$$e_{\alpha,\beta} := 1_{(\theta_\alpha(T), \alpha\cdot\beta^{-1}, \theta_\beta(T))},$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_C$ 满足 $(\alpha^{-1})_L$，$(\beta^{-1})_L \in T$。

证明。第一部分由定理 8.6 和命题 8.8 得出。第二部分可由第 7 节中群胚$\mathcal{G}^{\mathrm{tight}}(E, C)$的乘法规则轻易推出。

□

在一些额外假设下，我们可以更精确地了解齐次分量中矩阵的大小。

命题 8.11。设(E, C) 是一个分离图，满足对所有 $X \in C$ 都有 $|X| \geq 2$，且对所有满足 $C_v \neq \emptyset$ 的 $v \in E^0$ 都有 $|C_v| \geq 2$。那么，若 $T \in \Omega^{\mathrm{iso}}$，$T$ 的轨道大小恰为 $|T|$，即 T 的基数，而 T 的轨道元素恰为 $\{\theta_\alpha(T) : \alpha^{-1} \in T\}$。此外，对每个 $\gamma \in \max(T)$，(γ) 都是 E 的汇点。因此，我们有

$$\mathrm{soc}(\mathcal{L}^{\mathrm{ab}}(E, C)) \cong \bigoplus_{[T] \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}/\mathcal{R}} M_{|T|}(K).$$

证明。显然，元素 $\theta_\alpha(T)$（其中 $\alpha^{-1} \in T$）属于 T 的轨道。由引理 8.9 可知，若 $\gamma \in \mathbb{F}_C$ 且 $\gamma_L = \gamma_0 \in T$，则 $\gamma \in T$。因此，T 的轨道中仅有陈述中所描述的元素。由引理 8.9 还可清楚地看出，对于每个 $\gamma \in \max(T)$，$r(\gamma)$ 是 E 的汇点。□

因此，满足命题 8.11 假设的分离图，其情形与非分离情形截然不同；在非分离情形中，Ω_0^{iso} 中点的轨道很容易是无限的，Toeplitz 代数就是一个例子。

9. 例子

在本节中，我们考虑一些例子。首先考虑两个简单的例子：非分离图的情形，以及 E 是一个有限、无环且作为无向图连通的图，且 C 是自由划分的情形。然后，我们考虑描述分离图的任意温和 Cohn 代数 $\mathcal{Q}$ 的理想的问题，即 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$；在某些情况下，这与 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的根基密切相关。显然，这与 $\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的根基有关，其中 (E, C) 是第 5 节中与 (E, C) 相关联的分离图。之后，我们将考虑两个具体的非平凡例子。

例 9.1。设 E 是一个非分离图。则 $\mathrm{soc}(\mathcal{L}_K(E))$ 是由 E 的直线点生成的理想；这些直线点是 v 中满足其树 v 不包含任何分叉顶点或任何圈的顶点 E [3,定理 2.6.14]。在 Leavitt 模型中，直线点 v 表示为单个顶点 $\{v\}$，该顶点没有出口，也没有各向同性。这不同于标准模型中的表示：在标准模型中，直线点表示为由 v 的树构成的路径，而该树可以是有限的，也可以是无限的。第三种图，即完备模型，也给出了不同的表示。在 Leavitt 模型中，直线点 v 的轨道中的点表示为 v 的树中的顶点、与 v 相连的直线点，以及 E 中满足 $|s^{-1}(s(e_r))| \geq 2$ 且 $r(e_r)$ 是与 v 相连的直线点的有限路径 $e_1 \cdots e_r$。注意，根据命题 8.8，这些都是没有出口的有限树。□

例 9.2. 设 (E, C) 是一个分离图，其中 E 是一个有限图，作为非定向图它是连通且无环的。假设 C 是自由分离，即对所有 $X \in C$，都有 $|X| = 1$。那么

$$\mathcal{L}_K(E, C) = \mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C) = \mathrm{soc}(\mathcal{L}_K(E, C)) \cong M_n(K),$$

其中 $n = |E^0|$。

事实上，每个顶点都是一个无出口的 Leavitt (E, C)-树，因为对所有 $X \in C$，都有 $|X| = 1$。此外，T_L 对每个 $T \in \mathcal{X}$ 都包含一个顶点。由于该图作为非定向图是连通的，因此顶点只有一个轨道。由于该图作为非定向图是无环的，因此每个顶点的各向同性都是平凡的。因此，由定理 8.10 可得结论。□

设 (E, C) 是一个分离图。回顾第 5 节，存在一个自然同构 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C) \cong p\mathcal{L}^{\mathrm{ab}}(E, C)p$。分离图 (E, C) 是在第 5 节通过扩充图 (E, C) 构造的。每个集合 $X \in C^{\mathrm{fin}}$ 都通过添加一条新边 d_X 得到扩充，使得 $r(d_X) = v_X$ 是 E 中的一个汇点，并且 $C^{\mathrm{fin}} = \{X : X \in C^{\mathrm{fin}}\}$，其中 $X = X \cup \{d_X\}$。

我们将描述 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 根基中的一族投影。证明本节的主要结果——定理 9.4——时，我们将使用上述与 $p\mathcal{L}^{\mathrm{ab}}(E, C)p$ 的同构以及第 8 节的结果。不过，这族投影的定义直接以分离图 (E, C) 为基础。

对于下一个定义，请回忆针对 T 的阻塞族 F 这一概念，其中 $T \in \mathcal{X}_0$，已在定义 6.4 中引入。

定义 9.3。设 (E, C) 是一个分离图，且 $T \in \mathcal{X}_0$。若 $\mathcal{N}(T)$ 是非空有限集，则称 T 可以被完全阻塞。这意味着，对于任意元素 $\gamma_0\gamma_1 y \in \mathcal{N}(T)$，都有 $y \in Y \in C^{\mathrm{fin}}$，并且存在一个针对 T 的最大阻塞族 $F = \sqcup_{i=1}^{r} \gamma_0^i(\gamma_1^i X_i)$，其中包含 $\mathcal{N}(T)$ 的所有元素。我们用 $\mathbf{ecb}(T)$ 表示由 $\mathbf{ecb}(T) = \mathbf{e}(T \setminus F)$ 给出的幂等元，其中 F 是针对 T 的最大阻塞族。将可以被完全阻塞的元素集合 $T \in \mathcal{X}_0$ 记为 $\mathcal{X}_{cb}$。

定理 9.4. 设 (E, C) 是一个分离图。对于每个 $T \in \boldsymbol{X}_{cb}$，幂等元 $\mathbf{ecb}(T)$ 属于 $Q \cap \mathrm{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C))$。此外，$Q \cap \mathrm{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C))$ 是由所有幂等元 $\mathbf{ecb}(T)$ 生成的 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)$ 的理想，其中 $T \in \boldsymbol{X}_{cb}$。

证明。首先注意到 $\mathbf{ecb}(T) = \mathbf{e}(T \setminus F)$ 属于理想 $\mathcal{Q}$，因为 $\mathcal{N}(T)$ 非空且有限。

令 $(\overline{E}, \overline{C})$ 为与 (E, C) 相关联的分离图。任意 $T \in \mathrm{X}_0$ 也可视为 (E, C) 中与 C 相容的树。此外，$T \in \mathrm{X}_L$，也就是说，T 属于集合 $\mathrm{X}_L(E, C)$，因此已针对 T 相对于 (E, C) 定义了出口的概念。根据同构 $\mathrm{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C) \cong p\mathrm{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)p$，幂等元 $\mathrm{ecb}(T)$ 对应于 Leavitt (E, C)-树 T' 的 $\mathrm{e}(T')$，其中

$$T' = T \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{r} \{\gamma_0^i \gamma_1^i d_{X_i}\}^{\downarrow} \Big),$$

其中 $F = \sqcup_{i=1}^{r} \gamma_0^i(\gamma_1^i X_i)$ 是 T 的最大阻塞族。由此可知，T' 在 (E,C) 中没有出口，因此根据命题 8.8，T' 是 $\Omega(E,C)$ 中的一个孤立点。

由于对于所有 $X \in C$ 都有 $|X| \geq 2$，由引理 8.9 可得 $\Omega^{\mathrm{iso}}(E, C) = \Omega_0^{\mathrm{iso}}(E, C)$，因此 $T' \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}(E, C)$，并且由定理 8.10 可知 $\mathbf{e}(T') \in \mathrm{soc}(\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C))$。

因此我们得到

$$\mathbf{e}(T') \in p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{E}, \overline{C})p \cap \mathrm{soc}(\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{E}, \overline{C})) = \mathrm{soc}(p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{E}, \overline{C})p) \cong \mathrm{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)),$$

因此 $\mathbf{ecb}(T) \in \mathrm{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)) \cap \mathcal{Q}$，如所述。

最后，假设 e 是 $\mathcal{Q}$ 中的一个极小幂等元。

令 $\varphi\colon \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C) \to p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)p$ 为定理 5.5 中的同构，并设 $\mathcal{Q} = \varphi(\mathcal{Q})$。那么 $\varphi(e)$ 是理想 $p\,\mathrm{soc}(\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C))p \cap \mathcal{Q}$ of $p\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C)p$ 中的一个极小幂等元。现在注意到

$$p\,\mathrm{soc}(\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{E}, \overline{C}))p \cong \bigoplus_{[T] \in \overline{\Omega}_0^{\mathrm{iso}}/\mathcal{R}} M_{\delta(T)}(K),$$

其中 $\delta(T)$ 是 T 的轨道中属于 $\mathcal{X}_L(v)$ 的元素个数，其中 $v \in E^0$ 满足某个条件。事实上，分量 $M_{\delta(T)}(K)$ 的矩阵单位系由元素 $e_{\alpha,\beta}$ 给出，如定理 8.10 所示，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_C(v)$，且 $v \in E^0$ 满足某个条件。因此，存在某个 $T \in \Omega_0^{\mathrm{iso}}$，使得 $T \in \mathcal{X}_L(v)$，其中 $v \in E^0$ 满足某个条件，并且 $\varphi(e) \sim \mathbf{e}(T')$ 属于 $p\,\mathrm{soc}(\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(E, C))p$。现在令

$$T'' := T' \setminus \{\gamma d_X : \gamma d_X \in T'\},$$

它是 $\mathcal{X}(v)$ 中的一棵树，并令 $T = (T'')_0 \in \mathcal{X}_0(v)$。那么 $\mathcal{N}(T)$ 是有限的，因为 T' 相对于 (E, C) 没有出口，并且 $\varphi(\mathbf{ecb}(T)) = \mathbf{e}(\overline{T'})$。因此，$e \sim \mathbf{ecb}(T)$ 属于 $\mathrm{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E, C))$。特别地，$\mathbf{ecb}(T)$ 是 $\mathcal{Q}$ 中的极小幂等元。

还需验证 $\mathcal{N}(T)$ 非空。令 $f := \mathbf{ecb}(T) = \mathbf{e}(T \setminus F)$，其中 F 是 T 的最大阻塞族。我们需要证明 $F \neq \emptyset$。由于 $f \in \mathcal{Q}$，由定理 6.11 可知，我们可以写成

$$f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{e}(T_i \setminus F_i), \tag{9.5}$$

其中 $\lambda_i \in K^\times$ 和 F_i 是 $T_i \in \mathcal{X}_0$, $i = 1, \ldots, r$ 的非空阻塞族。我们可以假设，对所有 i，都有 $f\mathbf{e}(T_i \setminus F_i) \neq 0$。在此假设下，由 f 的极小性可得 $f = f\mathbf{e}(T_i \setminus F_i)$。因此，将关系式 (9.5) 乘以 $\prod_{i=1}^{r} \mathbf{e}(T_i \setminus F_i)$，得到

$$f = (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i) \prod_{i=1}^{r} \mathbf{e}(T_i \setminus F_i).$$

因此，根据引理 6.6，有 $f = \prod_{i=1}^{r} \mathbf{e}(T_i \setminus F_i) = \mathbf{e}\Big((\cup_{i=1}^{r} T_i) \setminus (\cup_{i=1}^{r} F_i)\Big)$，进而根据引理 6.9，有 $T = \cup_{i=1}^{r} T_i, F = \cup_{i=1}^{r} F_i \neq \emptyset$。因此，$F \neq \emptyset$，证明完成。□

例子 9.6。如果 E 是非分离图，则理想 $\mathcal{Q}$ 的结构是显然的，参见 [3, 命题 1.5.8 和 1.5.11]。每个正则顶点 v 都会产生一个幂等元 $q_v = v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \in \mathcal{Q}$，并且有 $\mathcal{Q} \subseteq \mathrm{soc}(\mathcal{C}_K(E))$。幂等元 q_v 确定了 $\mathcal{Q}$ 的不同齐次分量。对于分离图，这些事实不再成立，此时情况要复杂得多，正如我们将在下面的例子中看到的那样。注意，在上述情形下，$\{v\}$ 可能会被完全阻塞，而 $\mathbf{ecb}(v) = q_v$。

例子 9.7. 设 X 是任意非空集合，并设 E_X 是仅含一个顶点 v 且具有 $E_X^1 = X$ 的图。我们考虑 E_X 上的自由分离 $C = C_v = \{\{e\} : e \in X\}$。

这个例子已在 [9, 例子 3.3 和 4.9] 中讨论。我们有

$$\operatorname{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E_X, C)) = \begin{cases} M_\infty(K) & \text{if } |X| = 1 \\ 0 & \text{if } |X| > 1. \end{cases}$$

当 $|X| = 1$ 时，这是众所周知的情形，对应于一个非分离图。在这种情况下，$\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E_X, C)$ 就是通常的 Toeplitz 代数。

假设 $|X| > 1$。令 $T \in \mathcal{X}_0$。那么 T 可以识别为 X 上通常的 Munn 树，并且每条极大路径都不以 X^{-1} 结尾。若 γ 是 T 的一条极大路径，则可考虑一个元素 $\gamma\nu^{-1}y$，其中 ν 是正向边 $x \in X$ 中的任意一个词，使得词 $\gamma\nu^{-1}y$ 是约化的。当然，这是可行的，因为 $|X| > 1$。由于 ν 的长度可以任意大，我们得出 $\mathcal{N}(T)$ 是无限的。因此 $\mathcal{X}_{cb} = \emptyset$，从而 $\operatorname{soc}((\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E_X, C))) = 0$。

注记 9.8。尽管当 $|X| > 1$ 时，$\operatorname{soc}(\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E_X, C)) = 0$，但通过施加一些额外的交换关系，可以找到一个相关代数，使其具有非零根基。事实上，Bavula 在 [19] 中引入了代数 $\mathbb{S}_n$，它是由 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ 生成，并满足以下定义关系

$$y_1x_1 = \cdots = y_nx_n = 1, \quad [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [x_i, y_j] = 0 \text{ for all } i \neq j.$$

显然，$\mathbb{S}_n$ 是 $\mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(E_{X_n}, C)$ 的一个商代数，其中 $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$。根据 [19, 命题 4.1]，$\mathbb{S}_n$ 的根基是 $\mathbb{S}_n$ 的一个单本质理想。

例 9.9. 设 X 是任意非空集合。自由逆幺半群 $\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)$ 在例 3.4 和 4.10] 中实现为某个分离图 (F_X, D) 的逆半群的一个角，如下所示。设 F_X 为满足 $F_X^0 = \{v\} \sqcup X$ 且 $F_X^1 = \{e_x, f_x : x \in X\}$ 的图，其中对所有 $x \in X$，均有 $s(e_x) = s(f_x) = v$ 以及 $r(e_x) = r(f_x) = x$。我们在 F_X 上取自由分离 D，使得 $D_v = \{\{e_x\}, \{f_x\} : x \in X\}$，并且对所有 $x \in X$ 均有 $D_x = \emptyset$。于是根据例 4.10]，存在一个（唯一的）幺半群同构 $\varphi : \mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X) \to v\mathsf{S}(F_X, D)v$，使得对所有 $x \in X$，均有 $\varphi(x) = e_x f_x^{-1}$。因此，我们得到一个 $*$-同构

$$\varphi : K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)] \to v \cdot \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(F_X, D) \cdot v$$

因此，我们可以应用分离图理论来研究幺半群代数 $K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$。[13, Proposition 4.5] 证明了，在 $|X| = 1$ 的情形下，$K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$ 的根基与 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i(K)$ 同构，并且它是 $K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$ 的本质理想。

现在我们可以将这一结果推广到任意集合 X，如下所示。二部划分图 (F_X, D) 是通过向 F_X 添加汇点 v_x，$\overline{v'_x}$ 和边 d_x，d'_x 构成的；对每个 $x \in X$，满足 $s(d_x) = s(d'_x) = v$，$r(d_x) = v_x$，$r(d'_x) = v'_x$，并且

$$\overline{D}_v = \{\{e_x, d_x\}, \{f_x, d'_x\} : x \in X\}.$$

注意，在该同构下，$d_x d_x^* = v - e_x e_x^*$ 对应于 $1 - xx^*$，而 $d'_x(d'_x)^*$ 对应于 $1 - x^*x$

$$v \cdot \mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{F_X}, \overline{D}) \cdot v \cong v \cdot \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(F_X, D) \cdot v \cong K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$$

由推论 5.6 和 [9, 例 4.10] 得出。

如 [9, 例 4.10], 所示，每个 $T \in \mathcal{X}_0$ 都唯一对应于自由群 $\mathbb{F}$ 在 X 上的凯莱图中一个包含 1 的普通有限树 T。我们将这类树简称为有限树，并用 $\mathfrak{M}$ 表示有限树的集合。$\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)$ 的元素对应于 Munn 树（T，g），其中 $T \in \mathfrak{M}$ 且 $g \in T$，例如参见 [31,第 6 节4]。

给定一棵有限树 $T \in \mathfrak{M}$，我们将 T 的邻域 $\mathcal{N}(T)$ 定义为所有满足 $\gamma \in T$、$z \in X \cup X^{-1}$ 和 $\gamma z \notin T$ 的元素 $\gamma z \in \mathbb{F}$ 组成的集合。换言之，T 的邻居 集合 $\mathcal{N}(T)$ 是与 T 距离为 1 的所有字组成的集合。因此 $\mathcal{N}(T)$ 总是非空的，当且仅当 X 有限时，它才是有限的。若所有约化字 γz、$z \in X \cup X^{-1}$ 都属于 T，我们就称 $\gamma \in T$ 是 T 的一个内点。显然，当 $T \in \mathfrak{M}$ 无限时，T 没有

内点。如果 $\gamma z \in \mathcal{N}(T)$，我们就称 γz 是 T 在 $\gamma \in T$ 处的一个邻居。

通过规定 $T \sim S$ 当且仅当 $S = g \cdot T$，在有限树 T 的集合 $\mathfrak{M}$ 上定义等价关系 $\sim$，其中 X。

设 X 是有限的，并取 $T \in \mathfrak{M}$。那么，幂等元 $\mathbf{ecb}(T)$ 对应于求值 $\mathbf{e}(T')$，其中 T' 是通过对每个 $\gamma x \in \mathcal{N}(T)$，向 T添加极大元γd_x，并对每个 $\gamma x^{-1} \in \mathcal{N}(T)$，向 $\gamma d'_x$添加极大元 $x \in X$而得到的树。此外，根据命题 8.11，我们有

$$\operatorname{soc}(\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{F_X}, \overline{D})) \cong \bigoplus_{[T] \in \mathfrak{M}/\sim} M_{|T'|}(K).$$

因此我们得到

$$\operatorname{soc}(K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]) = p \cdot \operatorname{soc}(\mathcal{L}_K^{\mathrm{ab}}(\overline{F_X}, \overline{D})) \cdot p \cong \bigoplus_{[T] \in \mathfrak{M}/\sim} M_{|T|}(K).$$

总之，对于 $K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)] \cong v \cdot \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(F_X, D) \cdot v$，我们得到以下结果：

$$\operatorname{soc}(K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]) \cong \begin{cases} \bigoplus_{[T] \in \mathfrak{M}/\sim} M_{|T|}(K) & \text{if } |X| < \infty \\ 0 & \text{if } |X| = \infty. \end{cases}$$

还容易证明，当 X 有限时，$\operatorname{soc}(K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)])$ 在 $K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$ 中是本质的。

我们固定一个非空集合 X，并设 $A = K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$。我们用 $\mathcal{I}$ 表示由 $1 - xx^*$ 和 $1 - x^*x$ 的所有元素生成的 A 的理想，其中 $x \in X$。理想 $\mathcal{I}$ 对应于 $v \cdot \mathcal{C}_K^{\mathrm{ab}}(F_X, D) \cdot v \cong A$ 的理想 $v\mathcal{Q}v$。在 [13, 的引理 4.4 和命题 4.5] 中，$K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$ 的理想 $\mathcal{I}$ 在 $|X| = 1$ 的情形下的结构已被完全确定。

我们可以轻松地将第 5 节中的结果转化为 I 的线性基。对于 $\mathbb{F}$ 上的有限树 T、$T\mathbf{N}$ ($F \subseteq$) 中的有限集合 $g \in T$，我们将阻塞 Munn 树 $(T \setminus F, g)$ 定义为树 (T', g)，其极大元为：若 $\gamma x \in F$，则为 γd_x；若 $\gamma x^{-1} \in F$，则为 $\gamma d'_x$；若 γ 是 T 的极大元且 γ 的任何邻点都不属于 F，则为 γ。注意，$T' = T \setminus F$ 并非 X 上的通常树，因为它有一些额外的路径，终止于汇点 v_x 或 v'_x。每棵阻塞 Munn 树 $(T \setminus F, g)$ 都有一个与之对应的元素 $\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g \in A$，其中

$$\mathbf{e}(T \setminus F) = \prod_{\lambda \in \max(T \setminus F)} \mathbf{e}(\lambda),$$

当然，对于 $\lambda = \gamma d_x$，$\mathbf{e}(\lambda) = \gamma(1 - xx^*)\gamma^*$；对于 $\lambda = \gamma d'_x$，$\mathbf{e}(\lambda) = \gamma(1 - x^*x)\gamma^*$。注意，幂等元 $\mathbf{ecb}(T)$ 与 $\mathbf{e}(T \setminus \mathcal{N}(T))$ 一一对应。

采用这一记号，以下结果可直接由定理 6.11 得出。

命题 9.10. 设 $A = K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$, , 其中 X 是一个非空集合。设 I 是由元素 $1 - xx^*$ 和 $1 - x^*x$（对所有 $x \in X$）生成的 A 的理想。那么，集合 $B(I)$由所有元素 $\mathbf{e}(T \setminus F) \rtimes g$ 组成，其中 $(T \setminus F, g)$ 是一个阻塞 *Munn* 树，并且 T 的所有极大元（至多 g 除外）都被 F 阻塞。该集合是 I 的线性基。因此，$B(I) \cup \{1 \rtimes g : g \in \mathbb{F}\}$ 是 A 的线性基。

基 $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ 中出现的阻塞 Munn 树（$T \setminus F, g$）具有这样的性质：除 g 可能例外外，所有极大元均为某个 $x \in X$ 的 γd_x 或 $\gamma d'_x$，因此它们（至少部分）被阻塞。注意，这个基在乘积运算下是闭集。乘积的计算方式如下：

$$(T_1 \setminus F_1, g_1) \cdot (T_2 \setminus F_2, g_2)$$
$$= \begin{cases} (T_1 \cup g_1 \cdot T_2) \setminus (F_1 \cup g_1 \cdot F_2), g_1 \cdot g_2) & \text{if } T_1 \cap g_1 \cdot F_2 = g_1 \cdot T_2 \cap F_1 = \emptyset \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases}$$

最后，我们证明，当 X 为有限集时，理想 $\mathcal{I}$ 具有滤结构。若 $T \setminus F$具有 t 个出口，则称其为 $|\mathcal{N}(T) \setminus F| = t$。

命题 9.11。 设 X 为有限非空集，并令 $A = K[\mathfrak{F}_{\mathrm{im}}(X)]$。则 A 的理想 I 具有滤结构 $I = \cup_{i=0}^{\infty} B_i$，其中 B_i 是集合$\mathbf{e}(I \mid F) \rtimes g$的线性张成，其中 $I \mid F$至多有 $i+1$ 个出口。特别地， B_0 是 A的子代数，并且严格包含 $\mathrm{soc}(A)$。

证明。我们需要证明，对于所有 $i, j \in \mathbb{Z}^+$， $B_i B_j \subseteq B_{i+j}$。假设 $T_1 \setminus F_1$ 有出口，且 $T_2 \setminus F_2$ 有 $j+1$ 个出口，并且 $T_1 \cap F_2 = T_2 \cap F_1 = \emptyset$。我们需要证明 $(T_1 \cup T_2) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 有 $\leq i+j+1$ 个出口。若 $T_1 = T_2$，则

$$\mathcal{N}(T_1 \cup T_2) - |F_1 \cup F_2| \leq |\mathcal{N}(T_1)| - |F_1| \leq i+1 \leq i+j+1,$$

因为 $j \geq 0$。若 $T_1 \not\subseteq T_2$，取 $\gamma \in T_1 \setminus T_2$。于是 $\gamma = \gamma_1 z \gamma_2$，其中 $\gamma_1 \in T_2$、 $\gamma_1 z \notin T_2$ 和 $z \in X \cup X^{-1}$，从而 $\gamma_1 z \in \mathcal{N}(T_2)$，并且由于 $T_1 \cap F_2 = \emptyset$，有 $\gamma_1 z \notin F_2$。现在注意到

$$\mathcal{N}(T_1 \cup T_2) \setminus (F_1 \cup F_2) \subseteq (\mathcal{N}(T_1) \setminus F_1) \cup ((\mathcal{N}(T_2) \setminus F_2) \setminus \{\gamma_1 z\}),$$

因此 $|\mathcal{N}(T_1 \cup T_2) \setminus (F_1 \cup F_2)| \leq (i+1) + (j+1-1) = i+j+1$，从而 $(T_1 \cup T_2) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 有 $\leq i+j+1$ 个出口。由对称性可知，若 $T_2 \not\subseteq T_1$，同一不等式也成立。□

B_0 的子代数具有一些有趣的性质。我们总有 $\mathrm{soc}(B_0) = \mathrm{soc}(A)$，并且对于 $|X| = 1$，由引理 4.4], 可知， $B_0/\mathrm{soc}(A) = \mathrm{soc}(A/\mathrm{soc}(A))$ 成立，但对于 $|X| > 1$则不成立。然而，根据上述结果的证明，给定至多有一个出口的 $T_1 \setminus F_1, T_2 \setminus F_2$，要么 $\mathrm{e}(T_1 \setminus F_1)\mathrm{e}(T_2 \setminus F_2) \in \mathrm{soc}(A)$，要么 $\mathrm{e}(T_1 \setminus F_1) \leq \mathrm{e}(T_2 \setminus F_2)$，要么 $\mathrm{e}(T_2 \setminus F_2) \leq \mathrm{e}(T_1 \setminus F_1)$。

参考文献

[1] Gene Abrams 和 Gonzalo Aranda Pino，《图的 Leavitt路径代数》，J. Algebra 293 (2005)，第 2 期，319–334，DOI 10.1016/j.jalgebra.2005.07.028。[2] Gene Abrams，《Leavitt路径代数：第一个十年》，Bull. Math. Sci. 5 (2015)，第 1 期，59–120，DOI 10.1007/s13373-014-0061-7。[3] Gene Abrams、Pere Ara 和 Mercedes Siles Molina，《Leavitt路径代数》，Lecture Notes in Mathematics，第 2191 卷，Springer，伦敦，2017。MR 3729290[4] G. Abrams、M. Dokuchaev 和 T. G. Nam，《将 Leavitt路径代数的角实现为 Steinberg 代数，并探讨与图 C^*-代数的相应联系》，J. Algebra 593 (2022)，72–104，DOI 10.1016/j.jalgebra.2021.11.004。[5] Adel Alahmadi、Hamed Alsulami、S.K. Jain 和 Efim Zelmanov，《有限 Gelfand–Kirillov 维数的 Leavitt路径代数》，J. Algebra Appl. 11 (2012)，第 6 期，1250225，6，DOI 10.1142/S0219498812502258。[6] Pere Ara，《加权图与分离图的 Leavitt路径代数》，J. Aust. Math. Soc. 115 (2023)，第 1 期，1–25，DOI 10.1017/S1446788722000155。MR 4615463[7] Pere Ara、Joan Bosa、Enrique Pardo 和 Aidan Sims，《可适配分离图的群胚及其型半群》，Int. Math. Res. Not. IMRN 20 (2021)，15444–15496，DOI 10.1093/imrn/rnaa022。MR 4329873[8] Pere Ara、Alcides Buss 和 Ado Dalla Costa，《群在分离图 C^*- 代数上的自由作用》，Trans. Amer. Math. Soc. **376** 2023 4, 2875 2919, 10 1090 8839 4557884 ( )，第 [9] – 期，DOI . /tran/ 。MR 分离图的逆半群及其相关代数，Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 56 (2025)，第 3 期，论文编号 38， 55，DOI 10.1007/s00574-025-00462-7。[10] Pere Ara 和 Joan Claramunt，《满射局部同胚与一族分离图之间的对应》，Discrete Contin. Dyn. Syst. 44 (2024)，第 5 期，1178–1266，DOI 10.3934/dcds.2023143。[11] Pere Ara 和 Ruy Exel，《与分离图、图代数和悖论分解相关的动力系统》，Adv. Math. 252 (2014)，748–804，DOI 10.1016/j.aim.2013.11.009。MR 3144248[12] Pere Ara 和 Kenneth R. Goodearl，《分离图的 Leavitt路径代数》，J. Reine Angew. Math. **669** 2012 165 224, 10 1515 2011 146 2980456 ( )，– DOI . /crelle. . . MR 某些野幺 [13] 半群的实现问题与 Atiyah 问题，Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017)，第 8 期，5665–5710，DOI 10.1090/tran/6889。[14] Pere Ara、Matias Lolk，《凸子移位、分离 Bratteli 图与驯分离图代数的理想结构》，Adv. Math. 328 (2018)，367–435，DOI 10.1016/j.aim.2018.01.020。[15] Pere Ara、M. Ángeles Moreno 和 Enrique Pardo，《图代数的非稳定 K-理论》，Algebr. Represent. Theory 10 (2007)，第 2 期，157–178，DOI 10.1007/s10468-006-9044-z。

[16] Gonzalo Aranda Pino、Dolores Martín Barquero、Cándido Martín González 和 Mercedes Siles Molina，《任意图的 Leavitt路径代数的底理论》，Rev. Mat. Iberoam. 26 (2010)，第 2 期，611–638，DOI 10.4171/RMI/611。[17] C. J. Ash 和 T. E. Hall，《图上的逆半群》，Semigroup Forum 11 2，140 1975 76 145，38 7419 10 1007 02195262 (/)，第 – 期，DOI . /BF 。MR [18]

George M. Bergman，《环论的菱形引理》，Adv. in Math. 29 (1978)，第 2 期，178–218，DOI 10 1016 0001 8708 78 90010 5 506890 。/ - ( ) - 。MR V. V. Bavula，《多项式代数单侧逆元的代 [19]
数》，J. Pure Appl. Algebra 214 (2010)，第 10 期，1874–1897，DOI 10.1016/j.jpaa.2009.12.033。[20] Jonathan H. Brown 和 Astrid an Huef，《Kumjian-Pask 代数的根基与半单性》，Comm. Algebra 43 (2015)，第 7 期，2703–2723，DOI 10.1080/00927872.2014.888560。[21] Lisa Orloff Clark、Cynthia Farthing、Aidan Sims 和 Mark Tomforde，《Leavitt路径代数的群胚推广》，Semigroup Forum 89 (2014)，第 3 期，501–517，DOI 10.1007/s00233-014-9594-z。[22] Lisa Orloff Clark、Cristóbal Gil Canto、Dolores Martín Barquero、Cándido Martín González 和 Iván Ruiz Campos，《关于一类 Steinberg 代数的根基》，Linear Algebra Appl. 728 (2026)，449–464，DOI 10.1016/j.laa.2025.09.016。[23] Guillermo Cortiñas 和 Roozbeh Hazrat，《Leavitt路径代数的分类猜想》，Bull. Lond. Math. Soc. 56 (2024)，第 10 期，3011–3060，DOI 10.1112/blms.13139。[24] Guillermo Cortiñas 和 Diego Montero，《代数双变 K-理论与 Leavitt路径代数》，J. Noncommut. Geom. 15 (2021)，第 1 期，113–146，DOI 10.4171/jncg/397。[25] Ruy Exel，《逆半群与组合 C^*-代数》，Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 39 (2008 2, 191 313, 10 1007 00574 008 0080 7 2419901)，第 – 期，DOI . /s - - - 。MR Ruy [26]
Exel，《共鸣逆半群》（），见 arXiv:2508.17552[math:OA]。[27] Daniel Gonçalves 和 Danilo Royer，《单侧子移位代数的不可约表示》，Results Math. 80 (2025)，第 6 期，论文编号 186，16，DOI 10.1007/s00025-025-02504-4。[28] Nathan Jacobson，《环的结构》，修订版，American Mathematical Society Colloquium Publications，第 37 卷，American Mathematical Society，普罗维登斯，RI，1964。[29] David G. Jones 和 Mark V. Lawson，《图逆半群：其刻画与完备化》，J. Algebra **409** 2014 444 473, 10 1016 2014 04 001 3198850 ( )，– DOI . / [30]
j.jalgebra. . . 。MR Ayten Koç 和 Murad Özaydın，《Leavitt路径代数的表示》，J. Pure Appl. Algebra 224 (2020)，第 3 期，1297–1319，DOI 10.1016/j.jpaa.2019.07.018。[31] Mark V. Lawson，《逆半群》，World Scientific Publishing Co., Inc.，新泽西州埃奇河，1998。部分对称理论。MR 1694900[32] Matias Lolk，《与有限分离图相关的交换环和实秩零 C*-代数》，预印本 arXiv:1705.04494 (2017)。[33] Yongle Luo、Zhengpan Wang 和 Jiaqun Wei，《图逆半群同余格的分配性》，Comm. Algebra 51 (2023)，第 12 期，5046–5053，DOI 10.1080/00927872.2023.2224450。[34] Stuart W. Margolis 和 John Meakin，《自由逆幺半群与图浸入》，Internat. J. Algebra Comput. 3 (1993)，第 1 期，79–99，DOI 10.1142/S021819679300007X。MR 1214007[35] John Meakin、David Milan 和 Zhengpan Wang，《关于一类与 Leavitt路径代数相关的逆半群》，Adv. Math. 384 (2021)，论文编号 107729，37，DOI 10.1016/j.aim.2021.107729。MR 4242903[36] John Meakin 和 Zhengpan Wang，《关于图逆半群》，Semigroup Forum 102 (2021)，第 1, 217 234, 10 1007 00233 020 10130 5 4214502 – 期，DOI . /s - - - 。MR Zachary [37]
Mesyan 和 J. D. Mitchell，《图逆半群的结构》，Semigroup Forum **93** 2016 1, 111 130, 10 1007 00233 016 9793 3528431 ( )，第 – 期，DOI . /s - - -x。 [38]
MR Alan L. T. Paterson，《群胚、逆半群及其算子代数》，Progress in Mathematics，第 170, 1999 1724106 卷，Birkhäuser [39]
Boston Inc.，波士顿，MA，。MR Efren Ruiz，《Leavitt路径代数的代数 Kirchberg-Phillips 问题》，Bull. Lond. Math. Soc. 57 (2025)，第 4 期，1229–1248，DOI 10.1112/blms.70027。[40] Benjamin Steinberg，《离散逆半群代数的群胚方法》，Adv. Math. 223 (2010)，第 2 期，689–727，DOI 10.1016/j.aim.2009.09.001。
[41] ———，《具有应用的素 étale 群胚代数：逆半群代数与 Leavitt路径代数》，J. Pure Appl. Algebra 223 (2019)，第 6 期，2474–2488，DOI 10.1016/j.jpaa.2018.09.003。

巴塞罗那自治大学数学系，Cc楼，08193
C巴列斯河畔塞尔达尼奥拉（巴塞罗那），西班牙，电子
邮箱： pere.ara@uab.cat

圣卡塔琳娜联邦大学数学系，88.040-900 弗洛里亚诺波利斯- SC，巴西

电子邮箱： alcides.buss@ufsc.br

圣卡塔琳娜州立大学企业管理系数学部，88.035-001 弗洛里亚诺波利斯-SC，巴西电子邮箱：
adodallacosta@hotmail.com，ado.costa@udesc.br