arXiv:2512.16015v1 [math.PR] 17 Dec 2025

圆盘、曲面与纠缠渗流

保罗·邓肯、BENJAMIN SCHWEINHART 和 DAVID SIVAKOFF

Abstract. 我们研究在 $\mathbb{Z}^3$. 的方格渗流中，一个环为零伦（即被圆盘的连续像所围成）的概率。在局部范围内，矩形棱柱存在“水平圆盘穿越”这一事件，与纠缠渗流（采用连线边界条件）中存在垂直穿越这一事件互为对偶。然而，由于纠缠渗流具有长程特性，对完整格上类似事件的分析十分复杂。我们证明，在关于纠缠渗流阈值随截断变化的连续性这一猜想成立的条件下，矩形环路可缩的概率会发生相变：从面积律转变为周长律，而这一转变与纠缠渗流阈值互为对偶。我们还证明了薄层中截断纠缠渗流阈值的连续性，并据此确定了一个参数范围，在该范围内，大型面元曲面虽会出现，却通常带有许多把手。

1. Introduction

随机图的研究已成为一个活跃且成果丰硕的研究领域，持续了 50 多年，尽管人们对高维中类似问题的了解要少得多。随机单纯复形和立方复形呈现出图中不存在的有趣拓扑现象。在平均场情形下，已发现与核心拓扑概念——同调 [LM06, MW09, LP16] 和同伦 [BHK11]——相关的不同相变。对于另一种平均场模型，一维同调和基本群消失的阈值相同 [KPR21]。然而，人们对格点上渗流复形的拓扑了解还较少。

我们关注高维格模型中巨型曲面的出现，这与经典渗流中的巨型连通分支相类似。然而，预计不同类别的曲面会在不同的阈值处出现。本文从两个不同的视角研究由此产生的拓扑区域。Aizenman、Chayes、Chayes、Fr¨olich 和 Russo 的开创性成果 [ACC$^+$83] 表明，大环是某个面元集合边界的概率存在相变；这是一种以同调概念“填充”该环的方式。同一组作者猜想，与之相关的同伦事件——即大环可缩，也就是说，能在面元系统内将该环连续变形为一点——应当存在一个不同的阈值。我们将看到，可缩性等价于在加厚后的面片中用圆盘填充该环。我们部分证实了这一猜想，随后考察同调填充与可缩性之间的中间区域，并表明其中出现的大型曲面具有复杂的拓扑结构。

Date: 2025年12月19日。

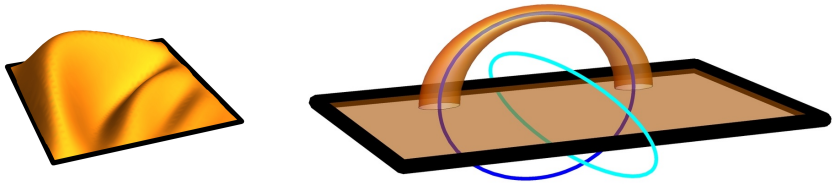

FIGURE 1. 方格事件：（左）环 γ （以黑色显示）是零伦的，因为它由一个与圆盘同胚的橙色面片曲面所围成。（右）环 γ 是零调的（由一个曲面围成），但不是零伦的。事实上，两个由对偶键构成的环路（以蓝色显示）与 γ共同组成一组博罗米恩环，因此不可能存在零伦。

我们使用的主要工具是纠缠渗流，下面将对其作更详细的介绍。众所周知，纠缠渗流的阈值不同于连通性 [AG91, Hol00, Hol02], ，且与对偶复形中球面的存在有关 [GH10, GH00]。然而，与经典渗流相比，纠缠渗流尚未得到充分理解，因为判断一组键是否纠缠具有非局域性。我们的结果是通过研究一种中间的局域纠缠形式而得出的。

2. MAIN RESULTS

我们关注的模型是在顶点位于 $\mathbb{Z}^3$.的立方最近邻格上进行的方格渗流。（二维）小方格是以下单位正方形之一的整数平移 $[0,1]\times[0,1]\times\{0\}$, $[0,1]\times\{0\}\times[0,1]$, 或 $\{0\}\times[0,1]\times[0,1]$. 。我们也可以将小方格视为立方复形的二维胞腔；该复形由将 $\mathbb{R}^3$ 写成整数角点的单位立方体之并而成。方格系统 $P=P(p)$是这样得到的随机子复形：取完整的 $\mathbb{Z}^3$ 格，并以概率 p.独立添加每个小方格

对于由 $\mathbb{Z}^3$ 中的边构成的环 γ，我们将 U_γ 定义为如下事件： γ 在P. 中是可缩的。等价地， U_γ 是指 $0=[\gamma]\in\pi_1(P)$ ，其中，基本群 $\pi_1(P)$ 是由环在同伦（即连续变形）下的等价类构成的群。基本群的形式化定义需要为环选取一个基点，但在道路连通空间中，基点的选择实际上无关紧要（更多信息见 [Hat02] ）。直接研究这一事件较为困难，因此我们借助对偶格 $\left(\mathbb{Z}^3\right)^*$ 来处理：$=\mathbb{Z}^3+(1/2,\ 1/2,\ 1/2)$ 。 $\left(\mathbb{Z}^3\right)^*$ 的每条边都恰好与 $\mathbb{Z}^3$的一个小方格相交，因此取 $q=1-p$，我们可以将 P 与参数为 q 的对偶键渗流 B 耦合，使得一个小方格出现在 P 中，当且仅当与之相交的对偶边没有出现在 B.中。

一组对偶键 E 称为纠缠的，如果不存在将二维球面 $\mathbb{S}^2$ 嵌入 $\mathbb{R}^3\setminus E$ 的嵌入 $\mathcal{S}$ ，使得 E 与 $\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{S}$. 的两个连通分支都相交。这个定义与面元系统的联系比表面上看起来更紧密，因为存在一个从$\mathbb{R}^3\setminus B$ 到 P [DKS25]的连续映射（更具体地说，是一个变形收缩）。因此，我们可以考察 P 中球面的连续像，而不是 $\mathbb{R}^3\setminus B$ 中的嵌入球面，，而我们迈出的第一步是

分析面元系统中环路的行为，即从对偶纠缠的角度刻画 U_γ 。

命题1。 设 γ 是 $\mathbb{Z}^3$.中的一个环。那么，当且仅当不存在一组对偶键 $E \subset B$ 使得 $E \cup \gamma$ 是纠缠的时， U_γ 才会发生。

我们还在命题10中证明，盒子相对两侧之间发生纠缠穿越这一事件，与其余侧面生成的环在拓扑上可缩这一事件互为对偶。这些结果与 Grimmett 和 Holroyd 在 [GH10]中研究的纠缠路径与包围球面之间的对偶关系一脉相承。

纠缠渗流因长程依赖而难以处理，因此我们还引入了一种受限版本——称为 m-纠缠：若两个$\left(\mathbb{Z}^3\right)^*$ 顶点包含在一个至多含有 m 条键的纠缠集中，则它们之间存在一条长程边。令 $C^m(a)$表示 $a \in \left(\mathbb{Z}^3\right)^*$的 m-纠缠连通分量；换言之，在加入相应的长程边后，它就是 a 的连通分支。于是我们可以定义阈值

$$p_c^m = \inf\{p : \mathbb{P}_p\left(|C^m(a)| = \infty\right) > 0\}.$$

我们证明，当对偶键参数高于先前阈值的极限时，事件 U_γ 满足面积律

$$p_c^{\lim} = \lim_{m\to\infty} p_c^m$$

而低于相关阈值时满足周长律

$$\pi_c^e = \inf\{p : \mathbb{E}(|C^e(a)|) = \infty\}$$

针对顶点 $a \in \left(\mathbb{Z}^3\right)^*$.的纠缠连通分量$a$，其期望大小为 C^e

定理2。 设 γ 是晶格平面中的一个矩形环路。设 U_γ 为事件： γ 在 P.中是可缩的

那么存在常数 $\alpha(p) \in (0,\infty)$ 使得

$$\log \mathbb{P}_p(U_\gamma) \begin{cases} \sim -\alpha(p)\mathrm{Area}(\gamma) & p < 1 - p_c^{\lim} \\ = -\Theta(\mathrm{Per}(\gamma)) & p > 1 - \pi_c^e \end{cases},$$

随着 γ 的尺寸趋于 ∞。

根据 [AG91、BBR14] 的结果，我们注意到 p_c^m 关于 m 严格递减。特别是， $p_c^{\lim} < p_c\left(\mathbb{Z}^3\right)$ ，因此这一相变不同于 [ACC+83] 中所考虑的环为零同调的概率所对应的相变。要证明这一相变是锐利的，只需证明

$$p_c^{\lim} = \pi_c^e,$$

而这仍是一个未解决的问题。利用 [DCRT19] 的技巧可得， $p_c^m = \pi_c^m$ 对每个 m, ，其中 π_c^m 是 m-纠缠渗流中无穷期望簇大小的阈值。因此，这一相变的锐利性可以从这两个阈值在 m. 下的连续性来理解。对于 $\mathbb{Z}^2$ 中另一类增强，我们在姊妹论文 [DSS] 中证明了 $p_c^{\lim} = p_c^e$ 。

我们也考虑盒穿越，在相同的区域内会呈现类似的行为。



FIGURE 2. 方格渗流中一次面片穿越的两种视图，其中 Λ_{25} 以概率 $p = 1 - 0.246 \approx 1 - p_c\left(\mathbb{Z}^3\right) + .003$，从面片数量最少的穿越中选取。请注意其中把手的存在。该图由 Ben- jamin Atelsek、Gregory Maleski 和 Tristan Napoliello 创建，是梅森实验几何实验室（MEGL）开展的一个项目的一部分。

命题3. 考虑立方体 $\Lambda_N = [-N, N]^3$ 上的方格渗流，并令 O 表示这样一个事件：存在一组小方格，将立方体的顶部与底部分隔开，且这组小方格与圆盘同胚。则

$$\mathbb{P}_p(O) \to \begin{cases} 0 & p < 1 - p_c^{\lim} \\ 1 & p > 1 - \pi_c^e \end{cases}$$

以高概率成立，当 $N \to \infty$.

情形 $p > 1 - \pi_c^e$可由直接应用命题10及并集界得到。情形 $p < 1 - p_c^{\lim}$则是以下结果的推论：当 $1 - p_c\left(\mathbb{Z}^3\right) < p < 1 - p_c^{\lim}$时，该结果对面元系统进行了更为详细的描述；我们现在对此进行说明。

我们称面元集合 P' 为面片穿越，如果 P' 将 Λ_N 的顶部面与底部面分隔开，并且对于任意面片 $\sigma \in P'.$， $P' \setminus \sigma$ 都不成立。对于 $p \in \left(1 - p_c\left(\mathbb{Z}^3\right),\ 1 - p_c^{\lim}\right)$，所有足够大的立方体中的面片穿越都包含许多把手。对于不含 $\partial\Lambda_N$ 的任何 2-胞腔的 Λ_N 的渗流子复形 P，令 $\mathcal{S}(P)$ 表示包含于 $P.$ 中的 Λ_N 的面片穿越集合。定义 $\mathrm{mh}_N(P)$ 为 ∞，若 $\mathcal{S}(P) = \varnothing$，否则

$$\mathrm{mh}_N(P) \coloneqq \min_{S \in \mathcal{S}(P)} \operatorname{rank} H_1\left(S \cup \partial\Lambda_N\right),$$

其中 $H_1(X)$ 是 X 的第一同调群，其系数取自 $\mathbb{Z}.$。我们关于中间区域的主要结果给出了 $\mathrm{mh}_N(P)$ 的增长率，精确到一个对数因子。

定理4. 设 $1 - p_c\left(\mathbb{Z}^3\right) < p < 1 - p_c^{\lim}$. 则存在 $c_1(p)\ \ c_2(p) > 0$，使得

$$c_1(p) \frac{N^2}{\log N} < \mathrm{mh}_N(P) < c_2 N^2$$

当 $N \to \infty$. 时，以高概率成立

3. Outline

在第4节中，我们定义所研究的有限纠缠概念，并证明命题1，建立事件 U_γ 与对偶键系统之间的联系。在此过程中，我们讨论了 $\mathbb{R}^3$ 中有关曲面的有用结果，这些结果使我们能够避免第4.1节中的病态情形，并提供了在第4.2节中寻找分隔特定集合的球面的工具。随后，我们在第5节和第6节证明周长律和面积律界。两种情况下，我们大致沿用 [ACC+83]中类似结果的论证，但都需要作出重大修改。我们还证明，在薄层中， m-纠缠渗流的临界概率在第6.1节中是连续的。最后，在第7节中，我们通过证明较小子盒的对偶纠缠穿越各自在较大盒的任意小方格穿越中产生非平凡同调，来证明定理4。

4. Limited Entanglement and Entanglement Duality

现在我们更精确地定义 m-纠缠：给定一个图 G，我们将构造一族图 $E(m) = E(G, m)$，它们具有相同的顶点集 V。对于 $G.$，若 S 是纠缠的，则在 S 的顶点上包含一个完全子图。接着，如果存在一个包含 v_1 和 v_2 、且至多有 m 条边的 G 的纠缠子图，那么 $v_1, v_2 \in V$ 相邻。于是，如果 $E(G, m)$ 连通，我们就称 G 是 m-纠缠的。请注意， m-纠缠渗流是 m-依赖的，换言之，距离大于 m 的 L^1 处边的状态相互独立。

为完整起见，我们验证 m-纠缠是比一般纠缠更强的条件。

引理5。设 $m \geq 1.$ 。若 G 是 m-纠缠的，则 G 也是纠缠的。

证明。 假设 G 是 m-纠缠的，并被球面 $\mathcal{S}.$ 分隔。那么 $\mathcal{S}$ 也将 $E(G, l)$的顶点分成 $A \cup B$，其中 $A, B \neq \emptyset,$ 与 A 的顶点对应的连通分支位于$\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$的有界分支中，而与 B的顶点对应的连通分支位于 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}.$ 的无界分支中。但由于 $E(G, m)$ 是连通的，因此 A中的某个顶点与 $B.$ 中的某个顶点之间必有一条边。因此， $\mathcal{S}$ 分隔了一个纠缠集，矛盾。□

继续之前，我们先指出，还有其他可能的有限缠结概念。一种选择是只允许连通分支数量有界的纠缠集，而不是要求边的数量有界。Atapour和Madras [AM10] 考虑的第三种方法，是尝试通过用最小曲面填充每个键环路来填充纠缠集。如果该集合类似于由链环组成的手镯，那么经过一步操作后，所得集合就会连通。然而，如果用“环路”构造一个更大的手镯，而每个环路本身又是由前一种手镯构成，那么就需要再进行一轮填充，才能使整个集合连通。由此，可以通过只允许这一过程中的步骤数有界，来定义一种有限缠结模型。不过，三种有限模型中的任何一种是否与其他模型或一般缠结在极限意义下概率等价，仍是一个尚未解决的问题。

4.1. 拓扑学细节。 本节将详细讨论球面和圆盘到 $\mathbb{R}^3$. 中的不同类型映射。我们在此暂停一下，补充一些背景和示例，以说明这些区别为何重要。当我们研究事件 U_γ，时，我们希望根据 P. 的拓扑性质，判定 γ 在 P 中是否可缩。使 γ 可缩的最直接情形，是它构成某个嵌入圆盘的边界（回想一下，嵌入是指一个映射，它到其像的限制是同胚）。然而，不难看出，这并非必要条件：将两点识别在一起形成的“捏合”圆盘也足以满足条件。正确的等价条件是， γ 是 P. 中某个圆盘的连续像的边界。嵌入球面还会带来另一个可能棘手的问题，尤其是在试图证明命题1时。我们希望能够将嵌入球面补集中的任意环路收缩为一点，但亚历山大带角球面 [Ale24a] 提供了一个病态嵌入的例子，在这种情况下未必能做到。也就是说，若尔当–舍恩弗利斯定理指出，嵌入二维球面中的简单闭曲线会将其分成两个同胚于二维球的连通分支；但若无额外假设，该定理无法推广到三维情形。

幸运的是，在当前情形下可以避免这些复杂情况： B 是 $\mathbb{R}^3$的闭子集，这让我们有一定余地，可以在 $\mathbb{R}^3 \setminus B$. 中找到“良好”的球面和圆盘嵌入。回想一下，曲面的分段线性嵌入是指一种嵌入，其像是由有限个在边界处良好相交的单形组成（也就是说，由顶点、边和三角形面构成的集合，其中两条边只能在一个顶点处相交，而两个面只能在一个顶点或一条边处相交）。分段线性嵌入曲线的定义类似，只涉及顶点和边。

现在我们陈述三维流形拓扑中的三个基本结果，其中两个结果使我们能够使用分段线性嵌入来避免这些问题。

定理6 (Dehn引理 [Pap57])。 设 γ 是三维流形3 M. 中的一条分段线性嵌入曲线。那么，如果存在圆盘的连续像 $\mathcal{I} \subset M$ 使得$\gamma = \partial\mathcal{I}$，则也存在一个分段线性嵌入圆盘 $\mathcal{D} \subset M$ 使得 $\gamma = \partial\mathcal{D}$.

定理 7 （Bing [Bin57]）。 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ 是一个嵌入球面。则对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个分片线性嵌入球面 $\mathcal{S}'$ 以及一个同胚 $f\colon\ \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$，使得对于任意 $x \in \mathcal{S}$、 d（x、 f （x））$< \epsilon$.

定理 8 （Alexander [Ale24b]）。 设 $\mathcal{S}$ 是三维球面 $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$. 中的一个分段线性嵌入二球面。则 $S^3 \setminus \mathcal{S}$ 的两个连通分支都与三维球体同胚。

以下是定理 7 的一个直接推论。

推论 9。 设 $E \subset \mathbb{Z}^3 \cup \left(\mathbb{Z}^3\right)^*$ 是由键和对偶键组成的集合。当且仅当 E 被一个分段线性嵌入球面分隔时，它才被一个嵌入球面分隔。

证明。 令 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbb{R}^3 \setminus E$. $\mathcal{S}$ 中的一个球面嵌入。 $\mathbb{R}^3 \setminus E$. $\mathcal{S}$ 是紧的，且 E 是闭的，因此存在 $\epsilon > 0$，使得闭 ϵ邻域 $\mathcal{S}_\epsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon\ d(x,\ \mathcal{S}) \leq \epsilon\right\}$与 E不相交。于是，根据定理 7，存在一个分片线性嵌入球面$\mathcal{S}' \subset \mathbb{R}^3$ 以及一个同胚 $f\colon\ \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$，使得对所有 $x \in \mathcal{S}$.，都有 $d(x,$ $f(x)) < \epsilon$。注意， $\mathcal{S}$， $\mathcal{S}_\epsilon$，和 $\mathcal{S}'$ 都诱导出 E. □的同一个划分

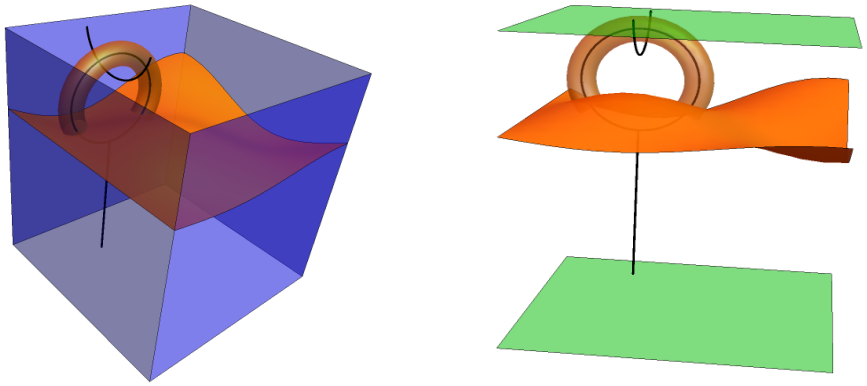

FIGURE 3. 命题10中事件的示意图，从两个不同视角展示。左侧以蓝色显示 D_2，右侧以绿色显示 D_1。注意，$\pi_1(D_2) = \mathbb{Z}$，并且该基本群的生成元在 D_2 与橙色曲面的并集中不可缩，这是由于把手的存在。黑色路径是 D_1.的纠缠穿越

因此，今后我们假设所考虑的所有嵌入球面都是分片线性的。

我们还需要横截性的概念。回忆一下，流形 X，$Y \subset \mathbb{R}^3$若在任意一点 $v \in X \cap Y$，处的切空间T_vX 与 T_vY 的并生成 $\mathbb{R}^3$.，则称它们横截相交。对于分片线性流形，我们将多个线性片相交处一点的切空间定义为这些片的切空间之交。众所周知，可以对两个分片线性流形作任意小的扰动，使它们横截相交；所得的横截交集也是一个流形 [AZ67]。例如，若一个分段线性嵌入球面与一个盒子的边界横截相交，则交集是一维流形：若干条互不相交的简单闭曲线的并。

现在我们证明一个有限体积对偶性命题，该命题将 B 盒子的顶部和底部存在纠缠穿越的事件，与其余侧面中的非平凡闭环在 P. 中可缩的事件联系起来。不过，我们在这里也需要谨慎处理纠缠穿越的正确概念，因为天真的版本不具备正确的对偶性。

更确切地说，令

$$R = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$$

对于某个 a，b，$c \in \mathbb{N}$，令

$$\begin{aligned} D_1^- &= D_1^-(R) = [0, a] \times [0, b] \times \{1/2\}, \\ D_1^+ &= D_1^+(R) = [0, a] \times [0, b] \times \{c - 1/2\}, \\ D_1 &= D_1(R) = D_1^- \cup D_1^+, \\ D_2 &= D_2(R) = \partial R \cap \{1/2 \le z \le c - 1/2\}. \end{aligned} \tag{1}$$

令 P_R 为 $P \cap R \cap \{1 \le z \le c - 1\}$ 与 D_2的所有面片，的并集，并令B_R 为 $B \cap [1/2, a - 1/2] \times [1/2, b - 1/2] \times [1/2, c - 1/2]$ 与所有

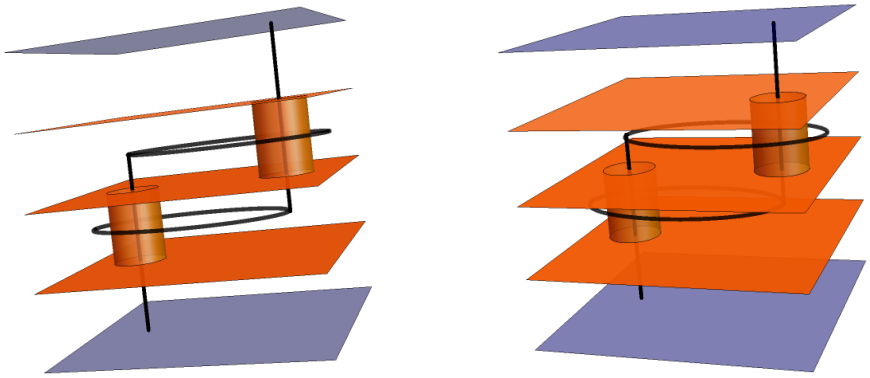

FIGURE 4.这个例子灵感源自 Bing 的“两室房屋”[Bin64], 的两个不同视角。这里， P_R以橙色描绘， D_1 以蓝色呈现，而与 B_R 同伦等价的键系统则以黑色绘出。 P_R 由三个平行矩形构成：从顶部和底部的矩形中各移去一个圆盘，从中间的矩形中移去两个圆盘，再用圆柱体将中间矩形与另外两个矩形连接起来。显然，补集中的一个球面将 D_1 与 B_R分隔开来，但要想象 $R \setminus B_R$内部有一个圆盘将 D_1. 分隔开来，则要困难得多。如果 α_1， α_2，和 α_3 是$D_2 \cap P_R$中从顶部到底部排列的三个矩形环路，那么 $[\alpha_2] = [\alpha_1] * [\alpha_3]$ 属于π_1 （P_R），但 $[\alpha_1] = [\alpha_2] = [\alpha_3]$ 不属于 π_1 （D_2）。由此可得， $[\alpha_1] = e$属于 π_1 （$P_R \cup D_2$）。接着，Dehn引理表明， α_1 是 $D_2 \cup P_R$的一个小邻域中某个圆盘的边界，随后可以将这个圆盘推入 $R \setminus B_R$. 内部。这个例子在第7节中也会用到。

D_1. 的键的并集。这些集合应从盒子上的边界条件角度来理解；对于 P_R ，我们将 D_2 的四个面连接在一起，并使剩余的两个面自由；而对于 B_R ，我们采取相反的做法，并作相应调整以适应对偶格而非原始格。

为了得到圆盘穿越的对偶条件，我们需要通过将 D_1 的一个连通分量延伸为平面，进一步限制可能的分离球面。我们称 B_R 包含纠缠穿越，如果存在一个与 D_1^-和 D_1^+.均相交的纠缠键集$E \subset B_R$

给定一个子集 $X \subset \mathbb{R}^3$，我们将 $I(X)$定义为 $\mathbb{R}^3 \setminus X$.的有界连通分量的并集

以下命题见图3和图4，它本质上是将定理6改编到我们的情形后得到的结果。为定义其中一个等价条件，回顾一下，空间的包含映射 $X \hookrightarrow Y$ 会在基本群上诱导一个映射 $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$，该映射将环路的一个等价类映到其某个代表元在该包含映射下的像所对应的等价类。

命题10。 以下条件等价：

(1) 在 $R \setminus B_R$ 中不存在将 D_1. 分隔开的分段线性嵌入圆盘(2) 由包含映射诱导的映射 $\pi_1(D_2) \mapsto \pi_1(P_R)$ 是非平凡的。

(3) 在 $\mathbb{R}^3 \setminus B_R$ 中不存在将 D_1. 分隔开的分段线性嵌入球面(4) B_R 包含一个与 D_1.的纠缠穿越

此外，我们还证明，若此事件不发生，则存在由面片构成的曲面，将 D_1 的两个连通分量分隔开来，且该曲面是圆盘的连续像。

证明。 (1) 与 (2) 等价这一事实可直接由定理6以及 $R \setminus B_R$ 变形收缩到 P_R 得出；但有一个细微的技术问题：以此方式找到的圆盘可能需要稍作变形，以确保它位于 R. 内。此外，根据推论 9，(3) 与 (4) 等价。

现在我们证明 (2) 与 (3) 等价。

(2) $\implies$ (3) :

假设存在一个分段线性嵌入球面 $\mathcal{S}$，位于 $\mathbb{R}^3 \setminus B_R$ 中，使得 D_1^- 和 D_1^+ 分别包含在 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$. 的有界分支和无界分支中。由于 $B_R \cap \{z \in \{0, c\}\} = \emptyset$，我们不妨假设 $\mathcal{S} \cap \partial R \subset D_2$. 。由于 B_R 是闭的，我们也不妨假设 $\mathcal{S}$ 与 D_2 横截相交，因此 $\mathcal{S} \cap D_2$ 是有限个简单环的并。我们对 $\mathcal{S}$ 作修改，以去除在 π_1（D_2）中平凡的环。若 $\mathcal{S} \cap \partial R$ 含有一个在 D_2 中可缩的环，那么它至少含有一个这样的环 γ，且该环在 D_2. 中围成一个圆盘 $\mathcal{D}_\gamma$ 。于是， $\mathcal{D}_\gamma$ 与 $\mathcal{S} \setminus \gamma$ 的某个连通分量的并构成一个球面，将 D_1^- 与 D_1^+. 分隔开来。用这个球面替换 $\mathcal{S}$，并将 $\mathcal{D}_\gamma$ 推入 R，从而使 $\partial R \cap \mathcal{S}$ 的连通分支数减少一个。对每个可缩环应用这一过程后，不失一般性地，我们可以假设 $\mathcal{S} \cap D_2$ 的任何环都不能在 D_2. 中收缩。

由于 $\mathcal{S} \cap \partial R$ 是互不相交的环的并， $\mathcal{S} \cap R$ 是带边界曲面的不交并。我们首先考虑存在一个这样的曲面 $\mathcal{T}$，其边界分支多于两个的情形，如图4所示的例子。设 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 为 $\mathcal{T}$. 的边界分支。对它们定向，使它们在 π_1（D_2）中都与该群的一个生成元 α 同伦。由于 $\mathcal{T}$ 同胚于去掉 k 个圆盘后的二维球面，因此有如下关系

$$[\beta_1]^{a_1} * \ldots * [\beta_k]^{a_k} = e \in \pi_1(\mathcal{T}) \tag{2}$$

其中 $a_1, \ldots, a_k \in \{-1, 1\}$. 。在下一段中，我们将证明 $a_1, \ldots, a_k$ 必须全为 **1** 或 -1. 。因此，在包含映射 i : π_1（D_2） $\to \pi_1$（$D_2 \cup \mathcal{T}$）下，有

$$i([\alpha]) = i([\alpha])^{k-1}$$

因此，要么 $[\alpha] = e$ 属于 π_1（$D_2 \cup \mathcal{T}$）（此时结论成立），要么 $[\alpha]$ 是 π_1（$D_2 \cup \mathcal{T}$）中的有限阶元素。然而， $D_2 \cup \mathcal{T}$ 是局部路径连通且半局部单连通的 $\mathbb{R}^3$, 子集，因此它不可能含有非平凡的有限阶元素 [hk]。

我们回过头来检查 $\mathcal{T}$ 的边界环路是否沿同一方向定向。按高度对 β_j 的边界分支排序。必要时对 (2) 取逆，使得 $a_1 = 1$ 。令 j 为满足以下条件的最小指标： $a_{j+1} = -1$. β_j，且 β_{j+1} 在 D_2 中围成一个圆柱体 $\mathcal{C}_1$，该圆柱体不与 $\partial\mathcal{T}$. 的任何其他连通分支相交。令 $\mathcal{C}_2$ 为这样一个圆柱体：在 R 外侧附加互不相交的圆盘，填补 $\mathcal{T}$ 边界上剩余的 $k-2$ 个环路（这是可行的，因为 β_j 和 β_{j+1} 相邻）。我们有 $[\beta_j] = [\beta_{j+1}] \in \pi_1(\mathcal{C}_1)$，但 $[\beta_j] = [\beta_{j+1}]^{-1} \in \pi_1(\mathcal{C}_2)$ 。因此， $[\beta_{j+1}]$ 在由 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 并合而成的闭曲面上表示一个二阶元素，所以该曲面是克莱因瓶。这就产生了矛盾，因为克莱因瓶不能嵌入 $\mathbb{R}^3$.

现在我们转向这样的情形： $\mathcal{S} \cap R$ 的所有连通分支都至多有两个边界分支，也就是说，每个连通分支不是圆柱体就是圆盘。由于 B_R 在 D_1^+ 上方或 D_1^- 下方都不包含任何键，我们可以假设 $\mathcal{S}$ 不与 $R \cap \{z \geq c - 1/2\}$ 或 $R \cap \{z \leq 1/2\}$. 相交。根据构造， $\partial R \setminus \mathcal{S}$ 是有限个圆柱体与两个圆盘的不交并，其中一个圆盘包含 R 的顶面，另一个包含 R. 的底面。由于 $\mathcal{S}$ 的内部包含 D_1^-，I（$\mathcal{S}$）$\cap \partial R$ 必须包含底部圆盘，而不包含顶部圆盘。令

$$\mathcal{S}'' \coloneqq \partial\left(I\left(\mathcal{S}\right) \cap R\right).$$

根据构造， $\mathcal{S}''$ 是一个（不一定连通的）闭定向曲面，由圆柱体和圆盘沿边界粘合而成，每个圆柱体和圆盘都包含在 $I(\mathcal{S}) \cap \partial R$或 $\mathcal{S} \cap I(\partial R)$中。 $\mathcal{S} \cap \partial R$. 设 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}''$ 是$\mathcal{S}''$ 中包含 $\partial R \setminus \mathcal{S}$ 底部圆盘的连通分量，因此 $\mathcal{S}'$ 的内部包含 D_1^-。由于将一个圆柱体附着到圆盘上会形成另一个圆盘，要构成闭曲面，最终必须再附着一个圆盘 $D \subset R \setminus B_R$，从而使 $\mathcal{S}'$ 成为球面。由于 $\partial R \setminus \mathcal{S}$ 的顶部圆盘不包含在 $I(\mathcal{S}) \cap \partial R$, D 中， $\mathcal{S} \cap I(\partial R)$. 因此 D 是一个包含在 $R \setminus B_R$ 内、将 D_1.分隔开的圆盘

(3) $\implies$ (2) :
假设包含映射 $\pi_1(D_2) \mapsto \pi_1(D_2 \cup P_R)$ 是平凡的。那么环 $\gamma_1 \coloneqq \partial R \cap \{z = 1/2\}$ 在 $D_2 \cup P_R$. 中是可缩的。令 $\mathbb{D}^2$ 表示二维圆盘。那么， γ_1 的收缩诱导出一个映射 $i_1 : \mathbb{D}^2 \to P_R$，使得 $i_1\left(\partial \mathbb{D}^2\right) = \gamma_1$。根据定理 6 以及 P_R 在 $R \setminus B_R$ 中的某个开邻域这一事实，存在一个嵌入 $i_1' : \mathcal{D}^2 \to R \setminus B_R$，使得 $i_1'\left(\partial \mathbb{D}^2\right) = \gamma_1$.。当然，我们也可以找到一个嵌入 $i_2 : \mathbb{D}^2 \to \{z \leq 1/2\} \setminus R$，使得 $i_2\left(\partial \mathbb{D}^2\right) = \gamma_1$。将二者结合起来，我们得到一个嵌入 $j : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$，其像将 D_1 分开，正如所需。□

4.2. 分离球面。 现在，我们着手用对偶键系统来刻画事件U_γ 。回顾一下，在图 G 中，顶点 v 的纠缠分支是指：在同一纠缠集中的顶点之间添加长程边后，包含该顶点的连通分量；等价地说，它是所有包含 v. 的纠缠集中的顶点之并。请注意，这与 [GH00], 中讨论的有线纠缠概念一致，因为我们允许存在无限键集。我们需要一些球面，它们能包围某些纠缠分量而不包围其他分量。此类球面的存在性并不能直接从纠缠的定义推出，但可通过一个简单的引理证明。我们先考虑有限情形。

引理 11。 设 E 和 F 是 $E \cup F$中有限个有限纠缠分量的有限并，且 $E \cap F = \varnothing$. 。那么存在一个球面 $\mathcal{S}$，将 E 与 F 分隔开，使得 E包含在 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$.的有界分支中。

证明。 首先，假设有两个有限键集 G和 H，它们被一个球面 $\mathcal{S}_G$ 分隔，且 G 位于其补集的有界分支中。于是，我们可以按如下方式构造一个球面 $\mathcal{S}_H$，使其分隔 G 和 H，且 H 位于其有界分支中。令 $\mathcal{S}_{(G,H)}$ 为一个同时包含 $\mathcal{S}_G$ 和 H的大球面。令 ξ 为一条光滑路径，连接点 $x_G \in \mathcal{S}_G$ 与点 $x_{(G,H)} \in \mathcal{S}_{(G,H)}$，且不与 H.相交。由于 H 是闭的，我们可以将 ξ 加粗成一根管，连接围绕 x_G 和$x_{(G,H)}$ 的圆盘，并且不与 H. 相交。从球面上移除这些圆盘，再用管将它们连接起来，就得到了所需的嵌入球面。

现在考虑一般情形。只需找到一个球面，将 E 中的单个纠缠分支 A 与其余部分分隔开；因为我们可以像上面那样用管连接包含所需分支的球面。若 E 不纠缠，则存在一个球面 $\mathcal{S}_1$ ，将 E 分成 E_1 和 E_1'. 。不失一般性，假设 $A \subset E_1$. 。根据上述论证，我们可以假设 E_1 位于 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}_1$. 的有界分支中。若 $E_1 = A$， 则问题已解决。否则， E_1 不纠缠，因此存在一个球面 $\mathcal{S}_2$ ，将其分成 E_2 和 E_2'. 。先验地， $\mathcal{S}_2$ 可能与E_1'. 相交。然而， I （$\mathcal{S}_1$）与 $\mathbb{R}^3$同胚，因此我们可以假设 $\mathcal{S}_2 \subset I$ （$\mathcal{S}_1$）。由于 E 是有限个连通分支的并，反复应用这一过程最终会终止，从而得到所需的球面，将 A 与 $E \setminus A$. □分隔开。

事实上，可以改进前一个引理，去掉要求两个集合都有限的条件。

引理 12. 设 E 是由有限纠缠分量构成的有限并 B. 。那么存在一个 $\mathbb{R}^3$ 的球面，将 E 与 $B \setminus E$. 分隔开来。

证明。与引理 11 中一样，可以用管连接包含有限连通分量的球面，构成一个单独的球面，因此只需考虑 E 是一个纠缠分量的情形。为方便起见，将对偶键平移至 $\mathbb{Z}^3$ ，并假设 $0 \in E$. 。令 $Q_n = \{ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ -n \le x,\ y,\ z \le n\}$.

我们声称，只需证明：若 E 是有限的，则存在一个$\mathbb{R}^3 \setminus B$ 的球面 $\mathcal{S}$ ，使 E 包含在其内部。假设这一点成立，则存在一个同胚 f，将内部 I （$\mathcal{S}$）映至 $\mathbb{R}^3$；将引理 11 应用于有限图 f （$B \cap I$ （$\mathcal{S}$）），可得一个球面 $\mathcal{S}' \subset I$ （$\mathcal{S}$）$\setminus B$，使 E 包含在其内部，而 I （$\mathcal{S}$）$\setminus E$的所有顶点都在其外部。

现在证明，如果 E 是有限的，那么存在一个 $\mathcal{S}$ 球面 $\mathbb{R}^3 \setminus B$，其内部包含 E 。这就是 [GH00], 中的命题 2.4，我们将给出一个更简短的证明。假设原点的纠缠连通分量 E 不包含在任何 $\mathbb{R}^3 \setminus B$. 球面的内部。我们将证明 E 是无限的。令 T_n 为立方体 $Q_n = [-n, n]^3$. 边界上的键集合。对于任意 $n > 0$，必定存在一个包含原点的图 $E_n \subset Q_n \cap B$，使得 $E_n \cup T_n$ 在 $Q_n \cap B$ 中是纠缠的。我们将证明其逆否命题。假设存在一个球面 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \setminus Q_n \cap B$，将 T_n 与 0. $\mathcal{S} \cap \partial Q_n$ 分隔开。 0. $\mathcal{S} \cap \partial Q_n$ 是一组环路的并集，每个环路都位于 T_n. 的键构成的某个单位正方形内。我们可以迭代地用圆盘填充这些环路，并将所得球面局部地推入或推出 Q_n. 。这样得到一组与 ∂Q_n，互不相交的球面，其中必有一个将 0 与 T_n. 分隔开。该球面必定包含在 Q_n 内，因此与 B 不相交，并且其内部包含 0。

根据相同的推理，对于 $m > n$，$(E_m \cap Q_n) \cup T_n$ 在 $Q_n \cap B$ 中是纠缠的。$\hat{}$ Q_n 只有有限多个子图，因此必定有一个 E_n 会作为 $E_m \cap Q_n \hat{}\ \hat{}$ 对于无限多个 m 出现。因此，存在一族具有该 $\hat{}$ 性质的图 $E_1 \subset E_2 \ldots$。于是， $\cup_n E_n$ 是一个包含原点的无限纠缠图。□

同一证明也适用于稍微一般一些的情形。为便于接下来的证明以及日后使用，我们将其单独表述如下。

推论13。 设 $F \subset \mathbb{Z}^3 \cup \left(\mathbb{Z}^3\right)^*$ 是一组键和对偶键，且 $E \subset F$ 是 F. 的有限个有限纠缠分量的有限并。那么存在一个 $\mathbb{R}^3$ 的球面，将 E 与 $F \setminus E$. 分隔开。

现在我们可以证明命题1。

命题*1*的证明。 假设 U_γ 发生。则存在一个 N 和一个圆盘像$\mathcal{I}_\gamma \subset P \cap \Lambda_N$ ，使得 $\gamma = \partial \mathcal{I}_\gamma$. 特别地， U_γ 在带有自由边界条件的 Λ_{N+1} 中发生，这意味着我们不包含 $\partial\Lambda_{N+1}$.中的任何面片。于是根据定理6，存在一个集合 $\mathcal{D} \subset \Lambda_{N+1} \setminus (B \cup \partial\Lambda_{N+1})$ ，它与一个圆盘同胚，使得 $\gamma = \partial\mathcal{D}$. 由于 $B \cup \partial\Lambda_{N+1}$ 是闭的，我们可以将 $\mathcal{D}$ 加厚，从而得到一个集合 W，使得 $\mathcal{D} \subset W \subset \Lambda_{N+1} \setminus (B \cup \partial\Lambda_{N+1})$ ，并且 ∂W 与一个球面同胚。于是 ∂W 将 γ 与 B 分隔开，因此 γ 不与 B.的任何边子集纠缠。

现在假设 γ 没有与 B. 的任何边子集纠缠。由推论 13 和 9 可知，存在一个分段线性嵌入球面 $\mathcal{S}$，使 γ 位于其内部， B 位于其外部。再由定理 8， γ 在其所属的 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ 分支中是可缩的，因此特别地，它在 $\mathbb{R}^3 \setminus B$. 中是可缩的。由于 $\mathbb{R}^3 \setminus B$ 变形收缩到 P， γ 在 P. □中是可缩的

5. 周长律

现在我们考虑周长定律区域。令 $p > 1 - \pi_c^e$. 。注意， $\mathbb{P}_p(U_\gamma)$ 显然不大于 γ 的每条边都至少包含在 P 的一个小方格中的概率，而该概率随 γ. 的周长呈指数衰减。

我们证明相匹配下界的策略与 [ACC+83] 中给出的论证类似：我们通过构造一道障碍，阻止与 γ. 交锁的对偶键纠缠集，从而证明 γ 是可缩的。具体而言，我们构造一个穿过 γ 所围区域的平面、沿两个方向无限延伸的圆柱体，然后证明圆柱体的侧壁与该平面不纠缠的概率适当。

对于 G， $H \subset \mathbb{R}^3$ 的两个子集，如果存在一个与 G和 H.均相交的缠结子图，我们记作 $G \overset{e}{\leftrightarrow} H$

首先，我们证明正对偶 z-轴与 xy-平面以正概率不发生缠结。令

$$K^+ = \{(1/2, 1/2, z + 1/2) : z \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\},$$
$$K_h^+ = K^+ \cap \{z \geq 1/2 + h\},$$

and

$$G = \{z = 0\}.$$

注意， G 不包含任何对偶顶点。

引理 14。如果 $p > 1 - \pi_c^e$，那么 $\mathbb{P}(K^+ \overset{e}{\leftrightarrow} G) < 1$.

证明。 由于任何穿过 G的边必然在J 中有一个端点：$= (\mathbb{Z}^3)^* \cap \{z = -1/2\}$，因此有

$$\left\{K^+ \overset{e}{\leftrightarrow} G\right\} = \left\{K^+ \overset{e}{\leftrightarrow} J\right\},$$

因此，我们将研究后一个事件。接着注意到

$$\sum_{x \in K^+} \sum_{y \in J} \mathbb{P}(x \overset{e}{\leftrightarrow} y) \leq \mathbb{E}(|C_0^e|) < \infty$$

因为 $p > 1 - \pi_c^e$. 那么

$$\mathbb{P}(K_h^+ \overset{e}{\leftrightarrow} J) \leq \sum_{x \in K_h^+} \sum_{y \in J} \mathbb{P}(x \overset{e}{\leftrightarrow} y) \xrightarrow{h \to \infty} 0,$$

因为该和是一个收敛级数的尾项。特别地，存在一个 $h_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\mathbb{P}(K_{h_0}^+ \overset{e}{\leftrightarrow} J) < 1.$。现在，将所有出射键设为闭显然足以隔离出一个有限的位点集合，因此 $\mathbb{P}((K^+ \setminus K_{h_0}^+) \overset{o}{\not\leftrightarrow} J) \geq p^{4h_0+2}.$。因此，利用 FKG不等式，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K^+ \overset{o}{\not\leftrightarrow} J) &\geq \mathbb{P}(K_{h_0}^+ \overset{o}{\not\leftrightarrow} J)\mathbb{P}((K^+ \setminus K_{h_0}^+) \overset{o}{\not\leftrightarrow} J) \\ &\geq (1 - \mathbb{P}(K_{h_0}^+ \overset{e}{\leftrightarrow} J)) \cdot p^{4h+2} > 0.\end{aligned}$$

□

作为 FKG不等式 的直接推论，我们可以将正 z轴替换为整个 z 轴。令

$$K := \{(1/2, 1/2, 1/2 + z) : z \in \mathbb{Z}\}.$$

推论15。若 $p > 1 - \pi_c^e$，则 $\mathbb{P}\left(K \overset{e}{\leftrightarrow} G\right) < 1.$

现在，我们将使用 $K.$ 的若干个平移副本，构造穿过 γ 的圆柱体。不失一般性，假设 γ 包含在平面 $\{z = 0\}$.中。令 σ_1，.....，σ_N为 $\{z = 0\}$ 中面片的一个枚举，这些面片既有一条边界边位于 γ 上，又处于 $\{z = 0\} \setminus \gamma.$ 的有界分支中。换言之，它们是平面 $\{z = 0\}.$ 中沿着 γ 内侧的面片。对于每个 $1 \leq i \leq N$，令 a_i 为 σ_i的中心，并令 $K^i := K + a_i.$。下面的引理涉及一组对偶键与 γ的纠缠，这一点严格来说我们此前并未定义，因为 γ 位于原格中。与我们先前对$(\mathbb{Z}^3)^*$的子集所作的定义类似，我们称 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集为纠缠的，若它无法被一个嵌入球面分隔。

引理16。设 F_γ 为“$B \cup \gamma$ 没有无限纠缠分量”这一事件，且 $D_\gamma = \bigcap_{i \leq N} \left\{K^i \overset{o}{\not\leftrightarrow} G\right\}.$ 那么 $D_\gamma \cap F_\gamma \subset U_\gamma.$

证明。假设 D_γ发生。设 $E \subset B$，并令 E_1、.....、E_n为 $E.$的极大纠缠分量。我们将证明 $E \cup \gamma$并不纠缠。在事件D_γ发生时，如果将 E_j 投影到 $\{z = 0\}$ 后与 γ相交，那么 E_j 可以从γ 上方或从 γ 下方穿过，但不能两者兼而有之。此外，如果 E_j 从 γ 上方穿过，且 E_k 从 γ下方穿过，那么 E_j 完全位于 E_k 上方，其含义是：E_j上任意一点的 z 坐标都大于 $E_k.$ 上任意一点的 z 坐标。回顾一下，链环图是链环的一种表示形式，它是一个四价平面图；在每个顶点 v （代表链环中的一个交叉处），我们标记两条相邻边，使其在 v处从上方穿过，并标记另外两条相邻边，使其在 $v.$ 处从下方穿过。考虑将 E 和$E \cup \gamma$ 投影到 xy平面后得到的链环图（我们对每个顶点和竖直键作微小扰动，以获得局部单射且在顶点像处为单射的投影，同时不改变键与 γ的重叠方式）。纽结理论的一项基础结果指出，两个链环之间存在环境同痕，当且仅当其中一个链环的链环图可以通过有限序列的称为 Reidemeister 变换的操作变为另一个链环的链环图。链环有三种这类变换，空间图还有两种涉及顶点 [Kau89]的额外变换。空间图的这五种变换称为广义 Reidemeister 变换。

不难验证，两个空间图可由球面分隔，当且仅当它们可通过环境同痕分隔。为证明正向结论，取一个分离球面，并对 $\mathbb{R}^3$ 作同痕，将球面的内部收缩至一个点的小邻域，

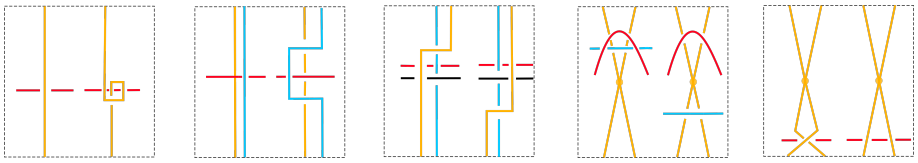

FIGURE 5. 红色的 γ 弦在几种可能配置下与每种 Reidemeister 变换的示意图。

然后通过同痕将该邻域移离另一个子图。因此，在当前论证中，存在一个有限的广义 Reidemeister 变换序列，将 E 变为 n 个互不相交的链环图，每个 E_j.

我们证明，对 E 的链环图执行的每一种广义 Reidemeister 变换，都可以通过对 $E \cup \gamma$. 进行环境同痕来实现。我们验证了该变换既可以执行，也能保持以下性质： E 的每个纠缠分支要么不与 γ 重叠，要么完全从 γ. 上方或下方交叉。

五种广义 Reidemeister 变换中的每一种，都可以通过环境同痕实现：该同痕只移动一条弦 α，并使其完全从其他弦的上方或下方交叉。例如，在 III 型变换中，可以将底部的弦向下移动，直到它完全位于另外两条弦的下方，然后将它移到交叉的另一侧。现在假设 γ 与 Reidemeister 变换所定义区域内的一条或多条弦交叉，并令 α 如前所述。不失一般性，假设 α 在该区域内从其他弦上方交叉。如果 α 的纠缠分支不与 γ 重叠，或者它从 γ 上方交叉，我们就可以在不移动 α 端点的情况下对其进行同痕，使其包含所有交叉的内部线段完全位于 γ 和该区域内其他弦上方的某个半空间中。然后，我们可以在该半空间内移动这段内部线段来实现该变换。如果 α 从 γ下方交叉，那么 γ 要么不交叉，要么从剩余线段上方交叉。因此，我们可以移动 γ 的一段内部线段，使其完全位于对 E. 的链环图实现环境同痕所作用的定义域上方。然后我们实现该变换，并注意到它保留了以下性质：α 只从 γ. 下方交叉。

现在，由于由 E 实现的链环的任意图都可以通过一系列 Reidemeister 变换从任意其他图得到，并且 E 具有纠缠分量 $E_1, \ldots, E_n$,因此经过一系列变换后， E_j 与 E_k之间对任意 $j \neq k$. 都不再有交叉。根据上述讨论，这些变换可以通过对 $E \cup \gamma$. 进行环境同胚来完成。由此得到 $E \cup \gamma$ 的一个链环图，其中所有交叉要么位于纠缠分量内部，要么涉及 γ.。接着，由于 γ 与每个连通分量之间仍然只有一种类型的交叉，因此 $E \cup \gamma$ 并未纠缠。□

周长律的界可由前面的结果迅速推出。

周长律的证明。 注意，如果 $E \cup \gamma$ 包含一个无限的纠缠分量，那么在向 E.添加有限条 $\left(\mathbb{Z}^3\right)^*$ 边后得到的图也会包含这样的分量。因此，由于我们假设 $p > 1 - \pi_c^e$，事件 F_γ 几乎必然发生。

于是，利用 FKG不等式、引理16和推论15，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_\gamma) &\geq \mathbb{P}\left(D_\gamma \cap F_\gamma\right)\\ &\geq \mathbb{P}\left(\cap_{i\leq N} K^i \overset{\mathcal{C}}{\nleftrightarrow} G\right)\\ &\geq \mathbb{P}\left(K \overset{\mathcal{C}}{\nleftrightarrow} G\right)^{\mathrm{Per}(\gamma)}\\ &\geq \exp\left(-\beta' \mathrm{Per}(\gamma)\right).\end{aligned}$$

□

6. Area Law

在 $p < 1 - p_c^{\lim}$情形下，为 U_γ 证明面积律的论证与在$p < 1 - p_c\left(\mathbb{Z}^3\right)$ 情形下证明 γ 为零同调事件的相应证明类似，因此我们只给出一个概述，并指出其中的差异。根据命题1，只需考虑 γ 与一组对偶键纠缠的事件。在 [ACC+83]中，采用薄层中的重整化构造，以生成一个与 γ链接的单环，其中 $p < 1 - p_c$.。假设 m纠缠渗流在薄层中具有连续性，则对于任意固定的 m 和 $p < 1 - p_c^m$.，可以对 m纠缠渗流进行类似的重整化。在这种情况下，重整化晶格中的键确保原始晶格中存在底层的 m纠缠路径。由于纠缠路径在 $\mathbb{Z}^2$ 上的投影是连通的，薄层中的纠缠路径以与普通路径相同的方式相互重叠。构造中唯一需要调整之处，是验证见证盒穿越的连通分量确实是纠缠的；这可能需要揭示盒子外部边的状态。然而，由于 m是固定的，必须额外揭示的状态数量存在统一上界，因此依赖性仍然是局部的。我们在以下定理中总结这一构造的性质。

定理 17. 设 $p < 1 - p_c^{\lim}$. 对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 和任意 $\epsilon > 0$，存在一个重整化对偶键渗流构造 $\mathbb{B}$，它由表示位点的盒子以及表示位点之间键的盒子组成，使得

- $\mathbb{B}$中的键状态是1依赖的。
- $\mathbb{B}$ 中的一条键为开键的概率至少为 $1 - \epsilon$.
- 若 $\mathbb{B}$ 中的一条键 E 为开键，且其端点为 V 和 W，则存在一个 m纠缠的子集 $B \cap (E \cup V \cup W)$，它同时与 V 和 W. 相交
- 对于任意位点 V， B 中至多有一个纠缠分支与 V 以及 $\mathbb{B}$. 中的其他任意位点相交

如 [ACC+83] 中所示，考虑与 γ 正交薄层中的互不相交的重整化构造。由定理 17 可知，当 $p < 1 - p_c^{\lim}$. 时，与 γ 链接的开重整化环存在的概率满足面积律上界。现在我们验证这样的环会阻止事件 U_γ.。首先证明一个技术引理：该引理表明，包含在球面和盒子内部的纠缠分支，必定包含在二者交集的单个连通分量中。

引理18。 设 $R \subset \mathbb{R}^3$ 是一个盒子， $\mathcal{S}$ 是一个分段线性嵌入球面。假设 $E \subset I(\partial R)$ 是一个键集。那么存在一个嵌入球面族 $S_1, \ldots, S_k \subset I(\partial R) \setminus E$，使得如果 $v, w \in E$，那么 v 和 w 属于同一个

路径连通分支 $R \setminus \mathcal{S}$，当且仅当它们属于$I(\partial R) \setminus \cup_{i=1}^{k} S_k$.的同一个路径连通分支

证明。我们描述一个生成球面的迭代过程。我们可以假设 $\mathcal{S}$ 与 ∂R 横截相交，因此 $\mathcal{S} \cap \partial R$ 是有限个互不相交环路的并。$\mathcal{S} \setminus \mathcal{S} \cap \partial R$ 是带边界的曲面的有限并，其中至少有两个必定是圆盘。将其中一个圆盘记为 D_α，其边界记为 α. $\mathcal{S}$，与 ∂R横截相交，并且 E 是这些集合内部的闭子集，因此我们可以找到一个嵌入 f: $\mathcal{D}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$（其中 $\mathcal{D}^2$ 是一个二维球），使得 im $f \cap \mathcal{S} = f\left(S^1 \times [0,1]\right)$、im $f \cap \partial R = f\left(\mathcal{D}^2 \times \{1/2\}\right) = D_\alpha$，以及 im $f \cap E = \varnothing$。令 $D_1 = f\left(\mathcal{D}^2 \times \{0\}\right)$ 和 $D_2 = f\left(\mathcal{D}^2 \times \{1\}\right)$，并设

$$\mathcal{S}' \coloneqq \left(\mathcal{S} \setminus f\left(S^1 \times (0,1)\right)\right) \cup D_1 \cup D_2$$

因此，$\mathcal{S}'$ 是两个不相交球面的并集，并且 $\mathcal{S}' \cap \partial R$ 比 $\mathcal{S} \cap \partial R$. 少一个连通分量。注意，$v$，$w \in E$ 属于 $R \setminus \mathcal{S}$ 的同一路径连通分支，当且仅当它们属于 $R \setminus \mathcal{S}'$. 的同一路径连通分支。对所得的两个球面都应用此过程，继续进行，直到不再与 ∂R 相交为止。如果所得集合在 R，外部只包含一个球面，我们可以将其推入 R.内部。否则，我们可以通过舍弃 R. □外部的所有球面来完成证明。

推论19。设 $R \subset \mathbb{R}^3$ 为一个盒子，$\mathcal{S}$ 为一个分片线性嵌入球面。假设 $E \subset I(\partial R) \cap I(\mathcal{S})$ 是一个纠缠键集。那么 E 包含于 $R \cap I(\mathcal{S})$的单个连通分量中。

命题 20。假设 $\mathbb{B}$ 中存在一个与 γ.相链接的重整化环。那么 U_γ 不会出现。

证明。按循环顺序，将环中的重整化点记为 $V_1, \ldots, V_n, V_{n+1} = V_1$。令 R_j 为与重整化点V_j 和 V_{j+1} 以及它们之间的重整化边相对应的盒子的并集。我们可以在 $\left(\mathbb{Z}^3\right)^*$ 中选取顶点$w_1, \ldots, w_n, w_{n+1} = w_1$，使得 w_j 在 R_j. 内部与 w_{j+1} 纠缠。令 E_j 为一个包含 w_j 且位于 R_j. 内部的纠缠图。设 $E = \cup_{j=1}^{n} E_j$，并假设 $\mathcal{S}$ 是一个包含 E 且不与 γ. 相交的球面。根据推论19，E_j 包含于 $\mathcal{S} \cap B_j$. 的一个连通分量中。因此，在 $\mathcal{S} \cap B_j$. 的该连通分量内，存在一条连接 w_j 和 w_{j+1} 的连通键路径 ξ_j。由线段 $\xi_1, \ldots, \xi_j$ 构成的简单环与 γ 链接，并包含于 $\mathcal{S}$. 的内部。因此，γ 也包含于 $\mathcal{S}$. 的内部。由于这对所有此类球面 $\mathcal{S}$都成立，E 与 γ 纠缠，而 U_γ 不会出现（由命题1可知）。□

面积律区域中非平凡的渐近面积律常数 $\alpha(p)$ 的存在性，也可由 [ACC+83] 的方法推出；他们命题 2.4 的证明使用了将 γ 铺砌为更小的环路，这一证明在我们的情形下同样适用，无需修改。结合这一观察与定理 17 和命题 20，可得以下推论：

推论 21. 设 $p > 1 - p_c^{\lim}$. 那么存在一个 $\alpha(p) \in (0, \infty)$ 使得

$$\log \mathbb{P}_p(U_\gamma) \sim -\alpha(p) \operatorname{Area}(\gamma)$$

当矩形环路 γ 的尺寸趋于 ∞. 时

接下来只需证明薄层中 m-纠缠的连续性，这需要对键渗流方法作稍微更谨慎的改编。

6.1. m-薄层中的纠缠连续性。 令 $p^{k,\ c}{}^{m}$表示 $\mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{R}^2 \times [-k,k]$. 中 m-纠缠渗流的临界概率。本节我们证明 $p^{k,\ c}{}^{m} \xrightarrow{k\to\infty} p_c^m$. 由于我们的论证不涉及小方格，为简化记号，我们将考虑原格上概率为 p 的键渗流，而非对偶格上概率为 $1-p$ 的情形。我们改编了 Grimmett 和 Marstrand 在 [GM90]中的方法。回想一下，他们的主要定理如下:

定理22 (Grimmett,Marstrand)。 设 F 是 $\mathbb{Z}^d$ 的一个无限连通子集，满足 $p_c(F) < 1$. 那么，对每个 $\eta > 0$，都存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$p_c(2kF + \Lambda_k) \le p_c\left(\mathbb{Z}^d\right) + \eta .$$

稍作调整后，我们证明了 m-纠缠渗流的一个类似结果。

定理23。 设 $m \in \mathbb{N}$，并设 F 是 $\mathbb{Z}^3$ 的一个无限连通子集，满足$p_c^m(F) < 1$. 那么，对每个 $\eta > 0$，都存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$p_c^m(2kF + \Lambda_k) \le p_c^m\left(\mathbb{Z}^3\right) + \eta .$$

[GM90] 的主要技巧同样是一种重整化论证，但大量工作是在构造出重整化晶格之后完成的。因此，我们只证明重整化过程中涉及的若干引理的 m-纠缠版本，其余论证则保持不变。具体而言，我们将证明 [GM90] 中引理5和引理6的对应版本。

首先，我们回顾 [GM90] 的策略。大小为 n 的大立方体代表重整化晶格的位点，位点对通过若干个较小立方体之间的路径连接；这些较小立方体的大小为 r，且每个立方体的所有边都开放。我们回顾一些记号。令

$$T(n) = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}^3 : x_1 = n, 0 \le x_2, x_3 \le n\right\} \subset \Lambda_n ,$$

and

$$T(r,n) = \bigcup_{j=1}^{2r+1} \{je_1 + T(n)\} .$$

换言之， $T(n)$ 包含立方体 Λ_n 的某个面的指定象限的“内部”顶点，而 $T(r,\ n)$ 是若干可能副本的并集，这些副本沿着 $T(n)$ 附着在 Λ_n 的外部。接着，我们将所有边都开放的 Λ_r 的一个平移称为种子（有时根据来源也称为 r-垫），并定义

$$K(r,n) = \{x \in T(n) : x + e_1 \text{ is in a seed in } T(r,n)\} .$$

我们还考虑集合边界的几种概念。对于顶点集 V，定义外部顶点边界

$$\Delta^{\text{ext}}V := \left\{v \in \mathbb{Z}^3 \setminus V : v \sim w \text{ for some } w \in V\right\}$$

以及内部顶点边界

$$\Delta^{\text{int}}V := \left\{v \in V : v \sim w \text{ for some } w \in \mathbb{Z}^3 \setminus V\right\}.$$

我们还定义边界边界 $\Delta^{\text{edge}}(V) := \left\{e = (v,\ w) :\ v \in V,\ w \in \mathbb{Z}^3 \setminus V\right\}$.

重整化方框所需的事件，是找到一条从目前已揭示的分量通往 $K(r,\ n)$，也就是说，通往方框边界上与外部种子相邻的点集的路径。原则上，使用纠缠模型可能会给基于盒穿越的重整化带来问题

因为为了确认存在一条通往方框边界的纠缠路径，我们可能不得不揭示方框外的边。不过，对于一条通往种子的 m-纠缠路径，这个问题可以避免。完整格中任何通往方框边界的 m-纠缠路径，都包含一条通往具有连线边界条件的方框边界的内部 m-纠缠路径。如果这条连线路径通往某个种子的中心，并且 $r > m$，那么加入该种子必然会使这条路径在完整格中变为 m-纠缠的，无需揭示任何额外的边。这正是对重整化进行调整的核心，接下来我们将在以下两个引理中详细说明。

与之前的记号类似，对于 v，$w \in \mathbb{Z}^3$，若 v 和 w 通过一个 m-纠缠键集相连，则记作 $v \overset{m}{\longleftrightarrow} w$ 。对于集合 $A \subset \mathbb{Z}^3$ ，若 v 和 w 在 $B \cap A$ 中通过一个 m-纠缠键集相连，我们也记作 $v \overset{m}{\longleftrightarrow} w$ in A ；若 v 和 w 在 $\left(B \cup \Delta^{\mathrm{int}} A\right) \cap A$. 中通过一个 m-纠缠键集相连，则记作 $v \underset{\text{wired}}{\overset{m}{\longleftrightarrow}} w$ in A 。换言之，这些事件分别表示在具有自由边界条件和连线边界条件的 A 中，v 和 w 通过 m-纠缠键集相连。

引理 24。设 $p > p_c^m$. 。那么对于每个 $\eta > 0$ ，存在 r、$n \in \mathbb{N}$ ，使得

$$\mathbb{P}_p\left(\Lambda_r \overset{m}{\longleftrightarrow} K(r,n) \text{ in } \Lambda_n\right) \geq 1 - \eta\,.$$

证明。令 $r > 2m$ 足够大，使得 $\mathbb{P}_p\left(\Lambda_r \overset{m}{\longleftrightarrow} \infty\right) > 1 - \left(\frac{1}{3}\eta\right)^{24}$，并令 M 稍后确定。

我们称 v 在 A 中与 w 局部连线纠缠，并记作 $v \underset{\text{l.w.}}{\overset{m}{\longleftrightarrow}} w$ ，当且仅当它们通过 $(B \cap A) \cup \left(\Delta^{\mathrm{int}} A \cap (\Lambda_m(v) \cup \Lambda_m(w))\right)$. 中的一个 m-纠缠键集相连。也就是说，在 v 的邻域中以及 w，处存在连线边界条件，而其他任何地方都采用自由边界条件。我们作此区分，是为了排除那些在到达种子之前经过 A 边界附近的纠缠路径。注意，从一个顶点到 $\Delta^{\mathrm{int}}\Lambda_n$ 的连线路径必然包含一条到 $\Delta^{\mathrm{int}}\Lambda_n$ 的子路径，该子路径在 Λ_n. 中是局部连线的

Let

$$V(n) = \left\{ v \in T(n) : \Lambda_r \underset{\text{l.w.}}{\overset{m}{\longleftrightarrow}} v \text{ in } \Lambda_n \right\}\,.$$

假设我们选取了 n，使得 $2r+1$ 能被 $n+1$. 整除。那么 $T(n)$ 可以划分为 $2r \times 2r$ 个顶点不相交正方形。若 $|V(n)| \geq (2r+1)^2 M$，那么 Λ_r 将与这些正方形中至少 M 个正方形里的一个顶点局部地以 m 纠缠。于是，如果其中一个正方形不与 $T(n)$ 的边界相交，且包含一个种子的某个面的中心，由于 $r > 2m$，Λ_r 必然会在完整格中与该种子以 m 纠缠。对于边界正方形，我们可能需要在边界上添加额外的边，以确保有线纠缠连接也是完整格中的纠缠连接；但这些边的数量至多为 $3m^2$，即盒子某个角的 m 邻域内的顶点数。若正方形 $S \subset T(n)$ 的边长为 $2r$ ，并且 S 包含某个种子的某个面的中心，且 $\Delta^{\mathrm{int}}\Lambda_n$ 中距离 S 不超过 m 的顶点之间的所有边均为开放边，则称该正方形为良好正方形。良好正方形的集合因此是 m 依赖的，所以我们可以将 M 取足够大，使得对于任意由至少 M 个不同正方形组成的集合 X ，

$$\mathbb{P}_p\left(\text{At least one of the squares in } X \text{ is good}\right) \geq 1 - \eta/2.$$

因此，我们只需要对 $\mathbb{P}_p\left(|V(n)| \geq (2r+1)^2 M\right)$ 给出一个充分的下界，就能完成证明。

Let

$$U(n) = \left\{ v \in \Delta^{\text{int}}\Lambda_n : \Lambda_r \xleftrightarrow[\text{l.w.}]{m} v \text{ in } \Lambda_n \right\}.$$

根据构造， $\Delta^{\text{int}}\Lambda_n$ 的顶点包含在由 24 个$T(n)$副本组成的并集中，这些副本绕坐标轴旋转得到。这些旋转是 $\mathbb{Z}^3$的对称变换，因此，由于通往 $\Delta^{\text{int}}\Lambda_n$ 不同区域的路径数量正相关，应用哈里斯引理可得

$$\mathbb{P}_p\left(|U(n)| < 24(2r+1)^2 M\right) \geq \mathbb{P}_p\left(|V(n)| < (2r+1)^2 M\right)^{24}.$$

我们可以对其进行估计

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p\left(|U(n)| < 24(2r+1)^2 M, \Lambda_n \xleftrightarrow{m} \infty\right) &\leq \mathbb{P}_p\left(0 < |U(n)| < 24(2r+1)^2 M\right) \\
&\leq (1-p)^{-3\cdot 24(2r+1)^2 M} \mathbb{P}_p\left(|U(n)| \neq 0, |U(n+1)| = 0\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

因为关闭所有通向 $U(n)$外部的边，可确保 $U(n+1)$为空（这里我们用到了 $r > 2m$）。于是得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p\left(|V(n)| < (2r+1)^2 M\right) &\leq \mathbb{P}_p\left(|U(n)| < 24(2r+1)^2 M\right)^{\frac{1}{24}} \\
&\leq \left(\mathbb{P}_p\left(|U(n)| < 24(2r+1)^2 M, \Lambda_n \xleftrightarrow{m} \infty\right) + \mathbb{P}_p\left(\Lambda_n \xleftrightarrow{m} \infty\right)\right)^{\frac{1}{24}} \\
&\leq \left(\left(\frac{1}{3}\eta\right)^{24} + o(1)\right)^{\frac{1}{24}} \\
&\leq \eta/2
\end{aligned}$$

当 n.充分大时

然后令 n 足够大，并应用哈里斯引理可得

$$\mathbb{P}_p\left(\Lambda_r \xleftrightarrow{m} K(r, n) \text{ 中的 } \Lambda_n\right) \geq \mathbb{P}_p\left(\left\{|V(n)| \geq (2r+1)^2 M\right\} \cap \{\text{其中一个 } M \text{正方形是好的}\}\right)$$

$$\geq \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^2 \geq 1 - \eta.$$

□

对于下一个引理，我们采用这样的视角：将 $\mathbb{Z}^3$ 格点中的每条边 e 赋予一个服从 $\mathsf{Unif}[0,1]$ 分布的随机变量 X_e ，而概率为q 的渗流是由满足 $X_e \leq q$.的边 e 构成的随机子图。那么，对于任意常数$\rho \in [0,1]$，如果边 e 满足 $X_e \leq \rho.$ ，我们就称其为 ρ-开放边。请注意，无论渗流参数 p.为何，这个定义都有意义。

引理25。 设 $p > p_c^m$.。对于每个 ϵ、 $\delta > 0$，都存在 r、 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n > 2r$，并满足以下条件：设 $\Lambda_r \subset W \subset \Lambda_n$，使得$(W \cup \Delta^{\text{ext}}(W)) \cap T(n) = \varnothing$.。设 β： $\Delta^{\text{edge}}W \cap E(\Lambda_n) \to [0, 1-\delta]$.。设

$G = \big\{W$ 通过一组键与 $K(r,n)$ 呈有线 m纠缠，其中每个键 e 都

$$(\beta(e)+\delta)\text{-open if } e \in \Delta^{\text{edge}}(W) \cap E(\Lambda_n) \text{ and } p\text{-open otherwise.}\big\}$$

and

$$H = \left\{e \text{ is } \beta(e)\text{-closed for each } e \in \Delta^{\text{edge}}(W) \cap E(\Lambda_n)\right\}.$$

Then

$$\mathbb{P}(G \mid H) > 1 - \epsilon\,.$$

证明。令 $\epsilon, \delta > 0$，然后固定满足上述条件的 W, β。令 $t \in \mathbb{N}$ 足够大，使得

$$(1-\delta^{6m})^t \leq \frac{\epsilon}{2}\,.$$

那么令 $\eta > 0$，使得

$$\eta < \frac{\epsilon(1-p^{6m})^t}{2}\,.$$

根据引理 24，存在 r，n，使得

$$\mathbb{P}_p\left(\Lambda_r \overset{m}{\longleftrightarrow} K(r,n) \text{ in } \Lambda_n\right) \geq 1 - \eta\,.$$

现在我们考虑 W 和 K（r，n）之间的有线 m-纠缠连接。我们有

$$\mathbb{P}_p\left(\Delta^{\text{int}}W \underset{\text{wired}}{\overset{m}{\longleftrightarrow}} K(r,n) \text{ in } \Lambda_n\right) \geq \mathbb{P}_p\left(\Lambda_r \underset{\text{wired}}{\overset{m}{\longleftrightarrow}} K(r,n) \text{ in } \Lambda_n\right) \geq 1 - \eta\,.$$

现在，对于任意集合 $K \subset T$（n），令 U（K）为 Λ_n $\Big\}$. 中 $\left\{W \underset{\text{wired}}{\overset{m}{\longleftrightarrow}} K\right.$ 的（可能不互不相交的）极小见证集合。然后令

$$Y(K) = \left\{Z \cap \Delta^{\text{edge}}W : Z \in U(K)\right\}\,.$$

那么，由于任意连接 W 和 K 的 m-纠缠路径都必须经过$Y(K)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p\left(\Delta^{\text{int}}W \underset{\text{wired}}{\overset{m}{\not\longleftrightarrow}} K(r,n) \text{ in } \Lambda_n\right) &= \mathbb{P}_p\left(\text{at least one bond of each element of } Y(K) \text{ is closed}\right)\\ &\geq (1-q^{6m})^t \mathbb{P}_p\left(|Y(K)| \leq t\right)\,.\end{aligned}$$

这里我们利用了一个最小的 m-纠缠集与 $\Delta^{\text{int}}W$ 至多相交于 $6m$个顶点这一点。重新整理并令 $K = K(r,\ n)$，可得

$$\mathbb{P}_p\left(|Y(K(r,n))| > t\right) \geq \left(1 - (1-q^{6m})^{-t}\mathbb{P}_p\left(\Delta^{\text{int}}W \overset{m}{\not\longleftrightarrow} K(r,n) \text{ in } \Lambda_n\right)\right)\,. \tag{3}$$

令 $Y = Y(K(r,\ n))$。给定 $A \in Y$，若每个$e \in A$ 都是开集，则称 A 为开集（或称为 p-开集等）；否则称其为闭集。现在，在给定 Y，的条件下，随机变量X_e 相互独立，其中 $e \in \cup_{A\in Y} A$，因此我们可以得到界

$$\mathbb{P}_p\left(\text{each } A \in Y \text{ is } \beta(e)+\delta\text{-closed},\ |Y| > t \mid H\right) \leq \left(1-\delta^{6m}\right)^t\,.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p\left(\text{at least one } A \in Y \text{ is } \beta(e)+\delta\text{-open} \mid H\right) &\geq \mathbb{P}_p\left(|Y| > t \mid H\right) - \left(1-\delta^{6m}\right)^t\\ &= \mathbb{P}_p\left(|Y| > t\right) - \frac{\epsilon}{2}\\ &\geq (1-\frac{\epsilon}{2}) - \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

正如所需。 □

有了这些引理，重整化构造的其余部分便与 [GM90]，中给出的一样。我们在以下命题中概述其 $F = \mathbb{Z}^2$ 情形，以备后用。

命题26。 设 $p > p_c^m$. 。则存在 k、$N \in \mathbb{N}$，以及对 $\mathbb{Z}^2 \times\{-k, \ldots, k\}$ 的一种由 $N \times N \times 2k$ 个盒子组成的铺砌，使得从包含原点的盒子出发、沿一条 m-纠缠路径可到达的盒子集合，在随机意义上支配 $\mathbb{Z}^2$ 上参数为 $q > p_c^{\text{site}}\left(\mathbb{Z}^2\right)$ · 的伯努利点渗流中该盒子的连通分量。

这足以完成定理23的证明。

7. Many Handles in the Intermediate Regime

在本节中，我们证明定理4。思路是证明 Λ_N 可以拆分成 $cN^2/\log N$个log $N \times k \times 2N$盒子，其中有固定比例的盒子会被超临界 m-纠缠渗流沿长边穿越，而 Λ_N 不会被连通渗流路径穿越。于是，面片穿越 P' 与这些盒子中任意一个（例如 R）的交集，都会对 $H_1(P')$的同调作出贡献。为此，我们消除 $P' \cap R$的奇点，得到一个不可能是球面的曲面，因此它必定具有非平凡同调（命题28）。回顾(1)中的记号及其后的一段文字，在命题31的证明中，我们描述了对R 的面片穿越进行手术操作，以生成曲面 $S_R \subset R \setminus B_R$，使得当 $D_1(R)$在 B_R.中纠缠时， $H_1($ $S_R \cup \partial R) \neq 0$

我们首先需要对 [DKS25] 中给出的变形收缩作一处修改。由于我们关注的是面片曲面本身的一维同调，因此希望忽略由 $\mathbb{Z}^3$ 的一维骨架贡献的额外一维圈（回想一下，按照约定，二维渗流子复形 P 自动包含所有边）。因此，我们将 $P^{<2>}$ 定义为包含在P. 中的面片之并。 $P^{<2>}$ 的正确拓扑对偶对象不仅包含对偶键，还包含额外的高维胞腔。

考虑一个一般的立方子复形 $Q \subset \mathbb{Z}^d$. 。也就是说， Q 是由一组维数各异且在包含映射下封闭的面片组成的并集。接着，将Q^* 定义为这样的对偶复形：它包含$\left(\mathbb{Z}^d\right)^*$ 中的每个面片，只要该面片的对偶不包含在 Q. 中。于是，我们得到以下对偶性结果，它推广了 [DKS25] 中的引理7，或许也具有独立的研究价值。见图6。

引理 27。 对于任意立方复形 $Q \subset \mathbb{Z}^d$， $\mathbb{R}^d \backslash Q^*$ 变形收缩到 Q.

证明。 我们在 $\mathbb{Z}^d$ 的 i-胞腔内进行一系列变形收缩，从 $i = d$ 开始，按维数从高到低依次进行。考虑一个 d-胞腔 $\sigma^d \subset \mathbb{Z}^d$. 。要么 $\sigma^d \subset Q$，要么 σ^d 中心的对偶顶点位于 Q^*. 。在前一种情况下，我们保持 σ^d 不动；在后一种情况下，我们从中心点出发，沿直线径向同伦将 $\left(\mathbb{R}^d \setminus Q^*\right) \cap \sigma^d$ 收缩到 σ^d 的边界（具体描述见 [DKS25]）。对于 i-胞腔 $\sigma^i \subset \mathbb{Z}^d$，变形收缩的做法类似。如果 $\sigma^i \subset Q$，我们就保持它不动；否则， σ^i 的中心点位于对偶胞腔的中心，而该对偶胞腔位于 Q^*，于是我们可以再次将 $\left(\mathbb{R}^d \setminus Q^*\right) \cap \sigma^i$ 收缩到 σ^i. 的边界。注意，这一过程是连续的，因为 Q^* 对包含映射封闭，所以在收缩一个 i-胞腔时，它不会包含在更高维的胞腔中。对于 0-胞腔 σ^0，如果其对偶 d-胞腔位于 Q^*，那么同样由于 Q^* 对包含映射封闭， $\mathbb{R}^d \setminus Q^*$ 中先前没有任何点被收缩到 σ^0，因此无需采取额外步骤。不难验证，这个同伦始终处于 $\mathbb{R}^d \setminus Q^*$ 中。因此，由于我们固定 Q，并对 $1 \leq i \leq d$ 的每个缺失的 i-胞腔移除其内部，这就给出了到 Q. □ 上的变形收缩。

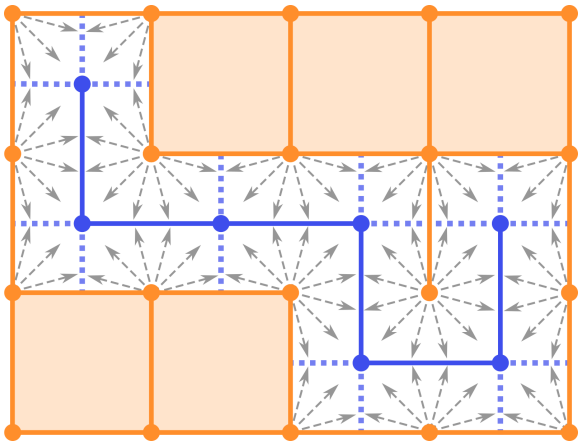

FIGURE 6. 引理 27 中构造的变形收缩的第一步示意图。 Q 以实线蓝色表示， Q^*以橙色表示。沿着灰色虚线箭头，将 Q^* 的顶点收缩到 Q 与 $\mathbb{Z}^2$ 的若干额外半边的并集上；这些半边以蓝色点线表示。下一步中，蓝色点线半边将从橙色边的中心向外收缩。

现在我们希望将 R 中的一个小方格穿越 P' 转化为 $R \setminus B$ 中附近的一个曲面，以便稍后利用曲面分类。为了避免小方格在顶点处相交或多个小方格在边处相交所导致的奇点，一种自然的方法是考虑 P' 的偏移，或者说，考虑与 P'. 距离固定的点集。

令 F为 $R \setminus P'$ 中包含 D_1^-的连通分量，并定义

$$S_{P'} := \{x : d(x, P') = 1/4\} \cap F .$$

命题28。 对于盒子 R的任意小方格穿越 P'， $S_{P'}$是一个将 D_1. 分隔开的连通曲面。此外，若 W 是$S_{P'}$ 与 $R \setminus S_{P'}$ 中包含 D_1^+的连通分量的并集，并且 i_*： $H_1(S_{P'}) \to H_1(W \cup \partial R)$ 以及 j_*： $H_1(P') \to H_1(P' \cup \partial R)$ 是由包含映射诱导的同调映射，那么

$$\operatorname{rank} j_* \geq \operatorname{rank} i_* .$$

证明。 [CL05] 中引入了一个称为弱特征尺寸的量，用来量化在不改变空间拓扑的情况下可以对空间进行多大程度的扰动。根据 [CL05] 的命题 3.6， P' 具有正的弱特征尺寸，因为它是分段解析的。事实上，可以验证，在距离一个面片子复形 $1/4$ 以内，不存在所定义的梯度函数的奇异点，因此弱特征尺寸至少为 $1/4$. 。根据 [CL05] 的命题 3.4， $S_{P'}$ 是一个曲面。容易验证， $S_{P'}$ 包含一个连通分离曲面；为求完整起见，我们证明 $S_{P'}$ 是连通的。

根据引理 27， $\mathbb{R}^3 \setminus P'$形变收缩到（$P'$）*. 将引理 27 的证明中给出的形变收缩限制在 $R \setminus P'$ 上，可得到一个形变收缩 f： $R \setminus P' \times I \to R \setminus P'$使得 f（$R \setminus P'$，1） =（P'）* $\cap$ R.由于 P'是一个小方格穿越（P'），*有两个连通分支。令 $T_{1/4} =$

$\{x \in R\colon\ d\ (x,\ P')\ \leq 1/4\}$. 对于每个点 $x \in R \setminus T_{1/4}$ $f\ (x,\ t)$ 都是一条从 x到 $(P')^{*}$ 的路径，且位于 $R \setminus T_{1/4}$，内，因此 $R \setminus T_{1/4}$ 也有两个连通分支。现在考虑分解 $R = \left(R \setminus T_{1/4} \cup \partial T_{1/4}\right) \cup \left(T_{1/4}\right)$的 Mayer–Vietoris序列的一部分:

$$H_1(R) \to H_0\left(\partial T_{1/4}\right) \to H_0\left(\partial T_{1/4} \cup \left(R \setminus T_{1/4}\right)\right) \oplus H_0\left(T_{1/4}\right) \to H_0(R) \to 0\,.$$

由于序列是正合的，$H_1(R) = 0$，并且 $T_{1/4}$ 是连通的，因此 $\partial T_{1/4}$有两个连通分支。特别地，$S_{P'} = T_{1/4} \cap F$是连通的。

令 $V_{P'} := \partial(R \setminus (F \cup W)) \cap \partial R$为 ∂R中介于 $S_{P'}$与 P'.之间的部分。现在我们构造一个变形收缩 $f\colon W \cup \partial R \to R \setminus F \cup \partial R$，使得 $f|_W$是到 $R \setminus F$上的变形收缩，且 $f(S_{P'}) = P' \cup V_{P'}$.。首先注意，引理 27 的证明给出了一个从 W到 $R \setminus F \cup V_{P'}$ 的变形收缩，若在某个点到达 ∂R. 时停止。对于每个与 $S_{P'}$，相交的胞腔，该胞腔的中心到 P'的距离大于 $1/4$，因此，从 $S_{P'}$的立方体中心到其边界的径向投影包含于 $P' \cup V_{P'}$或一个相邻的低维胞腔中；后者具有相同性质，并最终收缩到 $P' \cup V_{P'}$。因此，这个收缩将 $S_{P'}$映入 $P' \cup V_{P'}$.

我们通过在 ∂R. 上取恒等映射，将映射扩展到 $W \cup \partial R$

现在考虑以下交换图，其中水平箭头是由包含映射诱导的映射，垂直箭头则由 f 及其在 $S_{P'}$ 上的限制诱导:

$$\begin{array}{ccc} H_1(S_{P'}) & \longrightarrow & H_1(S_{P'} \cup W \cup \partial R) \\ {\scriptstyle (f|_{S_{P'}})_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow \\ H_1(P' \cup V_{P'}) & \longrightarrow H_1(P' \cup \partial R) \longrightarrow & H_1((R \setminus F) \cup \partial R) \end{array}$$

由于 f 是变形收缩，它在同调上诱导一个同构。因此，映射 $H_1(S_{P'}) \to H_1(S_{P'} \cup W \cup \partial R)$ 的秩至多为映射 $H_1(P' \cup V_{P'}) \to H_1(P' \cup \partial R)$ 的秩。由于 $P' \cup V_{P'}$ 通过在到达 ∂R 后继续进行上述相同的构造而变形收缩到 P'，故所需的界随之得出。□

将 Λ_N 分割成更小的盒子时，我们需要以下两个引理来描述 $S_{P'}$ 与这些较小盒子的交集。

引理29。设 P'、F 和 $S_{P'}$ 按照命题*28*中相对于 Λ_N 的定义给出。那么，对于任意盒子 $R = [a,b] \times [c,d] \times [-N,N]$，若 $-N \leq a < b \leq N$、$-N \leq c < d \leq N$ 为整数，则 $S_{P'} \cap \partial R$ 是有限条互不相交的简单闭曲线之并。

证明。由于与 ∂R 相邻的 P' 的面片垂直于 ∂R，P' 的一个偏移与 ∂R 横截，因此 $S_{P'} \cap \partial R$ 是曲线的不交并。容易验证，延伸至盒子边缘的路径相接形成简单闭曲线，因为 P' 中的每个点以及 R 的每条边都必须包含在 P' 的一个小方格中，而该小方格垂直于在该边相交的两个面（并且 P' 中没有任何小方格与 R 的八个角顶点相邻）。□

引理30。设 $\Lambda_N = \cup_{i=1}^{M} R_i$，其中每个 R_i 都满足前一个引理的假设，并且各个 R_i 的内部两两不相交。如果 P' 将 $D_1(\Lambda_n)$ 分隔开，那么对于每个 i，$S_{P'} \cap R_i$ 都是由有限个曲面组成的不交并，其中至少有一个将 R_i 的顶部与底部分隔开。

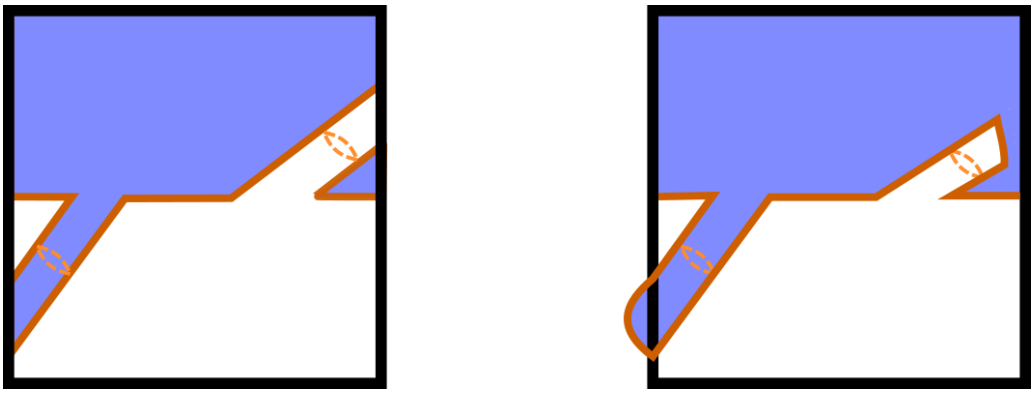

FIGURE 7. 命题31证明中的第一次手术操作示意图，展示的是一个横截面。左侧用橙色表示 S_R，用蓝色表示 W_R；右侧则以相应的颜色表示 S'_R 和W'_R。橙色虚线表示细管，这些细管在横截面之外由 S 围成。 S_R 由一个将 D_1 分隔开的平面构成，并在其上添加两根细管，每根细管都将盒子的一半与另一半中的盒子边界相连。通过将一根管子的末端稍微推到盒子外侧，并将另一根稍微推到盒子内侧，对 S_R 进行修改，得到S'_R。

证明。 如果 $S_{P'} \cap R_i$ 不包含分隔曲面，那么 $D_1(\Lambda_N)$ 的两个连通分量由 $R_i \setminus S_{P'}$, 中的一条路径连接起来，因此 $S_{P'}$ 无法将 $D_1(\Lambda_N)$ 的两个连通分量分隔开。

根据引理29， $S_{P'} \cap \partial R_i$ 是有限个简单闭曲线的并。由于 S 是连通的，$S_{P'} \cap R_i$ 的连通分量数至多等于这些曲线的条数。□

现在我们已经准备好证明定理4所需的主要拓扑学要素。

命题31。 设 P' 是 Λ_N 的小方格穿越，设 W 如命题*28*中所述（其中 Λ_N 在该命题中扮演 R 的角色），并设 R 如引理*29*中所述。假设 B 包含 $R.$ 的纠缠穿越。那么由包含映射诱导的同调映射 $H_1\ (S_{P'} \cap R)\ \to H_1\ ((W \cap R)\ \cup \partial R)$ 是非平凡的。

证明。 由于 W 是紧的，$(W \cap R)$ 分解为有限个互不相交的连通分量；设 W_R 为包含 $D_1^+(R)$ 的连通分量。 为简化记号，定义 $S_R := \partial W_R \setminus \partial R$，并令 $W_R^c := R \setminus (\partial R \cup S_R \cup W_R)$。 于是 S_R 是 $R.$ 的曲面穿越。由于 W_R 和 $S_R \subset S_{P'} \cap R$ 分别与其余的 $W \cap R$ 和 $S_{P'} \cap R$ 不连通，因此只需证明由包含映射诱导的同调映射$H_1(S_R)$ $\to H_1(W_R \cup \partial R)$ 是非平凡的。我们的策略是扩展 S_R 和 W_R，使得更大的集合 S'_R 和 W'_R 满足 $S'_R = \partial W'_R$，并且由包含映射诱导的相关同调映射是满射。

现在我们描述两个可简化 $\partial S_R = S_R \cap \partial R$、的操作，相关示意见图7和图8。 ∂S_R 与 $D_2 = D_2(R)$横截，并且不与$D_1 = D_1(R)$相交。因此， ∂S_R 是包含于 D_2.中的互不相交的闭曲线的并集

我们首先移除 ∂S_R 中代表 $H_1(D_2)$的平凡元素的连通分支。如果 ∂S_R 中至少有一个连通分支代表 $H_1(D_2)$的平凡元素，那么它至少包含一条曲线 γ，该曲线界定了 $\mathcal{D}$ 中的一个圆盘 $D_2 \setminus S_R$. 在这种情况下，令$S''_R \coloneqq S_R \cup \mathcal{D}$. 如果 $\mathcal{D}$ 将 W_R 与 R的外部分隔开，我们得到

通过将 $\mathcal{D}$ 向 R 外侧推移一小段距离，可从 S''_R 得到 S'_R，使得 S'_R仍是与 ∂R. 横截的曲面。否则，我们将 $\mathcal{D}$ 向 R 内侧推移一小段距离，从而找到曲面S'_R，使其在 $\mathcal{D}$.的某个邻域内不与 ∂R 相交。

然后令 W'_R 为 W_R 与 $\mathbb{R}^3 \setminus(\partial R \cup (S'_R \setminus R))$的所有有界连通分支的并集的闭包，其中这些分支的闭包与 W_R.相交。

S'_R 是通过将一个二维胞腔附加到 S_R. W'_R 上得到的空间；它要么与 W_R，同胚，要么 W'_R 与附加了若干个圆盘的 W_R 同伦等价。无论哪种情况，由包含映射诱导的映射 $H_1(S_R) \to H_1(S'_R)$和 $H_1(W_R) \to H_1(W'_R)$都是满射。

反复应用这一过程后，最终得到的曲面 S'_R 的所有剩余边界连通分量在 $H_1(D_2)$ 中都是非平凡的；由于它们都是简单环路，因此各自都必须生成 $H_1(D_2)$。现在我们描述 S_R 的所有环路都属于这种形式时所执行的操作。注意，在这种情况下，$\partial R \setminus S_R$ 是两个圆盘的不交并——一个包含 D_1^+，另一个包含 D_1^-——再加上有限个（也可能为空）环绕 D_2. 的圆形带。顶部的球冠包含在 ∂W 中，而相邻的圆形带不包含在 W. 中。此模式交替出现，直到到达底部球冠；它不包含在 ∂W. 中。因此，$\partial R \cap S_R$ 必须包含奇数个连通分支。此外，S_R 是从 ∂W 中去除有限个圆形带后得到的。在图4所示的示例中，$R \setminus S_R$ 是两个球冠和两个圆形带的并集。

当 $\partial R \cap S_R$ 中至少有 3 个环路时，我们每次在其中两个环路上附加圆盘。令 $X \subset \partial W_R$ 是一条带，且 $\partial X = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \subset S_R$. 。然后，我们在 R 外侧下方添加两个互不相交的圆盘 $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$，分别沿着 γ_1 和 γ_2 附着。现在定义 $S'_R \coloneqq S_R \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$，并将 W'_R 定义为 W_R 与 $\mathbb{R}^3 \setminus (X \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$ 的有界分支的闭包之并。这样做的效果是从 ∂W_R 中移除 X，并将其替换为 $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. 。见图8。如果只有一个环路，那么 $\partial W_R \setminus S_R$ 与一个圆盘同胚，因此我们设 $W'_R \coloneqq W_R$ 和 $S'_R \coloneqq \partial W_R$.

现在我们来考察这些操作对复形拓扑的影响。我们声称，对于上述任一操作，如果 $H_1(S'_R) \to H_1(W'_R \cup S'_R \cup \partial R)$ 是非平凡的，那么 $H_1(S_R) \to H_1(W_R \cup S_R \cup \partial R)$ 也非平凡。为此，注意到 S'_R 和 W'_R 在同伦等价意义下，始终是通过向 S_R 和 W_R 分别附加若干个（可能为零个）圆盘构造而成的。因此，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} H_1(S_R) & \longrightarrow & H_1(W_R) & \longrightarrow & H_1(W_R \cup \partial R) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_1(S'_R) & \longrightarrow & H_1(W'_R) & \longrightarrow & H_1(W'_R \cup \partial R) \end{array},$$

其中所有垂直映射都是满射。

稍微滥用一下记号，令 S'_R 和 W'_R 为依次对原始集合 S_R 和 W_R. 施行这些操作后得到的最终集合。根据构造，$\partial W'_R = S'_R$.剩下要证明的只有 $H_1(S'_R) \to H_1(W'_R \cup S'_R \cup \partial R)$ 是

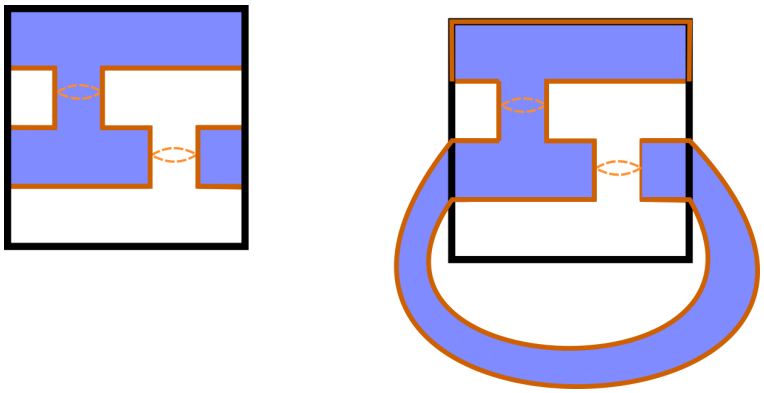

FIGURE 8. 图4中示例经手术后的效果示意图，图中展示的是横截面。左侧以橙色显示 S_R ，以蓝色显示 W_R ；右侧则以相应颜色显示 S'_R 和 W'_R。橙色虚线表示细管，这些细管在横截面之外由 S 围成。 W_R 是一个实心环面， S_R 则是一个挖去圆盘的圆柱体。同调 $H_1(S_R)$非平凡，但同调上的诱导映射 $H_1(S_R) \to H_1($ $S_R \cup \partial R)$并非如此。 $S'_R = \partial W'_R$是一个二维球面，由 S_R 附加三个圆盘得到：两个位于盒子外，另一个是盒子顶部的盖子。 W'_R 是一个三维球，由 W_R 沿圆形带附加一个加厚圆盘得到。

非平凡的。由于 S_R 在 $R \setminus B_R$, 中分隔 D_1 ，可以验证，上述操作会得到一个曲面 S'_R ，它在 $\mathbb{R}^3 \setminus B_R$.中分隔 D_1

那么，由于 B_R 包含一次纠缠穿越， S'_R 不可能是球面，因此根据曲面分类，它必定同胚于若干环面的连通和。由此可知， W'_R 同胚于若干实心环面的连通和，并且 $H_1(S'_R) \to H_1(W'_R)$ 是满射，特别地，它是非平凡的。最后， $\partial R \setminus W'_R$由 ∂R, 的底部（它同胚于一个圆盘）以及 ∂S_R. 中环路之间的若干条带在 $D_2 \cap \partial W_R$ 中的并集构成。由于我们沿着 $\partial W_R \cap R$, 中的每个环路都粘上了一个圆盘，这些环路在 $H_1(W'_R)$ 中都是零同调的，因此映射 $H_1(W'_R) \to H_1(W'_R \cup \partial R)$ 是单射，证明完毕。□

完成拓扑研究后，我们现在需要给出薄盒沿长方向发生纠缠穿越的概率下界。令$R_{N,a,k} = [0, a \log N] \times [0,k] \times [-N,N]$ ，并令 $H_{N,a,k}$ 表示存在 m-纠缠穿越 $R_{N,a,k}$.

引理32。 固定 $m \in \mathbb{N}$. 那么对于任意 $p > p_c^{\lim}$, 存在一个 $k = k\ (m)\ \in \mathbb{N}$ 和一个 $c\ (p,m)\ > 0$ ，使得

$$\inf_n \mathbb{P}_p\left(H_{N,c,k}\right) > 0\,.$$

证明。 命题26中描述的重整化方案会探索单个顶点的连通分量，同样地，也可以从包含多个顶点的起始集合开始探索。特别是，使用从

盒子顶部进行的这种探索，本引理可归结为证明：对于任意$q > p_c^{\text{site}}\left(\mathbb{Z}^2\right)$，存在一个 $b > 0$，使得

$$\inf_N \mu_q\left(\mathcal{R} \cap \{x = 0\} \overset{\mathcal{R}}{\longleftrightarrow} \mathcal{R} \cap \{x = 2N\}\right) > 0\,,$$

其中 μ_q 是 $\mathbb{Z}^2$ 中点渗流的测度，且 $\mathcal{R} = \{0, 1, \ldots, 2N\} \times \{0, \ldots, \lceil b \log N \rceil\}$.

为证明这一点，我们考虑图 $\left(\mathbb{Z}^2\right)^{\times}$，上的对偶点渗流。该图具有相同的顶点集，但顶点之间的边长为 L^∞ 1，而不只是最近邻（也就是说，我们在通常的 $\mathbb{Z}^2$ 格点的每个正方形中添加对角边）。我们将原始点渗流子图（记作 X，）与参数为 $1-q$. 的对偶点渗流 Y 耦合。令 F_l 表示在 $\{1, \ldots, 2N\} \times \mathbb{Z}$. 中存在一条从 $\{0, \ldots, 2N\} \times \{0\}$ 到 $\{0, \ldots, 2N\} \times \{l\}$ 的开放对偶路径这一事件。若 $\sup_N \mathbb{P}($ $F_{b \log N}) < 1$，则根据标准对偶论证，我们得到原始盒子穿越概率的所需界。

F_l 的概率不超过以下事件的概率： $\{1, \ldots, 2N\} \times \{0\}$ 中至少有一个对偶顶点属于大小为 l. 的连通分量。由于 Y是次临界的，存在常数 $d > 0$ 使得

$$\mu\left(0 \underset{Y}{\longleftrightarrow} \partial\Lambda_l\right) \leq \exp\left(-dl\right)\,.$$

由并集界可得

$$\mu\left(F_l\right) \leq N \exp\left(-dl\right)\,,$$

因此，取 $b = \frac{2}{d}$使得 $l = \lceil \frac{2}{d} \log N \rceil$，即可得到所需的上界。 □

现在我们准备证明定理4。

定理*4*的证明。 假设 $1-p_c\left(\mathbb{Z}^3\right) < p < 1-p_c^{\lim}$. 。在此情形下， P 以高概率将D_1^+与 D_1^-分隔开，因此我们将假设它确实如此。

我们先证明上界。令 F 为$\Lambda_N \setminus P$中与 D_1^-相交的各连通分量的并集，并令 P' 为 F的面片边界的子集，其中包含所有与 $\Lambda_n \setminus F$. P' 中包含D_1^+的连通分支内立方体相邻的面片。它是 R.的一个面片穿越

记 $E(P')$ 为与 P'. 的面片相邻的边的集合。于是

$$\operatorname{rank} H_1\left(P' \cup \partial R\right) \leq \operatorname{rank} H_1\left(P'\right) \leq \operatorname{rank} C_1\left(P'\right) \leq \left|E\left(P'\right)\right| \leq 4\left|P'\right| \leq 20\left|F\right|$$

其中， $|F|$ 表示包含于 F. 中的对偶点数量。在最后两个不等式中，我们利用了以下事实：每个面片包含四条边，每个立方体有 6 个面，并且最小曲面不可能包含某个单独立方体边界上的所有面片。于是有

$$\mathbb{P}_p\left(|F| \geq m\right) \leq \mathbb{P}_p\left(\sum_{i=1}^{N^2} X_i \geq m\right)\,,$$

其中 X_i 是一组独立同分布随机变量，其分布与 B. 中任意顶点的对偶连通分量大小相同。由于 B 是亚临界的，根据大数定律即可得到所需的界。

现在我们来讨论下界。假设 P' 是Λ_N的面片穿越；这种交叉以高概率存在。我们可以写成 $\Lambda_N = \bigcup_{j=1}^M R_j \cup Z$,

其中 $M := \left\lfloor \frac{N}{2a \log N} \right\rfloor \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$ 对于 a, k 如引理32中所述，并且每个 R_j 都是 $R_{N,\,c,\,k}$ 沿一个向量平移所得，该向量属于

$$\operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \{(0, c \log N, 0), (0, 0, k)\} .$$

根据引理32，存在一个 $\delta > 0$，使得以高概率，至少有 $M' := \lceil \delta M \rceil$ 个 R_j 存在纠缠的上下贯穿：将它们枚举为 R_1、…、$R_{M'}$.

根据命题28，只需证明由包含映射诱导的同调映射 $\phi_* : H_1(S_{P'}) \to H_1(W \cup \partial\Lambda_N)$ 的秩至少为 M'.。我们通过利用 Mayer–Vietoris序列，迭代地将较小盒子中的部分组合起来来证明这一点。

设 Λ^1、Λ^2、$\Lambda^3 \subset \Lambda_N$ 为盒子，使得 Λ^1 和 Λ^2 的内部不相交，并且 $\Lambda^3 = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$.。令 $W_i = W \cap \Lambda^i$ 和 $S_i = S_{P'} \cap \Lambda^i$.

考虑下列交换图，其中各列是由包含映射诱导的映射，各行分别来自分解 $S_3 = S_1 \cup S_2$ 和 $W_3 \cup \partial\Lambda^1 \cup \partial\Lambda^2 = \left(W_1 \cup \partial\Lambda^1\right) \cup \left(W_2 \cup \partial\Lambda^2\right)$ 对应的 Mayer–Vietoris 序列：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1(S_1) \oplus H_1(S_2) & \longrightarrow & H_1(S_3) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle k_1 \oplus k_2} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\
 & & & & H_1\left(S_3 \cup \partial\Lambda^3\right) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\
H_1\left(\partial\Lambda^1 \cap \partial\Lambda^2\right) & \xrightarrow{h} & H_1(W_1 \cup \partial\Lambda^1) \oplus H_1\left(W_2 \cup \partial\Lambda^2\right) & \xrightarrow{l_1 - l_2} & H_1\left(W_3 \cup \partial\Lambda^1 \cup \partial\Lambda^2\right)
\end{array}$$

h 是平凡的，因为 $H_1\left(\partial\Lambda^1 \cap \partial\Lambda^2\right) = 0$.。因此，根据底部行的正合性，$l_1 - l_2$ 是单射。由此可得

$$\operatorname{rank} i_* \geq \operatorname{rank}(k_1 \oplus k_2) = \operatorname{rank} k_1 + \operatorname{rank} k_2 . \tag{4}$$

例如，若 Λ^1 和 Λ^2 是 R_i 中的两个矩形，那么根据命题31，我们有秩 $k_1 \geq 1$ 和秩 $k_2 \geq 1$，因此可得秩 $i_* \geq 2$.

现在，我们在每一行中逐个加入 R_j，使用 (4)，并对每个 R_i 应用命题31；随后合并各行，并使用 (4) 逐行加入。再对 $\bigcup_{j=1}^{M} R_i$ 和 Z 类似地应用一次 Mayer–Vietoris 定理，即可得到以下界

$$\operatorname{rank} \phi_* \geq M' ,$$

证明完毕。 □

References

[ACC+83] M. Aizenman、J. T. Chayes、L. Chayes、J. Fr¨ohlich 和 L. Russo。关于随机曲面系统中从面积律到周长律的锐利相变。 *Comm. Math. Phys.*，92 1 19( ): –69，1983。[AG91] Michael Aizenman 和 Geoffrey Grimmett。渗流与铁磁模型临界点的严格单调性。 *J. Statist. Phys.*，63(5-6):817–835，1991。[Ale24a] James W Alexander。一个单连通曲面围成非单连通区域的实例。 *Proceedings of the National Academy of Sciences*，10 1 8( ): –10，1924。[Ale24b] James W Alexander。关于多面体对

3 *Proceedings of* 空间的划分。 *the National Academy of Sciences* 10 1 6 8, 1924 , ( ): – 。[AM10] Mahshid Atapour 和 Neal Madras。关于缠结簇的数量。 *Journal of Statistical Physics* 139 1 1 26, 2010 , ( ): – 。

[AZ67] Mark Anthony Armstrong 和 Erik Christopher Zeeman。分段线性流形的横截性。 *Topology*, 6(4):433–466，1967。[BBR14] Paul Balister、B´ela Bollob´as 和 Oliver Riordan。本质增强再探。 *arXiv preprint arXiv:1402.0834*，2014。[BHK11] Eric Babson、Christopher Hoffman 和 Matthew Kahle。随机二维复形的基本群。 *Journal of the American Mathematical Society*, 24(1):1–28，2011。[Bin57] RH Bing。用多面体曲面逼近曲面。 *Annals of Mathematics*，65 3 456( ): –483，1957。[Bin64] RH Bing。与庞加莱猜想相关的三维流形拓扑的若干方面。 *Lectures on modern mathematics*，2(1):93–128，1964。[CL05] Fr´ed´eric Chazal 和 Andr´e Lieutier。弱特征尺寸与持久同调：根据含噪数据样本计算 rn 中实体的同调。载于 *Proceedings of the twenty-first annual symposium on Computational geometry*，第255–262页，2005年。[DCRT19] Hugo Duminil-Copin、Aran Raoufi 和 Vincent Tassion。通过决策树研究随机簇模型与 Potts 模型的锐利相变。 *Annals of Mathematics*，189(1):75–99，2019。[DKS25] Paul Duncan、Matthew Kahle 和 Benjamin Schweinhart。环面上的同调渗流：面片与置换多面体。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Prob-abilités et Statistiques*，2025。[DSS] Paul Duncan、Benjamin Schweinhart 和 David Sivakoff。关于增强渗流的连续性。准备中。[GH00] Geoffrey R Grimmett 和 Alexander E Holroyd。渗流中的纠缠。 *Proceedings of the London Mathematical Society* 81 2 485 512, 2000 ，( ): – 。[GH10] Geoffrey Grimmett 和 Alexander Holroyd。小方格、球面与纠缠。 *Electronic Journal of Probability*，15:1415–1428，2010。[GM90] G. R. Grimmett 和 J. M. Marstrand。渗流的超临界相表现良好。 *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*，430(1879):439–457，1990。[Hat02] Allen Hatcher。 *Algebraic Topology*。剑桥大学出版社，2002年。[hk] Moishe Kohan (https://math.stackexchange.com/users/84907/moishe ko- han)。非平凡有限基本群。Mathematics Stack Exchange。网址：https://math.stackexchange.com/q/4034711（版本：2021-02-21）。[Hol00] Alexander E Holroyd。纠缠渗流相变的存在性。载于 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*，第129卷，第231–252页。剑桥大学出版社，2000年。[Hol02] Alexander E Holroyd。纠缠渗流中的不等式。 *Journal of statistical physics* 109 317 323, 2002 ，： –。[Kau89] Louis H Kauffman。三维空间中的图不变量。 *Transactions of the American Mathematical Society* 311 2 697 710, 1989 ，( ): – 。[KPR21] Matthew Kahle、Elliot Paquette 和 ´Erika Rold´an。随机维数立方复形的拓扑。载于 *Forum of Mathematics, Sigma*，第9卷，第e76页。剑桥大学出版社，2021年。[LM06] Nathan Linial 和 Roy Meshulam。随机二维复形的同调连通性。*Combinatorica*，26(4):475–487，2006。[LP16] Nathan Linial 和 Yuval Peled。关于随机单纯复形中的相变。 *Annals of Mathematics*，第745–773页，2016年。[MW09] Roy Meshulam 和 Nathan Wallach。随机 k 维复形的同调连通性。 *Random Structures & Algorithms*，34(3):408–417，2009。[Pap57] Christos D Papakyriakopoulos。关于 Dehn引理和纽结的非球面性。 *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 43 1 169, ，( ): 。1957