arXiv:2512.16039v1 [math.GR] 17 Dec 2025

自同构的不动子群的有限性性质

Kisnney Emiliano de Almeida 费拉迪圣塔纳州立大学，精确科学系，Av. Transnordestina S/N，CEP 44036-900 - 费拉迪圣塔纳 - BA - 巴西。电子邮件： kisnney@gmail.com

Luis Mendonça 米纳斯吉拉斯联邦大学，数学系，Av. Antônio Carlos, 6627，CEP 31270-901 - 贝洛奥里藏特 - MG - 巴西。电子邮件: luismendonca@mat.ufmg.br

2025年12月19日

摘要

我们利用 Sigma不变量研究群 G 的自同构的不动子群的同伦与同调有限性性质，考察其中心 $Z(G)$ 以及其相应商群 $G/Z(G)$ 上的诱导自同构。针对中心是群的一个直因子的情形，我们回答了 Lei、Ma 和 Zhang 提出的问题。

1 引言

给定群 G 和自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，其不动点子群，

$$\mathrm{Fix}\,\phi = \{g \in G \mid \phi(g) = g\},$$

是基础研究中的一个对象。它体现了 G 在 ϕ 作用下的对称性，其内部结构揭示了关于群 G 本身的深刻信息。

人们对有限生成自由群的不动子群广泛关注：Gersten [11] 已证明它们总是有限生成的，而 Bestvina 和 Handel 证明，Fix ϕ 的秩受环境自由群 [3], 的秩一致有界，从而证实了 Scott 在 20 世纪 70 年代提出的猜想。

有鉴于此，Lei、Ma 和 Zhang [14]定义：若对于所有 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，Fix ϕ 都是有限生成的，则称群 G具有 FGFP_a 性质。除自由群外，Minasyan 和 Osin [17] 还证明了极限群具有这一性质；Zhang、Ventura 和 Wu [21] 则证明，非阿贝尔自由群的有限直积等其他类别的群也具有这一性质。

有限生成群的不动子群并不总是有限生成的，即使对于 FGFP_a 群的直积也是如此。一个简单的例子是自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}(F_2 \times \mathbb{Z})$，它由 $\phi(g, n) = (g, \alpha(g)+n)$ 给出，其中 $\alpha\colon\ F_2 \to \mathbb{Z}$将 F_2 的自由基中的所有元素都映为 1。在这种情况下，Fix $\phi = \ker\alpha \times \mathbb{Z}$，而它不是有限生成的。

本文的主要目标是研究给定群 G的自同构 ϕ 所对应的 Fix ϕ的有限性性质 F_n 和 FP_n，并从其中心 $Z(G)$及商群 $G/Z(G)$的角度加以考察。这些有限性性质推广了有限生成群的概念——事实上，群 G 是 F_1 型，当且仅当 G 是 FP_1型，当且仅当 G 是有限生成的；此外，G 是有限表示的，当且仅当 G是 F_2, 型，而后者蕴含其为 FP_2型。我们将在第2节进一步介绍这些有限性性质。

对于有限生成群 G，其 BNS 不变量 $\Sigma^1(G)$ 是特征球面 $S(G)$的一个特定子集；后者由非平凡同态 $\chi\colon\ G \to \mathbb{R}$ 的陪集 $[\chi]$ 构成，并按照如下等价关系定义：若 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，则 $\chi_1 \sim r\chi_1$。它的主要应用是确定 G 中哪些包含换位子 G' 的子群是有限生成的 [5]。此外还有更高阶的拓扑版本和同调版本$\Sigma^n(G)$ 以及 $\Sigma^n(G,\ \mathbb{Z})$，它们也可用于确定这些子群是否继承了群 G [6]的 F_n 和 FP_n 性质——我们将在第2节中进一步介绍这些版本。

作为对上述 $F_2 \times \mathbb{Z}$ 例子的推广，Lei、Ma 和 Zhang [14] 考察了形如 $G \times A$ 的直积，其中 A 是有限秩自由阿贝尔群。若 $Z(G)$ 是平凡的，则此类群的所有自同构都具有如下形式

$$\phi(g, a) = (\psi(g), \alpha(g) + \gamma(a)),$$

其中 $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$、$\gamma \in \mathrm{Aut}(A)$，且 $\alpha\colon\ G \to A$ 是一个同态。事实证明，同态 α 对不动子群 Fix ϕ的有限性性质有着重要影响，而通过研究群 G的 BNS 不变量，可以捕捉到这一信息。

如果群 H 满足以下条件，则称其为弱 Howson：两个有限生成子群 $A,\ B \leq H$的交总是有限生成的，其中一个子群是 H的正规子群。Lei、Ma 和 Zhang 证明了以下结论。

定理 1.1 ([14])。设 H 是一个中心平凡的弱 *Howson* 群。

1. $H \times \mathbb{Z}$ 具有$\mathrm{FGFP_a}$ 当且仅当 H 具有$\mathrm{FGFP_a}$，且 $\Sigma^1(H)$ 包含所有满足$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}$ $\mathrm{Im}\,\chi = 1$的同态的陪集。*2.* 对所有 $m \geq 1$，$H \times \mathbb{Z}^m$ 具有$\mathrm{FGFP_a}$ 当且仅当 H 具有$\mathrm{FGFP_a}$ 且 H' 是有限生成的。

受上述结果启发，作者提出了以下问题。

问题 1.2。 [14] $H \times \mathbb{Z}$ 是否具有 $\mathrm{FGFP_a}$，如果群 H 具有 $\mathrm{FGFP_a}$ 且 H' 是有限生成的?

我们的主要结果如下。

定理 A。 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 G 是 F型$_n$ 群，且中心有限生成。设 $\phi \in$ 自同构群(G)，ϕ 由 ϕ 诱导的 $G/Z(G)$ 的自同构

$$I_\phi = \{z^{-1}\phi(z) \mid z \in Z(G)\} \leq Z(G).$$

那么，以下陈述等价:

(i) $\mathrm{Fix}\,\phi$ 是 F_n 型（分别为 FP_n 型），

(ii) $\mathrm{Fix}\ \phi$ 及其子群 $P_\phi = \{gZ(G) \in G/Z(G) \mid g^{-1}\phi(g) \in I_\phi\} \lhd \mathrm{Fix}\,\phi$均为 F_n 型（分别为 FP_n 型），

(iii) $\mathrm{Fix}\ \phi$ 是 F_n 型（分别为 FP_n 型），且对所有 $[\chi] \in \Sigma^1(\mathrm{Fix}\ \phi)^c$（分别为 $\Sigma^1(\mathrm{Fix}\ \phi, \mathbb{Z})^c$），都存在 $g \in G$，使得 $g^{-1}\phi(g) \in I_\phi$ 且 $\chi(gZ(G)) \neq 0$。

一个有趣的情形是只考虑有限阶自同构。例如，Kochloukova、Martínez-Pérez 和 Nucinkis [13] 证明，广义 Thompson 群的有限阶自同构的不动点集是有限生成的，当且仅当它们对所有 n 都是 F_n 型；他们还证明，后一结论实际上对 Thompson 群 F 也成立。

Roy 和 Ventura [19] 证明，$F_n \times \mathbb{Z}^m$ 的有限阶自同构的不动子群总是有限生成的——尽管正如我们所提到的，这对所有自同构并不成立。定理 A 的一个应用给出了以下推广。

推论 A. 设 G 是一个 F 型群F_n，其中心有限生成；设 $\phi \in \bar{}$自同构群(G) 是一个有限阶自同构，并设 ϕ 是由 ϕ诱导的 $G/Z(G)^{\bar{}}$的自同构。那么，不动点集 ϕ 是 F 型F_n（分别为 $FP\mathrm{FP}_n$）当且仅当不动点集ϕ是F_n 型（分别为FP_n型）。

如果对所有 $\phi \in$ 自同构群G，不动点集ϕ 都属于类型 F_n（分别为 FP_n），则称一个群具有性质 $\mathrm{F_nFP_a}$（分别为 $\mathrm{FP_nFP_a}$）。注意，对于 $n=1$，$\mathrm{FGFP_a} = \mathrm{F_nFP_a} = \mathrm{FP_nFP_a}$。下面的定理给出了一个判据，它通过某些核的相应有限性性质来分析上述性质。我们采用与定理 A 中相同的记号 I_ϕ。

定理 B. 设 G 是一个类型为 F_n 且具有有限生成中心的群。那么，G 满足 $\mathrm{F_nFP_a}$（分别为 $\mathrm{FP_nFP_a}$）当且仅当，对于每个同态 $\nu\colon G/Z(G) \to Z(G)$ 以及所有 $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，映射的核

$$\theta\colon \operatorname{Fix}\bar{\phi} \to Z(G)/I_\phi,\quad gZ(G) \mapsto g^{-1}\phi(g)\nu(gZ(G))I_\phi$$

属于类型F_n（分别为 FP_n）。

下面的推论简要说明了这些性质对换位子之上子群的要求。

推论 B. 设 G 是一个具有 $\mathrm{F_nFP_a}$（分别为 $\mathrm{FP_nFP_a}$）性质且中心有限生成的群。若 $G' \le N \le G$ 满足 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} G/N \le \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} Z(G)$，则 N 属于类型 F_n（分别为 FP_n）。

为了回答问题 1.2，我们利用定理 B 得出以下关于群的中心是直因子的情形的结果。

定理 C. 设 H 是无中心群，A 是有限生成阿贝尔群。则以下条件等价：

1. $G := H \times A$ 具有 $\mathrm{F_nFP_a}$（分别为 $\mathrm{FP_nFP_a}$）性质；
2. H具有 $\mathrm{F_nFP_a}$（分别为 $\mathrm{FP_nFP_a}$）性质，并且对于每个满足 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Im}\chi \le \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} A$ 的同态 $\chi\colon H \to \mathbb{R}$，以及所有 $\psi \in$自同构群(H)，$\ker(\chi_{|\operatorname{Fix}\psi})$均为 F_n 型（分别为 FP_n 型）。

利用定理 C，我们找到了两个群的例子，它们对问题 1.2 给出了否定答案。

本文结构如下。第 2 节将建立一些所需的预备结果。第 3 节证明定理 A 和推论 A；第 4 节证明定理 B 和推论 B；第 5 节研究中心是直因子的情形，并证明定理 C。最后，第 6 节回答问题 1.2。

2 预备知识

群 G 称为 F_n 型，如果存在一个具有有限 n骨架的 $K(G,1)$-复形。众所周知，F_1 等价于 G 为有限生成，而 F_2 则等价于 G为有限可呈示。

对于任意环 R，若一个 R-模 A 具有投射分解

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

且对所有 $k \leq n$ 均为有限生成，则称其为 FP $A=\mathbb{Z}$ 型。将其特化到 $R=\mathbb{Z}G$和 $A=\mathbb{Z}$，便得到 FP_n 型群的定义。

同样，FP_1 与 G 有限生成相一致，但正如 Bestvina 和 Brady [2] 所示，FP_2 严格弱于有限呈示。众所周知，F_n 蕴含 FP_n，且对所有 n，F_{n+1}（分别为 FP_{n+1}）蕴含 F_n（分别为 FP_n）。若一个群对所有n均为 F_n 型（分别为 FP_n 型），则也称其为 F_∞ 型（分别为 FP_∞ 型）。F_∞ 型群最简单的例子是有限生成自由群和有限生成阿贝尔群。

我们回顾一些关于这些性质的其他众所周知的结果。

命题 2.1. 设 $1 \to A \to B \to C \to 1$ 是群的一个短正合列。

1. 若 A 和 C 均为 F_n 型（分别为 FP_n 型），则 B 为 F_n 型（分别为 FP_n 型）；

2. 若 A 为 F_{n-1} 型（分别为 FP_{n-1} 型），且 B 为 F_n 型（分别为 FP_n 型），则 C 为F_n 型（分别为 FP_n 型）。

证明。参见 [10] □

众所周知，性质 F_n 和 FP_n 在有限指数子群之间双向传递。关于 F_n 和 FP_n 性质的更多一般信息，请读者参见 [4, 7, 10]。

接下来，我们定义 Σ-不变量。对于作为有限生成群的 G，其特征球面 $S(G)$ 是非零同态 $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ 的集合，模去如下等价关系：当且仅当存在某个 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得 $\chi_1 \sim \chi_2$ 时，$\chi_2 = r\chi_1$。对于 $\chi\colon G \to \mathbb{R}$，我们定义子幺半群 $G_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) \geq 0\}$，而同调 Σ-不变量则定义为

$$\Sigma^n(G,\mathbb{Z}) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathbb{Z} \text{ is of type } \mathrm{FP}_n \text{ as } \mathbb{Z}G_\chi\text{-module}\}.$$

对于同伦对应物 $\Sigma^n(G)$，我们只定义 Σ^1 和 Σ^2，并采用公式 $\Sigma^n(G) = \Sigma^2(G) \cap \Sigma^n(G,\mathbb{Z})$ 来处理 $n \geq 2$ ([6])。

设 X 是 G 的有限生成集，并设 Cay（G， X）为相应的凯莱图。对于 $[\chi] \in S$（G），我们考虑由 G_χ 中的顶点张成的全子图 Cay（G， X）$_\chi$。记

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathrm{Cay}(G, X)_\chi \text{ is a connected graph}\}.$$

我们可以类似地定义不变量 $\Sigma^2(G)$。设 G 是有限表示的，令 $\mathcal{C}$ 为 G 关于有限表示 $G = \langle X \mid R\rangle$ 的凯莱复形。对于任意特征 χ: $G \to \mathbb{R}$，子集 $G_\chi \subset G$ 确定了 $\mathcal{C}$ 的一个全子复形 $\mathcal{C}_\chi$。根据定义

$\Sigma^2(G)$ $=\{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{C}_\chi$ 对某个 G 的有限表示 $\langle X \mid R\rangle$ 是 1-连通的$\}$。

如果 $\mathrm{Im}\,\chi \simeq \mathbb{Z}$ 是离散的，我们就称特征 $[\chi] \in S(G)$ 是离散的。在下述定理中，我们汇集所需的关于 Σ-不变量的一些基本结果。

定理 2.2 ([5, 6])。 设 G 是 F_n 型群，且 χ: $G \to \mathbb{R}$ 是非平凡同态。

1. 设 H 是 G 的一个包含 G' 的子群。那么 H 是 F_n 型，当且仅当

$$S(G, H) := \{[\chi] \in S(G) \mid \chi(H) = 0\} \subset \Sigma^n(G).$$

特别地， $S(G) = \Sigma^n(G)$ 当且仅当 G' 是 F 型F_n;

2. 假设 $[\chi]$ 是离散的。那么 核χ 是 F 型F_n，当且仅当 $\{\chi, -\chi\} \subset \Sigma^n(G)$;

3. 若 $H \leq G$ 是有限指数子群，则 $[\chi_{|H}] \in \Sigma^n(H)$ 当且仅当$[\chi] \in \Sigma^n(G)$;

4. 若 $\chi(Z(G)) \neq 0$，则 $[\chi] \in \Sigma^n(G)$;

5. 若 G 是自由的，则 $\Sigma^n(G) = \emptyset$。

在定理 2.2 中，我们可以将 F_n 替换为 FP_n，并将 $\Sigma^n(G)$ 替换为 $\Sigma^n(G, \mathbb{Z})$，从而找到相应的同调对应项。

3 不动子群与中心

¯设 G 是一个群。从现在起，对于 $\phi \in$Aut(G)，我们将 ϕ 记作由 ϕ 诱导的 G/Z(G) 的自同构。令

$$I_\phi \coloneqq \{z^{-1}\phi(z) \mid z \in Z(G)\} \subseteq Z(G).$$

注意， I_ϕ 实际上是 Z（G）的一个子群，因为若 z_1， $z_2 \in Z$（G），那么

$$z_1^{-1}\phi(z_1)\left(z_2^{-1}\phi(z_2)\right)^{-1} = (z_1 z_2^{-1})^{-1}\phi(z_1 z_2^{-1}).$$

我们还定义映射

$$\begin{aligned}\varepsilon_\phi\colon \operatorname{Fix}\bar{\phi} &\to Z(G)/I_\phi\\ gZ(g) &\mapsto g^{-1}\phi(g)I_\phi.\end{aligned}$$

¯注意， ε_ϕ 在 Fix ϕ 上定义良好，但一般在 G/Z（G）上并非如此。事实上，对于_gZ（G）$\in$ Fix ϕ，有 $g^{-1}\phi$（g）$\in Z$（G）；而对于 $z \in Z$（G），元素 $g^{-1}\phi$（g）和（gz）$^{-1}\phi$（gz）模 I_ϕ表示同一个陪集。此外，利用{$g^{-1}\phi$（g）}中的元素是 G的中心这一事实，我们有

$$\varepsilon_\phi(ghZ(G)) = (gh)^{-1}\phi(gh)I_\phi = h^{-1}(g^{-1}\phi(g))\phi(h)I_\phi = (g^{-1}\phi(g))(h^{-1}\phi(h))I_\phi,$$

¯对于 gZ（G） hZ（G）$\in$ Fix ϕ，因此 ε_ϕ 是一个同态。

¯注意， $P_\phi \coloneqq \{gZ$（G）$\in G/Z$（G）$\mid g^{-1}\phi$（g）$\in I_\phi\} =$ ker $\varepsilon_\phi \lhd$ Fix ϕ。

定理 *A* 的证明。 我们证明拓扑版本，因为同调版本类似。

记 π: $G \to G/Z$(G) 为典范投影。我们有一个正合列

$$1 \to Z(G) \cap \operatorname{Fix}\phi \to \operatorname{Fix}\phi \to \pi(\operatorname{Fix}\phi) \to 1.$$

由于 Z(G) $\cap$ 不动点集 $\phi \leq Z$(G) 是有限生成阿贝尔群，由命题 2.1 可知，不动点集 ϕ 是 F$_n$ 当且仅当 π(不动点集 ϕ) 也是如此。

根据构造，我们有

$$\pi(\operatorname{Fix}\phi) = \{gZ(G) \in G/Z(G) \mid \exists z \in Z(G) \text{ such that } \phi(gz) = gz\}.$$

在上述情形中， $g^{-1}\phi$(g) $= z\phi$(z)$^{-1} = $ (z^{-1})$^{-1}\phi$(z^{-1}) $\in I_\phi$，因此 π(不动点集 ϕ) $= P_\phi$。

¯由于 Im ε_ϕ 是有限生成阿贝尔群， $P_\phi =$ 核 ε_ϕ 为 F$_n$ 意味着不动点集 ϕ 也是如此，由命题 2.1 可知。因此 (i) 和 (ii) 等价。

(ii) 与 (iii) 的等价性由定理 2.2 得出：子群 P_ϕ is¯F$_n$ 当且仅当对于所有 $[\chi] \in \Sigma^1$(不动点集 $\phi)^c$，都存在 $p \in P_\phi$ 使得 χ(p) $\neq 0$；也就是说，存在 $g \in G$ 使得 χ(gZ(G)) $\neq 0$ 且 $g^{-1}\phi$(g) $\in I_\phi$。 □

推论 *A* 的证明。由定理 A 可知，只需证明：若 ϕ is of finite order
且不动点集 ϕ 属于 F 型，则 P_ϕ 是不动点集 ϕ 的有限指数子群。

首先注意，对于所有 $k \geq 1$ 和 $z \in Z(G)$，$z^{-1}\phi^k(z) \in I_\phi$。对于 $k = 1$，这只是定义；对于 $k > 1$，我们使用归纳法：$z^{-1}\phi^k(z) = z^{-1}\phi^{k-1}(z)z_2^{-1}\phi(z_2) \in I_\phi$，其中 $z_2 = \phi^{k-1}(z) \in Z(G)$。

Now 假设 $\phi^m =$ 恒等映射。如果 $gZ(G) \in$ 不动点集 ϕ（因此 $g^{-1}\phi(g) \in Z(G)$），我们有 e:

$$\begin{aligned} 1 = g^{-1}\phi^m(g) &= g^{-1}\phi(g)\phi(g^{-1})\phi^2(g)\phi^2(g^{-1})\cdots\phi^{m-1}(g)\phi^{m-1}(g^{-1})\phi^m(g) \\ &= z\phi(z)\phi^2(z)\cdots\phi^{m-1}(z), \end{aligned}$$

其中 $z = g^{-1}\phi(g) \in Z(G)$。由此可得

$$z^{-m} = z^{-1}\phi(z)\cdot z^{-1}\phi^2(z)\cdots z^{-1}\phi^{m-1}(z) \in I_\phi.$$

因此，对于所有 $gZ(G) \in$ 不动点集 ϕ，我们有

$$\varepsilon_\phi(g^m Z(G)) = \varepsilon_\phi(gZ(G))^m = (g^{-1}\phi(g))^m I_\phi = I_\phi.$$

这证明 $\operatorname{Im}\varepsilon_\phi$ 是一个指数至多为 m 的阿贝尔群。它也是有限生成的，因为它是 ϕ 不动点集的商群，因此是有限群。所以 $P_\phi = \ker(\varepsilon_\phi)$ 在 ϕ 不动点集中具有有限指数。□

4 性质FGFPa 及其推广

定理 *B* 的证明。 *</style}*再次，我们只证明拓扑版本。假设关于核的陈述成立，且令 自同构群 。注意，。 $\nu_{|\operatorname{Fix}\bar{\phi}}$，其中$\pi$: $Z(G) \to Z(G)/I_\phi$ 是投影。令 ν 为平凡同态，可得 $P_\phi =$ 核(ε_ϕ) 属于 F$_n$型。由于 $P_\phi =$ 核 ε_ϕ 且 Im ϕ 是有限生成阿贝尔群，因此由定理 2.1，Fix ϕ 也属于 F$_n$ 型；于是定理 A 蕴含 Fix ϕ 属于 F$_n$型。因为这对所有 $\phi \in$ 自同构群 G都成立，所以 G 满足 FnFPa。

反过来，假设 G 具有 FnFPa。令 $\phi \in$ 自同构群 G，并设 ν: $G/Z(G) \to Z($ $G)$ 是一个同态。记 μ: $G \to Z(G)$ 为其到 G 的提升，并考虑由下式给出的同态

$$\psi\colon G \to G, \quad \psi(g) = \phi(g)\mu(g).$$

其逆映射为

$$\eta\colon G \to G, \quad \eta(g) \coloneqq \phi^{-1}(g)\phi^{-1}\mu\phi^{-1}(g^{-1}).$$

事实上，利用对于所有 $z \in Z(G)$， $\mu(z) = 1$，因此特别地，对于所有 $g \in G$， $\mu\phi^{-1}\mu(g) = 1$，我们有

$$\begin{aligned}\eta\psi(g) &= \eta(\phi(g)\mu(g)) \\ &= \phi^{-1}(\phi(g))(\phi^{-1}\mu\phi^{-1}(\phi(g)))^{-1} \cdot \phi^{-1}(\mu(g))(\phi^{-1}\mu\phi^{-1}(\mu(g)))^{-1} \\ &= g(\phi^{-1}\mu(g))^{-1} \cdot \phi^{-1}(\mu(g)) \\ &= g,\end{aligned}$$

并且类似地， $\psi\eta = \mathrm{Id}$。因此 $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$。根据假设，不动点集 $\mathrm{Fix}(\psi)$ 属于类型 F_n，故由定理 A 可知 P_ψ 也属于该类型，其中

$$P_\psi = \{gZ(G) \in G/Z(G) \mid g^{-1}\phi(g)\mu(g) \in I_\psi\}.$$

由于 $I_\phi = I_\psi$ 和 $\mu(g) = \nu(gZ(G))$，我们看到 $P_\psi = \ker(\theta)$。 □

推论 *B* 的证明。 我们证明拓扑版本。假设 G 具有 $\mathrm{F_nFP_a}$，令 $\phi =$ 为定理 B 中的 Id。于是 I_ϕ 是平凡子群， ε_ϕ 是平凡映射，并且 $^-$是不动点集 $\mathrm{Fix}\ \phi = G/Z(G)$，因此定理的陈述意味着，任意同态 $\nu\colon G/Z(G) \to Z(G)$ 的核都属于类型 F_n。

假设 $G' \leq N \leq G$ 且 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, G/N \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, Z(G)$，令 $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ 为一个非平凡同态，满足 $\chi(N) = 0$。那么 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{Im}\ \chi \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, G/N \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, Z(G)$。

如果 $\chi(Z(G)) \neq 0$，那么根据定理 2.2， $[\chi] \in \Sigma^n(G)$。否则，我们考虑诱导同态 $\bar{\chi}\colon G/Z(G) \to \mathbb{R}$。通过与嵌入 $\iota\colon \mathrm{Im}\ \chi \to Z(G)$ 复合，我们看到 $\ker\ \bar{\chi} = \ker\ \iota \circ \bar{\chi}$ 根据证明开头的论证属于类型 F_n；又由于 $Z(G)$ 是有限生成的，根据定理 2.1，$\ker \chi$ 也属于类型 F_n。因此，根据定理 2.2， $[\chi] \in \Sigma^n(G)$。

Si由于 $[\chi]$ 是任意选取的，根据定理 2.2，我们得到 N 是 F_n型的。 □

例 4.1。 将 G 视为克莱因瓶上的纯辫群（在两条绳线上），它可以写成 $P_2(\mathbb{K}) \simeq F_2 \rtimes (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$，即自由群 $F_2 = \langle x, y\rangle$ 与 $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b \mid ab = ba^{-1}\rangle$的半直积，并赋予如下作用：

$$a^{-1}za = \begin{cases} x & \text{if } z = x, \\ x^{-2}y & \text{if } z = y; \end{cases} \qquad b^{-1}zb = \begin{cases} x^{-1} & \text{if } z = x, \\ xyx & \text{if } z = y. \end{cases}$$

众所周知， $Z(P_2(\mathbb{K})) = \langle b^2\rangle$， $S(P_2(\mathbb{K})) \simeq S^1$ 且 $\Sigma^1(P_2(\mathbb{K}))^c = \{[\chi], [-\chi]\}$，其中 $\chi(x) = \chi(a) = \chi(b) = 0$ 且 $\chi(y) = -1$。读者可以在 [8], 上核查所有这些事实，作者在该处计算了这个不变量。

设 $N := \text{核}\,\chi$。显然 $G' \leq N \leq G$ 且 $\mathbf{rk}_{\mathbb{Z}}\, G/N = 1 \leq 1 = \mathbf{rk}_{\mathbb{Z}}\, Z(G)$，但由于 $[\chi] \notin \Sigma^1(G)$，根据定理 2.2，$N$ 不是有限生成的。这意味着$P_2(\mathbb{K})$ 不是 $\mathrm{FGFP}_{\mathrm{a}}$，由推论 B 可知。

注意，$P_2(\mathbb{K})$ 的中心不是该群的直因子（与圆盘的经典纯辫群不同），因此这一结论并不能由定理 1.1 推出。

5 中心作为直因子

本节考虑 G 的中心是直因子的情形，即，G 是无中心群 H 与有限生成阿贝尔群 A 的直积。受 [14], 启发，我们的目标是，对于每个 $\phi \in \mathrm{Aut}\, G$，尝试根据 $\mathrm{Fix}\, \phi_{|H\times 1}$ 的有限性性质确定 $\mathrm{Fix}\, \phi$ 的有限性性质。

引理 5.1。设 H 是无中心群，A 是有限生成阿贝尔群。那么每个自同构 ϕ: $H \times A \to H \times A$ 都具有以下形式：

$$\phi(h, v) = (\psi(h), \alpha(h) + \gamma(v)), \quad (h, v) \in H \times A,$$

其中 $\psi\colon H \to H$ 和 $\gamma\colon A \to A$ 是自同构，而 $\alpha\colon H \to A$ 是同态。

证明。这实质上是命题 2.3], ，只需将 $\mathbb{Z}^n$ 换成有限生成阿贝尔群即可。证明方法相同。 □

从现在起，在本节中，我们用 $\phi = (\psi, \alpha, \gamma)$ 表示引理 5.1 中的自同构 ϕ。

推论 5.2。设 H 是一个 F 型F_n 群（分别为 FP 型FP_n群），满足 $Z(H) = 1$，并设$\phi = (\psi, \alpha, \gamma)\colon H \times A \to H \times A$ 是一个自同构，其中 A 是有限生成阿贝尔群。则下列断言等价：

1. 不动点集 ϕ 是 F 型$_n$（分别为 FP 型$_n$）；*2.* 不动点集 ψ 和 $P_\phi = \{h \in$ 不动点集$(\psi) \mid \exists a \in A$ 满足 $\alpha(h) = \gamma(a) - a\}$ 是 F 型$_n$（分别为 FP 型$_n$）；*3.* 不动点集 ψ 是 F 型 $_n$（分别为 FP 型 $_n$），且对每个 $\chi \in \Sigma^1($不动点集 $\psi)^c$（分别为 Σ^1 (不动点集 $\psi, \mathbb{Z})^c$），都存在 $(h, a) \in$ 不动点集 $\psi \times A$，使得 $\chi(h) \neq 0$ 且 $\alpha(h) = (\gamma -$ 恒等映射$)(a)$。

证明。将定理 A 应用于 $G = H \times A$，注意到 $Z(H \times A) = 1 \times A$, $\phi = \psi$和$\overline{\phi}_{|Z(G\times A)} = \gamma$。 □

现在我们来处理阿贝尔群的两个自然自同构：恒等映射和取逆映射。

推论 *5.3.* 设 H 是 F_n 型群（分别为 FP_n 型群），且具有 $Z(H) = 1$；设 A 是有限生成阿贝尔群。设 $\phi = (\psi, \alpha,$ 恒等映射$)$：$H \times A \to H \times A$ 是一个自同构。设 α_1 是 α 在 H 的子群不动点集 $Fix\ \psi$ 上的限制。那么，$Fix\,\phi$ 是 F_n 型（分别为 FP_n 型）当且仅当 $\ker \alpha_1$ 是 F_n 型（分别为 FP_n 型）。若如此，则 $Fix\,\psi$ 是 F_n 型（分别为 FP_n 型）。

证明。为简化记号，我们只证明拓扑版本。注意，$(h, v) \in$ 是不动点集 Fix ϕ，当且仅当 $h \in$ 是不动点集 $\mathrm{Fix}\,\psi$，且 $\alpha(h) + v = v$。因此

$$\mathrm{Fix}\,\phi = (\mathrm{Fix}\,\psi \cap \ker \alpha) \times A = \ker \alpha_1 \times A.$$

由于 A 是 F_∞ 型，根据命题 2.1，Fix ϕ 是 F_n 型当且仅当 $\ker \alpha_1$ 是 F_n 型。若如此，根据推论 5.2，$\mathrm{Fix}\,\psi$ 是 F_n 型。 □

例 5.4. 设 $G = A_\Gamma \times \mathbb{Z}$，其中 A_Γ 是一个无中心右角阿廷群。那么对于 α： $A_\Gamma \to \mathbb{Z}$ 和 $\phi =$ (Id α, Id) $\in$ Aut(G)，有 Fix $\phi = \ker \alpha \times \mathbb{Z}$；根据 [2]，它可能具有许多有趣的有限性性质组合，例如，它可能是有限表示的，但不是 FP_2, 型；或者是 F_n 型，但对于任何 $n \geq 1$ 都不是 F_{n+1} 型。

推论 5.5. 设 H 是一个 F 型（分别为 FP 型）的无中心群， A 是一个有限生成阿贝尔群，且 $\phi = (\psi, \alpha, \gamma)$： $G \times A \to G \times A$ 是一个自同构，使得 $Fix(\gamma)$ 是有限的。那么，不动点集 ϕ 是 F 型（分别为 FP 型），当且仅当 不动点集 ψ 是 F 型（分别为 FP 型）。

证明。为简化记号，我们仍然只证明拓扑版本。若 $\mathrm{Fix}\,\phi$ 是 F_n，那么根据推论 5.2，$\mathrm{Fix}\,\psi$ 也是 F_n。

现在假设 Fix ψ是 F_n型。设 $\alpha_1 := \alpha_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}$。由于 Fix γ是有限的，因此 $\mathrm{Fix}\,\gamma \subset A_{tors}$，这意味着 (恒等映射$_A - \gamma$)$(A/A_{tors}) \simeq A/A_{tors}$，所以 (恒等映射$_A - \gamma$)$(A)$是 A的有限指数子群。这意味着 $P_\phi = \alpha_1^{-1}$((恒等映射$_A - \gamma$)(A))是 $\mathrm{Fix}\,\psi$ 的有限指数子群，因此它也是 F_n 型。

根据推论 5.2，$\mathrm{Fix}\,\phi$ 是 F_n 型。 □

推论 5.6。 </style}设 是一个 FF$_n$ 型（分别为FP_n型）的无中心群， A 是一个有限生成阿贝尔群，且 $\phi = (\psi, \alpha, \gamma)$: $H \times A \to H \times A$ 是一个自同构，其中 γ 为取逆映射。那么，不动点集 ϕ 是 $F\mathrm{F}_n$ 型（分别为FP_n型）当且仅当不动点集 ψ是F_n 型（分别为FP_n型）。

证明。根据构造，不动点集 γ 中的每个元素的阶都不超过 2，因此不动点集 γ 是有限的。由此可得推论 5.5。 □

下一个例子说明了这样一种情况： γ 既不是恒等映射，也不是取逆映射，而且不动点集 γ 是无限的。

例 5.7。 考虑 $\mathbb{Z}^2$ 的自同构 $\gamma(x,\ y) = (x,\ -y)$，并设 $\delta\colon H \to \mathbb{Z}$ 是任意群同态。注意，$\gamma \notin \{\mathrm{Id}\ -\mathrm{Id}\}$ 且不动点集 $\mathrm{Fix}\ \gamma = \mathbb{Z}\times 0$ 是无限的。令 $\alpha\colon H \to \mathbb{Z}^2$ 由 $\alpha(g) = (\delta(g),\ 0)$ 给出。那么对于 $\phi = (\mathrm{Id}\ \alpha,\ \gamma) \in \mathrm{Aut}(H \times \mathbb{Z}^2)$，有

$$\mathrm{Fix}\,\phi = \ker(\delta) \times \mathbb{Z} \times \{0\}.$$

如果 $\ker\delta$ 不属于 F_n 型，那么不动点集 $\mathrm{Fix}\ \phi$ 也不属于该类型，即使不动点集 $\mathrm{Fix}\ \psi = \mathrm{Fix}\,\mathrm{Id} = H$ 属于 F_∞ 型。

定理 *C* 的证明。 我们证明拓扑版本。假设 G 具有 $\mathrm{F_nFP_a}$ 性质。设 $\psi \in \mathrm{Aut}\ H$，并设 $\chi\colon H \to \mathbb{R}$ 是一个同态，满足 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Im}\ \chi \leq \mathrm{rk}\ A$。将 χ 与嵌入 $\iota\colon \mathrm{Im}\ \chi \to A$ 复合，可得到一个同态$\alpha\colon H \to A$。如第 5 节所述，定义 $\phi := (\psi,\ \alpha,\ \mathrm{Id}) \in \mathrm{Aut}\ G$。根据假设，不动点集 $\mathrm{Fix}\ \phi$ 属于 F_n 型。应用推论 5.3，可得不动点集 $\mathrm{Fix}\ \psi$ 和 $\ker\alpha_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}$ 均属于 F_n 型。于是 H 具有 $\mathrm{F_nFP_a}$ 性质。由于 $\ker\alpha_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi} = \ker\chi_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}$，因此无需再证明其他内容。

现在假设第二个条件。注意到 $Z(G) = 1\times A$ 蕴含 $G/Z(G) \simeq H$，因此设 $\phi \in$ 自同构群 G 且 $\nu\colon H \to A$ 是一个同态。由引理 5.1，存在映射$\psi \in$ 自同构群 H, $\alpha\colon H \to A$ 以及 $\gamma \in$ 自同构群 A，使得 $\phi = (\psi,\ \alpha,\ \gamma)$。设 $\pi\colon A \to A/I_\phi$ 为投影。考虑映射 $\theta = \varepsilon_\phi + \pi\circ\nu_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}\colon$ 不动点集 $\psi \to A/I_\phi$，由定理 B，只需证明 $\ker(\theta)$ 是 F_n 型的。

注意到 $\varepsilon_\phi = \pi\circ\alpha_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}$。设 $\beta := \alpha + \nu\colon H \to A$ 以及 $\beta_1 := \beta_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}$，使得$\pi\circ\beta_1 = \theta$。

由于 A/I_ϕ 是有限生成阿贝尔群，存在一个同态 $\rho\colon A/I_\phi \to \mathbb{R}$，其核有限。因此，我们可以考虑复合映射 $\chi := \rho\circ\pi\circ\beta\colon H \to \mathbb{R}$。注意到 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Im}\ \chi \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Im}\ \beta \leq \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,A$。根据假设，$\ker(\chi_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi})$ 是 F_n 型的。

定义映射

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}\colon \frac{\ker(\chi_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi})}{\beta_1^{-1}(I_\phi)} &\to \frac{A}{I_\phi}\\ \bar{h} &\mapsto \pi(\beta(h)).\end{aligned}$$

˜注意到，由于 β，该映射是良定义且单射的

$$\bar{g} = \bar{h} \Leftrightarrow \beta_1(g) - \beta_1(h) \in I_\phi \Leftrightarrow \tilde{\beta}(\bar{g}) = \tilde{\beta}(\bar{h}).$$

˜此外，由于 $h \in \ker\chi$ 蕴含 $\chi(h) = \rho\pi\beta(h) = 0$，$\beta$的像包含在$\rho$的核中。因此，第一个商集是有限的。

这意味着 $\ker(\chi_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi})$ 包含 $\beta_1^{-1}(I_\phi)$，且后者是一个有限指数子群，因此 $\beta_1^{-1}(I_\phi) = \ker\pi\circ\beta_1 = \ker\theta$ 也属于 F_n 型。 □

6 两个反例

最后，我们给出两个反例，从而确立问题 1.2 的否定答案，即，群 H 满足 $\mathrm{FGFP}_{\mathrm{a}}$，使得 H' 是有限生成的，但 $H\times\mathbb{Z}$ 不满足 $\mathrm{FGFP}_{\mathrm{a}}$。

6.1 第一个反例

对于第一个反例，我们需要关于 Σ^1 的直积公式。

定理 6.1. *[5]* 设 G_1, G_2 是有限生成群，并设 $\chi\colon G_1\times G_2\to\mathbb{R}$ 是一个同态。那么

$$[\chi]\in\Sigma^1(G_1\times G_2)\iff\begin{cases}[\chi_{|G_1}]\in\Sigma^1(G_1),\ or\\ [\chi_{|G_2}]\in\Sigma^1(G_2),\ or\\ \chi_{|G_1}\neq 0\ and\ \chi_{|G_2}\neq 0.\end{cases}$$

例 6.2. 设 $N=F_2\times F_2$。根据 $[21,\ \text{定理 }4.8]$，N 具有 $\mathrm{FGFP}_{\mathrm{a}}$。接下来，考虑 $H=N\rtimes C_2$，其中 C_2 的生成元 σ 按照 $\sigma(x,y)=(y,x)$ 作用。换句话说，H 是缠绕积 $F_2\wr C_2$。根据 $[18,\ \text{定理 }9.12]$，N 是 H 的特征子群。

设 $\phi\in\mathrm{Aut}\,H$。那么不动子群 $\mathrm{Fix}\ \phi$ 包含 $\mathrm{Fix}\ \phi_{|N}=\mathrm{Fix}\ \phi\cap N$ 作为一个有限指数子群。由于 N 具有 $\mathrm{FGFP}_{\mathrm{a}}$，因此 $\mathrm{Fix}\,\phi$ 是有限生成的。所以 H 具有 $\mathrm{FGFP}_{\mathrm{a}}$。

令 $[\chi]\in S(H)$。由于 σ 有限阶，因此 $\chi(\sigma)=0$，故对于某个特征 $[\chi_1]\in S(F_2)$，有 $\chi_{|N}=(\chi_1,\ \chi_1)$。由定理 6.1，$[\chi_{|N}]\in\Sigma^1(N)$，因此定理 2.2 推出 $[\chi]\in\Sigma^1(H)$。故根据定理 2.2，H' 是有限生成的。

由与 σ 共轭确定的自同构 $\psi\colon H\to H$ 的不动点集为 $\psi=C_H(\sigma)=\Delta\times C_2$，其中 $\Delta=\{(x,\ x)\in F_2\times F_2\mid x\in F_2\}\simeq F_2$。因此，根据定理 2.2，$\Sigma^1(\text{不动点集 }\psi)=\emptyset$。

现在，令 $[\chi]\in S(H)$ 为一个特征，使得 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Im}\,\chi\leq\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathbb{Z}=1$，即，一个离散特征。由于 $0\neq\chi_{|N}=(\chi_1,\ \chi_1)$，因此 $\chi_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}\neq 0$，故 $\chi_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}\in\Sigma^1(\text{不动点集 }\psi)^c=S(\text{不动点集 }\psi)$。根据定理 2.2，核 $\chi_{|\,\mathrm{Fix}\,\psi}$ 不是有限生成的，因此根据定理 C，$H\times\mathbb{Z}$ 不具有 $\mathrm{FGFP}_{\mathrm{a}}$。

6.2 第二个反例

对于第二个反例，我们需要了解一些 Artin 群的知识。

给定一个有限单纯图 Γ，其边标记为大于 1 的整数，以 Γ 为底层图的 Artin 群记作 A_Γ，它由一个有限表示给出，其中生成元对应于 Γ 的顶点，关系为

$$\underbrace{abab\cdots}_{m \text{ factors}} = \underbrace{baba\cdots}_{m \text{ factors}}$$

对于 Γ 中连接顶点 a 和 b、标记为 m 的每条边。

根据这个定义，如果 Γ 的所有边都标记为大于或等于 3 的整数，我们就称 Artin 群 A_Γ 为大类型。我们还称 A_Γ 无穷自由，如果 Γ 完全。

每个 Artin 群 A_Γ 都与一个考克斯特群相关联，该群由 A_Γ 对 Γ的顶点平方所生成的正规闭包取商得到。如果这个考克斯特群 W 是有限的，那么 A_Γ 有一个 Garside 元 Δ，使得A_Γ 的中心由 Δ 或 Δ^2生成。例如，如果 Γ 是一条连接顶点 a 和 b、标记为 $m > 2$ 的单边，那么 A_Γ的 Garside 元为 $\Delta = aba\cdots\underbrace{\quad}_{m\text{因子}} = ba\underline{b}\cdots\underbrace{\quad}_{m\text{因子}}$。一个关于 Artin 群的优秀综述可见 [15]。

我们目前还没有 Artin 群自同构的完整描述，但 Vaskou [20] 已对大类型、无穷自由的 Artin 群给出了这一描述，Jones 和 Vaskou [12] 也利用该描述计算了这些群的不动子群。就本文的目的而言，介绍下面的结果便已足够。

推论 6.3。 *[12]*设 A_Γ 是一个大类型、无穷自由的 ***Artin*** 群。那么， A_Γ具有 FGFP_a 性质。此外，若 ψ 是由保标签的图自同构 σ诱导的 A_Γ 的自同构，则

$$\operatorname{Fix}\psi = A_{\operatorname{Fix}\sigma} * F,$$

其中，不动点集σ 是 σ 的不动点子图； F 是由群 A_e的 ***Garside*** 元生成的自由群，其中这些群对应于所有顶点被 σ互换的边 e 。

证明。 由 [12, 推论 1.3]和 [12,定理 4.4]可得。 □

我们还需要一些 Artin 群的 BNS 不变量。

定理 6.4。 *[16]* 设 A_e 为底层图只有一条标记为 $m \geq 3$ 的边 e 的 ***Artin*** 群。则

1. *If* $m = 2k$, $k > 1$, *then* $S(A_e) = S^1$ *and* $\Sigma^1(G_e) = S^1 \setminus \{(1,-1),(-1,1)\}$.

2. 若 $m = 2k+1$，则 $\Sigma^1(A_e) = S(A_e) = \{\pm 1\}$。

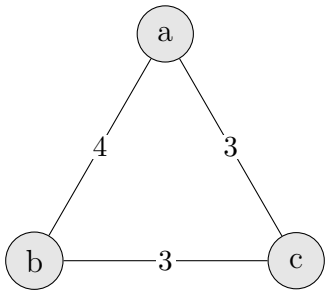
在定理 6.4 的假设下，若 e 的端点为 v 和 w，则 $[\chi] \in \Sigma^1(A_e)^c$ 当且仅当 m 为偶数且 $\chi(v) = -\chi(w) \neq 0$。我们将上述边称为"$\chi$-死边"。我们还称 Γ的子图 $\mathcal{L}$为支配子图，若 Γ 的每个顶点都与$\mathcal{L}$的某个顶点相邻。

定理 6.5。 *[1]* 设 A_Γ 是一个 ***Artin*** 群，且 Γ 的回路秩为 ***1***（即，$\pi_1(\Gamma)$ 是无限循环群）。定义活子图 $L = L(\chi)$ 为从 Γ 中移除所有满足 $\chi(v) = 0$ 的顶点 $v \in V(\Gamma)$ 以及所有χ-死边后得到的子图。于是

$$\Sigma^1(A_\Gamma) = \{[\chi] \in S(A_\Gamma) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ is a connected and dominant subgraph of } \Gamma\}.$$

定理 6.5 实际上是关于 Artin 群的一般猜想的一部分，近期已有一些进展（参见 [9]）。现在我们可以继续讨论第二个反例。

例 6.6. 设 Γ为图



并设 $H := A_\Gamma = \langle a, b, c \mid aca = cac, bcb = cbc, abab = baba \rangle$，这是一个无穷大型自由 Artin 群。于是，由推论 6.3，H 具有 FGFPa；并且，由于它是秩 3 的大型群，因此无中心（参见 [12, 注 2.11]）。

为了计算 H 的 BNS 不变量，注意到，由于 Artin 群的表示，对每个 $[\chi] \in S(H)$，我们都有 $\chi(a) = \chi(b) = \chi(c) \neq 0$，因此 $\Sigma^1(H) = S(H) = \{\pm 1\}$；由定理 6.5 可知，$H'$ 由定理 2.2 可知是有限生成的。

另一方面，考虑由图自同构 $\sigma\colon \Gamma \to \Gamma$ 诱导的自同构 $\psi \in \mathrm{Aut}\, H$，其中 $\sigma(a) = b$、$\sigma(b) = a$ 且 $\sigma(c) = c$。由推论 6.3，$\mathrm{Fix}\, \psi = \langle c \rangle * \langle abab \rangle$，它是自由群，故由定理 2.2，$\Sigma^1(\mathrm{Fix}\, \psi) = \emptyset$。

现在考虑 $\chi\colon H \to \mathbb{R}$由 $\chi(a) = \chi(b) = \chi(c) = 1$给出。于是 $\chi_{|\text{不动点集 } \sigma} \neq 0$因此 $[\chi_{|\,\mathrm{Fix}\, \psi}] \in S(\text{不动点集 } \psi) = \Sigma^1(\text{不动点集 } \psi)^c$。根据定理 C，$H \times \mathbb{Z}$不具有 FGFPa。

致谢

本研究部分获 FINAPESQ-UEFS 和 FAPEMIG 项目资助 [APQ- 02750-24]。

参考文献

[1] K. Almeida 和 D. Kochloukova。《回路秩 1 Artin 群的 Σ^1-不变量》。*Forum Mathematicum*, 27(5):2801–2822, 2015.[2] M. Bestvina 和 N. Brady。《群的 Morse 理论与有限性性质》。*Invent. Math.*, 129(3):445–470, 1997.[3] M. Bestvina 和 M. Handel。《自由群的 Train tracks 与自同构》。*Annals of Mathematics*, 135(1):1–51, 1992.[4] R. Bieri。《离散群的同调维数》。Queen Mary College 数学讲义。Queen Mary College 纯数学系，伦敦，第二版，1981.[5] R. Bieri、W. D. Neumann 和 R. Strebel。《离散群的一个几何不变量》。*Invent. Math.*, 90(3):451–477, 1987.[6] R. Bieri 和 B. Renz。《自由分解上的赋值与群的高阶几何不变量》。*Comment. Math. Helv.*, 63(3):464–497, 1988.[7] K. S. Brown。《群上同调》，《数学研究生文本》第 87 卷。Springer-Verlag，纽约，1994。1982 年原版的修订重印本。[8] C. de Miranda e Pereiro 和 W. C. Sgobbi。《某些曲面的辫群与纯辫群的 BNS 不变量》。*Communications in Algebra*, 53(4):1688–1712, 2025.[9] M. E. Ferrer。《Artin 群的 Σ^1-不变量与 Σ^2-不变量》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2501.08692*, 2025.[10] R. Geoghegan。《群论中的拓扑方法》。Springer，2008.[11] S. M. Gersten。《自由群自同构的不动点》。*Advances inMathematics*, 64(1):51–85, 1987.

[12] O. Jones 和 N. Vaskou。《Artin 群中的不动子群》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2407.11839*, 2024.[13] D. H. Kochloukova、C. Martínez-Pérez 和 B. E. Nucinkis。《有限群作用于广义 Thompson 群时的不动点》。*Israel Journal of Mathematics*, 187(1):167–192, 2012.[14] J. Lei、J. Ma 和 Q. Zhang。《关于有限生成不动子群性质的一则短笺》。*Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 第 1–11 页，2024.[15] J. McCammond。《Artin 群的神秘几何》。*Winter Braids* 讲义, 4:1–30, 2017.[16] J. Meier。《Artin 群的几何不变量》。*Proceedings of the LondonMathematical Society*, 74(1):151–173, 1997.[17] A. Minasyan 和 D. Osin。《相对双曲群自同构的不动子群》。*Quarterly journal of mathematics*, 63(3):695–712, 2012.[18] P. M. Neumann。《群的标准缠绕积的结构》。*Mathematische Zeitschrift*, 84:343–373, 1964.[19] M. Roy 和 E. Ventura。《自由阿贝尔群与自由群的直积中的不动子群及自不动闭包的计算》。*Journal of Pure and Applied Algebra*, 224(4):106210, 2020.[20] N. Vaskou。《大类型无穷自由 Artin 群的自同构》。*Geome-triae Dedicata*, 219(1):16, 2025.[21] Q. Zhang、E. Ventura 和 J. Wu。《曲面群中的不动子群是压缩的》。*International JournalofAlgebraandComputation*, 25(05):865–887, 2015.