arXiv:2512.16073v1 [cond-mat.stat-mech] 18 Dec 2025

变速广义莱维行走中反常扩散的完整分解

Abhijit Bera*Department of Physics, University of Houston andTexas Center for Superconductivity, University of Houston*

KevinE. Bassler**Department of Physics, University of HoustonTexas Center for Superconductivity, University of Houston andDepartment of Mathematics, University of Houston*（日期：2025年12月19日）

变速广义莱维行走（VGLWs）是一类时空耦合随机过程，在统一的参数化框架中涵盖了此前研究的多种模型。其动力学由离散随机步长（即飞行段）构成，在每个飞行段中，行走者的速率随已用时间和飞行段总时长确定性地变化。我们研究 VGLWs 的反常扩散行为，并将其分解为三种导致中心极限定理（CLT）失效的基本构成效应进行分析：反映增量长程相关的约瑟夫效应、由具有无限方差的重尾步长分布引起的诺亚效应，以及与统计老化和非平稳性相关的摩西效应。结果表明，VGLWs 中的反常扩散通常由这三种效应的非平凡组合共同产生，而非归因于某一种单一机制。值得注意的是，我们发现，在 VGLW 框架中，诺亚指数 L（用于量化诺亚效应的强度）没有上界，这揭示出相较于此前研究的莱维行走类模型，反常扩散呈现出更为丰富且极端的图景。

I. 引言

扩散过程描述粒子随时间推移而扩散的现象，这是许多随机步长或增量累积的结果。若假设这些增量相互独立、同分布且具有有限方差，则中心极限定理（CLT）[1, 2]适用。在这种情况下，随着增量数量增加，粒子位移的分布会趋近于高斯分布。此外，该分布的方差随时间线性增长。满足中心极限定理的扩散过程称为正常扩散过程。维纳过程 [3]是一个经典例子。

然而，许多实验系统呈现出反常扩散，其中粒子的均方位移（MSD）随时间按如下方式标度变化

$$\langle x^2(t)\rangle \propto t^{2H}, \quad H \neq \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

人们提出了各种随机连续时间随机游走（CTRW）模型，以捕捉这类异常动力学的本质 [4–11]。本文聚焦于变速广义莱维行走 *L´évy* 行走 （VGLWs） [12, 13]。VGLWs 提供了一种广泛的范式，涵盖了许多先前研究的 CTRW 类模型。在 VGLW 框架中，粒子独立地迈出步长，每步的持续时间随机取自幂律分布。每步行进的距离按步持续时间的某个幂次标度，而运动方向是随机的。重要的是，在每一步中，粒子的速度都会随步持续时间和已用时间按照确定性函数演变。

当中心极限定理被违背时，就会出现反常扩散。它可以分解为三种基本的构成效应，每种效应都对应一种独特的中心极限定理违背机制 [8]：增量之间的相关性，称为约瑟夫效应；具有无限方差的增量分布，称为诺亚效应；以及增量的非平稳性或统计老化，称为摩西效应。这三种机制可以单独作用，也可以组合起来，共同产生反常扩散。每种效应都可由一个独立的标度指数定量刻画，以反映其相对强度。这种分解为识别反常行为的成因提供了强有力的框架，即使无法获知底层微观动力学的细节也不例外。尤其是，它有助于分离实验系统中的主导机制，并构建更准确的现实过程模型。

反常扩散的完整分解最初在 [8] 中针对多种随机过程进行了研究。在 [14], 中，该框架被扩展到老化确定性系统。随后， [15] 将其进一步应用于大跳跃机制下的广义 L´evy 行走（GLWs），此时跳跃时间分布的均值为无穷大。在 [16], 中，该分解被应用于多种现实世界系统，涵盖从分子的宏观运动到鸟类迁徙等大尺度现象。研究人员利用这种分解考察了不同的现实世界过程，包括金融和生物系统 [17–22]。此外

* bassler@uh.edu

除了分析和实证方法之外，研究人员还提出了机器学习技术，用于直接从单粒子轨迹推断扩散模型，并估计所有相关的标度指数 [23–27]。

本文对 VGLW 在其完整的三维参数空间中的反常扩散进行了解析分解。尽管此前已有研究分析了参数空间的一部分 [15], ，我们的工作提供了全面的论述。我们发现了多种动力学相，每种相均由三种基本构成效应的不同组合所表征，这些效应共同产生反常扩散行为。一项重要发现是，在 VGLW 框架中，诺亚效应的强度没有上限。早期研究发现，用于量化诺亚效应的诺亚指数 L 最大值小于或等于 1。相比之下，我们的分析表明，在 VGLW 中，指数 L 可以无限增大，这揭示出反常扩散的图景比以往认识到的更加丰富，也更加极端。

II. 变速广义莱维行走 (VGLW)

反常扩散广泛存在于各种现实世界系统中 [28–32]。例如，金融市场中的日内价格波动 [8, 33, 34], 拥挤的细胞内环境中的粒子运动 [32],耗散光晶格中的冷原子 [35], 以及闪烁的量子点 [36, 37]。

人们开发了多种随机模型来解释这种行为。连续时间随机游走 [38] 及其扩展模型是应用最广泛的模型之一。在连续时间随机游走中，高斯空间增量发生在随机时刻，这些时刻取自重尾（按幂律衰减）的等待时间分布。莱维飞行通过允许步长服从重尾分布 [39, 40]，扩展了这一框架。莱维行走则是进一步的推广，它在位移与每一步的持续时间之间引入了确定性耦合[41–43]。在标准莱维行走中，粒子在每一步期间以常数速度运动，且步持续时间服从重尾分布 [44, 45]。在广义莱维行走中 [46], ，速度与步持续时间呈非线性耦合，但在每一步期间仍保持不变。

变速广义莱维行走 [12, 47] 是一种更一般的时空耦合连续时间随机游走。该过程由相互独立的步组成，其持续时间服从重尾分布，按 $\tau^{-\gamma-1}$衰减。在本文中，我们将步时间分布设为

$$\psi(\tau) = \gamma\tau_0^{\gamma}\tau^{-1-\gamma}\,\Theta(\tau \geq \tau_0), \tag{2}$$

其中 τ_0 是最小步持续时间。在每一步中，行走者都沿随机方向移动，其速率随时间确定性变化，

$$\mathrm{v}_{\nu,\eta}(\tau, t') = \eta c\,\tau^{\nu-\eta} t'^{\,\eta-1}, \tag{3}$$

其中 ν、 η、 γ 是正定参数，会影响标度性质； c 是正定常数，不会影响标度性质。通过调节 η，VGLW 模型可以在若干已知过程中连续过渡： $\eta = 1$ 可还原为 GLW [12, 13]； $\eta = \nu$ 可得到德鲁德模型 [7, 48]；而极限 $\eta \to 0$ 和 $\eta \to \infty$ 分别对应跳跃–等待–跳跃和等待–跳跃–等待随机游走。

VGLW 的均方位移（MSD）已在 [47], 中计算，而在动力学由最长飞行主导的区域 $\gamma < 1$ 中，位移传播子已在 [49]中推导得出。凭借其内在的时空耦合和灵活的参数化方式，VGLW 为物理、生物和金融系统中的反常输运建模提供了一个统一而灵活的框架。

III. VGLW 中反常扩散的构成指数

VGLW 中的扩散由均方位移（MSD）表征,

$$\langle x^2(t)\rangle \equiv \langle [x(t) - x(0)]^2\rangle, \tag{4}$$

其标度行为

$$\langle x^2(t)\rangle \sim t^{2H}, \tag{5}$$

定义了赫斯特指数 H [50, 51]。对于遵循中心极限定理（CLT）的过程，$H = \frac{1}{2}$ （正常扩散）。当 $H \neq \frac{-1}{2}$ 时，中心极限定理不再成立，过程呈现反常扩散。

如引言中所述，中心极限定理失效源于三种构成机制：(i) 长程相关性（约瑟夫效应），(ii) 重尾增量分布（诺亚效应），以及 (iii) 时间非平稳性或老化（摩西效应）。现在，我们通过定义指数 J、L 和 M 以及用于提取这些指数的统计量，对 VGLW 中的这些效应进行形式化描述。

A. Joseph 指数 J

约瑟夫效应量化了增量之间的长程相关性。它可以根据时间平均均方位移（TAMSD）的标度行为计算得出,

$$\left\langle \overline{x^2(t,\Delta)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{t-\Delta}\int_0^{t-\Delta} \left[x(t_0+\Delta) - x(t_0)\right]^2 dt_0 \right\rangle, \tag{6}$$

其标度关系为

$$\left\langle \overline{x^2(t,\Delta)} \right\rangle \sim t^{\,2L+2M-2}\,\Delta^{2J}. \tag{7}$$

该指数满足 $0 \leq J \leq 1$，其中 $J = 0$ 对应完全反相关的增量，而 $J = 1$ 对应完全相关的增量

序列。还可通过重标极差统计（R/S） [52], 小波分解 [53], 和去趋势波动分析（DFA） [54]来估算 J 。

B. Moses 指数 M

摩西效应刻画时间非平稳性或统计老化。它由绝对速度 [15] 的一阶矩得到:

$$\langle |v| \rangle \sim t^{\,M-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

与 J 不同，Moses 指数没有内在的上限或下限。

C. 诺亚指数 L

诺亚效应量化重尾增量统计。它由速度 [15] 的二阶矩得到:

$$\langle v^2 \rangle \sim t^{\,2L+2M-2}. \tag{9}$$

诺亚指数满足 $L \geq \frac{1}{2}$ ；数值越大，动力学越呈现重尾且由涨落主导的特征。

D. 标度关系及其在 VGLWs 中的应用

异常扩散的完整分解——将（J, L, M）与总体扩散指数H联系起来——是在 [8]中提出的。 [55], [15]运用标度格林–久保关系表明，广义 L´évy 行走满足

$$H = J + L + M - 1. \tag{10}$$

同样的推导可以自然地扩展到 VGLW 框架，因为格林–久保关系的标度形式在这一过程中同样成立。因此，一旦根据速度和 TAMSD 统计确定了指数 J、 L 和 M ，便可通过公式（10）立即得到赫斯特指数 H 。

在本研究中，我们根据 VGLWs 的速度分布计算 L 和 M ，并运用标度格林 – 久保方法 [55, 56]，通过 TAMSD 确定 J 。赫斯特指数则取自 [47]中推导出的解析均方位移标度。我们分析的一项关键结果是，与先前研究的莱维行走型模型不同，诺亚指数 L 没有上界。数值结果证实了这一预测（见第 7 节）。

IV. L 与 M : VGLW

根据式 8 和式 9，要确定指数L 和 M ，需要计算绝对速度的一阶和二阶矩。原则上，这些矩可以通过对速度传播子 $p(\mathrm{v}\ t)$ 积分得到。然而，该传播子的显式形式取决于参数范围，因此直接计算十分繁琐。关于 $p(\mathrm{v}\ t)$ 的详细讨论见附录 A。

一种更简洁统一的方法，是使用固定观测时间 t 时，总步长持续时间 τ 与当前步内已用时间 t' 的联合分布，记为 $p(t,\ \tau,\ t')$。这种表示方式使得所有参数范围都能纳入同一个解析框架中处理。

分布 $p(t,\ \tau,\ t')$ 可以表示为对所有可能步数求和:

$$p(t,\tau,t') = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t,\tau,t'), \tag{11}$$

其中， $p_n(t,\ \tau,\ t')$ 表示过程在时间 t 处于第 n 步、该步的预定持续时间为 τ 且该步内已用时间为 t' 的概率。以处于第 n 步为条件，可得

$$\begin{aligned} p_n(t,\tau,t') = \Big\langle \delta(\tau - t_n)\, \delta\Big[t' - \Big(t - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\Big)\Big] \\ \times I\Big(\sum_{i=1}^{n-1} t_i < t < \sum_{i=1}^{n} t_i\Big)\Big\rangle, \end{aligned} \tag{12}$$

其中， t_i 是第 i 步的持续时间，而 $I(\cdot)$ 是示性函数，当其自变量为真时取值为 1，否则为 0。

对变量 $t \to z$、 $\tau \to s$ 和 $t' \to u$ 进行拉普拉斯变换，可得到闭式表达式 [13, 57]

$$\widetilde{p}(z,s,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{p}_n(z,s,u) = \frac{1}{u+z}\, \frac{\widetilde{\psi}(s) - \widetilde{\psi}(s+u+z)}{1-\widetilde{\psi}(z)}. \tag{13}$$

逐步进行拉普拉斯逆变换[13]，我们得到

$$\widetilde{p}(z,\tau,u) = \psi(\tau)\, \frac{1 - e^{-(u+z)\tau}}{(u+z)\,[1-\widetilde{\psi}(z)]}, \tag{14}$$

随后

$$\widetilde{p}(z,\tau,t') = \psi(\tau)\, \frac{e^{-zt'}}{1-\widetilde{\psi}(z)}\, \Theta(\tau - t'), \tag{15}$$

因此，完整的分布为

$$p(t,\tau,t') = \psi(\tau)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-\widetilde{\psi}(z')}\right] \Theta(t-t')\, \Theta(\tau - t'), \tag{16}$$

其中， z' 是对应于 $t - t'$的拉普拉斯变量。

逆拉普拉斯项取决于平均步持续时间是有限还是无限:

a. 情况 $\gamma < 1$: 发散的平均步长持续时间

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-\widetilde{\psi}(z')}\right] \approx \frac{(t-t')^{\gamma-1}}{|\Gamma(1-\gamma)|\,\Gamma(\gamma)\,t_0^{\gamma}}. \tag{17}$$

b. 情形 $\gamma > 1$: 有限的平均步长持续时间

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-\widetilde{\psi}(z')}\right] = \frac{\gamma-1}{\gamma\,t_0}. \tag{18}$$

利用 $p(t,\ \tau,\ t')$，速度矩可得

$$\begin{aligned}\langle|\mathrm{v}|\rangle &= \iint |\mathrm{v}|\,p(t,\tau,t')\,d\tau\,dt' \\ &= \iint |\eta c\,\tau^{\nu-\eta}t'^{\,\eta-1}|\;p(t,\tau,t')\,d\tau\,dt',\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}^2\rangle &= \iint \mathrm{v}^2\,p(t,\tau,t')\,d\tau\,dt' \\ &= \iint \eta^2c^2\,\tau^{2\nu-2\eta}t'^{\,2\eta-2}\;p(t,\tau,t')\,d\tau\,dt'.\end{aligned} \tag{20}$$

在接下来的章节中，我们将分别针对情形 $\gamma < 1$ 和 $\gamma > 1$ 求出这些表达式，并推导相应的 Moses 指数和 Noah 指数 M 和 L。

A. $\gamma < 1$

在这种情况下，利用式 19，我们可以求得绝对速度的一阶矩:

$$\begin{aligned}\langle|\mathrm{v}|\rangle \;=\; &\int_0^t\int_{t'}^{\infty}\frac{\gamma}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)}\eta c\tau^{\nu-\eta}t'^{\eta-1}\tau^{-1-\gamma} \\ &\times(t-t')^{\gamma-1}\Theta\left(\tau-\tau_0\right)d\tau dt'\end{aligned} \tag{21}$$

上述关于 τ 的积分仅在$\nu < \gamma + \eta$时才有效。此外，我们可以将 $(t-t')^{\gamma-1}$ 展开为
$t^{\gamma-1}\left(1-\frac{(\gamma-1)t'}{t}+\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)t'^2}{2t^2}+O\left(\left(\frac{t'}{t}\right)^2\right)\right)$.

该积分的上限将从展开式的所有项中得到 $t^{\nu-1}$。对于下限，我们只保留较大的项，即 $t^{\gamma-1}$。

$$\langle|\mathrm{v}|\rangle \approx \frac{\gamma\eta c}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)(\eta+\gamma-\nu)}\left(kt^{\nu-1}-\frac{t^{\gamma-1}\tau_0^{\nu-\gamma}}{\nu-\gamma}\right) \tag{22}$$

其中 k 是一个常数，且 $k \approx \frac{1}{\nu-\gamma}-\frac{\gamma-1}{\nu-\gamma+1}+\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}\frac{}{\nu-\gamma+2}()$。

我们也可以根据式 20 得到 v 的二阶矩:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}^2\rangle \;=\; &\int_0^t\int_{t'}^{\infty}\frac{\gamma\eta^2c^2}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)}\tau^{2\nu-2\eta}t'^{2\eta-2}\tau^{-1-\gamma} \\ &\times(t-t')^{\gamma-1}\Theta\left(\tau-\tau_0\right)d\tau dt'\end{aligned} \tag{23}$$

上述积分仅在$2\nu < \gamma + 2\eta$时才有效（关于 τ）。我们也可以对这个积分展开 $(t-t')^{\gamma-1}$。

对展开式中的所有项取积分上限，会得到 $t^{2\nu-2}$。对于下限，我们只保留较大的项 $t^{\gamma-1}$。

$$\langle \mathrm{v}^2\rangle \approx \frac{\gamma\eta^2c^2}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)(2\eta+\gamma-2\nu)}\left(k't^{2\nu-2}-\frac{t^{\gamma-1}\tau_0^{2\nu-\gamma-1}}{2\nu-\gamma-1}\right) \tag{24}$$

其中 k' 是一个常数，且 $k \approx \frac{1}{2\nu-\gamma-1}-\frac{\gamma-1}{2\nu-\gamma}+($
$\frac{}{\gamma-1)(\gamma-2)2(2\nu-\gamma+1)}$。

根据上述计算，在 $\gamma < 1$区间内会出现三种不同的情况。该区间内 L 和 M指数的推导已计算 [15]。

A.1. $\gamma > \nu$: In this case, the moments scale as $\langle|\mathrm{v}|\rangle \propto t^{\gamma-1}$ and $\langle \mathrm{v}^2\rangle \propto t^{\gamma-1}$, leading to $M = \gamma - \frac{1}{2}$ and $L = 1 - \frac{\gamma}{2}$.

A.2. $\gamma < \nu < \frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}$：在此，我们得到 $\langle|\mathrm{v}|\rangle \propto t^{\nu-1}$ 和$\langle \mathrm{v}^2\rangle \propto t^{\gamma-1}$，因此得到 $M = \nu - \frac{1}{2}$ 和 $L = \frac{\nu}{2} - \gamma + 1$。

A.3. $\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2} < \nu < \frac{\gamma}{2}+\eta$: 在此区域，标度关系变为 $\langle|\mathrm{v}|\rangle \propto t^{\nu-1}$ 和 $\langle \mathrm{v}^2\rangle \propto t^{2\nu-2}$，从而得到 $M = \nu - \frac{1}{2}$ 和 $L = \frac{1}{2}$。

B. $\gamma > 1$

在本小节中，我们计算 $\gamma > 1$ 区域的 L 和 M 指数。从方程 19 和方程 20 出发，可得

$$\begin{aligned}\langle|\mathrm{v}|\rangle \;=\; &\int_0^t\int_{t'}^{\infty}(\gamma-1)\eta c\tau^{\nu-\eta}t'^{\eta-1}\tau^{-1-\gamma}(t-t')^0 \\ &\times\Theta\left(\tau-\tau_0\right)d\tau dt'\end{aligned} \tag{25}$$

上述关于 τ 的积分仅在$\nu < \gamma + \eta$时有效。

$$\langle|\mathrm{v}|\rangle \approx \frac{(\gamma-1)\eta c}{(\eta+\gamma-\nu)(\nu-\gamma)}(t^{\nu-\gamma}-t^0\tau_0) \tag{26}$$

类似地，

$$\langle \mathrm{v}^2\rangle = \int_0^t\int_{t'}^{\infty}(\gamma-1)\eta^2c^2\tau^{2\nu-2\eta}t'^{2\eta-2}\tau^{-1-\gamma}(t-t')^0 \tag{27}$$

上述关于 τ 的积分仅在$2\nu < \gamma + 2\eta$时有效。

$$\langle \mathrm{v}^2\rangle \approx \frac{(\gamma-1)\eta^2c^2}{(2\eta+\gamma-2\nu)(2\nu-\gamma-1)}(t^{2\nu-\gamma-1}-t^0\tau_0^{2\nu-\gamma-1}) \tag{28}$$

在这里，速度矩的行为与 $\gamma < 1$ 的情况显著不同。一阶矩 $\langle|\mathrm{v}|\rangle$ 由 $t^{\nu-\gamma}$ 主导（当 $\nu > \gamma$ 时），而二阶矩 $\langle \mathrm{v}^2\rangle$ 则由 $t^{2\nu-\gamma-1}$ 决定（当 $\nu > \frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}$ 时）。由此得到三种不同的情况:

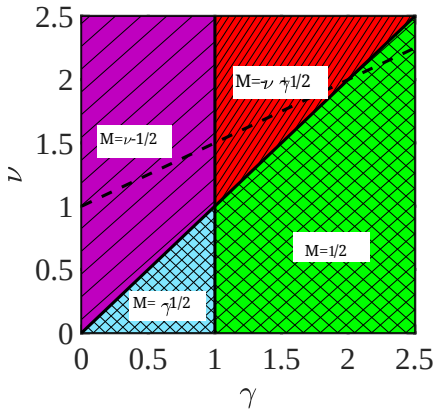

图 1：变速广义 L´évy 行走的莫西斯效应相图。点线标示了 $\eta = 1$ 无限区间的起始位置

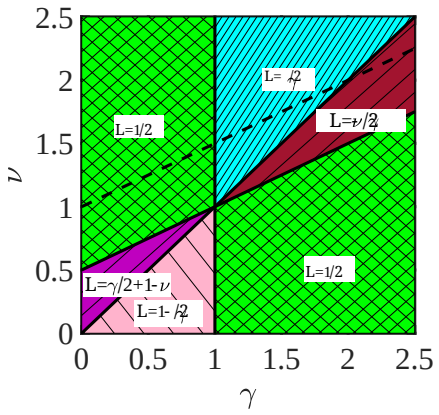

图 2：变速广义 L´évy 行走的诺亚效应相图。点线标示了 $\eta = 1$ 无限区间的起始位置

B.1. $\nu < \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}$：在此区间内，两个速度矩均随时间保持常数，即 $\langle|\mathrm{v}|\rangle \propto t^0$ 和 $\langle \mathrm{v}^2\rangle \propto t^0$，因此 $M = \frac{1}{2}$ 和 $L = \frac{1}{2}$。

B.2. $\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} < \nu < \gamma$：这里，一阶矩保持常数，$\langle|\mathrm{v}|\rangle \propto t^0$，但二阶矩按 $\langle \mathrm{v}^2\rangle \propto t^{2\nu-\gamma-1}$ 的规律增长，从而得到 $M = \frac{1}{2}$ 和 $L = \nu - \frac{\gamma}{2}$。

B.3. $\gamma < \nu < \frac{\gamma}{2} + \eta$：在这一区域，两个速度矩都随时间增长：$\langle|\mathrm{v}|\rangle \propto t^{\nu-\gamma}$ 和$\langle \mathrm{v}^2\rangle \propto t^{2\nu-\gamma-1}$。由此得到 $M = \nu - \gamma + \frac{1}{2}$ 和 $L = \frac{\gamma}{2}$。

对于 $\gamma < 1$ 和 $\gamma > 1$，VGLW 的 L 和 M 指数与 GLW 的指数一致，但非标度区间除外；当 $2\nu \geq \gamma + 2\eta$时便会出现非标度区间。在此区间内，速率的一阶矩和二阶矩发散，标度关系不再成立。图1和图2展示了 VGLW 的相图，并根据 Moses 指数和 Noah 指数总结了不同的动力学区间。虚线以上为非标度区间，虚线表示标度域的边界。在两幅图中，虚线均对应于 $\eta = 1$这一情形。

V. 针对 VGLW 的 J

如第三节所述，Joseph 指数 J 可由时间平均均方位移的标度关系得到，其定义见公式（6）。对于 GLW，这一计算已在 [13]中完成。这里我们将分析扩展到变速广义莱维行走，并表明 J与 GLW 情形相同；特别是，它仍独立于参数 η。

VGLW 的时间平均均方位移通过标度 Green–Kubo 关系 [55] 与速度自相关函数相关：

$$\left\langle \overline{x^2(t,\Delta)} \right\rangle \approx \frac{2}{t}\int_0^t dt_0 \int_0^\Delta dt_1 \int_0^\Delta dt_2 \, \langle \mathrm{v}(t_1+t_0)\, \mathrm{v}(t_2+t_0)\rangle \tag{29}$$

该关系在极限 $t \gg \Delta$ 下成立。根据式 7 中的标度形式，可从上述表达式对 Δ 的依赖关系中提取 Joseph 指数 J。

对于 VGLW，速度自相关函数（VCF） $C(t,\ t+\Delta) = \langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle$ 具有广义 Green–Kubo 框架[55]，给出的标度形式

$$C(t, t+\Delta) \simeq C_0\, t^{q-2}\, \phi\left(\frac{\Delta}{t}\right), \tag{30}$$

其中，$C_0 > 0$ 是常数，$q > 1$ 是标度指数，而 $\phi(z)$ 是普适标度函数，用于表征其对比值 Δ/t 的依赖关系。该标度函数满足以下渐近界 [55]

$$\phi(z) < c_1\, z^{-\delta_1}, \qquad 2 - q \leq \delta_1 < 1, \qquad z \to 0, \tag{31}$$

$$\phi(z) < c_u\, z^{-\delta_u}, \qquad \delta_u > 1 - q, \qquad z \to \infty, \tag{32}$$

其中，c_1 和 c_u 是正的常数。这些条件确保式（29）收敛，并使得能够解析地确定时间平均均方位移的标度形式。

将 VGLW 的 VCF 的标度 Green–Kubo 形式代入公式 (29)，并完成所得积分，可得其 TAMSD 按 Δ^{2J} 标度，这与公式 7 一致。因此，VGLW 的 Joseph 指数与 GLW 的结果相同，表明 J 与速度整形参数 η无关。

A. VGLW 的速度关联函数

为计算变速广义 Lévy 行走（VGLW）的速度关联函数（VCF）$\langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle$，我们采用 Godr`eche 和 Luck [57]提出的解析框架。令 $C_n(t,\Delta) \equiv \langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle_n$ 表示轨迹中恰好经历 n 次更新事件对 VCF 的贡献，这些轨迹发生在

区间 $(0,t)$ 内。对所有可能的 n 求和，即可得到完整的 VCF：

$$\langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle = C(t,\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t,\Delta). \tag{33}$$

区间（t, $t+\Delta$）内发生一次更新，会破坏 $\mathrm{v}(t)$ 与 $\mathrm{v}(t+\Delta)$ 之间的相关性。因此，速度自相关函数（VCF）唯一的非零贡献来自在 t 和 $t+\Delta$ 之间没有发生更新的轨迹，这意味着两个观测时刻都处于同一步内。

速度自相关函数（VCF）的完整推导，包括其渐近标度形式及其对参数（γ, ν, η）的依赖，见附录 C。

B. VGLW 的时间平均均方位移

从演化开始时（$t=0$）观测到的过程对应于非老化行走。相比之下，当系统在 $t=0$ 启动，却仅在等待时间 $t_a>0$之后才开始观测时，该过程会表现出老化。对于老化系统，VGLW 的系综平均均方位移（EAMSD）定义为 [55]

$$\left\langle x^2_{t_a}(t)\right\rangle = \left\langle \left[x(t_a+t)-x(t_a)\right]^2\right\rangle, \tag{34}$$

它可以通过速度关联函数（VCF） [55, 58]计算得到。该均方位移的显式形式在弱老化区间（$t_a \ll t$）和强老化区间（$t_a \gg t$）有所不同。对于 VGLWs，文献 [47] 已采用另一种方法推导出老化均方位移。

老化系综平均时间平均均方位移定义为

$$\left\langle \overline{x^2_{t_a}(\Delta,t)}\right\rangle = \frac{1}{t-\Delta}\int_{t_a}^{t_a+t-\Delta} \left\langle \left[x(t_0+\Delta)-x(t_0)\right]^2\right\rangle dt_0. \tag{35}$$

其行为还取决于系统处于弱老化还是强老化状态。

为确定 Joseph 指数 J，我们采用 VGLW 的弱老化时间平均均方位移。在 $t_a \ll t$ 且 $t_a \to 0$ 的极限下，老化时间平均均方位移会简化为公式（6）中的非老化表达式。不过，我们注意到，弱老化和强老化状态下对滞后时间 Δ 的依赖相同。

下面列出 VGLW 的弱老化均方位移的一般形式。

对于 $\gamma<1$,

$$\left\langle \overline{x^2(t,\Delta)}\right\rangle \propto \begin{cases} \frac{\gamma\eta^2c^2\Gamma(2\nu-\gamma-1)}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)\Gamma(2\nu-\gamma+\eta)}t^{2\nu-2}\Delta^2, & \gamma/2+\eta<\nu \\ \frac{2\gamma\eta^2c^2B(1+\gamma+\eta-2\nu,\eta)}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)(2\nu-\gamma)(2\nu-\gamma+1)}t^{\gamma-1}\Delta^{1+2\nu-\gamma}, & \gamma/2<\nu<\gamma/2+1/2 \\ \frac{2\gamma\eta^2c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)}\frac{B(1+\gamma+\eta-2\nu,\eta)}{(\gamma-2\nu)}t^{\gamma-1}\Delta, & \nu<\gamma/2 \end{cases} \tag{36}$$

对于 $\gamma>1$,

$$\left\langle \overline{x^2(t,\Delta)}\right\rangle \propto \begin{cases} \frac{\gamma\eta^2c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}\frac{1}{(2\nu-\gamma)(2\nu-\gamma-1)}t^{2\nu-\gamma-1}\Delta^2, & \gamma/2+\eta<\nu \\ \frac{2\gamma\eta^2c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}\frac{B(1+\gamma-2\nu,\eta)}{(2\nu-\gamma)(2\nu-\gamma+1)}\Delta^{1+2\nu-\gamma}, & \gamma/2<\nu<\gamma/2+1/2 \\ \frac{2\gamma\eta^2c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}\frac{B(1+\gamma-2\nu,\eta)}{(\gamma-2\nu)}\Delta, & \nu<\gamma/2 \end{cases} \tag{37}$$

利用式 36 和 37，可写为

$$J \propto \begin{cases} 1, & \gamma/2+\eta<\nu \\ (1+2\nu-\gamma)/2, & \gamma/2<\nu<\gamma/2+1/2 \\ 1/2, & \nu<\gamma/2 \end{cases} \tag{38}$$

非标度区间出现在直线 $2\nu \geq \gamma+2\eta$ 上方。图 3 展示了基于 Joseph 指数总结不同区间的相图。虚线表示 $\eta=1$ 的标度区间边界。

VI. VGLW 的 H FOR

赫斯特指数 H 由均方位移的标度关系确定，其定义见公式 4。VGLWs 的均方位移已在 [47]中通过解析方法推导；此处我们总结与分析相关的主要结果。

传播子 $P(x,\ t)$ 表示在时刻 t 于位置 x 找到行走者的概率密度，可表示为

$$P(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_0^t \mathrm{d}t'\ A(x',t')\,r(x-x'\mid t-t'), \tag{39}$$

其中，$A(x',\ t')$ 是在 $(A,\ )$ 完成最后一个完整步的联合密度

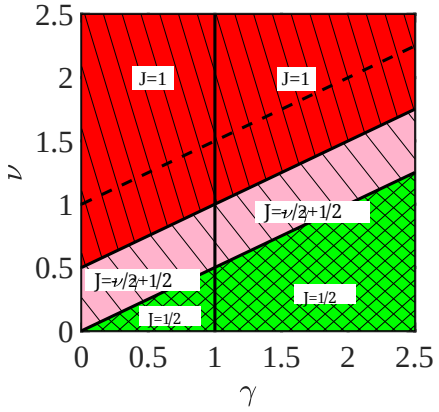

图 3：变速广义 L´évy 行走的约瑟夫效应相图。虚线标示 $\eta = 1$ 无限区间的起始点。

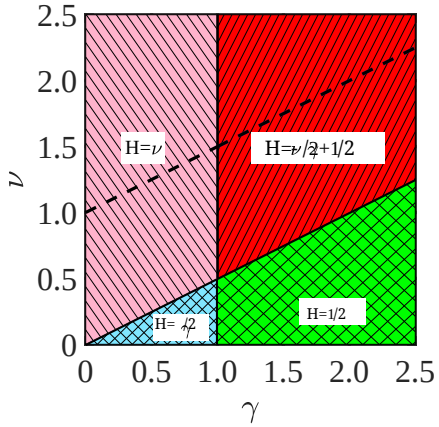

图4：变速广义 L´évy 行走的赫斯特效应相图。虚线标示了 $\eta = 1$无限区间的起始位置

，而 $r(\cdot)$ 是与轨迹剩余（未完成）部分相关的传播子。

对 P、A 和 r 进行傅里叶变换，并对 $k \to 0$ 展开，得到

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(k,t) &= 1 - \frac{k^2}{2}\,x_2(t) + o(k^2),\\ \widetilde{r}(k,t) &= r_0(t) - \frac{k^2}{2}\,r_2(t) + o(k^2),\\ \widetilde{A}(k,t) &= A_0(t) - \frac{k^2}{2}\,A_2(t) + o(k^2),\end{aligned} \tag{40}$$

其中，$x_2(t)$ 为均方位移，而 $A_2(t)$、$r_2(t)$ 分别为已完成位移和未完成位移的二阶矩。零阶矩记为 $A_0(t) = \int A(x,\ t)\,dx$ 以及$r_0(t) = \int r(x,\ t)\ dx$。

应用拉普拉斯变换和卷积定理可得

$$\hat{P}(k,s) = A_0(s)\ r_0(s) - \frac{k^2}{2}[A_0(s)\,r_2(s) + A_2(s)\,r_0(s)] + o(k^2), \tag{41}$$

因此，均方位移的拉普拉斯变换为

$$\langle x^2(s)\rangle = A_0(s)\,r_2(s) + A_2(s)\,r_0(s). \tag{42}$$

根据上述表达式在小-s 下的行为，可得赫斯特指数为

$$H \propto \begin{cases}\nu, & \gamma/2 < \nu < \gamma/2 + \eta,\\ \gamma/2, & \nu < \gamma/2,\end{cases} \qquad (\gamma < 1), \tag{43}$$

and

$$H \propto \begin{cases}\nu - \gamma/2 + 1/2, & \gamma/2 < \nu < \gamma/2 + \eta,\\ 1/2, & \nu < \gamma/2,\end{cases} \qquad (\gamma > 1). \tag{44}$$

这些结果表明，VGLW 的赫斯特指数与相应 GLW 的结果一致。参数 η 仅影响前因子，不会影响均方位移标度。当 $2\nu \geq \gamma + 2\eta$ 时，会出现非标度（无限）区间。

所得动力学区间总结于图4中，图中展示了 H的相图；虚线表示 η =1 的标度区域边界。

VII. VGLW 相图

即使引入额外参数 η，VGLW 模型的整体相结构仍与 GLW 十分相似。主要变化来自非标度（无限）区间的新边界，该边界移至区域

$$2\nu \geq \gamma + 2\eta.$$

从物理角度看，这一扩展使变速广义莱维行走能够进入广义莱维行走无限区间扇形内的参数空间区域。直接结果是，诺亚指数 L 可以超过 1——这在经典 GLW 框架中是不可能的。文献 [15] 已对 $\gamma < 1$ 的相图作过描述；本文在此给出完整的 VGLW 相图，如图5所示。

不同的动力学区间如下：

1. **Region A:** $\gamma < 1$ **and** $\nu < \gamma/2$

$$H = \gamma/2, \quad J = 1/2, \quad L = 1 - \gamma/2, \quad M = \gamma - 1/2.$$

No Joseph effect is present (increments are uncorrelated). Anomalous diffusion arises solely from the Moses (aging) and Noah (heavy-tailed) effects.

2. **B 区域：** $\gamma < 1$ **和** $\gamma/2 < \nu < \gamma$

$$H = \nu, \quad J = \tfrac{1+2\nu-\gamma}{2}, \quad L = 1 - \gamma/2, \quad M = \gamma - 1/2.$$

三种效应均有贡献。存在 Joseph 相关性，但并非达到最大程度；Moses 效应与诺亚效应相互耦合。

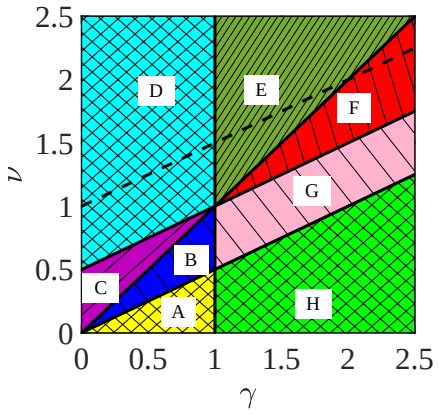

图5：基于完整标度指数集合（H、 J、 L、 M）绘制的 VGLW 总体相图。虚线标示 $\eta = 1$ 进入非标度（无限）区间的起点。

3. **区域 C：** $\gamma < 1$ **和** $\gamma < \nu < \gamma/2 + 1/2$

$$H = \nu, \quad J = \tfrac{1+2\nu-\gamma}{2}, \quad L = 1-\nu+\gamma/2, \quad M = \nu-1/2.$$

同样，所有构成效应均处于活跃状态。Joseph 相关性未达到最大程度；诺亚效应与 Moses 仍然相互依存。

4. **区域 D：** $\gamma < 1$ **和** $\gamma/2 + 1/2 < \nu < \gamma/2 + \eta$

$$H = \nu, \quad J = 1, \quad L = 1/2, \quad M = \nu - 1/2.$$

约瑟夫效应达到最大（完全相关增量）。诺亚效应消失（方差有限）。反常扩散通过 Moses（老化）效应得以持续。

5. **区域E：** $\gamma > 1$ **和** $\gamma < \nu < \gamma/2 + \eta$

$$H = \nu-\gamma/2+1/2, \quad J = 1, \quad L = \gamma/2, \quad M = \nu-\gamma+1/2.$$

三种效应均有贡献。约瑟夫效应达到最大；增量具有重尾特征，并随时间老化。

6. **区域F：** $\gamma > 1$ **和** $\gamma/2 + 1/2 < \nu < \gamma$

$$H = \nu - \gamma/2 + 1/2, \quad J = 1, \quad L = \nu - \gamma/2, \quad M = 1/2.$$

约瑟夫效应达到最大；摩西效应不存在（平稳增量分布）。反常扩散源于 Joseph 相关性和诺亚效应。

7. **区域G：** $\gamma > 1$ **和** $\gamma/2 < \nu < \gamma/2 + 1/2$

$$H = \nu-\gamma/2+1/2, \quad J = \nu-\gamma/2+1/2, \quad L = 1/2, \quad M = 1/2.$$

只有约瑟夫效应有贡献，且其贡献并非最大。Noah效应和摩西效应均不存在。

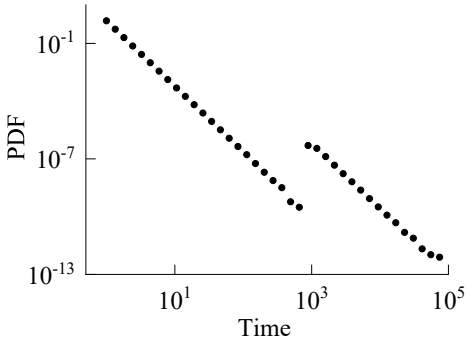

图6：参数$p = 4.375 \times 10^{-4}$ 和 $t^* = 1000$下，采用重要性抽样得到的时间分布概率密度函数。数据点表示对数分箱数据。

8. **区域H：** $\gamma > 1$ **和** $\nu < \gamma/2$

$$H = 1/2, \quad J = 1/2, \quad L = 1/2, \quad M = 1/2.$$

三种构成效应均不存在。扩散为正常扩散（均方位移 $\propto t$）。

9. **无穷（非标度）区域：** 标度关系在以下条件下失效

$$2\nu \geq \gamma + 2\eta,$$

并且分解为（H、 J、 L、 M）也不再有效。

图5总结了一般 η下整个VGLW参数空间中的这些区域。虚线表示 $\eta = 1$的标度边界。

VIII. L>1的数值验证

为验证我们的解析预测——Noah指数 L 可以超过1——我们针对参数组 $\gamma = 2.4$、 $\nu = 4.0$和 $\eta = 3.0$，数值计算了绝对速度的一阶矩和二阶矩，即 $\langle|\mathbf{v}|\rangle$和 $\langle\mathbf{v}^2\rangle$。这些参数对应于图5中相位E内的一个点，在此处，我们的解析框架预测 $L > 1$。当 γ取如此大的值时，要对由公式2给出的分布重尾中持续时间较长的步进行良好的统计采样，变得十分困难。为解决这一问题，我们采用了一种有偏（重要性）采样技术 [13]。我们没有直接从公式2中的 $\psi(t)$ 抽取步持续时间，而是从定义为 $\psi(t)$ 的修正分布中对~进行采样，其形式为

$$\widetilde{\psi}(t) = (1-p)\,\psi(t) + p\,\psi(t \mid t > t^*), \quad (45)$$

$$\psi(t \mid t > t^*) = \Theta(t - t^*)\,\frac{\psi(t)}{\int_{t^*}^{\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t}. \quad (46)$$

~图 6 在双对数尺度上展示了参数为 $p = 0.0004375$ 和 $t^* = 1000$ 时 $\gamma = 2.4$ 的 $\psi(t)$。

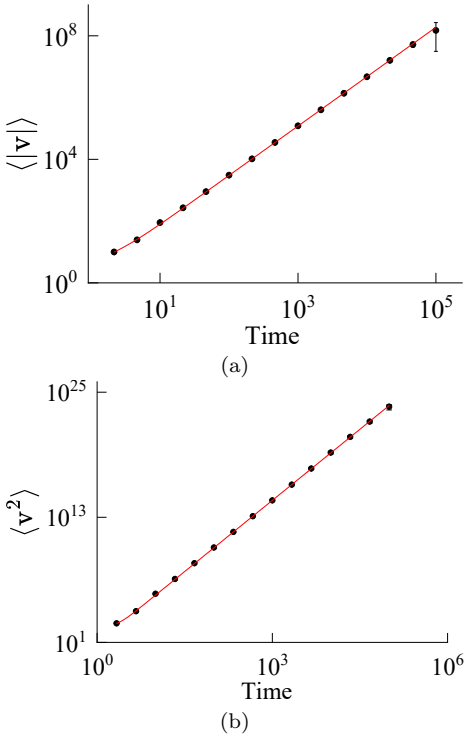

图 7：参数为$\gamma = 2.4$、 $\nu = 4.0$和 $\eta = 3.0$时的数值模拟结果。(a) 系综平均绝对速度。红线为斜率为 1.60 ± 0.0076的拟合直线。我们的解析预测值为 1.6。(b) 系综平均速度平方。红线为斜率为 4.55 ± 0.01的拟合直线。我们的解析预测值为 4.6。我们使用了 10^7 次随机游走来获得这些系综平均值。根据这些数值结果，利用式 8 和式 9 可得$M = 2.10 \pm 0.0076$ 和 $L = 1.18 \pm 0.0176$。解析预测值为 $M = 2.1$ 和 $L = 1.2$。

~由于抽样采用的是 $\psi(t)$，而非 $\psi(t)$，因此必须对结果重新加权，以消除抽样偏差。轨迹中每一步的权重取决于该步的持续时间 t，其表达式为

$$L_{\text{step}}(t) = \frac{\psi(t)}{\widetilde{\psi}(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & t < t^*, \\ \dfrac{1}{1-p+p/\lambda}, & t > t^*, \end{cases} \tag{47}$$

其中

$$\lambda = \int_{t^*}^{\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{48}$$

与整个游走相关联的总权重为

$$L_{\text{walk}} = \left(\frac{1}{1-p}\right)^{N_{t<t^*}} \left(\frac{1}{1-p+p/\lambda}\right)^{N_{t>t^*}}, \tag{49}$$

其中， $N_{t<t^*}$ 和 $N_{t>t^*}$ 分别表示步行过程中持续时间短于和长于 t^*的步数。

采用参数为 $p = 4.375 \times 10^{-4}$ 和 $t^* = 10^3$的有偏抽样，我们得到了图 7 所示的结果，对应于 $\langle|v|\rangle$ 和 $\langle v^2\rangle$ 在 $\gamma = 2.4$、 $\nu = 4.0$和 $\eta = 3.0$时的情况。从这些数值模拟中我们发现，在这些参数取值下，诺亚指数为 $L = 1.18 \pm 0.0176$，与解析预测值 $L = 1.2$大致吻合，误差为 2σ。

IX. 讨论与结论

VGLW 为许多此前研究的连续时间随机游走（CTRW）模型提供了一个统一框架 [59]。通过调节参数 η，该模型可在多个重要的极限情形之间平滑过渡。对于 $\eta = 1$，VGLW 化为 GLW [12]，；而对于 $\nu = \eta = 1$，它们进一步退化为标准的 L´évy 行走模型 [43, 46]。在$\eta \to 0$ 和 $\eta \to \infty$ [47]的极限下，其动力学分别对应于等待–跳跃和跳跃–等待 L´évy 飞行过程。当 $\nu = \eta$时，该模型等价于德鲁德型动力学，此时速度仅取决于步进的已用时间 [7, 48]。

在本文中，我们通过将 VGLW 中的反常扩散分解为 Joseph 、 Noah 和 Moses 效应，对其进行分析。这种分解揭示了九种不同的动力学相，每一种都由这三种构成机制的不同组合所支配。尽管该模型包含三个控制参数，但η 的作用有限：它只影响非标度（无限）区间边界的位置，在该区间内，标准扩散标度失效。

早期研究 [15] 仅考虑了 $\gamma < 1$区间，此时平均步长持续时间发散，动力学由单个长步主导。本文将这一分解扩展至 $\gamma > 1$区间，此时平均步长持续时间有限，统计特性由许多步的集体贡献共同产生。对于 $\gamma < 1$，反常扩散始终由约瑟夫效应、Noah 效应和摩西效应共同产生，形成五种不同的动力学相。相比之下，对于 $\gamma > 1$，系统可能表现出反常扩散，也可能表现出正常扩散。当 $\nu < \gamma/2$时，扩散为正常扩散，所有指数均取值 $1/2$。当 $\gamma/2 < \nu < \gamma/2 + 1/2$时，反常扩散仅由约瑟夫效应引起。对于$\gamma/2 + 1/2 < \nu < \gamma$，反常扩散是 Noah 效应与约瑟夫效应共同作用的结果。当 $\gamma < \nu < \gamma/2 + \eta$时，三种效应同时起作用。最后，对于 $\nu > \gamma/2 + \eta/2$，系统进入非标度（无限）区间，此时通常的标度律不再适用。

VGLW 框架的一个显著特点是，在.....范围内

$$\gamma/2 + \eta/2 > \nu > \gamma/2 + 1/2 \quad \text{with} \quad \eta > 1,$$

诺亚指数 L 可以超过 1。这与此前对 L´évy 游走类过程的研究结果形成对比，在那些过程中，$L \leq 1$ 被认为是上限 [8, 15]。我们的

结果表明，在 $\gamma > 1$状态下， L 可以超过 1，这说明在 VGLW 模型中，诺亚指数不存在内在上限。

这一扩展尤为重要，因为许多现实世界系统都处于 $\gamma > 1$ 状态。例子包括物理、生物和地质输运过程，例如混沌平流、地下水流、分子运动和动物觅食动力学 [60–67]。我们的结果使人们能够辨别，在此类系统中，约瑟夫、Noah 或 Moses 哪种构成效应主导着观测到的反常行为。因此，所得框架捕捉了 VGLW 型输运的基本物理特征，并加深了我们对驱动复杂反常扩散现象之机制的理解。

附录 A：VGLW 的速度传播子

本节推导 VGLW 的速度传播子， $p(\mathrm{v}\ t)$，其定义为在时间 t观测到行走者速度为 v 的概率密度。与 GLW 不同，VGLW 中的速度在一个步持续时间内并非常数；相反，它由步开始后的已用时间 t' 和总步长持续时间 τ 确定性地决定。

为计算 $p(\mathrm{v}\ t)$，我们首先引入条件传播子 $p(\mathrm{v}\ t,t')$，它给出在行走者于当前步中已用时间为 t' 的条件下，在时刻 t观测到速度 v 的概率密度。对所有可取的 t' 积分，即可得到完整传播子。

利用式 2 中的步长持续时间分布，并将 τ 换元为 v，我们得到已用时间 t' 固定时的条件速度分布：

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{v},t') &= \psi(\tau)\left|\frac{d\tau}{d\mathrm{v}}\right| \\ &= \frac{\gamma\tau_0^{\gamma}(\eta c)^{\gamma/(\nu-\eta)}}{\nu-\eta}\, t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}\, |\mathrm{v}|^{-\frac{\gamma}{\nu-\eta}-1}.\end{aligned} \tag{A1}$$

当已用时间 t' 固定时，未完成步的速度与步持续时间的联合分布为

$$\phi(\mathrm{v},\tau,t') = \chi(\mathrm{v},t')\,\delta\left[\left(\frac{|\mathrm{v}|}{\eta c t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} - \tau\right]\Theta(\tau-t'). \tag{A2}$$

由于动力学关于方向对称， $\phi(\mathrm{v}\ \tau,t') = \phi(-\mathrm{v}\ \tau,t')$。

逃逸概率 $W(\mathrm{v}\ t,\ t')$ 定义为已用时间为 t' 的行走者在时间 t 之后继续当前步的概率，因而为

$$\begin{aligned}W(\mathrm{v},t,t') &= \int_t^{\infty}\phi(\mathrm{v},\tau,t')\,d\tau \\ &= \chi(\mathrm{v},t')\,\Theta\left[\left(\frac{|\mathrm{v}|}{\eta c t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} - t\right]\Theta(t-t').\end{aligned} \tag{A3}$$

更新密度 $R(t)$ 表示在时间 t 开始新一步的概率密度。由于它仅取决于步长持续时间分布，因此与广义莱维行走的更新密度相同。根据参考文献 [68],

$$R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-\widetilde{\psi}(z)}\right], \tag{A4}$$

其中 $\widetilde{\psi}(z)$ 是 $\psi(t)$ 的拉普拉斯变换。

条件传播子对应于时刻 $t-t'$ 发生一次更新，随后的一步至少持续到时刻 t。因此，它可表示为

$$\begin{aligned}p(\mathrm{v},t,t') &= R(t-t')\,W(\mathrm{v},t',t') \\ &= R(t-t')\,\chi(\mathrm{v},t')\,\Theta\left[\left(\frac{|\mathrm{v}|}{\eta c t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} - t'\right]\Theta(t-t') \\ &\approx \frac{\gamma\tau_0^{\gamma}(\eta c)^{\gamma/(\nu-\eta)}}{\nu-\eta}\,|\mathrm{v}|^{-\frac{\gamma}{\nu-\eta}-1}\,R(t-t')\,t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}} \\ &\quad\times\Theta\left[\left(\frac{|\mathrm{v}|}{\eta c t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} - t'\right]\Theta(t-t').\end{aligned} \tag{A5}$$

完整速度传播子通过对所有已用时间积分得到,

$$p(\mathrm{v},t) = \int_0^t p(\mathrm{v},t,t')\,dt'. \tag{A6}$$

上述构造仅在 $\nu \neq \eta$ 时有效。在特殊情形 $\nu = \eta$ 下，速度仅取决于已用时间,

$$\mathrm{v}_{\nu,\eta} = \pm\eta c\, t'^{\eta-1}. \tag{A7}$$

由于速度与总步长持续时间 τ 无关，所有持续时间超过 t' 的步长贡献相同。因此，条件传播子可简化为

$$p(\mathrm{v},t,t') = R(t-t')\,\delta\big(|\mathrm{v}| - \eta c t'^{\eta-1}\big)\,\Theta(t-t')\int_{t'}^{\infty}\psi(\tau)\,d\tau. \tag{A8}$$

完整传播子 $p(\mathrm{v}\ t)$ 同样通过对 t' 积分得到。

在接下来的章节中，我们将分析由这些表达式得到的 $p(\mathrm{v}\ t)$ 的结构和渐近行为。详细计算见附录 B。

1. $\gamma < 1$

对于 $\gamma < 1$，平均步长持续时间发散，且式 A4 中定义的更新率 $R(t)$ 随 $R(t) \propto t^{\gamma-1}$ 标度变化。在此机制下，速度传播子呈现普适标度，且与微观时间尺度 t_0 无关。

a. $\nu < 1$

我们首先考虑 $\nu < 1$ 的情况，并研究参数 η 变化时 $p(\mathrm{v}\ t)$ 的结构如何演变。当 $\eta = 1$ 时，模型简化为 GLW，而 $\gamma < 1$ 和 $\nu < 1$ 对应的传播子已在 [68] 中讨论。

a. 情形 $\nu < \eta$ 对于固定的 t，速度传播子为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_0\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-\eta}-1}\, t^{\gamma+\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t), \\ k_1\, t^{\gamma-1}\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t), \end{cases} \tag{A9}$$

其中 k_0 和 k_1 是公式 B5 中给出的常数，临界速度为

$$\mathrm{v}_c(t) = \eta c\, t^{\nu-1}.$$

传播子是分段连续的：在 $\mathrm{v}_c(t)$ 以下，标度明确依赖于 η；而在 $\mathrm{v}_c(t)$ 以上，标度与 η 无关，源自无限不变密度。

b. 情形 $\nu = \eta$ 随着 η 减小并趋近于 ν，传播子变为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t), \\ \dfrac{t^{\gamma-1}}{(\eta-1)\gamma\,|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)} & \\ \times \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t). \end{cases} \tag{A10}$$

在这种情况下，$p(\mathrm{v}\ t)$ 完全由无限不变密度决定。

c. 情形 $\nu > \eta$ 对于 $\nu > \eta$，传播子为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t), \\ k_0\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-\eta}-1}\, t^{\gamma+\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}} & \\ -k_1\, t^{\gamma-1}\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t). \end{cases} \tag{A11}$$

在 $\mathrm{v}_c(t)$ 以上，传播子是连续的。第一项决定依赖于 η 的标度，第二项则反映了无限不变密度的贡献。

b. $\nu > 1$

现在我们考虑 $\gamma < 1$，其中 $\nu > 1$，并再次改变 η。*a.* 情形 $\nu < \eta$ 对于固定的 t，传播子为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_0\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-\eta}-1}\, t^{\gamma+\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}} & \\ -k_1\, t^{\gamma-1}\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t), \\ 0, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t). \end{cases} \tag{A12}$$

传播子在 $\mathrm{v}_c(t)$ 以下连续。依赖于 η 的项决定标度，而第二项同样源自无限不变密度。

b. 情形 $\nu = \eta$ 当 $\nu = \eta$ 时，传播子简化为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \dfrac{t^{\gamma-1}}{(\eta-1)\gamma\,|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)} & \\ \times \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t), \\ 0, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t). \end{cases} \tag{A13}$$

与之前一样，传播子是连续的，且由无限不变密度主导。

c. 情形 $\nu > \eta$ 最后，对于 $\nu > \eta$，我们得到

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_1\, t^{\gamma-1}\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t), \\ k_0\, \mathrm{v}^{-\frac{\gamma}{\nu-\eta}-1}\, t^{\gamma+\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t). \end{cases} \tag{A14}$$

传播子是分段连续的：在 $\mathrm{v}_c(t)$ 以下，标度与 η 无关，且由无限不变密度决定；而在 $\mathrm{v}_c(t)$ 以上，标度则显式依赖于 η。

图 8 展示了在具有代表性的参数选择下，速度传播子在双对数尺度上的变化。步长时间分布为 $\psi(\tau) = \gamma\tau^{-1-\gamma}\Theta(\tau \geq 1)$。数值结果证实了解析预测，并展示了 $p(\mathrm{v}\ t)$ 在 $\gamma < 1$ 下的普适标度。

2. $\gamma > 1$

对于 $\gamma > 1$，平均步长持续时间有限，且式 A4 中定义的更新率 $R(t)$ 趋近于常数，$R(t) \propto t^0$，即不随时间变化。

a. $\nu < 1$

对于 γ 和 ν这一特定取值，我们将缓慢调节参数 η，以观察 $p(\mathrm{v}\ t)$的性质。我们将从 $\nu < \eta$ 开始。对于固定的 t，$p(\mathrm{v}\ t)$将会是

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma-1}{\nu-1}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{1+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\left(t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\right), & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{A15}$$

其中临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$。对于这一参数取值，$p(\mathrm{v}\ t)$是分段连续函数。在 $\mathrm{v}_c(t)$ 之前，标度依赖于 η。在 $\mathrm{v}_c(t)$ 之后，标度与 η 无关。

我们会将 η 参数降低至 $\nu = \eta$

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}}{\gamma(\eta-1)}t^0\,\frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{A16}$$

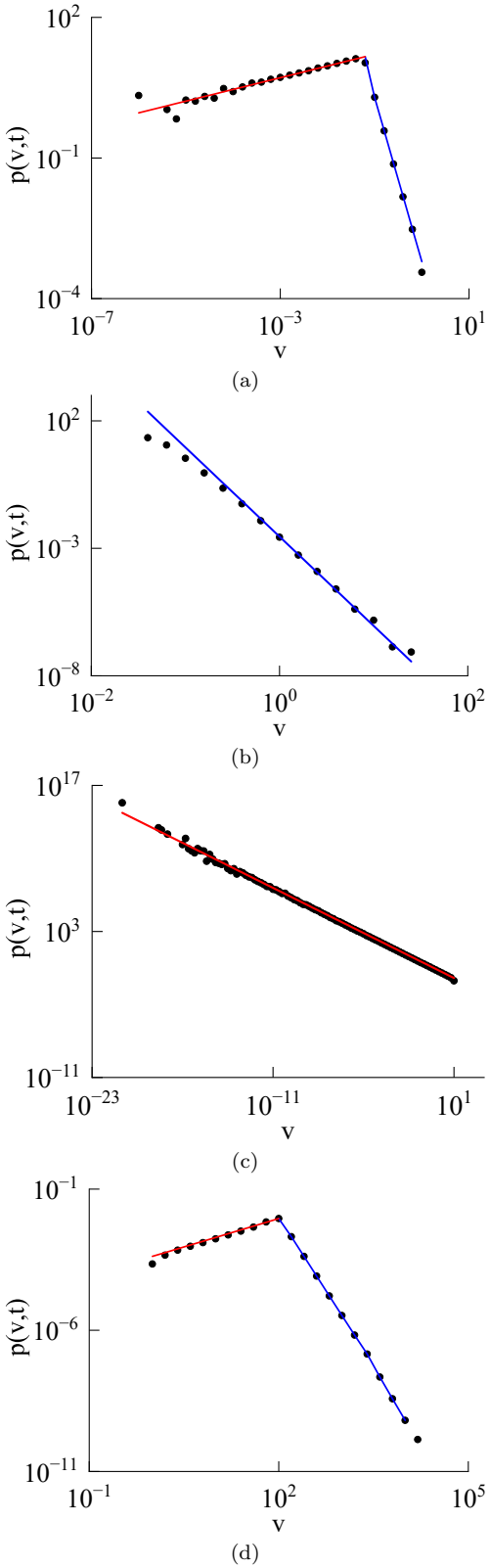

图 8：在固定$t = 10^6$下，通过 10^6 次实现得到的 $\gamma = 0.5$ $p(\mathrm{v}\ t)$速度传播子。(a) $\nu < \eta$ 和$\nu < 1$ ($\nu = 0.8, \eta = 1.2$)；(b) $\nu > \eta$ 和 $\nu < 1(\nu = 0.8, \eta = 0.6)$；(c) $\nu < \eta$ 和 $\nu > 1(\nu = 1.1, \eta = 2.9)$；(d) $\nu > \eta$ 和 $\nu > 1(\nu = 1.3, \eta = 1.1)$。数据点表示模拟结果，实线表示解析预测。红线和蓝线分别表示 $\mathrm{v}_c(t)$ 前后的 $p(\mathrm{v}\ t)$。

我们会进一步降低 η 参数，使得 $\nu > \eta$对于固定的 t， $p(\mathrm{v}\ t)$ 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)} \left(\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1} t^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}+1} \right. & \\ \left. -t^0 \mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}} \right), & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{A17}$$

其中临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$。在此区间，$p(\mathrm{v}\ t)$的标度取决于 η

b. $\nu > 1$

对于这一参数范围，我们仍将从$\nu < \eta$开始

对于固定的 t， $p(\mathrm{v}\ t)$ 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)} \left(\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1} t^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}+1} \right. & \\ \left. -t^0 \mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}} \right), & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ 0, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{A18}$$

其中临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$ 我们将降低 η 参数，直到 $\eta = \nu$

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}}{\gamma(\eta-1)} t^0 \frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ 0, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{A19}$$

我们将进一步降低 η 参数，使得 $\nu > \eta$对于固定的 t， $p(\mathrm{v}\ t)$ 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)} \left(t^0 \mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}} \right), & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)} \mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1} \left(t^{1+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}} \right), & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{A20}$$

其中临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$。
在这一参数范围内， $p(\mathrm{v}\ t)$ 的标度依赖于 η

附录 B：传播子的推导

本附录详细推导变速广义莱维行走（VGLWs）的速度传播子 $p(\mathrm{v}\ t)$。基于附录 A 中介绍的更新框架和联合时间分布，我们通过对一步内所有可能的已用时间进行积分，推导出完整的速度传播子。我们还得到了 $p(\mathrm{v}\ t)$ 的显式渐近形式。

1. $\nu \neq \eta$

公式A5包含海维赛德阶跃函数 $\Theta(\cdot)$，该函数仅在 $\left(\mathrm{v}_{\eta c t' \eta-1} \right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} > t'$时取值为 1

根据参数 ν和 η 的具体取值，会出现四种不同的情形，分别对应参数空间中的不同区域。对于 $\gamma<1$ 和 $\gamma>1$，都必须分别考虑这四种情形。

a. $\gamma<1$

根据 [68]， $R(t)$的拉普拉斯变换，可写为 $\widetilde{R}(s)=\frac{1}{1-\widetilde{\psi}(s)}$，其中 s是与 t共轭的拉普拉斯变量。对于情况 $\gamma<1$，拉普拉斯逆变换$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-\widetilde{\psi}(s)}\right]$在公式17 中求得。由该表达式， $R(t-t')$对应的时域形式为

$$\begin{aligned}R(t-t') &\approx \frac{(t-t')^{\gamma-1}}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)t_0^{\gamma}}\\ &\approx \frac{1}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)t_0^{\gamma}}t^{\gamma-1}\left(1-\frac{t'}{t}\right)^{\gamma-1}\\ &\approx \frac{1}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)t_0^{\gamma}}\left(t^{\gamma-1}\left(1-\frac{(\gamma-1)t'}{t}\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)t'^2}{2t^2}+O\left(\left(\frac{t'}{t}\right)^2\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{B1}$$

$R(t-t')$的这一展开式将在后续方程中使用。

a. 情况 ***1***： $\nu<1$ 和 $\nu>\eta$ 由于 $\nu>\eta$，指数 $1/(\nu-\eta)$ 为正；又由于 $\nu-1\leq 0$，函数 $t'^{\nu-1}$ 单调递减。因此，不等式$\left(\frac{v}{\eta c\,t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}}>t'$等价地改写为

$$\Theta\left[\left(\frac{v}{\eta c\,t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}}-t'\right]=\Theta\left(t'-\left(\frac{v}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}\right). \tag{B2}$$

子情形：$\left(t<\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}\right)$ 在此极限下，对于所有 $0\leq t'\leq t$，Heaviside函数（公式B2）的自变量均为0，因此被积函数为零。

Sub-Case:$\left(t>\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}\right)$

$$\begin{aligned}p(\mathrm{v},t)&=\int_0^t p(\mathrm{v},t,t')\,dt'\\ &\approx \frac{\gamma t_0^{\gamma}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^t R(t-t')t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}\\ &\quad\times\Theta\left(t'-\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}\right)dt'\\ &\approx \frac{\gamma(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_{\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}}^t(t-t')^{\gamma-1}\\ &\quad\times t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}dt'\end{aligned} \tag{B3}$$

利用公式B1并进行化简，可得 $p(v,\ t)$的如下表达式。上积分限的贡献产生了t的幂次相同的项，而对于下积分限，我们只保留 t的最高次幂项

$$\begin{aligned}p(\mathrm{v},t)\approx k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right)\\ -k_1t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\end{aligned} \tag{B4}$$

其中， k_0 和 k_1 为常数。

$$\begin{aligned}k_0&=\frac{\gamma(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)((\eta-1)\gamma+(\nu-\eta))}\\ &\quad-\frac{(\gamma-1)\gamma(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)((\eta-1)\gamma+2(\nu-\eta))}+\ldots\\ k_1&=\frac{\gamma(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-1}-\frac{1}{\nu-1}}}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)((\eta-1)\gamma+(\nu-\eta))}\end{aligned} \tag{B5}$$

总结上述方程的结果，对于（$\gamma<1,\nu<1$&$\nu>\eta$），我们可以写为p(v t)

$$p(\mathrm{v},t)\approx\begin{cases}0, & t<t_c(\mathrm{v})\\ k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right) & \\ -k_1t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & t>t_c(\mathrm{v})\end{cases} \tag{B6}$$

Where critical time $t_c(\mathrm{v})=\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$

对于固定的 t， p(v t)为

$$p(\mathrm{v},t)\approx\begin{cases}0, & \mathrm{v}<\mathrm{v}_c(t)\\ k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right) & \\ -k_1t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v}>\mathrm{v}_c(t)\end{cases} \tag{B7}$$

其中，临界速度$\mathrm{v}_c(t)=\eta c(t)^{\nu-1}$

b. 情况 ***2***： $\nu<1$ 和 $\nu<\eta$ 由于在这种情况下$\nu<1$ 和 $\nu<\eta$，不等式 $\left(\frac{v}{\eta c\,t'^{\eta-1}}\right)^{\nu-\eta}>t'$等价于 $t'<\left(\frac{v}{\eta c}\right)^{\nu-1}$。因此，公式A5中的Heaviside函数可改写为

$$\Theta\left[\left(\frac{v}{\eta c\,t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}}-t'\right]=\Theta\left[\left(\frac{v}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}-t'\right] \tag{B8}$$

Sub-Case:($t < \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$)

$$\begin{aligned} p\left(\mathrm{v},t\right) &= \int_0^t p\left(\mathrm{v},t,t'\right)dt' \\ &\approx \frac{\gamma t_0^{\gamma}\left(\eta c\right)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^t R(t-t')t'^{\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}} \\ &\times \Theta\left(\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}-t'\right)dt' \\ &\approx \frac{\gamma\left(\eta c\right)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \\ &\times t'^{\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}dt' \\ &\approx k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right) \end{aligned} \tag{B9}$$

其中 k_0 是一个常数， k_0 的值由公式 B5 描述。

Sub-Case:($t > \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$)

$$\begin{aligned} p\left(\mathrm{v},t\right) &= \int_0^t p\left(\mathrm{v},t,t'\right)dt' \\ &\approx \frac{\gamma t_0^{\gamma}\left(\eta c\right)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^t R(t-t')t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}} \\ &\times \Theta\left(t'-\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}\right)dt' \\ &\approx \frac{\gamma\left(\eta c\right)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{|\Gamma(1-\gamma)|\Gamma(\gamma)(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^{\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}} (t-t')^{\gamma-1} \\ &\times t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}dt' \end{aligned} \tag{B10}$$

化简并仅保留 t 的最高次幂后，可得

$$p(\mathrm{v},t) \approx k_1 t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}} \tag{B11}$$

其中， k_1 是一个常数，由公式 B5 给出。总结上述方程的结果，我们可以将 $p(\mathrm{v}\ t)$ 写作 ($\gamma<1,\ \nu<1 \& \nu>\eta$)

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & t < t_c(\mathrm{v}) \\ k_1 t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & t > t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B12}$$

其中，临界时间 $t_c\ (\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$

对于固定的 t， $p(\mathrm{v}\ t)$ 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ k_1 t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B13}$$

临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$ 在哪里

c. 情况 ***3:*** $\nu > 1$ 和 $\nu > \eta$ 由于 $\nu > 1$且 $\nu > \eta$，不等式 $\left(\frac{v}{\eta c\, t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} > t'$ 可简化为 $t' < \left(\frac{v}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$。因此， $\Theta\left[\left(\frac{v}{\eta c\, t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} - t'\right] = \Theta\left[\left(\frac{v}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} - t'\right]$. 对于这种情况，在固定 v 时，计算过程与情况 2（$\nu<1$ 和 $\eta>\nu$）类似。然而，当固定 t 时， $p(\mathrm{v}\ t)$ 的函数形式会互换，因为这里 $\nu>1$。

$p(\mathrm{v},t)$ for fixed v ($\gamma<1, \nu>1$ & $\nu>\eta$)

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & t < t_c(\mathrm{v}) \\ k_1 t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & t > t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B14}$$

其中，临界时间 $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$ 以及 k_0， k_1 均为常数，并由公式 B5 描述。

对于固定的 t， $p(v,\ t)$ 的函数形式为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_1 t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B15}$$

临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$ 的位置

d. 情况 ***4***: $\nu > 1$ 和 $\nu < \eta$ 由于 $\nu > 1$且 $\nu > \eta$，不等式 $\left(\frac{v}{\eta c\, t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} > t'$ 化简为 $t' > \left(\frac{v}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$。因此， $\Theta\left[\left(\frac{v}{\eta c\, t'^{\eta-1}}\right)^{\frac{1}{\nu-\eta}} - t'\right] = \Theta\left[t' - \left(\frac{v}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}\right]$ 对于这种情况，当 v 固定时，计算与情况 1（$\nu<1$ 和 $\eta<\nu$）类似。然而，对于固定的 t，函数形式恰好相反，因为 $\nu>1$。

$p(\mathrm{v},t)$ for ($\gamma<1, \nu>1$&$\nu<\eta$)

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & t < t_c(\mathrm{v}) \\ k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right) & \\ -k_1 t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & t > t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B16}$$

其中，临界时间 $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$ 和 k_0, k_1 为常数，由公式 B5 给出。

对于固定的 t， $p(\mathrm{v}\ t)$ 为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} k_0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{\gamma+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right) & \\ -k_1 t^{\gamma-1}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ 0, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B17}$$

其中临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$。

b. $\gamma > 1$

对于 $\gamma > 1$，更新函数简化为 $R(t-t') \approx_{(\gamma-1)(t-t'^{0})}$，如公式18所示。除这一变化外，计算过程与 γt_0 $\gamma < 1$ 情形相同。

a. 情况 ***1***： $\nu < 1$ 和 $\nu > \eta$ 对于这些参数取值，公式A5中的 Heaviside Theta函数与公式B2中的类似。

子情况：($t < \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$) 在此极限下，对于所有 $0 \le t' \le t$，Heaviside函数（公式B2）的自变量均为 0，因此被积函数为零。

Sub-Case 2:($t > \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$)

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t) &= \int_0^t p(\mathrm{v},t,t')\,dt' \\ &\approx \frac{\gamma\tau_0^{\gamma}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{\nu-\eta}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^t R(t-t')t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}} \\ &\times\Theta\left(t'-\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}\right)dt' \\ &\approx \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{\nu-\eta}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_{\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}}^t t^0 \\ &\times t'^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}}dt' \end{aligned} \tag{B18}$$

简化后可得

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t) \approx \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\Big(&\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}t^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}+1} \\ &-t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\Big) \end{aligned} \tag{B19}$$

总结上述方程的结果，可写为p(v t)，其中（$\gamma > 1$, $\nu < 1$&$\nu > \eta$)

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & t < t_c(\mathrm{v}) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\Big(\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}t^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}+1} & \\ -t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\Big), & t > t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B20}$$

其中，临界时间 $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$

对于固定的 t， p(v t) 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\Big(\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}t^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}+1} & \\ -t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\Big), & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B21}$$

b. 情况 ***2***： $\nu < 1$ 和 $\nu < \eta$

对于这些参数选择，公式A5中的Heaviside函数可以改写为公式B8。

Sub-Case 1:($t < \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$)

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t) &= \int_0^t p(\mathrm{v},t,t')\,dt' \\ &\approx \frac{\gamma\tau_0^{\gamma}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{\nu-\eta}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^t R(t-t')t'^{\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}} \\ &\times\Theta\left(\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}-t'\right)dt' \\ &\approx \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{\nu-\eta}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}t^0\int_0^t t'^{\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}dt' \end{aligned} \tag{B22}$$

子情况 2：($t > \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$)

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t) &= \int_0^t p(\mathrm{v},t,t')\,dt' \\ &\approx \frac{\gamma\tau_0^{\gamma}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{\nu-\eta}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\int_0^t R(t-t')t'^{\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}} \\ &\times\Theta\left(\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}-t'\right)dt' \\ &\approx \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{\nu-\eta}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}t^0\int_0^{\left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}} \\ &\times t'^{\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}dt' \end{aligned} \tag{B23}$$

综上上述方程的结果，我们可以将 p(v t) 写作（$\gamma > 1$, $\nu < 1$&$\nu > \eta$)

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma-1}{\nu-1}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{1+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & t < t_c(\mathrm{v}) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\left(t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\right), & t > t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B24}$$

其中临界时间 $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$

对于固定的 t， p(v t) 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{1+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\left(t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\right), & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B25}$$

其中临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$

c. 情况 ***3***： $\nu > 1$ 和 $\nu > \eta$ 对于这种情况，计算将类似于情况 2： $\nu < 1$ 和 $\eta > \nu$ 对于固定速度 v。不过，对于固定 t 时，函数形式将如 $\nu > 1$所示进行互换。

$p(\mathrm{v},t)$ for $(\gamma < 1, \nu < 1 \& \nu > \eta)$

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma-1}{\nu-1}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{1+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & t < t_c(\mathrm{v}) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\left(t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\right), & t > t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B26}$$

其中临界时间 $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$

For fixed t, $p(\mathrm{v},t)$ would be

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\left(t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\right), & \mathrm{v}<\mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}\left(t^{1+\frac{(n-1)\gamma}{\nu-\eta}}\right), & \mathrm{v}>\mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B27}$$

其中临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$

d. 情况 ***4***: $\nu > 1$ 和 $\nu < \eta$ 对于这种情况，计算过程与情况 **1** 类似: $\nu < 1$ 和 $\eta < \nu$ 对于固定速度 v。尽管如此，对于固定 t，函数形式将互换为 $\nu > 1$

$p(\mathrm{v},t)$ for $(\gamma<1, \nu>1 \& \nu<\eta)$

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v}<\mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\left(\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}t^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}+1}\right. & \\ \left.-t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\right), & \mathrm{v}>\mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B28}$$

其中临界时间 $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$ 和 k_0, k_1, k_2, k_3均为常数。

对于固定速度 t, $p(\mathrm{v}\ t)$ 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{(\gamma-1)}(\eta c)^{\frac{\gamma}{\nu-\eta}}}{(\eta-1)\gamma+(\nu-\eta)}\left(\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-\eta}-1}t^{\frac{(\eta-1)\gamma}{\nu-\eta}+1}\right. & \\ \left.-t^0\mathrm{v}^{\frac{-\gamma}{\nu-1}-1+\frac{1}{\nu-1}}\right), & \mathrm{v}<\mathrm{v}_c(t) \\ 0, & \mathrm{v}>\mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B29}$$

其中，临界速度 $\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\nu-1}$

2. 特殊情形 $\nu = \eta$

对于此情形，速度仅取决于 t' 或反向递归时间

$$\mathrm{v}_{\nu,\eta} = \pm\eta c t'^{\eta-1} \tag{B30}$$

由于速度并不显式取决于 τ，因此在 t' 时的速度对于所有大于 t' 的步长都相同。基于此，我们可以将传播子 $p(\mathrm{v}\ t,\ t')$ 写为 $\nu = \eta$

$$p(\mathrm{v},t,t') = R(t-t')\delta(|\mathrm{v}|-\eta c t'^{\eta-1})\theta(t-t')\int_{t'}^{\infty}\psi(t)dt \tag{B31}$$

其中，$\int_{t'}^{\infty}\psi(t)dt$ 表示飞行时间大于 t'时，得到一个步长的概率

为了得到 $p(\mathrm{v}\ t)$，我们必须对所有 t' 积分 $p(\mathrm{v}\ t,t')$

对于 $\gamma < 1$,

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t,t') &\approx \frac{1}{\gamma t_0^{\gamma}\Gamma|1-\gamma|\Gamma|\gamma|}(t-t')^{\gamma-1}\delta(|\mathrm{v}|-\eta c t'^{\eta-1})\theta(t-t') \\ &\quad\times\int_{t'}^{\infty}\psi(t)dt \\ &\approx \frac{1}{\Gamma|1-\gamma|\Gamma|\gamma|}t^{\gamma-1}t'^{-\gamma}\delta(|\mathrm{v}|-\eta c t'^{\eta-1})\theta(t-t') \end{aligned} \tag{B32}$$

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t) &= \int_0^{\infty}p(\mathrm{v},t,t')dt' \\ &\approx \frac{1}{(\eta-1)\gamma\Gamma|1-\gamma|\Gamma|\gamma|}t^{\gamma-1}\frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1} \\ &\quad\times\theta\left(t-\left(\frac{|\mathrm{v}|}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}\right) \end{aligned} \tag{B33}$$

总结上述方程的结果，我们可以写出$p(\mathrm{v}\ t)$

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & t<t_c(\mathrm{v}) \\ \frac{1}{(\eta-1)\gamma\Gamma|1-\gamma|\Gamma|\gamma|}t^{\gamma-1}\frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & t>t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B34}$$

where critical time $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$

对于固定的 t，且对于 $\eta < 1$, $p(\mathrm{v}\ t)$为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v}<\mathrm{v}_c(t) \\ \frac{1}{(\eta-1)\gamma\Gamma|1-\gamma|\Gamma|\gamma|}t^{\gamma-1}\frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v}>\mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B35}$$

for $\eta > 1$, $p(\mathrm{v},t)$ would be

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{1}{(\eta-1)\gamma\Gamma|1-\gamma|\Gamma|\gamma|}t^{\gamma-1}\frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v}<\mathrm{v}_c(t) \\ 0, & \mathrm{v}>\mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B36}$$

其中临界速度$\mathrm{v}_c(t) = \eta c(t)^{\eta-1}$

For $\gamma > 1$,

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t,t') &\approx \frac{\gamma-1}{\gamma t_0}(t-t')^0\delta(|\mathrm{v}|-\eta c t'^{\eta-1})\theta(t-t')\int_{t'}^{\infty}\psi(t)dt \\ &\approx \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}}{\gamma}t^0t'^{-\gamma}\delta(|\mathrm{v}|-\eta c t'^{\eta-1})\theta(t-t') \end{aligned} \tag{B37}$$

$$\begin{aligned} p(\mathrm{v},t) &= \int_0^{\infty}p(\mathrm{v},t,t')dt' \\ &\approx \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}}{\gamma(\eta-1)}t^0\frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}\theta\left(t-\left(\frac{|\mathrm{v}|}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}\right) \end{aligned} \tag{B38}$$

总结上述方程的结果，我们可以写成$p(\mathrm{v}\ t)$

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & t<t_c(\mathrm{v}) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}}{\gamma(\eta-1)}t^0\frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & t>t_c(\mathrm{v}) \end{cases} \tag{B39}$$

其中临界时间 $t_c(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{v}}{\eta c}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$ 对于固定的 t，且对于$\eta < 1$， $p(\mathrm{v}\ t)$ 将为

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} 0, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}}{\gamma(\eta-1)} t^0 \frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B40}$$

for $\eta > 1$, $p(\mathrm{v},t)$ would be

$$p(\mathrm{v},t) \approx \begin{cases} \frac{(\gamma-1)\tau_0^{\gamma-1}}{\gamma(\eta-1)} t^0 \frac{\mathrm{v}}{\eta c}^{-\frac{\gamma}{\eta-1}+\frac{1}{\eta-1}-1}, & \mathrm{v} < \mathrm{v}_c(t) \\ 0, & \mathrm{v} > \mathrm{v}_c(t) \end{cases} \tag{B41}$$

where critical velocity $\mathrm{v}_c(t) = \eta c\,(t)^{\eta-1}$

附录 C：速度关联函数的推导

速度自相关函数 $\langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle$ 可写为，

$$\langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle = C(t,\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t,\Delta). \tag{C1}$$

其中 $C_n(t,\ \Delta) = \langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle_n$ 表示在区间 $(0,\ t)$ 内恰好经历 n 次更新事件的轨迹对速度自相关函数的贡献。 $C_n(s,\ u)$ 可表示为

$$C_n(s,u) = \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^\infty e^{-u\Delta}d\Delta \langle \mathrm{v}(t)\mathrm{v}(t+\Delta)\rangle_n \tag{C2}$$

将 $t_n < t < t+\Delta < t_{n+1}$ 的约束代入上式，其中 t_n 和 t_{n+1} 分别是第 n 次和第 $n+1$ 次更新过程发生的时刻，可得

$$\begin{aligned} C_n(s,u) \ = \ & \eta^2 c^2 \left\langle \tau_n^{2(\nu-\eta)} \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^\infty e^{-u\Delta}d\Delta\,(t-t_n)^{\eta-1}\,(t+\Delta-t_n)^{\eta-1}\,\theta\,(t_n<t<t_{n+1}) \right. \\ & \left. \theta\,(t_n<t+\Delta<t_{n+1})\right\rangle \end{aligned} \tag{C3}$$

这里，若括号中的条件成立，则 $\theta(\cdots) = 1$；否则， θ 函数为零，因此 $\theta(\ldots)$ 是一个方脉冲函数。平均是针对时间过程而言的。根据 $t-t_n = y$ 进行积分变量替换，并利用 $t_{n+1}-t_n = \tau_n$ ，可得

$$C_n(s,u) \ = \ \eta^2 c^2 \left\langle e^{-t_n s}\tau_n^{2(\nu-\eta)} \int_0^{\tau_n} dy e^{-sy} y^{\eta-1} \int_0^{\tau_n - y} d\Delta e^{-u\Delta}(y+\Delta)^{\eta-1} \right\rangle \tag{C4}$$

根据更新假设，随机变量 t_n 和 τ_{n+1} 相互独立。此外，由于 $t_n = \sum_{j=0}^{n-1}\tau_j$ ，且等待时间也相互独立，我们有 $\langle \exp(-st_n)\rangle = \psi^n(s)$，其中 $\psi(s)$ 是 $\psi(\tau)$ 的拉普拉斯变换。剩下的平均是针对 τ_n 而言的，它是从 $\psi(\tau)$ 中抽取的随机变量。因此，我们得到

$$C_n(s,u) \ = \ \eta^2 c^2 \psi^n(s) \int_0^\infty d\tau \psi(\tau)\tau^{2(\nu-\eta)} \int_0^\tau dy e^{-sy} y^{\eta-1} \int_0^{\tau-y} d\Delta e^{-u\Delta}(y+\Delta)^{\eta-1} \tag{C5}$$

记作

$$W(\tau) = \int_\tau^\infty d\tilde{\tau}\psi\,(\tilde{\tau})\,\tilde{\tau}^{2(\nu-\eta)} \tag{C6}$$

上述积分仅在 $2\nu \le \gamma + 2\eta$ 时收敛。牢记这一条件，我们可以写出

$$C_n(s,u) = \eta^2 c^2 \psi^n(s) \int_0^\infty d\tau \left[-\frac{d}{d\tau}W(\tau)\right] \int_0^\tau dy e^{-sy} y^{\eta-1} \int_0^{\tau-y} d\Delta e^{-u\Delta}(y+\Delta)^{\eta-1} \tag{C7}$$

现在我们进行分部积分，然后利用几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\psi}^n(s) = 1/[1-\hat{\psi}(s)]$ 得到

$$C(s,u) = \frac{\eta^2 c^2}{1-\psi(s)} \int_0^{\infty} d\tau W(\tau)\tau^{\eta-1} e^{-u\tau} \int_0^{\tau} dy e^{-(s-u)y} y^{\eta-1} \tag{C8}$$

上述函数的双重拉普拉斯变换将给出速度关联函数， $C(t,\ \Delta)$。我们可以将 u 逆变换为 Δ ，代入上述函数后得到

$$C(s,\Delta) = \frac{\eta^2 c^2}{1-\psi(s)} \int_{\Delta}^{\infty} d\tau W(\tau)\tau^{\eta-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1} e^{-s(\tau-\Delta)} \tag{C9}$$

代入 $W(\tau)$的值，

$$C(s,\Delta) = \frac{\gamma t_0^{\gamma}\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)(1-\psi(s))} \int_{\Delta}^{\infty} d\tau \tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1} e^{-s(\tau-\Delta)} \tag{C10}$$

W当 $\eta = 1$时，上式将给出广义L´évy行走的表达式

$$C(s,u) = \frac{\gamma t_0^{\gamma}\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)(1-\psi(s))} \frac{W(s)-W(u)}{u-s} \tag{C11}$$

其中， $W(s)$是 $W(\tau)$的拉普拉斯变换。

1. $0<\gamma<1$

在此区域内

$$\psi(s) \simeq 1-\Gamma(1-\gamma)t_0^{\gamma}s^{\gamma} \tag{C12}$$

$C(s,\ \Delta)$可表示为

$$C(s,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)s^{\gamma}} \int_{\Delta}^{\infty} d\tau \tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1} e^{-s(\tau-\Delta)} \tag{C13}$$

a. $0<\gamma<1$ & $\gamma+1<2\nu<\gamma+2$

为反演 $s\to t$，上述方程在该区域内可近似为

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} \int_{\Delta}^{t+\Delta} d\tau \tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1}[t-\tau-\Delta)]^{\gamma-1} \tag{C14}$$

代入 $p = \frac{\tau}{t}$ 和 $z = \frac{\Delta}{t}$ –

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} t^{2\nu-2} \int_{z}^{1+z} dp p^{2\nu-\eta-\gamma-1}(p-z)^{\eta-1}[1-(p-z)]^{\gamma-1} \tag{C15}$$

上述积分是关于 z 的标度函数

$$\phi(z) = \int_{z}^{1+z} dp p^{2\nu-\eta-\gamma-1}(p-z)^{\eta-1}[1-(p-z)]^{\gamma-1} \tag{C16}$$

引入 $l = (p-z)^{-1}$ 和 $l' = l^{-1}$，并考虑到 $1+zl = \frac{t+\tau}{t} \to 1$ 在–t 较大时的情况，可将其表示为

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_1^{\infty} dl l^{1-\eta}(l-1)^{\eta-1}(1+zl)^{2\nu-\eta-\gamma-1} \\ &= B(2\nu-\gamma-1,\eta) \end{aligned} \tag{C17}$$

其中， $B(P,\ Q) = \int_0^1 dx x^{P-1}(1-x)^{Q-1} = \frac{\Gamma(P)\,\Gamma(Q)}{\Gamma(P+Q)}$ 是 β函数。将其代入 $C(t,\ \Delta)$的表达式中，可得

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} B(2\nu-\gamma-1,\eta) t^{2\nu-2} \tag{C18}$$

b. $0 < \gamma < 1$ & $\gamma < 2\nu < \gamma + 1$

在该区域内，利用小s 展开可得到长时间极限 $t \to \infty$下 VCF 的行为，即 $s \to 0$,

$$e^{-s(\Delta-\tau)} = 1 - s(\Delta - \tau) + O\left(s^2\right) \simeq 1, s \to 0 \tag{C19}$$

$C(s, \Delta)$可表示为

$$C(s,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)s^\gamma}\int_\Delta^\infty d\tau\tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1} \tag{C20}$$

将 s 反演为 t 后，上述方程将变为

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2 t^{\gamma-1}}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)}\int_\Delta^\infty d\tau\tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1} \tag{C21}$$

引入$z = \frac{\Delta}{t}$、$r = \frac{\tau}{\Delta}$和$r' = r^{-1}$后，上述方程可表示为

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2 t^{2\gamma-2} z^{2\nu-\gamma-1}}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)}\int_1^\infty drr^{2\nu-\eta-\gamma-1}(r-1)^{\eta-1} \tag{C22}$$

上述方程中的积分为

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \int_1^\infty drr^{2\nu-\eta-\gamma-1}(r-1)^{\eta-1} \\ &= B(1+\gamma+\eta-2\nu,\eta)\end{aligned} \tag{C23}$$

于是得到

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)}B(1+\gamma+\eta-2\nu,\eta)t^{2\gamma-2}z^{2\nu-\gamma-1} \tag{C24}$$

c. $0 < \gamma < 1$ & $2\nu < \gamma$

该区域的速度自相关函数与前一区域相同。因此,

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2 t^{2\gamma-2} z^{2\nu-\gamma-1}}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)}B(1+\gamma+\eta-2\nu,\eta) \tag{C25}$$

2. $\gamma > 1$

在这个区域

$$\psi(s) \simeq 1 - \langle\tau\rangle s + \Gamma(1-\gamma)t_0^\gamma s^\gamma \tag{C26}$$

其中 $\langle\tau\rangle$是 $\frac{\gamma t_0}{\gamma-1}$。

$C(s, \Delta)$ 可表示为

$$C(s,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle s}\int_\Delta^\infty d\tau\tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1}e^{-s(\tau-\Delta)} \tag{C27}$$

a. $\gamma > 1$ & $\gamma + 1 < 2\nu < \gamma + 2$

为了对 $s \to t$ 进行反演，上述方程在该区域内可近似为

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}\int_{\Delta}^{t+\Delta} d\tau\tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1} \tag{C28}$$

代入 $z = \frac{\Delta}{t}$ 和 $r = \frac{\tau}{\Delta}$ —

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}t^{2\nu-\gamma-1}z^{2\nu-\gamma-1}\int_{1}^{1+\frac{1}{z}} drr^{2\nu-\eta-\gamma-1}(r-1)^{\eta-1} \tag{C29}$$

代入 $r'' = r - 1$，上述积分为

$$\begin{aligned}\phi(z) &= z^{2\nu-\gamma-1}\int_{1}^{1+\frac{1}{z}} drr^{2\nu-\eta-\gamma-1}(r-1)^{\eta-1} \\ &= \frac{1}{2\nu-\gamma-1}\end{aligned} \tag{C30}$$

当 t 和 τ 都很长但有限时，这个近似成立，由此对于较大的 τ可得 $r''^{-1} = \frac{\Delta}{\tau-\Delta} \to 0$ 。只有当 $2\gamma > 1 + \beta$时，上述积分才收敛。将其代入 $C(t,\Delta)$的表达式中，可得

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}\frac{1}{2\nu-\gamma-1}t^{2\nu-\gamma-1} \tag{C31}$$

b. $\gamma > 1$ & $\gamma < 2\nu < \gamma + 1$

在该区域，利用小s 展开可得长时间极限 $t \to \infty$下速度自相关函数的行为，即 $s \to 0$,

$$e^{-s(\Delta-\tau)} = 1 - s(\Delta-\tau) + O\left(s^2\right) \simeq 1, s \to 0 \tag{C32}$$

$C(s,\Delta)$可表示为

$$C(s,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle s}\int_{\Delta}^{\infty} d\tau\tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1}e^{-s(\tau-\Delta)} \tag{C33}$$

将 s 与 t 互换后，上述方程将变为

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}\int_{\Delta}^{\infty} d\tau\tau^{2\nu-\eta-\gamma-1}(\tau-\Delta)^{\eta-1} \tag{C34}$$

引入 $z = \frac{\Delta}{t}$ 、 $r = \frac{\tau}{\Delta}$ 和 $r' = r^{-1}$，则上式可表示为

$$\begin{aligned}C(t,\Delta) &= \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}t^{2\nu-\gamma-1}z^{2\nu-\gamma-1}\int_{1}^{\infty} drr^{2\nu-\eta-\gamma-1}(r-1)^{\eta-1} \\ &= \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}B(1+\gamma-2\nu,\eta)t^{2\nu-\gamma-1}z^{2\nu-\gamma-1}\end{aligned} \tag{C35}$$

c. $\gamma > 1$ & $2\nu < \gamma$

该区域的速度自相关函数与前一区域相同。因此,

$$C(t,\Delta) = \frac{\gamma\eta^2 c^2}{(2(\nu-\eta)-\gamma)\langle\tau\rangle}B(1+\gamma-2\nu,\eta)t^{2\nu-\gamma-1}z^{2\nu-\gamma-1} \tag{C36}$$

[1] P.-S. 拉普拉斯，《关于概率公式近似的研究》，《全集》`第**12**卷，301（1810）。这些公式是大数的函数，并论述了它们的应用。

[2] H. Fischer, *A history of the central limit theorem: from classical to modern probability theory* 4 ，第（施普林格，2011）卷。[3] R. Brown, *The Miscellaneous Botanical Works of Robert Brown: Vol. I* 2022 （BoD–Books on Demand，）。[4] J. Klafter、A. Blumen 和 M. F. Shlesinger，随机过程通向反常扩散，《物理评论A》35，3081 1987（）。[5] T. Akimoto 和 T. Miyaguchi，储能驱动的 L´évy 飞行中的分布遍历性，《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》87，062134 2013（）。[6] T. Akimoto 和 T. Miyaguchi，储能驱动 L´évy 飞行中的相图，《统计物理学杂志》157，515（2014）。[7] H. Schulz-Baldes，反常德鲁德模型，《物理评论快报》78，2176（1997）。[8] L. Chen、K. E. Bassler、J. L. McCauley 和 G. H. Gunaratne，随机过程的反常标度与摩西效应，《物理评论E》95，042141（2017）。[9] S. C. Lim 和 S. V. Muniandy，用于建模反常扩散的自相似高斯过程，《物理评论E》66，021114（2002）。[10] J.-H. Jeon、A. V. Chechkin 和 R. Metzler，缩放布朗运动：一种具有时间依赖扩散率、用于描述反常扩散的悖论过程，《物理化学化学物理》16，15811（2014）。[11] F. Thiel 和 I. M. Sokolov，将缩放布朗运动作为连续时间随机游走的平均场模型，《物理评论E》89，012115（2014）。[12] T. Albers 和 G. Radons，d 维广义 L´évy 游走非遍历性的精确结果，《物理评论快报》120，104501（2018）。[13] T. Albers 和 G. Radons，d 维广义 L´évy 游走的非遍历性及其与其他时空耦合模型的关系，《物理评论E》105，014113（2022）。[14] P. G. Meyer、V. Adlakha、H. Kantz 和 K. E. Bassler，老化确定性模型中的反常扩散与摩西效应，《新物理学杂志》20，113033（2018）。[15] E. Aghion、P. G. Meyer、V. Adlakha、H. Kantz 和 K. E. Bassler，L´évy 游走中的摩西效应、诺亚效应和约瑟夫效应，《新物理学杂志》23，023002（2021）。[16] O. Vilk、E. Aghion、T. Avgar、C. Beta、O. Nagel、A. Sabri、R. Sarfati、D. K. Schwartz、M. Weiss、D. Krapf、*et al.*，揭示反常扩散的起源：从分子到迁徙中的鹳，《物理评论研究》4，033055（2022）。[17] S. Trillot、N. Tarrat、N. Combe、P. Benzo、C. Bonafos 和 M. Benoit，非晶二氧化硅中银+ 离子反常扩散的证据与起源：使用神经网络原子间势的分子动力学研究，《化学物理学杂志》162（2025）。[18] P. G. Meyer、M. Zamani 和 H. Kantz，标准普尔500指数数据中的单位体积回报统计与摩西效应，《物理学A：统计力学及其应用》612，128497 2023（）。[19] N. R. Barraza、G. Pena、J. Gambini 和 M. F. Carusela，非齐次、非平稳且路径依赖的马尔可夫反常扩散模型，《物理学杂志A：数学与理论》58，095001（2025）。[20] M. Zamani、E. Aghion、P. Pollner、T. Vicsek 和 H. Kantz，引用时间序列中的反常扩散科学出版物《物理学杂志：复杂性》**2**, 035024 (2021). [21] M. Salek, *Statistical analysis and modeling of the opening and closing auctions of financial markets* ，巴黎萨克雷大学博士论文 (2024). [22] M. Salek、D. Challet 和 I. Muni Toke，股票拍卖动态：具有活动加速特征的潜在流动性模型，《定量金融》**24**, 1381 (2024). [23] P. G. Meyer、E. Aghion 和 H. Kantz，分解反常扩散的影响，可直接计算赫斯特指数，并对单条随机路径进行模型分类，《物理学杂志A：数学与理论》**55**, 274001 (2022). [24] G. Mu˜noz-Gil、G. Volpe、M. A. Garcia-March、E. Aghion、A. Argun、C. B. Hong、T. Bland、S. Bo、J. A. Conejero、N. Firbas、 *et al.*, 用于客观比较反常扩散解码方法，《自然·通讯》**12**, 6253 2021( ). [25] A. Argun、G. Volpe 和 S. Bo，利用循环神经网络对反常扩散进行分类、推断和分割，《物理学杂志A：数学与理论》**54**, 294003 (2021).[26] `O. Garibo-i Orts、A. Baeza-Bosca、M. A. Garcia-March 和 J. A. Conejero，用于反常扩散单粒子短时含噪轨迹的高效循环神经网络方法，《物理学杂志A：数学与理论》**54**, 504002 (2021). [27] J. Malinowski、M. Kostrzewa、M. Balcerek、W. To m-czuk 和 J. Szwabi´nski，Cinnamon：一种用于单粒子追踪数据变点检测和参数估计的混合方法，《物理学杂志：光子学》**7**, 035008 (2025). [28] F. H¨ofling 和 T. Franosch，生物细胞拥挤环境中的反常输运，《物理学进展报告》**76**, 046602 (2013). [29] R. Metzler、J.-H. Jeon、A. G. Cherstvy 和 E. Barkai，反常扩散模型及其性质：单粒子追踪百年之际的非平稳性、非遍历性与老化，《物理化学化学物理》**16**, 24128 (2014). [30] R. Metzler，布朗运动及其他：首次通过、功率谱、非高斯性与反常扩散，《统计物理学杂志：理论与实验》**2019**, 114003 (2019). [31] F. A. Oliveira、R. M. Ferreira、L. C. Lapas 和 M. H. Vainstein，反常扩散：非均匀系统演化的一种基本机制，《物理学前沿》**7**, 18 (2019). [32] A. Sabri、X. Xu、D. Krapf 和 M. Weiss，阐明哺乳动物细胞细胞质中异质反常扩散的起源，《物理评论快报》**125**, 058101 (2020). [33] K. E. Bassler、J. L. McCauley 和 G. H. Gunaratne，金融市场中的非平稳增量、标度分布和可变扩散过程，《美国国家科学院院刊》**104**, 17287 (2007). [34] L. Seemann、J.-C. Hua、J. L. McCauley 和 G. H. Gu-naratne，金融时间序列分析中的总体平均与时间平均，《物理学A辑：统计力学及其应用》**391**, 6024 (2012). [35] A. Dechant 和 E. Lutz，光学晶格中的反常空间扩散与多重分形性，《物理评论快报》

报》108, 230601 (2012). [36] T. Plakhotnik、M. J. Fern´ee、B. Littleton、H. Rubinsztein-Dunlop、C. Potzner 和 P. Mulvaney，量子点光谱扩散的反常幂律：与发光间歇性的关联，《物理评论快报》105, 167402 (2010). [37] G. Margolin 和 E. Barkai，闪烁纳米晶体及其他开关随机过程的老化相关函数，《化学物理学杂志》121, 1566 (2004). [38] E. W. Montroll 和 G. H. Weiss，格点上的随机游走 II，《数学物理学杂志》6, 167 (1965). [39] M. F. Shlesinger、J. Klafter 和 Y. Wong，具有无限空间矩和时间矩的随机游走，《统计物理学杂志》27, 499 (1982). [40] B. B. Mandelbrot，《物理学中的分形几何》(1993). [41] M. F. Shlesinger、G. M. Zaslavsky 和 J. Klafter，奇异动力学，《自然》363, 31 (1993). [42] J. Klafter、M. F. Shlesinger 和 G. Zumofen，超越布朗运动，《今日物理》49, 33 (1996). [43] V. Zaburdaev、S. Denisov 和 J. Klafter，L´évy 行走，《现代物理评论》87, 483 (2015). [44] G. Zumofen、J. Klafter 和 A. Blumen，间歇性混沌系统中的 L´évy 行走与传播子，《物理评论E》47, 2183 (1993). [45] G. Zumofen 和 J. Klafter，间歇性混沌系统中的尺度不变运动，《物理评论E》47, 851 (1993). [46] M. F. Shlesinger、B. West 和 J. Klafter，增强扩散中的 L´évy 动力学：在湍流中的应用，《物理评论快报》58, 1100 (1987). [47] M. Bothe、F. Sagues 和 I. M. Sokolov，广义 L´évy 行走模型中的均方位移，《物理评论E》100, 012117 (2019). [48] S. Benkadda 和 G. M. Zaslavsky，*Chaos, Kinetics and Nonlinear Dynamics in Fluids and Plasmas: Proceedings of a Workshop Held in Carry-Le Rouet France*，，*16–21*，第 511 卷（施普林格科学与商业媒体，1998）。[49] A. Vezzani、E. Barkai 和 R. Burioni，广义 L´évy 行走中的稀有事件与大跳跃原理，《科学报告》10, 2732 (2020). [50] G. Alexander，对 Benoit B. Mandelbrot 和 James R. Wallis 的《Noah、Joseph 与运筹水文学》的评论，《水资源研究》5, 915 (1969). [51] B. Mandelbrot，*Gaussian self-affinity and fractals: glob-ality, the earth, 1/f noise, and R/S*（施普林格科学与商业媒体，2002）。[52] H. E. Hurst，水库的长期蓄水能力，美国土木工程师学会汇刊**116**, 770 (1951). [53] P. Abry 和 D. Veitch，长程相关流量的小波分析，《IEEE信息论汇刊》**44**, 2 (1998). [54] C.-K. Peng、S. V. Buldyrev、S. Havlin、M. Simons、H. E. Stanley 和 A. L. Goldberger，DNA核苷酸的镶嵌组织，《物理评论E》**49**, 1685 (1994). [55] P. Meyer、E. Barkai 和 H. Kantz，时间平均扩散率的尺度不变格林-久保关系，《物理评论E》**96**, 062122 (2017). [56] A. Dechant、E. Lutz、D. A. Kessler 和 E. Barkai，标度格林-久保关系及其在三个老化系统中的应用，Phys. Rev. X**4**, 011022 (2014). [57] C. Godreche 和 J. Luck，更新过程占据时间的统计，《统计物理学杂志》**104**, 489 (2001). [58] Y. Hu 和 J. Liu，广义双态随机游走模型：非平凡反常扩散、老化与遍历性破缺，《物理评论E》**111**, 014148 (2025). [59] 参见补充材料：http://link.aps.org/ supplemental/10.1103/PhysRevLett.120.104501。[60] D. del Castillo-Negrete，类地球物理系统和等离子体系统中纬向流的混沌输运，Physics of Plasmas**7**, 1702 (2000). [61] D. del Castillo-Negrete，剪切涡旋中被动标量的非对称输运与非高斯统计，Physics of Fluids**10**, 576 (1998). [62] V. Zaburdaev、S. Denisov 和 P. H¨anggi，多粒子系统中的扰动扩展：一种随机游走方法，《物理评论快报》**106**, 180601 (2011). [63] D. W. Sims、E. J. Southall、N. E. Humphries、G. C. Hays、C. J. Bradshaw、J. W. Pitchford、A. James、M. Z. Ahmed、A. S. Brierley、M. A. Hindell、*et al.*海洋捕食者搜寻行为的标度律，《自然》**451**, 1098 (2008). [64] B. Berkowitz、I. Dror、S. K. Hansen 和 H. Scher，地质介质中反应输运的测量与模型，Reviews of Geophysics**54**, 930 (2016). [65] A. Cortis 和 B. Berkowitz，“经典”土壤和砂柱中的反常输运，Soil Science Society of America Journal**68**, 1539 (2004). [66] M. Levy 和 B. Berkowitz，非均质多孔介质中非菲克弥散的测量与分析，Journal of contaminant hydrology**64**, 203 (2003). [67] B. Bijeljic、P. Mostaghimi 和 M. J. Blunt，复杂非均质多孔介质中非菲克溶质输运的特征，《物理评论快报》**107**, 204502 (2011). [68] T. Akimoto、E. Barkai 和 G. Radons，具有连续状态变量的半马尔可夫过程中无限不变密度，《物理评论E》**101**, 052112 (2020).