arXiv:2512.16079v1 [math.GR] 18 Dec 2025

群作用的线性维数

Alice D evillers、Michael Giudici、Daniel R. Hawtin、Lukas Klawuhn 和 Luke Morgan

Abstract. 表示一个群的两种基本方式是将其表示为置换和矩阵。本文研究与置换表示相互交织的群的线性表示。近期，D'Alconzo 和 Di Scala [8] 考察了此类线性表示中的矩阵可以有多小。此类表示的最小维数称为群作用的线性维数，它在密码学和密码系统中有应用。

我们从代数的角度出发，利用置换模理论发展线性维数这一概念。我们给出关于最小维数表示的结构性结果，并考察忠实性、传递性和本原性对线性维数的影响。此外，我们计算了若干类有限本原置换群的线性维数。我们还研究花环积，从而确定非本原群作用的线性维数。最后，我们给出有限几乎单 2-传递群的线性维数，其中一些结果可用于密码学领域的进一步应用。我们的结果还为群作用的线性表示提出了许多新问题。

1. 引言

D'Alconzo 与 Di Scala [8] 最近引入了群作用表示以及群作用的线性维数这一概念。其动机源于密码学中的一项应用，以及确定基于群作用的密码系统易受攻击的程度。在本文中，我们发展群作用表示的一般理论，并计算若干熟知群作用的线性维数。

设 G 是作用在集合 Ω 上的群，设 F 是一个域，V 是 F 上的向量空间。一对 (ρ, φ) 是群作用在 F 上的表示，如果 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ 是同态，且 $\varphi\colon \Omega \to V$ 是单射，使得

$$(\omega^g)\varphi = (\omega\varphi)^{g\rho} \tag{1}$$

对所有 $\omega \in \Omega$ 与 $g \in G$。我们将 (1) 称为交织性质。我们说 V 给出 表示 (ρ, φ)。注意，我们遵循 Wielandt [23] 的记号，因此 ω^g 表示 ω 在元素 g 下的像。我们也将函数写在右侧。

给定一个作用于集合 Ω_1 和 Ω_2, 上的群 G，如果存在一个双射 $\tau : \Omega_1 \to \Omega_2$，使得 $(\omega^g)\tau = (\omega\tau)^g$，我们就称这两个作用等价。注意，如果我们有一个同态 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$，其中 V 是某个向量空间，那么我们就得到 G 在 V 上的自然作用，其定义为 $v^g := v^{g\rho}$。当且仅当我们能找到 V 中的一个向量集合 X，使得 G 在 Ω 上的作用与 G 在 X 上的作用等价时，这就会产生 G 在 Ω 上、以 F 为底域的群作用表示。注意，在上下文明确时，我们通常会用 v^g 代替 $v^{g\rho}$。

我们将 F-线性维数 定义为 G 在 Ω 上的作用的

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) = \min\left\{ \dim(V) \;\middle|\; \begin{array}{c} V \text{ affords a representation} \\ \text{of the action of } G \text{ on } \Omega \text{ over } F \end{array} \right\}.$$

当 $|F| = q$（素数幂）时，我们用 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 表示 $\mathrm{LinDim}_q(G, \Omega)$，这称为 D'Alconzo 和 Di Scala 的 q-线性维数。如果 V 给出了 G 在 Ω 上的作用在 F 上的一个表示，并且 $\dim(V) = \mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$，那么我们称 V 为 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证。注意，见证不一定唯一；参见例 6.3，其中我们给出了 $\mathrm{LinDim}_2(C_6, 6) = 4$ 的两个见证。

D'Alconzo 和 Di Scala [8] 确定了 C_n 阶为 n 的循环群的线性维数 $q(C_n, \{1, 2, \ldots, n\})$，并证明对于 $n > 2$ 以及任意素数幂 q，有线性维数 $q(S_n, \{1, 2, \ldots, n\}) = n - 1$。注意，这并不总是 S_n 的忠实不可约表示的最小维数；当域的特征整除 n 时，该最小维数为 $n-2$。此外，见证并非不可约，更多细节请参见第 4 节。

给定群 G 在集合 Ω 上的一个作用，域 F 上的置换模是向量空间 F^Ω，其基为 $\{e_\omega \mid \omega \in \Omega\}$，使得 $(e_\omega)^g = e_{\omega^g}$。注意，$F^\Omega$ 给出了群 G 在 Ω 上作用的一个表示，其中 φ 将每个 $\omega \in \Omega$ 映射到基向量 $e_\omega \in F^\Omega$。因此，正如 D'Alconzo 和 Di Scala [8, 在备注 10] 中指出的，我们有线性维数 $_F(G, \Omega) \leqslant |\Omega|$。

我们的首批重要观察之一是，$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的见证是 F^Ω 的一个商（推论 4.2），由此得到以下定理。若 Ω 上的 G 作用所保持的 Ω 的划分只有平凡划分，即仅有一个部分的划分，以及所有部分都是单元素集的划分，则称该作用为本原作用。

THEOREM 1.1. 设 G 在 Ω 上本原地作用，且其诱导的置换群 G^Ω 非循环。则 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 是置换模 F^Ω 中非超平面子模的最小余维数。此外，若 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证是可约的，则它有唯一的非零真子模 W，且 W 的余维数为一。

定理 1.1 由推论 4.10 和 4.11 得出。我们还注意到，例 4.13 和 6.1 表明，定理 1.1 对非本原群并不成立。

本原群是值得研究的自然作用类别。我们在引理 5.1 中看到，非传递作用的线性维数可以用其在各个轨道上的作用的线性维数给出上下界。此外，我们给出了该上界取等的充分条件（定理 5.5）。因此，将群作用的线性维数研究归约到传递情形是很自然的。此外，非本原置换群自然嵌入到一个本原置换群与一个传递群的缠绕积中（我们将在第 6 节概述这一点），并且我们能够确定缠绕积在其非本原作用下的线性维数。注意，若 $H \leqslant G$，则 $\mathrm{LinDim}_F(H, \Omega) \leqslant \mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$（引理 3.1）。

THEOREM 1.2. 设 $K \leqslant \mathrm{Sym}(\Delta)$ 为本原群，设 $L \leqslant \mathrm{Sym}(\Sigma)$，且 $G = K \wr L$ 在集合 $\Omega = \Delta \times \Sigma$ 上非本原地作用。设 $k = |\Delta|$ 且 $\ell = |\Sigma|$。则

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) = \begin{cases} \ell + 1 & \text{if } K \text{ is regular and } k = \mathrm{char}(F), \\ \ell \,\mathrm{LinDim}_F(K, \Delta) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

有限本原置换群由奥南-斯科特定理描述，例见 [7, 第 4] 节。本原群中的一个重要类别是积作用下的迭代积。对于 $K \leqslant \mathrm{Sym}(\Delta)$ 和 $L \leqslant S_\ell$，缠绕积 $K \wr L$ 在笛卡尔幂 Δ^ℓ 上有一个自然作用（更多细节见第 7 节）。引理 7.1 给出了自然上界 $\mathrm{LinDim}_F(K \wr L, \Delta^\ell) \leqslant \ell\, \mathrm{LinDim}_F(K, \Delta)$，并且当 $K = \mathrm{Sym}(\Delta)$ 和 $L = S_\ell$ 时，我们能够给出精确值。

THEOREM 1.3. 设 Δ 是基数为 $k \geqslant 3$ 的有限集，且 $\ell \geqslant 2$。假设 特征$(F) = p \geqslant 0$。那么

$$\mathrm{LinDim}_F(S_k \wr S_\ell, \Delta^\ell) = \begin{cases} (k-2)\ell + 1 & \text{if } p \mid k, \\ (k-1)\ell & \text{if } p \nmid k. \end{cases}$$

不包含在积作用中的缠绕积内的有限本原群称为基本型，其类型为仿射型、对角型或几乎单型 [7, 定理 4.6]。我们在例 9.1 中考察可能的最大仿射群。几乎单群有许多本原作用。我们的主要结果之一确定了 A_n 或 S_n 在集合 Ω_k（由所有 $\{1,2,\dots,n\}$ 的 k 子集组成）上的作用的线性维数。

THEOREM 1.4. 设 $G = A_n$ *or* S_n 满足 $n \geqslant 10$，且 F 是特征为 $p \geqslant 0$ 的域。设 $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$。那么

$$\mathrm{LinDim}_F(G,\Omega_k) = \begin{cases} n-2 & \text{if } p \mid n \text{ and } p \mid k, \\ n-1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

最后，我们确定几乎单群2-传递群的线性维数。

THEOREM 1.5. 设 F 是特征为 $p \geqslant 0$ 的域，且 G 是一个度为 n、作用在Ω上的几乎单2-传递群。那么，要么$\mathrm{LinDim}_F(G,\ \Omega) = n-1$，要么$\mathrm{LinDim}_F(G,\ \Omega)$ 如表 *1* 所示。

我们在第 10 节提出更多自然问题。

	底(G)	n	线性维数$_F(G,\ \Omega)$	条件
1	$\mathrm{PSL}_d(q)$	$\frac{q^d-1}{q-1}$	$\binom{d+p-2}{d-1}^t$	$d \geqslant 3$, $q = p^t$
2	A_7	15	4	$p = 2$
3	$\mathrm{Sp}_{2d}(2)$	$2^{2d-1} - 2^{d-1}$	$2d+1$	$p = 2$, $d \geqslant 3$
4	$\mathrm{Sp}_{2d}(2)$	$2^{2d-1} + 2^{d-1}$	$2d+1$	$p = 2$, $d \geqslant 2$
5	$\mathrm{PSL}_2(q)$	$q+1$	$\frac{q+1}{2}$	$q \equiv \pm 1$ (模 8)
6	$\mathrm{PSL}_2(q)$	$q+1$	$\frac{q+1}{2}$	$p = 2$, $G \leqslant \mathrm{P\Sigma L}_2(q)$ $q \equiv \pm 3$ (模 8) $\mathbb{F}_4 \leqslant F$, $G \leqslant \mathrm{P\Sigma L}_2(q)$
7	$\mathrm{Suz}(q)$	q^2+1	$m(q-1)/2+1$	$m^2 = 2q$, $p \mid q+1+m$
8	$\mathrm{PSU}_3(q)$	q^3+1	q^2-q+1	$p \mid q+1$
9	$\mathrm{Ree}(q)$	q^3+1	q^2-q+1	$p = 2$
10	$\mathrm{Ree}(q)$	q^3+1	$\frac{mq^2-m}{6} + \frac{q^2-q}{2} + 1$	$m^2 = 3q$, $2 \neq p \mid q+1$
11	$\mathrm{Ree}(q)$	q^3+1	$\frac{m}{3}(q^2-1) + 1$	$m^2 = 3q$, $2 \neq p \mid q+m+1$
12	M_{22}	22	10	$p = 2$
13	M_{23}	23	11	$p = 2$
14	M_{24}	24	12	$p = 2$
15	M_{11}	12	6	$p = 3$
16	$\mathrm{PSL}_2(11)$	11	5	$p = 3$
17	HS	176	21	$p = 2$
18	HS	176	49	$p = 3$
19	Co_3	276	23	$p = 2$
20	Co_3	276	126	$p = 3$

TABLE 1. 度为 n 的几乎单群2-传递群 G，按其底群列出，且满足 $\mathrm{LinDim}_F(G,\ \Omega) \neq n-1$，其中 $\mathrm{char}(F) = p$。

定义线性维数 [8] 的动机，是为了证明某些群作用不适用于所提出的密码学应用。粗略地说，[8] 的命题14和推论15表明，若 $G_\lambda \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega_\lambda)$ 是由 $\lambda \in \mathbb{N}$索引的某个置换群族，并且存在一个有限域 $\mathbb{F}_q$，使得 $\mathrm{LinDim}_q(G_\lambda,\ \Omega_\lambda)$ 是对数级的

对于 $|G_\lambda|$ （或 $|\Omega_\lambda|$），那么 G_λ 在 Ω_λ 上的作用族不满足所需的多重单向性假设，也不满足 [1]中定义的弱不可预测性和弱伪随机性假设。特别地，将 λ作为安全参数，如 [8, 第 2.2], 节所定义，可得 $\log(|G_\lambda|) = O(\text{poly}(\lambda))$，且 $\log(|\Omega_\lambda|) = O(\text{poly}(\lambda))$； [8, 命题 14] 表明，若对于某个有限域 F，$\text{LinDim}_F(G_\lambda, \Omega_\lambda) = \text{poly}(\lambda)$，则在满足某个附加条件的前提下，该群作用不满足多重单向性假设。

根据上一段的讨论，定理 1.5 表明，例如， A_n、 S_n 或 $\text{Sp}_{2d}(2)$ 的 2-传递作用不太可能满足多重单向性假设。另一方面，若令 q 为关于 λ呈指数增长的函数，并令 G_λ 为以下群族之一：$\text{PSL}_2(q)$、$\text{Suz}(q)$、$\text{PSU}_3(q)$ 或 $\text{Ree}(q)$，且这些群在相关集合 Ω_λ上作 2-传递作用，那么对于任意域 F， $|G_\lambda|$ 与 $\text{LinDim}_F(G_\lambda, \Omega_\lambda)$ 之间都存在多项式关系。因此， [8,命题 14] 不适用于这四个群族，它们仍可作为密码学应用的潜在候选对象。

致谢。我们感谢 Gerhard Hiss 和 Peter Sin 对有限 2-传递群的模表示提出的宝贵意见。

我们感谢西澳大利亚大学对称与计算数学中心组织了 2025 年年度研究静修活动，本研究项目正是在该活动期间启动的。

Michael Giudici 和 Luke Morgan 的研究获得了澳大利亚研究理事会通过 Discovery 项目资助 DP230101268 提供的支持。

Daniel Hawtin 的部分经费由克罗地亚科学基金会通过项目编号 HRZZ–IP–2022–10–4571 提供；他也感谢对称与计算数学中心提供的 2024年 Cheryl E. Praeger 访问学者奖学金。

Lukas Klawuhn 的部分经费由德国研究联合会（DFG）通过项目编号 491392403（TRR 358）提供。他还要感谢德国学术交流中心资助他前往西澳大利亚大学进行为期两个月的研究访问，该项目正是在访问期间启动的。

2. 表示论预备知识

本节概述一些后文将用到的表示论概念。

设 V 是域 F 上的向量空间， G 是群。若能对所有 $v \in V$和 $g \in G$ 定义 $v^g \in V$，使得$(v+w)^g = v^g + w^g$、 $v^{gh} = (v^g)^h$、$(\lambda v)^g = \lambda(v^g)$，并且对所有 v、 $w \in V$以及 g、 $h \in G$都有 $v^{1_G} = v$，则称 V为 FG-模。注意，每个 $g \in G$都会在 V上诱导一个 F-线性映射，因此我们得到一个同态 $\rho: G \to \to \text{GL}(V)$。反过来，给定 G的一个表示ρ： $G \to \to \text{GL}_n(F)$，也就是说， ρ是一个同态，那么 $V = F^n$可通过对所有 $v \in V$ 和 $g \in G$定义 $v^g = v^{g\rho}$ 而继承 FG-模结构。我们将在 FG-模与表示这两种表述之间交替使用。

表示 ρ 的特征标 是映射 $\chi : G \to F$，满足 $\chi(g)$等于矩阵$(g)\rho$的迹。 FG-模的特征标就是相应表示的特征标。当 $F = \mathbb{C}$时，我们称 G 的特征标为普通 特征标。此外，任何 $\mathbb{C}G$-模都可以分解为不可约 $\mathbb{C}G$-模的直和，相应的特征标 χ 可以写成不可约特征标之和。和中的不可约特征标称为 χ的不可约成分 。

设 G 是作用在集合 Ω 上的群， F是一个域， F^Ω 是域F 上的置换模，其基为 $\{e_\omega \mid \omega \in \Omega\}$。置换模的特征标 π 称为置换特征标，并且对于每个 $g \in G$ ，我们都有 $\pi(g)$等于 Ω 中被 g固定的元素个数。

现在， F^Ω 配备了对称双线性形式

$$\left\langle \sum \lambda_\omega e_\omega, \sum \mu_\omega e_\omega \right\rangle = \sum \lambda_\omega \mu_\omega. \tag{2}$$

令 $C = \langle \sum e_\omega \rangle$ 为 F^Ω 的“常值”向量子空间。由 (2) 中定义的非退化双线性形式可知， $C^\perp = \{\sum \lambda_\omega e_\omega \mid \sum \lambda_\omega = 0\}$，其维数为 $n-1$。注意， C 和 $C^\perp$ 都是置换模的子模，我们将 $C^\perp/(C \cap C^\perp)$ 称为完全删去置换模。

我们有 f 果，适用于 A_n.

THEOREM 2.1. 设 $G = A_n$ 满足 $n \geqslant 5$，且 F 是一个域。若 U 是置换模 F^n 的真非零子模，则 $U = C$ 或 $U = C^\perp$。此外，以下结论成立：

(1) 若 特征$(F) = 0$ 或 特征$(F) \nmid n$，则 $F^n \cong C \oplus C^\perp$；(2) 若 特征$(F) \mid n$，则 $C \subseteq C^\perp$；(3) 对于 $n \geqslant 10$，完全删去置换模 $C^\perp/(C^\perp \cap C)$ 是维数最小的唯一忠实不可约FG-模。此外，当 特征$(F) = 0$ 或 特征$(F) \nmid n$ 时，此维数等于 $n-1$；当 特征$(F) \mid n$ 时，则等于 $n-2$。

PROOF. （1）和（2）是初等的。（3）见 [**16**, 命题 5.3.5]。请注意， [**22**] 遗漏了 A_9 有三个维数为 9 的不可约表示这一点；James 已予以更正 [**15**, 第421]页。□

设 G是一个群， H是其子群。若 V是一个 FH-模，则我们将诱导 FG-模记为 $V \uparrow_H^G$。这是一个维数为 $|G$的向量空间： $H|\dim(V)$。更多详情见 [**13**, 第 5] 章。若 χ 是 V的特征标，则 $V \uparrow_H^G$的特征标记为 $\chi \uparrow_H^G$。若 G是一个点稳定子为 H的传递置换群，则由 [**13**, 引理]（5.14）， G的置换特征标等于 $1 \uparrow_H^G$。

3. 群作用表示预备知识

设 G 是一个作用在集合 Ω 上的群，且(ρ, φ)是群在域 F上的群作用表示。我们将 G^Ω 定义为 G 在 Ω 上诱导的置换群。

下面这个界是在证明 [**8**, 命题 24] 中针对特定情形 $H = A_n$和 $G = S_n$时观察到的；我们给出一个一般性陈述。

LEMMA 3.1. 设 G作用于Ω，且 $H \leqslant G$。则线性维数$_F(H,$ Ω$) \leqslant$线性维数$_F(G,$ Ω$)$。

PROOF. 设 V是由 (ρ, φ) 给出的 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证。那么 $(\rho|_H, \varphi)$ 是 H 在 Ω 上、定义于 F 之上的群作用的一个表示。因此

$$\mathrm{LinDim}_F(H, \Omega) \leqslant \dim(V) = \mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$$

正如所需。 □

下一个结果讨论域扩张对线性维数的影响。若 F是 L 的扩张域，且 V是一个 LG-模，我们通过“扩张”标量得到一个 FG-模 V^F：这个模就是 $V \otimes_L F$。

LEMMA 3.2. 设 G 作用于 Ω，且设 F 和 L 为域，使得 $|F\colon L| = \ell$。那么

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) \leqslant \mathrm{LinDim}_L(G, \Omega) \leqslant \ell\, \mathrm{LinDim}_F(G, \Omega).$$

PROOF. 设 W 是由 (ρ, φ) 给出的 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证。那么 W 也是一个维数为 $\ell \dim(W)$ 的 L-向量空间，而 $(G)\rho$ 中的元素也诱导 L-线性变换。因此， W 也给出了 G 在 Ω 上关于 L 的一个作用表示，并且命题右侧的不等式成立。

现在令 V 为 $\mathrm{LinDim}_L(G, \Omega)$ 的一个见证，并将 V^F 视为一个 FG-模。存在一个嵌入 $\mathrm{GL}(V) \leqslant \mathrm{GL}(V^F)$，使得对所有 $g \in \mathrm{GL}(V)$、 $v \in V$ 和 $\lambda \in F$，都有 $(v \otimes \lambda)^g = v^g \otimes \lambda$。此外，若 V 给出表示 (ρ, φ)，则 $V \otimes F$ 给出表示 (ρ', φ')，其中 ρ' 由嵌入 $\mathrm{GL}(V) \leqslant \mathrm{GL}(V^F)$ 导出，且 $\varphi' : \omega \mapsto \omega\varphi \otimes 1$。因此，

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) \leqslant \dim_F(V^F) = \dim_L(V) = \mathrm{LinDim}_L(G, \Omega). \qquad \square$$

我们大量运用了这样一个事实：给定 Ω 上作用的表示 (ρ, φ)， G 在 Ω 上的作用与其通过 ρ 在 $(\Omega)\varphi$ 上的作用等价。事实上，反过来这一结论也成立，因此我们可以给出群作用的 F-线性维数的上界。

LEMMA 3.3. 设 G 在集合 Ω 上传递作用，且 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个忠实的 F-线性表示。则存在单射 $\varphi : \Omega \to V$，使得 (ρ, φ) 是 F 上的群作用表示，当且仅当存在 $\alpha \in \Omega$ 和 $v \in V$，使得 $(G\rho)_v = (G_\alpha)\rho$。

PROOF. 在正向证明中，设 $\varphi: \Omega \to V$ 如命题所述。取 $\alpha \in \Omega$，并令 $v = \alpha\varphi$。对于 $g \in G$，有 $v^{g\rho} = (\alpha\varphi)^{g\rho} = (\alpha^g)\varphi$，因此 $g\rho \in (G\rho)_v$ 当且仅当 $g \in G_\alpha$。也就是说，$(G_\alpha)\rho = (G\rho)_v$。

反之，若存在 $\alpha \in \Omega$ 和 $v \in V$，使得 $(G\rho)_v = (G_\alpha)\rho$，则 $G\rho$ 在轨道 $v^{G\rho}$ 上的作用等价于 $G\rho$ 在陪集集合 $[G\rho$上的作用：$(G\rho)_v] = [G\rho: (G_\alpha)\rho] =: \Omega'$。由于 ρ 是忠实的，此作用等价于 G 在右陪集集合 $[G$上的作用：$G_\alpha]$，而这又等价于 G 在 Ω 上的作用。因此，存在一个双射 $\varphi: \Omega \to v^{G\rho}$，我们可以将其视为单射 $\varphi : \Omega \to V$。由于集合 Ω 和 $v^{G\rho}$ 上的作用等价，这意味着 (ρ, φ) 是 F上的群作用表示。$\square$

我们还将用到这样一个事实：在 $(\Omega)\varphi$ 上诱导的置换群是 $(G)\rho$ 的一个商。

LEMMA 3.4. 设 G 是一个作用于集合 Ω 上的有限群，且 线性维数$_F(G, \Omega) = 1$。那么 G^Ω 是循环群。

PROOF. 假设 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) = 1$。那么存在一个同态 $\rho : G \to \mathrm{GL}_1(F)$，以及一个单射 $\varphi : \Omega \to F$。由于域的乘法群的有限子群都是循环群，可知 $(G)\rho$ 是循环群。此外，由于 G 在 Ω 上的作用与在 $(\Omega)\varphi$ 上的作用置换同构，它们诱导出同构的置换群。因此， G^Ω 同构于 $(G)\rho$ 的一个商，所以 G^Ω 是循环群。$\square$

接下来，我们来考察群作用和线性表示的忠实性。设 G 作用于 Ω，并设 (ρ, φ) 是该群作用在域 F 上的一个表示，其中 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$。设 K 是 G 在 Ω 上作用的核。由于 $\ker(\rho)$ 在 V 上的作用是平凡的，每个 $g \in \ker(\rho)$ 都固定每个 $\omega\varphi$。因此， g 固定每个 $\omega \in \Omega$，这意味着 $g \in K$，从而 $\ker(\rho) \leqslant K$。特别地，忠实置换作用必定具有忠实线性表示。

作为部分逆命题，若 V 由 $\{\omega\varphi \mid \omega \in \Omega\}$ 张成（当 V 是 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的见证时，便会如此），则 K 在 V上的作用是平凡的，因此 $K \leqslant \ker(\rho)$。特别地，若 V是 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的见证，则 $K = \ker(\rho)$。请注意，对于任意表示，这一结论并不成立，以下例子便说明了这一点。

EXAMPLE 3.5. 令 $G = \mathrm{SL}(2,3)$，并令 Ω 为 $\mathbb{F}_3^2$ 的一维子空间集合。则 $|\Omega| = 4$，且 $Z := Z(G) \cong C_2$ 是 G 在 Ω 上作用的核。此外，$G/Z = \mathrm{PSL}(2,3) \cong A_4$。由于 G不是循环群，且 G/Z 不是 $\mathrm{GL}(2,3)$ 的子群，因此 $\mathrm{LinDim}_3(G,\Omega) = 3$，其见证为 $V = \mathbb{F}_3^{\Omega}/\langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4\rangle$，对应的表示为 (ρ, φ)。如上所述，$\ker(\rho) = Z$。

令 $W = \mathbb{F}_3^2$为 G的自然模。现在 $V \oplus W$是一个 FG-模，并且我们滥用记号，用 φ 表示 Ω 到 $V \oplus W$中的嵌入。令 ρ' 为 G 在$V \oplus W$上的线性表示。那么 (ρ', φ) 是该群作用在 F上的一个表示，并且 $\ker(\rho') = 1$，因为 G 忠实地作用于 W。特别地，作用的核 Z 不等于 $\ker(\rho')$。$\diamond$

我们有以下引理，这意味着要确定线性维数，只需考虑忠实作用。

LEMMA 3.6. 设 G 作用于集合Ω，其核为 K，并设 F为一个域。那么线性维数$_F(G, \Omega)$ =线性维数$_F(G/K, \Omega)$。

PROOF. 令 V为由 (ρ, φ) 给出的、关于 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证。如上所述，K =$\ker(\rho)$，因此 (ρ, φ) 也是 G/K在 Ω 上、以 F为底域的群作用表示。这证明 $\mathrm{LinDim}_F(G/K, \Omega) \leqslant \mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$。

反之，若 (ρ', φ') 是 G/K 在 Ω 上的群作用的一个表示，那么将典范映射 $\pi : G \to G/K$ 与 ρ' 复合，可得到 G 在 Ω 上、基于 F 的群作用的一个表示 $(\pi\rho', \varphi')$。取 (ρ', φ') 为一个给出见证的表示，则有 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) \leqslant \mathrm{LinDim}_F(G/K, \Omega)$，证毕。□

设群 G 在集合 Ω 上作用，G-同余关系 是 Ω 上的一个等价关系 $\sim$，满足 $\alpha \sim \beta$ 当且仅当对所有 $\alpha, \beta \in \Omega$ 及 $g \in G$ 都成立。若一个传递作用仅有平凡的 G-同余关系（即等号关系和普遍关系），则称其为本原 作用。否则称其为非本原 作用；由一个非平凡的 G-同余关系的等价类构成的 Ω 的划分称为非本原性系。

线性　　性也使 $\mathrm{GL}(V)$ 在 V 上的作用自然地产生一个 G-同余　　e.

LEMMA 3.7. 假设 G 在 Ω 上的作用有一个在 F 上的表示(ρ, φ)，作用于 V。对于所有 α、$\beta \in \Omega$，定义 $\alpha \sim \beta$ 当且仅当对于某个 $\lambda \in F\backslash\{0\}$，有 $\alpha\varphi = \lambda(\beta\varphi)$。那么 $\sim$ 是一个 G-同余。

PROOF. 注意到，互为标量倍数是在 V 上的一个等价关系，它在 $\mathrm{GL}(V)$ 的作用下保持不变，因而在 $(G)\rho$ 的作用下也保持不变。由于 φ 是一个双射，$\sim$ 也是 Ω 上的一个等价关系。

假设　有 $\alpha \sim \beta$。那么存在 $\lambda \in F\backslash\{0\}$，使得 $\alpha\varphi = \lambda(\beta\varphi)$。于是

$$(\alpha^g)\varphi = (\alpha\varphi)^{g\rho} = (\lambda(\beta\varphi))^{g\rho} = \lambda(\beta\varphi)^{g\rho} = \lambda((\beta^g)\varphi).$$

因此，$\alpha^g \sim \beta^g$ 所以 $\sim$ 是一个 G-同余。□

COROLLARY 3.8. 设 G 在 Ω 上的作用具有一个表示 (ρ, φ)，其在 F 上的表示空间为 V，且 G 在 Ω上传递本原作用。则或者 $\dim(V) = 1$，或者不同的像 $(\omega)\varphi$ 位于不同的一维子空间中。

4. 商与一个见证

下面的定理是我们许多结果以及所有计算性陈述的基础。事实上，这是从 Aschbacher [3, 第 6(2) 题，51]页的文本中得到的一个相当简单的练习。

THEOREM 4.1. 设 V 给出了 G 在 *{style id='14'>*Ω 上的作用的 F 上的表示 (ρ, φ)。假设

$$V = \langle \omega\varphi \mid \omega \in \Omega \rangle.$$

那么存在一个满射 G-模同态 $\pi\colon F^\Omega \to V$，使得 $\omega\varphi = e_\omega\pi$。特别地，$V$ 是置换模 F^Ω 的商。

PROOF. 令 $\{e_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ 表示 $F\Omega$ 的标准基。我们定义 $\pi\colon F^\Omega \to V$，使得 $\pi\colon e_\omega \mapsto \omega\varphi$，并通过线性将其扩展到 F^Ω。由于 $\{\omega\varphi \mid \omega \in \Omega\}$ 张成 V，这意味着 π 是满射，因此 $V \cong F^\Omega/\ker(\pi)$。由于 (ρ, φ) 是该群作用的一个表示，π 是一个 G-模同态。□

COROLLARY 4.2. 设 V 是 线性维数$_F(G, \Omega)$ 的一个见证。那么 V 是置换模 F^Ω 的一个商。

PROOF. 注意，若 V 由 (ρ, φ) 给出，则 $W = \langle \omega\varphi \mid \omega \in \Omega \rangle$ 是 V 的一个不变子空间。由 V 的极小性可知，$V = W$，结论由定理 4.1 得出。□

我们还得到了置换模的如下同一化。

COROLLARY 4.3. 设 V 给出 G 在 F 上对 Ω 的作用的表示 (ρ, φ)。假设 $\{\omega\varphi \mid \omega \in \Omega\}$ 是 V 的一组基。那么 V 同构于置换模 F^Ω。

根据推论 4.2，线性维数总能在置换模 F^Ω 的某个商上实现。我们注意到，可能没有任何维数为 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的子模能给出 F 上 G 的群作用表示，以下例子说明了这一点。

EXAMPLE 4.4. 我们知道，如果 $n > 2$，则 $\mathrm{LinDim}_F(S_n, \{1, 2, \ldots, n\}) = n - 1$。设 C 为 F^n 中由常向量组成的子模，因此 $C^\perp$ 是 F^n 的零和子模，其维数为 $n - 1$，并定义

$$\varphi : \{1, \ldots, n\} \to C^\perp,\ i \mapsto ne_i - (e_1 + \cdots + e_n).$$

若 $\mathrm{char}(F)$ 不整除 n，则 φ 是单射，并具有交织性质。因此，$\mathrm{LinDim}_F(S_n, n)$ 在 $C^\perp$ 上实现，而 $C^\perp$ 是 F^n 的子模。

若 $\mathrm{char}(F)$ 整除 n，则不存在具有交织性质的单射映射 $\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \to C^\perp$。事实上，假设 $\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \to C^\perp$ 是这样的映射，并固定 i。那么 $i\varphi = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$，其中 $\sum \lambda_j = 0$。利用对换 $g = (k, \ell)$ 的交织性质，其中 i, k, ℓ 彼此不同，我们得到

$$i\varphi = i^g\varphi = (i\varphi)^{g\rho} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k,\ell}}^{n} \lambda_j e_j + \lambda_\ell e_k + \lambda_k e_\ell.$$

因此，对于任意 $k, \ell \neq i$，都有 $\lambda_k = \lambda_\ell$。设对所有 $k \neq i$，均有 $\lambda_k = \mu$。因此

$$i\varphi = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu e_j - (n-1)\mu e_i = \mu(e_1 + \cdots + e_n)$$

因为 $\mathrm{char}(F)$ 整除 n。因此，φ 不是单射。于是，由于 $C^\perp$ 是置换模 F^n 中唯一维数为 $n - 1$ 的子模，在这种情况下，线性维数无法在子模上实现。◇

如上例所示，分析对换的作用是 D'Alconzo 和 Di Scala 证明 $\mathrm{LinDim}_F(S_n, \Omega) = n - 1$ [8] 时的关键工具，在本文余下部分也会多次用到。

如果 V 是 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证，那么根据推论 4.2，存在 $F\Omega$ 的某个余维数为 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的子模 U，使得 $V = F^\Omega/U$。如果 U 有一个补子空间，记为 $F\Omega = U \oplus W$，那么 W 具有

维数 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$，并且 W给出群作用的表示 $F\Omega/U \cong W$。例 4.4 中的子模 C 没有补子空间，如果 $\mathrm{char}(F) \mid n$。

推论 4.2 引出了一个问题：置换模 F^Ω 的哪些商可以给出该作用的一个表示。我们将建立一些关于商的一般性结果。

设 V 是域 F 上的一个向量空间，它给出了 G 在 Ω 上的作用的一个表示 (ρ, φ)。设 U 是 V 的一个子空间，且在 $(G)\rho$ 下不变。那么映射

$$\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V/U) \quad \text{defined by} \quad g\overline{\rho} : U + v \mapsto U + v^{g\rho} \tag{3}$$

是一个同态。此外，我们定义

$$\overline{\varphi} : \Omega \to V/U \quad \text{by} \quad \omega\overline{\varphi} = U + \omega\varphi \tag{4}$$

并注意到，对于所有 $g \in G$，都有

$$(\omega^g)\overline{\varphi} = U + (\omega^g)\varphi = U + (\omega\varphi)^{g\rho} = (U + \omega\varphi)^{g\overline{\rho}} = (\omega\overline{\varphi})^{g\overline{\rho}}.$$

因此，(ρ, φ) 满足交织性质。

要确定 (ρ, φ) 是否是 G 在 Ω 上的作用的表示，我们需要判断 φ 是否为单射。当 $\omega\varphi \in U$ 对某个满足 $|\omega^G| > 1$ 的 $\omega \in \Omega$ 成立时，就会出现这种情况。由于 U 是 G-不变的，因此对所有 $\alpha \in \omega^G$，都有 $\alpha\varphi = U$。

THEOREM 4.5. 设 V 是 F 上的一个向量空间，它给出了 G 在Ω上的表示 (ρ, φ)。设 U 是 V 的一个子空间，且在 $(G)\rho$ 下不变。对于 $\alpha, \beta \in \Omega$，定义 $\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $U + \alpha\varphi = U + \beta\varphi$。那么 $\sim$ 是一个 G-同余关系。

PROOF. 显然，$\sim$ 是一个等价关系。令 $g \in G$。由于 U 是 $g\rho$-不变的，我们有 $(U + \alpha\varphi)^{g\rho} = U + (\alpha\varphi)^{g\rho} = U + (\alpha^g)\varphi$。因此，若 $\alpha \sim \beta$，则 $U + (\alpha^g)\varphi = (U + \alpha\varphi)^{g\rho} = (U + \beta\varphi)^{g\rho} = U + (\beta^g)\varphi$，于是 $\alpha^g \sim \beta^g$。□

COROLLARY 4.6. 设 V是 F上的一个向量空间，其上有 G 在 Ω 上的表示 (ρ, φ)。假设 G 在 Ω 上本原作用，且 G^Ω 不是循环群。进一步假设 $V = \langle \omega\varphi \mid \omega \in \Omega \rangle$，且 U 是余维数大于一的 $(G)\rho$-不变子空间。那么，式 (4)中定义的映射 $\varphi : \Omega \to V/U$是一个单射。

PROOF. 由于 G 是本原的，唯一的 G-同余关系是相等关系和全关系。若定理 4.5 中定义的关系 $\sim$ 是全关系，则对所有$\alpha, \beta \in \Omega$，都有 $U + \alpha\varphi = U + \beta\varphi$。由于 U是一个真（G）ρ-不变子空间，且集合 $(\Omega)\varphi$ 张成 V，我们可以推得，对于某个 $\omega \in \Omega$，有$V/U = \langle U + \omega\varphi \rangle$。因此，线性维数 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) = 1$；由引理 3.4 可知，这与 G^Ω不是循环的相矛盾。因此 $\sim$ 是相等关系，且 φ 是一个单射。□

现在我们可以给出定理 4.1 的一个部分逆命题。

THEOREM 4.7. 假设 G 在 Ω 上本原作用，且 G^Ω 不是循环群，并设 U 是置换模 F^Ω 的一个余维数大于一的子模。那么 $F\Omega/U$ 给出了 G 在 Ω 上作用的一个表示。

PROOF. 定义 $\varphi : \Omega \to F^\Omega$，使得 $\omega\varphi = e_\omega$，并令 $\rho : G \to \mathrm{GL}(F\Omega)$ 为由 G 在 F^Ω 上的作用诱导的自然同态。于是 $\langle \omega\varphi \mid \omega \in \Omega \rangle = F\Omega$。因此，推论 4.6 表明，$(\rho, \varphi)$ 是 G 在 Ω 上、取值于 F 的一个表示。□

这得出了以下或许令人惊讶的推论。

COROLLARY 4.8. 设 G 是作用在 Ω 上的非循环本原置换群，且 U是置换模 F^Ω 的一个余维数至少为 *2* 的子模。则 G 在 $F\Omega/U$ 上忠实地作用。

PROOF. 根据定理 4.7，F^Ω 给出了 G 在 Ω 上作用的一个表示，因此诱导同态 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(F\Omega/U)$ 的核包含于 G 在 Ω 上作用的核中。由于 G 是置换群，它在 Ω 上忠实地作用，因此 ρ 是忠实的。□

我们还得到以下关于 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的见证的推论。

COROLLARY 4.9. 假设 G 在 Ω 上本原作用，且 G^Ω 不是循环群。假设 V 是 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证。那么 V 与 F^Ω/U 作为 G-模同构，其中 U 是置换模 F^Ω 中维数尽可能大且不是超平面的子模。

COROLLARY 4.10. 假设 G 在 Ω 上本原作用，且 G^Ω 不是循环群。那么 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 等于置换模 F^Ω 中不是超平面的子模的最小余维数。

由于置换模是自对偶的，因此，如果 W 是 F^Ω 的一个维数为 d 的子模，那么 $W^\perp$ 的余维数为 d，而 $V/W^\perp \cong W^*$ 是 W 的对偶。因此，在本原情形下，推论 4.10 表明，只需知道 F^Ω 中不是一维的子模的最小维数即可（尽管有可能不存在能实现群作用表示的此类子模）。

COROLLARY 4.11. 假设 G 在 Ω 上本原作用，G^Ω 是非阿贝尔群，并令 V 为 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证。假设 V 可约。那么 V 有唯一的非零真子模 W，且 W 的余维数为一。特别地，W 不可约，并且 V 不能表示为两个真非零子模的直和。

PROOF. 令 W 为 V 的一个真非零子模。由推论 4.9 和对应定理，$V = F\Omega/U$ 和 $W = U_0/U$ 分别对应于 $F\Omega$ 的子模 U 和 U_0，其中 $U < U_0 < F^\Omega$ 和 U 关于不是超平面这一性质是极大的。由前述推论，U_0 必须是 F^Ω 的超平面。因此，W 在 V 中的余维数为 1。

现在假设 W' 是 V 的一个不同于 W 的真非零子模。那么，对于 F^Ω 的某个子模 U_1，有 $W' = U_1/U$，其中 $U < U_1$ 且 $U_1 \neq U_0$。由上一段可知，U_1 也是一个超平面，且 $U < U_0 \cap U_1$，因此根据 U 的极大性，我们有 $U = U_0 \cap U_1$。这意味着 U 的余维数为 2，也就是说，$\dim(V) = 2$ 且 $V = W \oplus W'$。由于 G 保持子模 W 和 W' 不变，因此有 $G^\Omega \leqslant \mathrm{GL}(W) \times \mathrm{GL}(W')$。由于 $\dim(W) = \dim(W') = 1$，这意味着 G 是阿贝尔群，矛盾。因此，W 是 V 的唯一真非零子模，而且 W 不可约。□

LEMMA 4.12. 假设 G 在Ω上本原作用，G^Ω 是非阿贝尔群，并令 $V = F^\Omega/U$为线性维数$_F(G, \Omega)$的见证，其中 $p =$特征(F)。假设 V不是不可约的，并令 W为 V唯一的非零真子模。令 K 为 G 在 U上的作用的核。于是 G在 V/W 上平凡作用；若 p 是素数，则 K 是一个 p-群。

PROOF. 写成 $W = U_1/U$，使得 $U < U_1$。注意，U_1 在 F^Ω中的余维数为1。若 $U_1 \neq C^\perp$，则 $C^\perp \cap U_1$在 F^Ω中的余维数为2。因此，$F\Omega/(U_1 \cap C^\perp)$是一个见证，但这与前述推论矛盾，因为 $U_1/(U_1 \cap C^\perp)$和 $C^\perp/(U_1 \cap C^\perp)$将是不同的子模。因此，$U_1 = C^\perp$，并且我们看到 G 在

$$F^\Omega/C^\perp = F^\Omega/U_1 \cong (F^\Omega/U)/(U_1/U) = V/W.$$

现在令 K为 G在 W上的作用的核。那么 K在 W和 V/W上都平凡作用。因此，K 是一个 p-群。□

下面的例子表明，推论 4.10 对非本原置换群不一定成立。

Example 4.13. 令 $G = S_4$ 作用于 $\langle(1,2,3,4)\rangle$ 在 G中的右陪集集合 Ω 上。那么$|\Omega| = 6$。由于 G^Ω 不是循环群，根据引理 3.4，我们有 $\mathrm{LinDim}_3(G, \Omega) \neq 1$。由于 G 在 Ω 上的作用是忠实的，且 $\mathrm{GL}_2(3)$没有与 S_4同构的子群，因此 $\mathrm{LinDim}_3(G, \Omega) \geqslant 3$。通过 Magma [6] 计算可知，置换模 $V = \mathbb{F}_3^\Omega$有余维数为 1、2、3、4 和 5 的真非零子模。由于 $\mathrm{LinDim}_3(G, \Omega) \geqslant 3$，可知 $\mathrm{LinDim}_3(G, \Omega)$ 并非不是超平面的子模中余维数最小者。

同样地，如果 $V = \mathbb{F}_2^\Omega$，我们看到 V 有余维数为 1、2、3、4 和 5 的子模。然而，$\mathrm{LinDim}_2(G, \Omega) = 4$。$\diamond$

对于特定子模，我们还可以得到定理 4.5 的一个变体，如下所示。设 V 是一个向量空间，它具有 Ω 上由 G 的作用给出的表示 (ρ, φ)。我们定义

$$C_V(G) = \{v \in V \mid v^{g\rho} = v \text{ for all } g \in G\}$$

并注意到 $C_V(G)$ 在 $(G)\rho$ 下是不变的。

Lemma 4.14. 假设 G 作用于集合 Ω，且对于任意不同的点 α、$\beta \in \Omega$，$G_\alpha \neq G_\beta$。若 V 是 线性维数$_F(G, \Omega)$ 的一个见证，则 $C_V(G) = 0$。

Proof. 设 (ρ, φ) 是由 V 给出的一个表示。按照 (3) 和 (4) 定义 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V/C_V(G))$ 以及$\varphi\colon \Omega \to V/C_V(G)$，其中 $U = C_V(G)$。假设 $\alpha\varphi = \beta\varphi$。则存在$v \in C_V(G)$，使得 $\alpha\varphi = v + \beta\varphi$。令 $g \in G$。于是

$$(\alpha^g)\varphi = (\alpha\varphi)^{g\rho} = (v + \beta\varphi)^{g\rho} = v + (\beta\varphi)^{g\rho} = v + (\beta^g)\varphi$$

因此，对于 $g \in G_\alpha$，我们有

$$v + (\beta^g)\varphi = (\alpha^g)\varphi = \alpha\varphi = v + \beta\varphi$$

这意味着 $\beta\varphi = (\beta^g)\varphi$。由于 φ 是一个单射，因此可得 $g \in G_\beta$，于是 $G_\alpha \leqslant G_\beta$。对称地可得 $G_\beta \leqslant G_\alpha$，所以两者相等。这与假设 $G_\alpha \neq G_\beta$ 矛盾，因此 φ 是一个单射。此外，(ρ, φ) 是 G 在 Ω 上作用的一个表示。由于 V 是 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证，因此可得 $C_V(G) = 0$。$\square$

Remark 4.15. 注意，点稳定子相等定义了 Ω 上的一个 G-同余，因此，对于所有 $\alpha \in \Omega$ 都满足 $G_\alpha \neq 1$ 的本原群（即非正则的本原群）满足引理 4.14 的假设。

为说明引理 4.14 中的条件是必要的，取 $G = C_2$，令其通过右乘作用于自身。则 $\mathrm{LinDim}_2(G, \Omega) = 2$，一个见证为 $V = \mathbb{F}_2^2 = \langle e_1, e_2\rangle$。我们有 $C_V(G) = \{0, e_1 + e_2\}$，因此 $\dim C_V(G) = 1$。

再举一个例子，令 $G = S_4$ 作用于 $H = \langle(1,2,3,4)\rangle$ 的右陪集集合 Ω。令 $\alpha = H$ 和 $\beta = H(1,4)(2,3)$，于是 $\alpha \neq \beta$，但 $G_\alpha = G_\beta = H$。如例 4.13 所示，$\mathrm{LinDim}_2(G, \Omega) = 4$。此外，对于见证 V，通过一次 Magma 计算可知，$\dim C_V(G) = 1$。

5. 非传递作用

我们先给出下面这个引理。

Lemma 5.1. 设 $\Omega = O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_t$ 为一个不交并，并假设 G 作用于Ω，其中每个 O_i 都是 G-不变的。那么

$$\max\{\mathrm{LinDim}_F(G, O_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant t\} \leqslant \mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) \leqslant \sum_{i=1}^{t} \mathrm{LinDim}_F(G, O_i)$$

PROOF. 设 W是由(ρ,φ)给出的 $\mathsf{LinDim}_F(G,\Omega)$的一个见证。对于每个 i，$(\rho,\varphi_{|O_i})$都是 G 在 O_i 上的作用的一个表示。因此

$$\dim W \geqslant \dim\langle (O_i)\varphi\rangle \geqslant \mathrm{LinDim}_F(G,O_i)$$

因此我们有 $\max\{$线性维数$_F(G,\ O_i)\mid i\in\{1,\dots,t\}\}\leqslant$线性维数$_F(G,\ \Omega)$。

对于每个 i，假设 V_i 给出了 G 在 O_i 上的作用在 F 上的一个表示 $(\rho_i,\ \varphi_i)$。现在，令 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_t$ 为这些 V_i 的形式直和，并定义 $\rho\colon G\to$ 一般线性群(V)，使得 $g\rho=(g\rho_1,\ g\rho_2,\ \dots\dots,\ g\rho_t)$。那么 ρ 是一个同态。令 $\varphi\colon\Omega\to V$ 为满足以下条件的映射：若 $\omega\in\Omega$ 属于轨道 O_i，则 $\omega\varphi=\omega\varphi_i$。那么 φ 是一个单射。此外，对于所有 $\omega\in\Omega$ 和$g\in G$，若 $\omega\in O_i$，则 $\omega^g\in O_i$，并且我们有

$$(\omega^g)\varphi=(\omega^g)\varphi_i=(\omega\varphi_i)^{g\rho_i}=(\omega\varphi)^{g\rho},$$

因为 $g\rho_{|V_i}=g\rho_i$。因此，$(\rho,\ \varphi)$ 是 G 在 Ω 上的作用的一个表示，所以 $\dim W\leqslant\dim V$，结论得证。□

注意，当 O_i 是 G 的轨道时，引理 5.1 适用。例 5.2 表明，引理 5.1 中的下界是紧的。

EXAMPLE 5.2. 假设 G 忠实地作用在每个轨道 O_i 上，并且 G 在各轨道上的作用两两等价，也就是说，对于每个 i 和 j，都存在一个双射 $\chi_{i,\ j}\colon O_i\to O_j$，使得对所有 $\omega\in O_i$ 和 $g\in G$，均有 $(\omega^g)\chi_{i,\ j}=(\omega\chi_{i,\ j})^g$。因此，存在一个向量空间 V，它是每个 $\mathsf{LinDim}_F(G,\ O_i)$ 的见证，且由 $(\rho,\ \varphi_i)$ 给出。

定义 $\psi_{i,\ j}\colon(O_i)\varphi_i\to(O_j)\varphi_j$ 为 $\psi_{i,\ j}=\varphi_i^{-1}\chi_{i,\ j}\varphi_j$，并注意到 $\psi_{i,\ j}$ 是一个双射。于是，对于所有 $\omega\in O_i$ 和 $g\in G$，我们有

$$\begin{aligned}((\omega\varphi_i)^{g\rho})\psi_{i,j}&=(\omega^g)\varphi_i\psi_{i,j}\\&=(\omega^g)\chi_{i,j}\varphi_j\\&=((\omega\chi_{i,j})^g)\varphi_j\\&=((\omega\chi_{i,j})\varphi_j)^{g\rho}\\&=((\omega\varphi_i\varphi_i^{-1})\chi_{i,j}\varphi_j)^{g\rho}\\&=((\omega\varphi_i)\psi_{i,j})^{g\rho}\end{aligned}$$

因此，$(G)\rho$ 在$(O_i)\varphi_i$ 上的作用两两等价。

设 F是一个域，使得 $|F|>t$。那么，$\mathsf{LinDim}_F(G,\ \Omega)=\mathsf{LinDim}_F(G,\ O_1)$。证明如下。设 λ_2，$\dots\dots$，λ_t是 $F\backslash\{0,1\}$中的互异元素。定义 $\varphi\colon\Omega\to V$，使得

$$(\omega)\varphi=\begin{cases}(\omega)\varphi_1 & \text{if } \omega\in O_1,\\ \lambda_i((\omega)\chi_{i,1}\varphi_1) & \text{if } \omega\in O_i \text{ for } i>1.\end{cases}$$

由于 λ_i 互异，φ 是一个单射。要验证$(\rho,\ \varphi)$是 G 在Ω上的一个表示，只需验证对所有 $\omega\in O_2\cup\ldots\cup O_t$都满足交织性质。设对某个 $i>1$，有 $\omega\in O_i$，并令 $g\in G$。回顾上面定义的映射$\psi_{i,\ 1}$。那么

$$\begin{aligned}(\omega^g)\varphi&=\lambda_i((\omega^g)\chi_{i,1}\varphi_1)\\&=\lambda_i(((\omega\chi_{i,1})^g)\varphi_1)\\&=\lambda_i(\omega\chi_{i,1}\varphi_1)^{g\rho}\\&=(\lambda_i((\omega)\chi_{i,1}\varphi_1))^{g\rho}\\&=((\omega)\varphi)^{g\rho}.\end{aligned}$$

因此，$(\rho,\ \varphi)$ 是 G 在 Ω 上作用的一个表示，因此 $\mathsf{LinDim}_F(G,\ \Omega)=\mathsf{LinDim}_F(G,\ O_1)$。◇

下一个例子表明，即使 G 在其轨道上的作用并不等价，我们仍然可以得到一个精确的下界。

EXAMPLE 5.3. 设 $G = S_n$，其中 $n \geqslant 5$，令 Ω 为$\{1, 2, \ldots, n\}$ 中所有大小小于 $n/2$ 的非空子集所组成的集合。对于每个 $i < n/2$，令 O_i 为 i子集所组成的集合。于是，G 在 Ω 上的轨道为 O_i，且 G 在 O_1 上的作用等价于 S_n 在$\{1, 2, \ldots, n\}$上的自然作用。

令 F^n 为 G作用于 $\{1, 2, \ldots, n\}$上的置换模。令 C为 F^n中由所有常向量组成的子空间，并令 $V = F^n/C$。正如我们将在引理 8.1 中看到的，$\mathrm{LinDim}(S_n, O_i) \leqslant n - 1$ 作为 V，在每个 O_i 上都给出 G 的一个表示，其中 Ω 的每个元素的像彼此不同。因此，V 也给出了 G在 Ω 上的作用的一个表示。于是，$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) \leqslant n - 1$。由于 $\mathrm{LinDim}(S_n, O_1) = \mathrm{LinDim}_F(G, \{1, 2, \ldots, n\}) = n - 1$，由引理 5.1 可得，$\mathrm{LinDim}(S_n, \Omega) \geqslant \mathrm{LinDim}(S_n, O_1) = n - 1$。因此，$\mathrm{LinDim}(S_n, \Omega) = n - 1 = \max\{\mathrm{LinDim}_F(G, O_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$。$\diamond$

现在给出一个引理 5.1 中上界取等的例子。下面的例子表明，引理 5.1 中的上界也是紧的。

EXAMPLE 5.4. 令 $G = \mathrm{Sym}(O_1) \times \mathrm{Sym}(O_2) \times \cdots \times \mathrm{Sym}(O_t)$ 非传递地作用于 Ω，Ω 是 $O_1, O_2, \ldots, O_t$ 的不交并，其中对所有 i 都有 $|O_i| \geqslant 3$。我们断言，$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) = \sum_i \mathrm{LinDim}_F(G, O_i)$。注意

$$\mathrm{LinDim}_F(G, O_i) = \mathrm{LinDim}_F(\mathrm{Sym}(O_i), O_i) = |O_i| - 1.$$

因此 $\sum_i \mathrm{LinDim}_F(G, O_i) = |\Omega| - t$。

令 V 为一个向量空间，使其在 F 上给出 G 在 Ω 上的作用的表示 (ρ, φ)。对每个 $\omega \in \Omega$，记 $v_\omega = \omega\varphi$，并注意到对所有 $g \in G$ 都有 $v_{\omega^g} = (v_\omega)^{g\rho}$。对每个 i，固定一个元素 $\alpha_i \in O_i$，并令 $\Delta = \Omega \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t\}$。注意 $|\Delta| = |\Omega| - t$.

考虑集合 $\{v_\omega | \omega \in \Delta\}$，并假设对于某个 $\lambda_\omega \in F$，有 $\sum_{\omega \in \Delta} \lambda_\omega v_\omega = 0$。令 $\delta \in \Delta$。那么恰有一个 i使得 $\delta \in O_i \setminus \{\alpha_i\}$。考虑对换 $g = (\delta, \alpha_i) \in G$。于是

$$0 = 0^{g\rho} = \sum_{\omega \in \Delta} \lambda_\omega (v_\omega)^{g\rho} = \sum_{\omega \in \Delta} \lambda_\omega v_{\omega^g} = \lambda_\delta v_{\alpha_i} + \sum_{\omega \in \Delta \setminus \{\delta\}} \lambda_\omega v_\omega.$$

由此可得 $\lambda_\delta v_{\alpha_i} = \lambda_\delta v_{\delta}$。由于 φ 是单射，因此有 $v_{\alpha_i} \neq v_\delta$，从而 $\lambda_\delta = 0$。因此，集合 $\{v_\omega | \omega \in \Delta\}$ 线性无关，所以 $\dim(V) \geqslant |\Delta| = |\Omega| - t$. 现在由引理 5.1 即可得出结论。$\diamond$

我们可以推广例 5.4。

THEOREM 5.5. 对于 $i = 1$、.....、t，设 $H_i \leqslant \mathrm{Sym}(O_i)$ 为置换群，使得对于每个 i，都有 $(H_i)_\alpha \neq (H_i)_\beta$，其中 α、$\beta \in O_i$是不同的点。令 $G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_t$ 在不交并 $\Omega = O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_t$上非传递地作用。则 线性维数$_F(G, \Omega) = \sum_{i=1}^t$ 线性维数$_F(H_i, O_i)$。

PROOF. 设 V是 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 的一个见证，且 V给出表示 (ρ, φ)。设 α, β是 Ω 中互不相同的点。若存在 $1 \leqslant i \leqslant t$ 使得 $\alpha, \beta \in O_i$，则

$$G_\alpha = (H_i)_\alpha \times \prod_{j \neq i} H_j \quad \text{and} \quad G_\beta = (H_i)_\beta \times \prod_{j \neq i} H_j$$

由定理的假设可得 $G_\alpha \neq G_\beta$。若对互不相同的 i, j，有 $\alpha \in O_i$ 且 $\beta \in O_j$，则$G_\alpha = (H_i)_\alpha \times \prod_{k \neq i} H_k$ 且 $G_\beta = (H_j)_\beta \times \prod_{k \neq j} H_k$，从而 $G_\alpha \neq G_\beta$。因此，由引理 4.14 可得 $C_V(G) = 0$。

对于每个 i，令 $V_i = \langle \omega\varphi \mid \omega \in O_i \rangle$。于是，$(\rho_{|H_i}, \varphi_{|O_i})$ 是 H_i 在 O_i 上作用的一个表示。因此，$V_i \geqslant$ 的维数为 $\mathrm{LinDim}_F(H_i, O_i)$。

对于每个 $j \neq i$， H_j 在 O_i 上平凡作用，因此 $(H_j)\rho$ 在 V_i 上平凡作用。类似地，$(H_i)\rho$ 在 $\sum_{j\neq i} V_j$ 上平凡作用。由此可得， $G = H_1 \times \cdots \times H_t$ 在 $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j$ 上平凡作用，进而 $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j \leqslant C_V(G) = 0$。这意味着 $V = V_i \oplus (\sum_{j\neq i} V_j)$，重复这一论证可得 $V = \bigoplus_{i=1}^{t} V_i$。因此，

$$\dim V = \sum_{i=1}^{t} \dim V_i \geqslant \sum_{i=1}^{t} \mathrm{LinDim}_F(H_i, O_i),$$

结合引理 5.1，我们得到与陈述中相同的等式。 □

下一个例子表明，$\mathrm{LinDim}_F(G、\Omega)$ 也可以取严格介于两个界之间的值。

Example 5.6. 设 $1 < s < t$，并令 $G = \mathrm{Sym}(O_1) \times \mathrm{Sym}(O_2) \times \cdots \times \mathrm{Sym}(O_s)$ 非传递地作用于 Ω，即 O_1、O_2、.....、O_t 的不交并，其中对所有 i， $|O_i| \geqslant 3$，且对所有 $j > s$， O_j 是 O_s 的一个副本，因此 $\mathrm{Sym}(O_s)$ 在所有 O_j 上都有等价的作用，其中 $j \geqslant s$。更确切地说，该作用定义如下：

$$\omega^{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_s)} = \begin{cases} \omega^{\sigma_i} & \text{if } \omega \in O_i \text{ for } i \leqslant s \\ \omega^{\sigma_s} & \text{if } \omega \in O_i \text{ for } i > s. \end{cases}$$

我们断言，若 $|F| > t - s + 1$，则 $\mathrm{LinDim}_F(G、\Omega) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{LinDim}_F(G、O_i)$。注意，

$$\mathrm{LinDim}_F(G, O_i) = \mathrm{LinDim}_F(\mathrm{Sym}(O_i), O_i) = |O_i| - 1.$$

因此， $\sum_{i=1}^{s}$ 线性维数$_F(G, O_i) = (\sum_{i=1}^{s} |O_i|) - s$。

设 $\Delta_1 = O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_{s-1}$ 和 $\Delta_2 = O_s \cup O_{s+1} \cup \ldots \cup O_t$。如例 5.4 所示，线性维数$_F(G, \Delta_1)$ $= \sum_{i=1}^{s-1}$ 线性维数$_F(G, O_i)$；而在例 5.2 中，我们看到，如果 $|F| > t - s + 1$，则线性维数$_F(G, \Delta_2)$ =线性维数$_F(G, O_s)$。因此，根据引理 5.1，我们推得

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) \leqslant \mathrm{LinDim}_F(G, \Delta_1) + \mathrm{LinDim}_F(G, \Delta_2) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{LinDim}_F(G, O_i).$$

或者，设 $\Delta_3 = O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_s$。由引理 5.1 可知

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Delta_3) \leqslant \mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$$

并且，如例 5.4 中所示，我们看到

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Delta_3) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{LinDim}_F(G, O_i).$$

因此，$\mathrm{LinDim}_F(G,\ \Omega) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{LinDim}_F(G,\ O_i)$，如所声称的。 ◇

6. 非本原作用

设 $K \leqslant \mathrm{Sym}(\Delta)$ 和 $L \leqslant \mathrm{Sym}(\Sigma)$，其中 $\Sigma = \{1, 2, \ldots, \ell\}$。我们定义缠绕积$K \wr L := K^{\ell} \rtimes L$，使得对于所有 $(h_1, h_2, \ldots, h_\ell) \in K^{\ell}$ 和 $\sigma \in L$，都有 $(h_1, h_2, \ldots, h_\ell)^{\sigma} = (h_{1\sigma^{-1}}, h_{2\sigma^{-1}}, \ldots, h_{\ell\sigma^{-1}})$。于是 $K \wr L$ 通过 $(\delta, i)_{(h_1,h_2,\ldots,h_\ell)^{\sigma}} = (\delta^{h_i}, i^{\sigma})$ 作用于 $\Delta \times \Sigma$。此作用是非本原的，其非本原性系为 $\{\{(\delta, i) \mid \delta \in \Delta\} \mid i \in \Sigma\}$。

我们从一个非本原群花积的基本例子开始。作为一个线性群，它稳定一个1维子空间。

Example 6.1. 设 $F = \mathbb{F}_p$，令 V为一个维数为 $\ell + 1$、标准基为 $\{e_1, \ldots, e_{\ell+1}\}$的 F-向量空间。令 $S \cong S_\ell$ 为 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群，该子群固定 $e_{\ell+1}$，并通过作用于下标自然地置换前 ℓ 个基向量 e_1，....., e_ℓ。对于 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，定义 $y_i \in \mathrm{GL}(V)$ 为如下映射：对于 $j \neq i$，固定 e_j，并将 e_i映射到 $e_i + e_{\ell+1}$。令 $P = \langle y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell \rangle \cong C_p^{\ell}$

并令 $G = \langle P,\ S\rangle$.通过直接计算，我们看到 $G \cong C_p \wr S_\ell$，并令 $\Omega = \{1,\dots,p\}\times\{1,\dots,\ell\}$，使得如上所述， G 在 Ω 上非本原地作用。我们计算得到

$$(e_1)^G = \{e_i + \lambda e_{\ell+1} \mid \lambda \in F\}$$

使得 $|(e_1)^G| = p\ell$。此外，我们看到 G 保持了 $(e_1)^G$ 的划分，该划分由 $B_i = \{e_i + \lambda e_{\ell+1} \mid \lambda \in F\}$ 给出，分成 p 个元素一组的 ℓ 个部分。因此， V 是 $G = C_p \wr S_\ell$ 在 $p\ell$ 个点上的非本原作用在 F 上的表示，并且我们有

$$\mathrm{LinDim}_p(C_p \wr S_\ell, \Omega) \leqslant \ell + 1. \tag{5}$$

令 $U = \langle e_{\ell+1}\rangle$，并注意到 U 被 G 固定，因此 G 在 V/U 上作用。我们发现 P 在 V/U 上平凡作用，因为

$$y_i : e_i + U \mapsto e_i + e_{\ell+1} + U = e_i + U,$$

于是 $G/P = S_\ell$ 在 $V/U = \langle e_i + U\rangle$ 上作用。因此，作为一个 FS_ℓ-模， V/U 是 S_ℓ 在 F 上的置换模。由置换模 F^ℓ 的分解可知，根据 $p \nmid \ell$ 或 $p \mid \ell$， V/U 分别有 2 个或 3 个合成因子。在定理 1.2 中，我们证明 V 是 $C_p \wr S_\ell$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上的线性维数的见证。由于 V 至少有 3 个合成因子，这说明推论4.11对非本原群不成立。$\diamond$

任何群 G若保持集合 Ω（其大小为 $k\ell$ ）的一个划分，该划分包含 ℓ 个部分，且每部分大小为 k ，则它置换同构于花环积 $S_k \wr S_\ell$的一个子群。此外，若 $\Delta \subseteq \Omega$ 是由 G保持的划分 Σ 中的一个部分，令 $K = (G_\Delta)^\Delta$分别表示由 G_Δ 在Δ 上以及由 G 在 Σ上诱导的置换群 $L = G^\Sigma$，则 G 置换同构于 $K \wr L$ 的一个子群（见 [**20**, 定理 5.5]）。因此，根据引理 3.1，为了求非本原群 G线性维数的上界，我们研究非本原花环积的线性维数。

此外，如果我们选择一个部分尽可能小且大小大于 1 的划分 Σ ，那么群 $K = (G_\Delta)^\Delta$ 实际上是本原群。这样，我们便可利用本原情形下已有的结果，来界定非本原群的线性维数。请注意，一般而言， G可能保持多个划分，见例 6.3。现在我们证明定理 1.2，并为方便读者再次陈述该定理。

定理 1.2。令 $K \leqslant \mathrm{Sym}(\Delta)$ 为本原的，令 $L \leqslant \mathrm{Sym}(\Sigma)$，并令 $G = K \wr L$ 在集合 $\Omega = \Delta \times \Sigma$上非本原地作用。令 $k = |\Delta|$ 和 $\ell = |\Sigma|$。则

$$\mathrm{LinDim}_F(G,\Omega) = \begin{cases} \ell + 1 & \text{if } K \text{ is regular and } k = \mathrm{char}(F), \\ \ell\,\mathrm{LinDim}_F(K,\Delta) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. 令 W为一个 FK-模，是 $\mathrm{LinDim}_F(K,\Delta)$ 的见证，并令 V为 ℓ 个 W的形式直和。于是，我们可以通过定义使 V成为一个 FG-模

$$(w_1, w_2, \dots, w_\ell)^{(g_1,g_2,\dots,g_\ell)} = (w_1^{g_1}, w_2^{g_2}, \dots, w_\ell^{g_\ell})$$

and

$$(w_1, w_2, \dots, w_\ell)^\sigma = (w_{1\sigma^{-1}}, w_{2\sigma^{-1}}, \dots, w_{\ell\sigma^{-1}})$$

对所有 $(w_1, w_2, \dots, w_\ell) \in V$， $g_1, g_2, \dots, g_\ell \in K$ 以及 $\sigma \in L$。

设 (ρ_1, φ_1) 是由 W 给出的 K 在 Δ 上作用的表示。记 $\Omega = \Delta \times \{1, 2, \dots, \ell\}$，并定义 φ: $\Omega \to V$，使得 $(i, j)\varphi$ 是除 j^{th} 坐标外其余坐标均为 0，且 j^{th} 坐标等于 $(i)\varphi_1 \in W$ 的向量。于是，令 ρ: $G \to \mathrm{GL}(V)$ 为诱导同态，可得 (ρ, φ) 是 G 在 Ω 上作用的表示。因此，

$$\mathrm{LinDim}_F(K \wr L, \Omega) \leqslant \ell\,\mathrm{LinDim}_F(K,\Delta). \tag{6}$$

首先，假设 K 不是正则的。由于 K^ℓ 是 G 的一个非传递子群，其 ℓ 个轨道的大小均为 k，由定理 5.5（另见注 4.15）和引理 3.1 可得

$$\ell \operatorname{LinDim}_F(K,\Delta) = \operatorname{LinDim}_F(K^\ell,\Omega) \leqslant \operatorname{LinDim}_F(K \wr L,\Omega).$$

这给出了所需的下界，并与 (6) 中的上界一起，证明了当 K 不是正则时的定理。

现在假设 K 是正则的，因此 $K = C_k$ 和 k 是素数。记 $G = P \rtimes L$，其中 $P = \langle x_1、\ldots\ldots、x_\ell\rangle \cong C_k^\ell$，且 L 通过置换下标来置换 x_i。此外，记 $\Omega = \mathbb{Z}_k \times \{1,2,\ldots,\ell\}$，使得 x_i 将 $(s,\ i)$ 映射到 $(s+1,\ i)$（第一个坐标按 k 取模运算），并固定所有其他点。我们首先证明 $\operatorname{LinDim}_F(G,\ \Omega) \geqslant \ell$。

设 U 是 $\operatorname{LinDim}_F(G,\ \Omega)$ 的一个见证，它给出表示 $(\rho,\ \varphi)$，并设 $v_i := (0,\ i)\varphi$，对每个 i 都成立。我们证明 $\{v_i \mid i \in \{1,2,\ldots,\ell\}\}$ 线性无关。

假设 $\sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i = 0$。对于每个 s，我们有

$$0 = 0^{x_s} = \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i\right)^{x_s} = a_s(1,s)\varphi + \sum_{i=1, i\neq s}^{\ell} a_i v_i$$

因此，取差可得

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i - a_s(1,s)\varphi - \sum_{i=1, i\neq s}^{\ell} a_i v_i = a_s(v_s - (1,s)\varphi).$$

由于 φ 是单射，因此 $a_s = 0$。由于对每个 $s \in \{1,2,\ldots,\ell\}$ 都可以这样做，我们有每个 $a_s = 0$，所以 $\{v_i \mid i \in \{1,2,\ldots,\ell\}\}$ 线性无关。特别地，$\dim(U) \geqslant \ell$。

假设 $k = \operatorname{char}(F)$。我们断言 $(1,\ 1)\varphi \notin \langle v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\rangle$。事实上，否则 $(1,\ 1)\varphi = \sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i$，其中某个 $a_i \in F$。令 $s > 1$，并考虑 $g = x_s \in P$。我们有 $((1,\ 1)\varphi)^g = (1,\ 1)\varphi$，因此

$$0 = (1,1)\varphi - ((1,1)\varphi)^g = \sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i - \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i\right)^g = a_s(v_s - (1,s)\varphi)$$

因此，对每个 $s > 1$都有 $a_s = 0$。于是，$(1,1)\varphi = a_1 v_1$。显然 $a_1 \neq 0$，将 $g = x_1 \in P$ 应用于 $(1,1)\varphi = a_1 v_1$，可得

$$(2,1)\varphi = a_1(1,1)\varphi = a_1^2 v_1,$$
$$(3,1)\varphi = a_1^3 v_1,$$

依此类推。由此可得 $v_1 = (0,1)\varphi = a_1^k v_1$，因此 $a_1^k = 1$。所以，a_1 是多项式 $f(t) = t^k - 1 \in F[t]$ 的一个根。由于 $\operatorname{char}(F) = k$，我们有 $f(t) = (t-1)^k$，这意味着 $a_1 = 1$，因此 $(1,1)\varphi = v_1$，矛盾。因此，$\dim(U) \geqslant \ell + 1$。由 (5)、引理 3.2 和引理 3.1 可得

$$\operatorname{LinDim}_F(K \wr L,\Omega) \leqslant \operatorname{LinDim}_F(K \wr S_\ell,\Omega) \leqslant \operatorname{LinDim}_k(K \wr S_\ell,\Omega) \leqslant \ell + 1.$$

这就证明了当 K 是正则且 $k = \operatorname{char}(F)$ 时，该定理成立。

现在假设 $k \neq \operatorname{char}(F)$。由于 $\operatorname{char}(F)$ 和 k 都是素数，这也意味着 $\operatorname{char}(F) \nmid k = |K|$。对于 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，令 $V_i = \langle (x,i)\varphi \mid x \in \mathbb{Z}_k\rangle$，并注意到 V_i 在 $\langle x_i\rangle$ 下是不变的。由马施克定理应用于非平凡的 $F\langle x_i\rangle$-模 V_i，可得 $V_i = C_{V_i}(x_i) \oplus U_i$，其中 U_i 是非平凡的 $F\langle x_i\rangle$-模。对于 $i \neq j$，我们看到 x_i 中心化了 V_j，因此 $V_i \cap \left(\sum_{j\neq i} V_j\right) \leqslant C_{V_i}(x_i)$。于是，

$$\dim V \geqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{\ell} V_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\ell} \dim\left(V_i / C_{V_i}(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \dim(U_i).$$

现在，令 $1 \leqslant i \leqslant \ell$，并设 $X = U_i$ 和 $x = x_i$。我们看到 X 给出了 $\langle x \rangle \cong K$ 在 F 上群作用的一个表示。事实上，由于 X 是非平凡模，存在 $u \in X$，使得$u^x \neq u$，因此 u 在 $\langle x \rangle$ 下的轨道长度为 k。由此可得 $\dim(X) \geqslant \mathrm{LinDim}_F(K, \Delta)$，因此 $\dim(U) \geqslant \ell\,\mathrm{LinDim}_F(K, \Delta)$。结合 (6)，证明完成。□

Remark 6.2. 引理 3.1 与定理 1.2 结合使用，可以给出非本原地作用的群的上界。这些上界不一定是紧的。例如，设 $G = C_{15}$ 作为正则置换群作用于 Ω 上，且 Ω 的基数为 15。于是

$$\mathrm{LinDim}_2(C_{15}, \Omega) = 4$$

由嵌入 $G \cong \mathrm{GL}(1, 2^4)$ 到 $\mathrm{GL}(4, 2)$ 可见。另一方面，G 的作用是非本原的，有两个区块系统，其区块大小分别为 3 和 5。上述定理给出的上界如下：

$$\mathrm{LinDim}_2(C_{15}, \Omega) \leqslant \mathrm{LinDim}_2(S_3 \wr S_5, \Omega) = 5 \cdot 2 = 10$$

and

$$\mathrm{LinDim}_2(C_{15}, \Omega) \leqslant \mathrm{LinDim}_2(S_5 \wr S_3, \Omega) = 3 \cdot 4 = 12$$

这些上界与准确值相差甚远。

下面的例子表明，由包含关系给出的上界可以是紧的，并且给出了一个具有两个不同见证的群的例子。

Example 6.3. 设 $G = C_6$ 为 6 阶循环群，且令 G 正则地作用于 Ω 上，使得 Ω 的基数为 6。我们有 $\mathrm{LinDim}_2(C_6, 6) = 4$，并且存在两个非同构的见证。这些见证分别来自两个不同的非本原嵌入：$C_6 \hookrightarrow S_2 \wr S_3$ 和 $C_6 \hookrightarrow S_3 \wr S_2$。由定理 1.2 可得

$$\mathrm{LinDim}_2(S_2 \wr S_3, \Omega) = 3 + 1 = 4 \quad \text{and} \quad \mathrm{LinDim}_2(S_3 \wr S_2, \Omega) = 2 \cdot 2 = 4$$

因此，分别作为 $G_1 = S_2 \wr S_3$ 和 $G_2 = S_3 \wr S_2$ 的见证的 V_1 和 V_2，都是 G 的见证。

设 $G = \langle x, y \rangle$ 满足 $|x| = 2$ 和 $|y| = 3$。由例 6.1 可知，G_1 的一个见证 V_1 有基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，使得 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 y 的一个轨道，且 y 固定 e_4。因此，$C_{V_1}(y) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ 的维数为 2。另一方面，由定理 1.2 的证明可知，G_2 的见证 V_2 是 S_3 在 $\mathbb{F}_2$ 上的见证 U_1 和 U_2 的直和，且它们被 S_2 互换。由于U_1 和 U_2 是 S_3 在 $\mathbb{F}_2$上的删去置换模，我们可知 $C_{U_1}(y) = C_{U_2}(y) = 0$。由于 $V_2 = U_1 + U_2$，我们有 $C_{V_2}(y) = C_{U_1}(y) + C_{U_2}(y) = 0$。这表明 V_1 和 V_2 作为 G-模并不同构。⋄

7. 积作用下的迭代积

一类重要的本原群是积作用下的迭代积。给定 $K \leqslant \mathrm{Sym}(\Delta)$ 和 $L \leqslant S_\ell$，迭代积 $K \wr L = K^\ell \rtimes L$ 在笛卡尔幂 Δ^ℓ 上的作用为

$$(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\ell)^{(h_1, h_2, \ldots, h_\ell)\sigma} = (\delta_{1\sigma^{-1}}^{h_{1\sigma^{-1}}}, \delta_{2\sigma^{-1}}^{h_{2\sigma^{-1}}}, \ldots, \delta_{\ell\sigma^{-1}}^{h_{\ell\sigma^{-1}}})$$

注意，$\sigma(h_1, h_2, \ldots, h_\ell)\sigma^{-1} = (h_{1\sigma}, h_{2\sigma}, \ldots, h_{\ell\sigma})$。当且仅当 K 在 Δ 上是本原但非正则的，Δ 是有限群，且 L 在 $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ 上传递时，这个作用才是本原的（参见 [20, 定理 5.18]）。

Lemma 7.1. 设 $K \leqslant \mathrm{Sym}(\Delta)$ 且 $L \leqslant S_\ell$。那么

$$\mathrm{LinDim}_F(K \wr L, \Delta^\ell) \leqslant \ell\,\mathrm{LinDim}_F(K, \Delta).$$

PROOF. 设 V是由 (ρ,φ) 实现的 $\mathsf{LinDim}_F(K,\Delta)$ 的一个见证，并设 W 是 V 的 ℓ 个副本的直和。注意，$\dim(W)=\ell\,\mathsf{LinDim}_F(K,\Delta)$。定义 $\rho\colon K\wr L\to \mathrm{GL}(\overline{W})$ 如下

$$(v_1,v_2,\dots,v_\ell)^{((h_1,h_2,\dots,h_\ell))\overline{\rho}}=(v_1^{(h_1)\rho},v_2^{(h_2)\rho},\dots,v_\ell^{(h_\ell)\rho}) \tag{7}$$

and

$$(v_1,v_2,\dots,v_\ell)^{(\sigma)\overline{\rho}}=(v_{1\sigma^{-1}},v_{2\sigma^{-1}},\dots,v_{\ell\sigma^{-1}})$$

对所有的 $v_i\in V$、$h_i\in K$ 和 $\sigma\in L$。

取 $\delta\in\Delta$ 并令 $v=(\delta)\varphi$。令 $w=(v,v,\dots,v)\in W$。我们计算得

$$((K\wr L)\overline{\rho})_w=(K_\delta\wr L)\overline{\rho}=((K\wr L)_{(\delta,\dots,\delta)})\overline{\rho}.$$

因此，引理 3.3 表明，W 给出了 $K\wr L$ 在 Δ^ℓ 上的群作用的表示。证明完毕。□

LEMMA 7.2. 令 $G=\mathrm{Sym}(\Delta)\wr S_\ell$，并假设 $|\Delta|=k>2$。若 p 是满足 $p\mid k$ 的素数，则对于任意特征为 p 的域 F，有

$$\mathrm{LinDim}_F(G,\Delta^\ell)\leqslant(k-2)\ell+1.$$

PROOF. 如前面的证明所述，令 V 为 $\mathsf{LinDim}_F(\mathsf{Sym}(\Delta)\ \Delta)$ 的一个见证，使得 $\dim(V)=k-1$，并令 W 为 ℓ 个 V 的直和。令 (ρ,φ) 为 W 所给出的群作用的表示。固定 $\delta\in\Delta$ 并令

$$u:=(\delta,\delta,\dots,\delta)\overline{\varphi}.$$

注意，$(\delta,\dots,\delta)$ 被 $\mathsf{Sym}(\Delta)$ 的子群 $S_\ell\wr S_\ell$ 固定，因此 $u\in W$ 被子群 $(S_\ell)\rho$ 固定。根据前一个引理的证明，Δ^ℓ 与 $u^{G\rho}$ 之间存在双射。令 U 为由 $u^{G\rho}=(\Delta^\ell)\varphi$ 张成的 W 的子空间。注意，$(\rho|_U,\ \varphi)$ 是该群作用的一个表示，因此 $\mathsf{LinDim}_F(G,\ \Delta^\ell)\leqslant\dim(U)$。

由于 $p\mid k$，$\mathsf{Sym}(\Delta)$ 的置换模 F^k 有子模 C 和 $C^\perp$，其维数分别为 1 和 $k-1$，且满足 $C\subseteq C^\perp$。此外，$V=F^k/C$，并且 $V_0:=C^\perp/C$ 满足 $\dim(V_0)=k-2$。特别地，V/V_0 的维数为 1，且 $\mathsf{Sym}(\Delta)$ 在 V/V_0 上的作用是平凡的。令 W_0 表示 V_0 的 ℓ 个副本的直和，并将 W_0 自然地视为 W 的一个子模。注意，$\dim(W_0)=(k-2)\ell$，因此 $\dim(W/W_0)=\ell$，且 $(\mathsf{Sym}(\Delta)^\ell)\rho$ 的作用在 W/W_0 上是平凡的。因此，向量 $u+W_0\in W/W_0$ 被 $(\mathsf{Sym}(\Delta)^\ell\rtimes S_\ell)\rho=G\rho$ 固定。

In 特别地，$(W_0+U)/W_0=\langle u^G+W_0\rangle=\langle u+W_0\rangle$ 的维数为1。Thu s,

$$\mathrm{LinDim}_F(G,\Delta^\ell)\leqslant\dim(U)\leqslant\dim(U+W_0)=(k-2)\ell+1.$$ □

LEMMA 7.3. 设 $K=\mathrm{Sym}(\Delta)$ 且 $L\leqslant S_\ell$，并假设 $|\Delta|=k>2$。那么

$$\mathrm{LinDim}_F(K\wr L,\Delta^\ell)\geqslant(k-2)\ell+1.$$

PROOF. 我们记 $\Delta=\{1,2,\dots,k\}$。

设 V是 $\mathsf{LinDim}_F(\mathsf{Sym}(\Delta)\wr L,\Delta^\ell)$ 的一个见证，它给出 (ρ,φ)，且对于 $1\leqslant i\leqslant\ell$ 和 $2\leqslant j\leqslant k$，令 $v_{ij}=(1,\dots,1,j,1,\dots,1)\varphi$，其中除第 i 项等于 j 外，其余各项均为 1。另令 $v_1=(1,\dots,1)\varphi$（所有项均为 1）。

我们断言 $X=\{v_1\}\cup\{v_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant\ell,3\leqslant j\leqslant k\}$ 线性无关。由于$|X|=(k-2)\ell+1$，这就证明了该结论。

考虑一个等于 0 的 X 线性组合，即

$$\lambda_1v_1+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant\ell\\3\leqslant j\leqslant k}}\lambda_{ij}v_{ij}=0. \tag{8}$$

取 $1 \leqslant m \leqslant \ell$ 和 $3 \leqslant n \leqslant k$，令 g_{mn} 为 K^ℓ中的元素，其第 m 个位置包含对换 $(2,\ n)$，其余位置均为恒等元。我们计算

$$(v_{ij})^{g_{mn}\rho} = \begin{cases} v_{ij} & \text{if } i \neq m, \\ v_{ij} & \text{if } i = m \text{ and } j \neq n, \\ v_{m2} & \text{if } i = m \text{ and } j = n, \end{cases}$$

因此，$g_{mn}\rho$ 固定了 X中的所有向量，除了 v_{mn}，它被映射到 v_{m2}。

现在我们将 $g_{mn}\rho$ 作用于上面的 (8)。利用线性性以及 0 被 $g_{mn}\rho$固定这一事实，可得

$$0 = \lambda_1 v_1 + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant \ell \\ 3\leqslant j\leqslant k \\ i\neq m \\ j\neq n}} \lambda_{ij} v_{ij} + \lambda_{mn} v_{m2}$$

因此

$$0 = 0 - 0^{g_{mn}\rho} = \lambda_{mn}(v_{mn} - v_{m2}).$$

由于 φ 是单射，我们有 $v_{mn} - v_{m2} \neq 0$，因此 $\lambda_{mn} = 0$。由于 m 和 n 是任意的，这一论证表明，对所有 $1 \leqslant m \leqslant \ell$ 和 $3 \leqslant n \leqslant k$，都有 $\lambda_{mn} = 0$。因此，由 (8) 可得 $\lambda_1 v_1 = 0$，进而得到 $\lambda_1 = 0$。这就证明了该断言。□

现在我们确定保持笛卡尔积 Δ^ℓ（其中 $|\Delta| = k$）的最大本原群花积的线性维数，即 $G = S_k \wr S_\ell$，并证明定理 1.3。由于任何以积作用本原作用的群都包含在 G（的一个共轭群）中，引理 3.1 给出了这类群线性维数的上界。注意，作用在 2^ℓ 个点上的 $S_2 \wr S_\ell$ 是非本原的，因为 S_2 是正则的，参见定理 5. [**20**, 18], ，因此我们假设 $k \geqslant 3$。

现在证明定理 1.3，并为方便读者将其重新表述如下。

定理 1.3。设 Δ 是一个基数为 $k \geqslant 3$ 的有限集，且 $\ell \geqslant 2$。假设 特征(F) $=p \geqslant 0$。则

$$\mathrm{LinDim}_F(S_k \wr S_\ell, \Delta^\ell) = \begin{cases} (k-2)\ell + 1 & \text{if } p \mid k, \\ (k-1)\ell & \text{if } p \nmid k. \end{cases}$$

Proof. 若 $p \mid k$，则结论由引理 7.2 和引理 7.3 立即得到。在证明的其余部分，我们假设 $p \nmid k$。

设 V 是 S_k 上的 F 置换模，其基为 $\{e_\delta \mid \delta \in \Delta\}$。设 $W = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$，即 ℓ 个 V 的张量积。于是 W 通过以下作用成为一个 $F(S_k \wr S_\ell)$-模

$$(e_{\delta_1} \otimes e_{\delta_2} \otimes \cdots \otimes e_{\delta_\ell})^{(h_1,h_2,\ldots,h_\ell)} = e_{\delta_1^{h_1}} \otimes e_{\delta_2^{h_2}} \otimes \cdots \otimes e_{\delta_\ell^{h_\ell}}$$

and

$$(e_{\delta_1} \otimes e_{\delta_2} \otimes \cdots \otimes e_{\delta_\ell})^{\sigma} = e_{\delta_{1\sigma^{-1}}} \otimes e_{\delta_{2\sigma^{-1}}} \otimes \cdots \otimes e_{\delta_{\ell\sigma^{-1}}}$$

注意，W 的基 $\{e_{\delta_1} \otimes e_{\delta_2} \otimes \cdots \otimes e_{\delta_\ell} \mid \delta_1, \ldots, \delta_\ell \in \Delta\}$ 与 Δ^ℓ 存在双射，因此根据推论 4.3，W 同构于 F 上关于 $S_k \wr S_\ell$ 在 Δ^ℓ 上的作用的置换模。

由于 $p \nmid k$，我们有 $V = C \oplus C^\perp$。对于 $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ 的每个子集 S，定义

$$W_S = \langle v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_\ell \mid v_i \in C^\perp \text{ if } i \in S \text{ and } v_i \in C \text{ if } i \notin S \rangle.$$

例如，如果 $S = \{1, \ldots, m\}$，那么 $W_S = C^{\perp} \underbrace{\otimes \cdots \otimes C^{\perp}}_{m \text{ 乘以}} \otimes \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{\ell - m \text{ 乘以}}$。注意，$W_S$ 的维数 $= (k-1)^{|S|}$，并且根据 [**16**, 引理 4.4.3(vi)], W_S 作为 FS_k^ℓ-模是不可约的。作为一个向量空间 ，

我们可以写作 $W = V \otimes W'$，其中$W' = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}$，对于 W'的任意基 $\{x_j\}$，我们$\ell-1$ 次有一个直和分解

$$W = \bigoplus_j (V \otimes \langle x_j \rangle). \tag{9}$$

我们选取 V的一个基 $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$，使得 u_1，$u_2 \ldots$，$u_{k-1} \in C^\perp$和 $u_k \in C$。令 $\mathcal{B}$ =$\{x_1, \ldots, x_{k^{\ell-1}}\}$为 W'的基，使得 $\mathcal{B}$中的每个向量都具有形式 $y_{j_2} \otimes y_{j_3} \otimes \cdots \otimes y_{j_\ell}$，其中每个 $y_{j_i} \in \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$。相对于（9）中的分解，我们定义 π_j： $W \to V \otimes \langle x_j \rangle$为投影映射，并对 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, \ell\}$定义 $X_S = \{x_j \mid (W_S)\ \pi_j \neq 0\}$.。注意，当且仅当 $x_j = y_{j_2} \otimes y_{j_3} \otimes \cdots \otimes y_{j_\ell}$且 $y_{j_i} = u_k$恰好对 $i \notin S$成立时，$x_j \in X_S$。因此，对于所有大小相同且满足 $R \neq S$的子集 R，S，都有$X_S \cap X_R = \varnothing$。接着

$$W_S \subseteq \bigoplus_{x_j \in X_S} V \otimes \langle x_j \rangle$$

由此可得 $W_S \cap \langle W_R \mid |R| = |S|$ 和 $R \neq S \rangle = 0$。

对于每个满足 $0 \leqslant m \leqslant \ell$ 的 m，令 $W_m = \langle W_S \mid |S| = m \rangle$。那么 $W_m = \bigoplus_{|S|=m} W_S$，因此 $\dim(W_m) = \binom{\ell}{m}(k-1)^m$。$S_k^\ell$ 在 W_S 上的作用的核等于 $\{(h_1, \ldots\ldots, h_\ell) \mid h_i = 1$，其中 $i \in S\}$。因此，对于 $R \neq S$，S_k^ℓ 在 W_S 上的作用的核与其在 W_R 上的作用的核不相等。于是，W_S 两两不同构，作为 FS_k^ℓ-模，它们也是 W_m 的唯一不可约 FS_k^ℓ-子模。由于 S_ℓ 在 $\{1, \ldots, \ell\}$ 的 m-子集集合上传递作用，可得 W_m 是 W 的一个不可约 $F(S_k \wr S_\ell)$-子模。此外，作为 FS_k^ℓ-模，W_m 的合成因子为 $S \subseteq \{1, \ldots, \ell\}$ 和 $|S| = m$ 对应的 W_S。由此可得 W_m 与 $\sum_{n \neq m} W_n$ 没有共同的合成因子，因此 $W_m \cap \sum_{n \neq m} W_n = 0$。于是 $\sum_{m=0}^\ell W_m = \bigoplus_{m=0}^\ell W_m$ 和

$$\dim(W) = k^\ell = (k-1+1)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (k-1)^m 1^{\ell-m} = \sum_{m=0}^{\ell} \dim(W_m).$$

因此，$W = \bigoplus_{m=0}^\ell W_m$和 W_m是 W的仅有的不可约 $F(S_k \wr S_\ell)$-子模。注意，对于所有 $m > 1$，$\dim(W_1) = \ell(k-1) \leqslant \dim(W_m)$，而$\dim(W_0) = 1$。因此，由推论 4.10 可知，线性维数$_F(S_k \wr S_\ell, \Delta^\ell) = \ell(k-1)$。□

8. 集合与划分上的作用

本节中，我们着重讨论对称群和交错群 S_n 与 A_n 的若干自然作用。设$\Omega = \{1, \ldots, n\}$，并考虑对称群 S_n在Ω上的作用。该作用在Ω_k 这一包含Ω的所有 k-子集的集合上诱导出一个作用。注意，若 $\sigma \subseteq \Omega$，则$G_\sigma = G_\sigma$，因此 S_n 在Ω_k 和Ω_{n-k} 上的作用等价。基于此，我们可以且确实只需考察 $1 \leqslant k \leqslant n/2$。此外，若 $n = 2k$，则一个 $\frac{n}{2}$ -元集合的稳定子真包含于将集合划分为两个大小为 $\frac{n}{2}$ 的部分的划分的稳定子中，因此 S_n 和 A_n 在Ω_2^n 上的作用是非本原的。因此，我们只考察 $1 \leqslant k < n/2$。由于 S_n 的置换模在 n取较小值时具有特殊性质，我们通常只考察 $n \geqslant 10$。

LEMMA 8.1. 设 $G = S_n$，设 F 为一个域，并设 $1 \leqslant k < n/2$。那么

$$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega_k) \leqslant n - 1.$$

PROOF. 令 $V = F^n$ 为 G 在 F 上以 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 为基的置换模，并令 ρ 为 G 在 V 上的表示。令 $1 \leqslant k < n/2$，并令 Ω_k 为 $\{1, \ldots, n\}$ 的 k-子集集合，

如上所定义。我们定义 $\varphi\colon \Omega_k \to V$，如下：

$$(\sigma)\varphi = \sum_{i\in\sigma} e_i \quad \text{for} \quad \sigma \in \Omega_k.$$

容易验证，(ρ, φ) 是 G 在 Ω_k 上的作用在 F 上的一个表示。这表明 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega_k) \leqslant n$。

令 $C = \langle e_1 + \cdots + e_n \rangle$ 为 V 中由“常向量”组成的子空间。对于满足 $\sigma \neq \mu$ 的 $\sigma, \mu \in \Omega_k$，我们看到，$C + (\sigma)\varphi = C + (\mu)\varphi$ 当且仅当 $n = 2k$，$\mathrm{char}(F) = 2$ 且 μ 等于 σ 的补子空间。由于 $k \leq n/2$，我们有由 $(\sigma)\varphi = C + \sigma\varphi$ 定义的 φ 是一个单射。因此，取 (3) 中的 ρ，(ρ, φ) 是 G 在 Ω_k 上的作用的一个表示。由此得到 $\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega_k) \leqslant n - 1$，正如所需。□

我们首先考察 k的极端值，它们可由定理 2.1 直接推出。

Corollary 8.2. 设 $G = S_n$ 或 A_n，且满足 $n \geqslant 5$。则 线性维数$_F(G, \Omega) = n - 1$。

Proof. 对于 S_n，这一点已在 [8, 命题 22] 中证明，但我们给出另一种也适用于 A_n的证明。注意，由引理 3.1 和引理 8.1 可得，线性维数$_F(G, \Omega) \leqslant n - 1$。此外，引理 3.1 还意味着，若线性维数$_F(A_n, \Omega) = n - 1$，则线性维数$_F(S_n, \Omega) = n - 1$。因此，从现在起我们假设 $G = A_n$。

由于 G 不是循环的，引理 3.4 得出线性维数$_F(G, \Omega) > 1$。由定理 4.1 可知，线性维数$_F(G, \Omega)$的一个见证是置换模 F^n的一个商。根据定理 2.1，F^n可能的商的维数为 0，1、$n-1$和 n。由此可得线性维数 $_F(G, \Omega) \geqslant n-1$，故等号成立。□

在处理 $k \geqslant 2$ 之前，我们需要以下引理。

Lemma 8.3. 设 F 是一个域，n 和 k 是满足 $1 < k < n - 1$ 的整数。令 $G = A_n$ 满足 $n \geqslant 5$，令 $V = F^n$ 为 G 在 F 上的置换模，并令 C 为常向量子空间。若 $\sigma \in \Omega_k$ 且 $v + C \in V/C$ 被 G_σ 固定，则存在标量 λ、$\mu \in F$，使得 $v = \lambda \sum_{i\in\sigma} e_i + \mu \sum_{i\notin\sigma} e_i$。

Proof. 设 $v+C \in V/C$ 被 G_σ 固定。那么对所有 $g \in G_\sigma$，都有 $v^g + C = v + C$，也就是说，$v - v^g \in C$。

记 $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$。对于任意满足 $i \neq j$ 的 $i, j \in \sigma$，取 $i', j' \notin \sigma$ 使得 $i' \neq j'$。那么 $g = (i, j)(i', j') \in G_\sigma$。因此

$$v - v^g = (\alpha_i - \alpha_j)(e_i - e_j) + (\alpha_{i'} - \alpha_{j'})(e_{i'} - e_{j'}) \in C.$$

由于 $n \geqslant 5$，这意味着 $\alpha_i - \alpha_j = 0 = \alpha_{i'} - \alpha_{j'}$，因此 $\alpha_i = \alpha_j$ 且 $\alpha_{i'} = \alpha_{j'}$。于是，对于所有 $i \in \sigma$，我们有 $\alpha_i = \lambda$；对于 $i \notin \sigma$，我们有 $\alpha_i = \mu$，其中某些标量为 λ，$\mu \in F$，结论得证。□

Lemma 8.4. 设 $G = A_n$ 或 S_n，其中 $n \geqslant 10$，并设 F 为特征为 $p > 0$的域。假设 $1 < k < \frac{n}{2}$。若 $p \mid n$ 且 $p \mid k$，则 线性维数$_F(G, \Omega_k) = n - 2$.

Proof. 设 F^n 表示 G 作用在 n 个点上的置换模，并回忆引理 8.1：F^n给出一个表示（ρ，φ），其中 $\sigma\varphi = \sum_{i\in\sigma} e_i$。由于 $p \mid k$，我们有$\sigma\varphi \in C^\perp$，因此 $C^\perp$ 也给出了 G 在 Ω_k上的作用的一个表示。

如引理 8.1 的证明所示，由于 $n \neq 2k$，当 $\sigma \neq \mu$ 时，我们有 $\sigma\varphi + C \neq \mu\varphi + C$。因此，$C^\perp/C$ 给出的诱导表示为（ρ，φ），其中 $\sigma\varphi = \sigma\varphi + C$。于是，线性维数$_F(G, \Omega_k) \leqslant n - 2$。根据定理 2.1(3)，我们有线性维数$_F(A_n, \Omega_k) \geqslant n - 2$，因此对于 $G = A_n$，结论成立；再由引理 3.1，结论对 $G = A_n$ 也成立。□

LEMMA 8.5. 设 p 是一个素数，F 是特征为 $p>0$ 的域，且 n 和 k 是满足 $1<k<\frac{n}{2}$ 的整数。若 $\bar{p}\mid n$ 且 $p\nmid k$，则完全删去置换模 $C^{\perp}/C$ 不是线性维数$_F(A_n,\ \Omega_k)$ 的见证。

PROOF. 设 $C^{\perp}/C$ 给出了 $G:=A_n$ 在 Ω_k上的作用在 F上的表示 (ρ,φ)。取 $\sigma\in\Omega_k$，并令 $\sigma\varphi=v+C\in C^{\perp}/C$。因此，$(G\rho)_{v+C}=(G_\sigma)\rho$，由引理 8.3 可知，对某个 $\lambda,\mu\in F$，有 $v=\lambda\sum_{i\in\sigma}e_i+\mu\sum_{i\notin\sigma}e_i$。由于 $v\in C^{\perp}$，我们有 $k\lambda+(n-k)\mu=0$。由于 $p\mid n$，这意味着 $k\lambda-k\mu=0$。由于 $p\nmid k$，我们有 k在 F中可逆，因此$\lambda-\mu=0$。因此 $v=\lambda(e_1+\cdots+e_n)\in C$，从而 $v+C=C$。于是，对所有 σ，都有 $\sigma\varphi=C$，所以 φ 不是单射，矛盾。□

现在我们可以证明定理 1.4，为方便起见，重新陈述如下。

定理 1.4。设 $G=A_n$ 或 S_n，其中 $n\geqslant 10$，并设 F 是特征为 $p\geqslant 0$的域。设$1\leqslant k<\frac{n}{2}$。则

$$\mathrm{LinDim}_F(G,\Omega_k)=\begin{cases}n-2 & \text{if } p\mid n \text{ and } p\mid k,\\ n-1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

PROOF. 根据引理 3.1，有 $\mathrm{LinDim}_F(A_n,\ \Omega_k)\leqslant\mathrm{LinDim}_F(S_n,\ \Omega_k)$。因此，为了建立下界，我们只考虑 A_n；而对于上界，我们只考虑 S_n。

首先，假设 $p=0$或 $p\nmid n$。由引理 8.1，我们有 $\mathrm{LinDim}_F(S_n,\ \Omega_k)\leqslant n-1$。由于$p\nmid n$，根据定理 2.1，有 $\mathrm{LinDim}_F(A_n,\ \Omega_k)\geqslant n-1$。因此 $\mathrm{LinDim}_F(G,\ \Omega_k)=n-1$。

从现在起，我们假设 $p\mid n$。若 $p\mid k$，则由引理 8.4 可得 $\mathrm{LinDim}_F(G,\ \Omega_k)=n-2$，符合要求。接下来，假设 $p\nmid k$。根据定理 2.1(3) 和引理 3.4，我们有 $\mathrm{LinDim}_F(A_n,\ \Omega_k)\geqslant n-2$。假设等号成立，并令 V为一个见证。那么再次根据定理 2.1(3)，V 是 A_n的完全删去置换模。然而，这与引理 8.5 矛盾，因此 $\mathrm{LinDim}_F(A_n,\ \Omega_k)\geqslant n-1$。由于 $n\neq 2k$，引理 8.1 表明 $\mathrm{LinDim}_F(S_n,\ \Omega_k)\leqslant n-1$，于是结论得证。□

现在我们考察这样一种情形：S_n 的作用的线性维数大于 n。令$k,\ \ell\in\mathbb{N}$，其中 $k,\ \ell>1$且 $n=k\ell$。用 $U_k(n)$ 表示 $\{1,\dots,n\}$的所有划分所成的集合，其中每个部分的大小均为 k；这也称为均匀划分。于是 S_n 在 $U_k(n)$ 上的作用是本原的。我们将重点讨论 $F=\mathbb{C}$ 的情形，并计算 $\mathrm{LinDim}_{\mathbb{C}}(S_n,\ U_k(n))$。由于对称群的不可约特征标取整数值，任意一个 FS_n-模，只要 F 为特征 p 的代数闭域，便可在大小为 p [16, 的域上实现（命题 2.10）。8] 因此，我们的结果也适用于特征与 $|S_n|$ 互素的域。

根据推论 4.10，计算 $\mathrm{LinDim}_{\mathbb{C}}(S_n,\ U_k(n))$ 归结为计算置换特征标中大于 1 的不可约成分的最小维数。置换特征标由 $\xi=1\uparrow_{S_k\wr S_\ell}^{S_n}$ 给出。虽然我们不知道完整的分解，但我们对不可约成分已经了解得足够多，可以计算线性维数。首先，我们需要以下引理；我们推测它是众所周知的；为完整起见，现给出证明。

LEMMA 8.6. 设 G 是一个群，K 和 H 是 G 的子群，且满足 $K\leqslant H$。如果 χ 是 G 的不可约特征标，则

$$\langle 1\uparrow_K^G,\chi\rangle=0\implies\langle 1\uparrow_H^G,\chi\rangle=0.$$

换句话说，置换特征标 $1\uparrow_H^G$ 的所有不可约成分也是置换特征标 $1\uparrow_K^G$ 的不可约成分。

Proof. 根据诱导的传递性，我们有 $1\uparrow_K^G = 1\uparrow_K^H\uparrow_H^G$。记

$$1\uparrow_K^H = \sum_{\psi\in \mathrm{Irr}(H)} m_\psi \psi$$

其中系数 m_ψ 均为非负整数。于是我们得到

$$0 = \langle 1\uparrow_K^G, \chi\rangle = \langle 1\uparrow_K^H\uparrow_H^G, \chi\rangle = \sum_{\psi\in \mathrm{Irr}(H)} m_\psi \langle \psi\uparrow_H^G, \chi\rangle.$$

注意，右边各项均为非负数。因此，每一项都等于 0。现在，$\psi = 1_H$ 是 H 的一个不可约特征标，相应的项为

$$m_{1_H}\langle 1\uparrow_H^G, \chi\rangle.$$

由 Frobenius互反律，$m_{1_H} = \langle 1\uparrow_K^H, 1_H\rangle = \langle 1_K, 1_K\rangle = 1$，因此我们如愿得到 $\langle 1\uparrow_H^G, \chi\rangle = 0$。□

S_n 的不可约特征标由 n 的划分 λ 标记，我们将它们记作 χ^λ。

Theorem 8.7. 如果 $n \geqslant 9$，那么我们有

$$\mathrm{LinDim}_{\mathbb{C}}(S_n, U_k(n)) = \frac{n^2-3n}{2}.$$

Proof. 在 [9], 的第 12.9 章中证明了以下结论。

(1) 设 $k, \ell > 1$ 和 $n = k\ell$。置换特征标 $\xi = 1\uparrow_{S_k\wr S_\ell}^{S_n}$ 包含不可约特征标 $\chi^{(n-2,2)}$ 作为不可约成分，但不包含不可约特征标 $\chi^{(n-1,1)}$。
(2) 设 $n \geqslant 9$ 和 χ^λ 是 S_n 的一个不可约特征标，其维数小于 $(n^2-3n)/2$。那么λ 是以下划分之一：

$$(n), (1,\dots,1), (n-1,1), (2,1,\dots,1).$$

利用钩长公式（见 [21,定理 3.10.2]），我们得到

$$\dim \chi^{(n-2,2)} = \frac{n^2-3n}{2}.$$

So 由 (1) 可知，$\mathrm{LinDim}_{\mathbb{C}}(S_n, U_k(n)) \leqslant$ 维数 $\chi^{(n-2,2)} = (n^2-3n)/2$。

现在我们证明线性维数不可能小于 $(n^2-3n)/2$。由 (2) 可知，维数小于 $(n^2-3n)/2$的不可约特征标只有四个。特征标 $\chi^{(n)}$ 是平凡特征标，其维数为 1，因此它不可能给出线性维数。根据 (1)，特征标 $\chi^{(n-1,1)}$ 不是 ξ 的成分。接下来只需证明 $\chi^{(1,\dots,1)}$ 和 $\chi^{(2,1,\dots,1)}$ 都不是 ξ的不可约成分。

我们有 $S_k\times\cdots\times S_k$ 是 $S_k\wr S_\ell$ 的子群。因此，根据引理 8.6，$\xi = 1\uparrow_{S_k\wr S_\ell}^{S_n}$ 的每个不可约成分都是 $1\uparrow_{S_k\times\cdots\times S_k}^{S_n}$ 的不可约成分。后者的分解可由 Young 规则得知（见 [21, 定理 2.11.2]）。当且仅当 $\lambda\trianglerighteq(k, \dots\dots, k)$ 时，我们有 χ^λ 是 $1\uparrow_{S_k\times\cdots\times S_k}^{S_n}$ 的不可约成分，其中 $\trianglerighteq$ 是分拆上的支配序（详情见 [21,第 2.2] 节）。由于 $k > 1$，我们得到 $(1, \dots\dots, 1), (2, 1, \dots\dots, 1) \not\trianglerighteq (k, \dots\dots, k)$。因此，$\chi^{(1,\dots,1)}$ 和 $\chi^{(2,1,\dots,1)}$ 不是 $1\uparrow_{S_k\times\cdots\times S_k}^{S_n}$ 的不可约成分，也就不是 ξ 的不可约成分。

因此，ξ 中大于 1 的不可约成分的最小维数为 $(n^2-3n)/2$，从而得到 $\mathrm{LinDim}_{\mathbb{C}}(S_n, U_k(n)) = (n^2-3n)/2$。□

9. 有限 2-传递群

本节中，我们证明定理 1.5，该定理确定有限几乎单 2-传递群的线性维数。我们通过两个引理来证明。在陈述这两个引理之前，我们给出自然特征下仿射群的线性维数上界，这些上界可应用于任意有限 2-传递仿射群。有限 2-传递群的分类见 [7, 第 7.3 节和第 7.4] 节。

EXAMPLE 9.1. 设 d 为一个整数， F 为一个域。令 $V = F^{d+1}$ 视为具有标准基 $\{e_1, \dots, e_{d+1}\}$ 的行向量，并令

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \underline{v} & 1 \end{pmatrix} \mid \underline{v} \in F^d,\ A \in \mathrm{GL}(d, F) \right\} \leqslant \mathrm{GL}(d+1, F)$$

其中，我们将 $\mathbf{0}$ 视为 $d \times 1$ 零列向量，并将 $v \in F^d$ 视为 $1 \times d$ 行向量。注意， $G \cong \mathrm{AGL}(d, F)$ 和 G 固定超平面 $\langle e_1, \dots, e_d \rangle$。通过直接计算，我们看到 $G_{e_{d+1}} \cong \mathrm{GL}(d, F)$。因此，$(e_{d+1})^G$ 与 F^d 之间存在双射，并且 G 在该轨道上的作用等价于 $\mathrm{AGL}(d, F)$ 在 F^d 上的作用。由引理 3.3，我们看到

$$\mathrm{LinDim}_F(\mathrm{AGL}(d, F), F^d) \leqslant d + 1.$$

设 $|F| = q = p^e$，其中 p 是素数， e 是整数。由于对于任意整数 $d' \leqslant d$， $|\mathrm{AGL}(d, q)| > |\mathrm{GL}(d', q)|$，显然 $\mathrm{LinDim}_q(\mathrm{AGL}(d, q)\ \mathbb{F}_q^d) \geqslant d + 1$。因此，利用上述上界，$\mathrm{LinDim}_q(\mathrm{AGL}(d, q)\ \mathbb{F}_q^d) = d + 1$。

现在设 $e = rs$ ，其中 r、 s 是整数，并记作 $q_0 = p^s$。我们有自然嵌入 $\mathrm{GL}(d, q_0^r) \to \mathrm{GL}(dr, q_0)$，以及同一化 $\mathbb{F}_{q_0^r}^d \to \mathbb{F}_{q_0}^{dr}$。由此可见，$\mathrm{AGL}(d, q_0^r)$ 是 $\mathrm{GL}(dr + 1, q_0)$ 的一个子群。因此

$$\mathrm{LinDim}_{p^s}(\mathrm{AGL}(d, \mathbb{F}_{p^e}), \mathbb{F}_{p^e}^d) \leqslant dr + 1.$$

现在设 t 是一个整数。那么，令 $s = \gcd(e, t)$ 且 $r = e/s$，我们有 $\mathbb{F}_{p^s}$ 是 $\mathbb{F}_{p^e}$ 和 $\mathbb{F}_{p^t}$ 的最小公共子域，由引理 3.2 可得

$$\mathrm{LinDim}_{p^t}(\mathrm{AGL}(d, \mathbb{F}_{p^e}), \mathbb{F}_{p^e}^d) \leqslant dr + 1.$$

由引理 3.1，上述不等式给出了所有仿射群的界。 ◇

LEMMA 9.2. 设 F 是特征为 $p \geqslant 0$的域， G 是一个作用在 Ω上的、度为 n 的2-传递群，其中 $\mathrm{soc}(G) \neq \mathrm{Suz}(q)$ 或 $\mathrm{Ree}(q)$。那么，要么 线性维数$_F(G, \Omega) = n - 1$，要么线性维数$_F(G, \Omega)$ 如表 *1* 所示。

PROOF.由于每个 2-传递群都是本原群且不是循环群，推论 4.9 使我们可以将线性维数确定为置换模的最大非超平面子模的余维数。如第 4 节所述，置换模自对偶这一事实意味着，只需找出 $F\Omega$ 的一个子模 U，使其维数最小且 $\dim(U) > 1$。给定一个 2-传递群 G， [18] 通过完全删去置换模 $H = C^\perp/(C \cap C^\perp)$ 的不可约性来研究 F^Ω ；在 [18], 中，该模称为心 ，其中 $C = \langle e_1 + \cdots + e_n \rangle$。首先，若 $p = 0$，则 H 不可约，结论成立。若 $p > 0$，则关于H 可约性的条件列于 [18, 表 1]；在证明的其余部分，我们将逐行讨论此表中 H 可能可约的情形，但 $\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Suz}(q)$ 或 $\mathrm{Ree}(q)$ 的情形除外，这些情形将在引理 9.2 中处理。

假设 $\mathrm{soc}(G) = \mathrm{PSL}_d(q)$， $d \geqslant 3$、 $q = p^t$，且 Ω 是 $\mathrm{PG}_{d-1}(q)$ 的点集。我们要证明 $\mathrm{LinDim}^{\mathbb{F}_p}(G, \Omega) = \ell$，其中 $\ell = \binom{d+p-2}{d-1}^t$。首先， [4, 定理 5.7.1] 表明$\mathbb{F}_p^\Omega$包含一个维数为 $\ell + 1$ 的子模，即由 $\mathrm{PG}_{d-1}(q)$ 的超平面的

特征向量生成的设计子模 。由于 D 包含常向量 C，且此处 $p \nmid n$，因此 $D \cap C^{\perp}$ 是 $\mathbb{F}_p^{\Omega}$的一个维数为 ℓ 的子模。接下来需要证明 $D \cap C^{\perp}$ 是唯一的极小子模，且不会在更大的域上分裂；为此，我们应用 [5]的结果。

首先， [5, 定理 A(a)] 表明，在 F的代数闭扩张 k 上， k^{Ω} 的合成因子为 $C \otimes k$ 以及一组单模 $L(s_0, \ldots, s_{t-1})$（采用 [5]中的记号），其中参数$(s_0, \ldots, s_{t-1})$来自 [5, 定理 A]的假设中定义的可容许集合 $\mathscr{H}$。注意，由 [5, 式 (15)] 及其前后的讨论可知，模 $L(s_0, \ldots, s_{t-1})$是 $\mathrm{SL}_d(q)$-单模。根据 [5, 定理 A(c) 和 (d)]，并结合$(1, \ldots, 1)$是偏序集$(\mathscr{H}, \leq)$中唯一的极小元这一事实，$C^{\perp} \otimes k$ 的每个非平凡子模都以子模 $L(1, \ldots, 1)$为合成因子。根据 [5, 推论 2.1]，$L(1, \ldots, 1)$的维数为 $\binom{d+p-2}{d-1}^t$。最后， [5, 定理 B] 和 [5, 节 8] 表明， $D \cap C^{\perp}$是 $L(1, \ldots, 1) \oplus (C \otimes k)$的子空间，因此它就是所需的 $F\mathrm{PSL}_d(q)$-模。由此，第一行成立。

对于作用在 15 个点上的 A_7 ，以及 $\mathrm{Sp}_{2d}(2)$ 的两个作用，我们只需考虑情形$p = 2$。应用 [14], 表 1 [14, 中第 2 行的结果，可得定理 5。1] 并注意到，根据 [16, 命题 5.3, 7], 特征 2 下 A_7 的表示的最小次数为 4。此外，第 3 行和第 4 行由定理 6 给出。 [14, 根据 [16,命题 5.4, 13], 特征 2 下 $\mathrm{Sp}_{2d}(2)$ 的表示的最小次数由维数为 $2d$ 的自然模给出。请注意，同构 $\mathrm{Sp}_4(2)' \cong \mathrm{A}_6 \cong \mathrm{PSL}_2(9)$ 意味着，对 6 个和 10 个点的 $\mathrm{Sp}_4(2)'$ 作用，分别已在 A_6 和 $\mathrm{PSL}_2(9)$ 的讨论中涵盖。

当 G 在 $q+1$ 个点上传递作用，且 $\mathrm{soc}(G) = \mathrm{PSL}_2(q)$ 时的情形，见 [18, 第3(F)节]。若 G 是 2-传递但非 3-传递的，则当 $p = 2$ 和 $q \equiv \pm 1$ （模 8）时， H 是可约的；或者当 F 包含 $\mathbb{F}_4$ 且 $q \equiv \pm 3$ （模 8）时， H 也是可约的，由此得到表 1 的第 5、6 行。

若 $\mathrm{soc}(G) = \mathrm{PSU}_3(q)$，且 G 在 q^3+1 个点上传递作用，则 [18, G节] 表明，当且仅当 $q+1$ 能被 p 整除时， H 才是可约的。于是，第 8 行由 [12, 定理 4.1] 得出。

最后，我们考察使 H 可约的散在群。第 12、13、14、17 和 19 行见 [14, 第 8] 节。第 15 和 16 行见 [18, 第3(J)节]。第 18 和 20 行通过 Magma 中的计算得到验证。□

Lemma 9.3. 设 F 是特征为 $p \geqslant 0$的域，且 G 是一个作用于 Ω上的 2-传递群，其度为 n，其中$\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Suz}(q)$ 或 $\mathrm{Ree}(q)$。则要么$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega) = n-1$，要么$\mathrm{LinDim}_F(G, \Omega)$ 如表 *1* 所示。

Proof. 我们采用与引理 9.2 的证明类似的方法，通过分析置换模 F^{Ω} 的心 H 的结构来进行证明。不过，在此证明中，我们借助循环亏格群的布劳尔树理论；例如，参见 [2, 第 17] 节。群 G 的布劳尔树的顶点标记为 G 的某些不可约普通特征标，而边则根据应用场景，标记为不可约布劳尔特征标或对应的单模。用布劳尔特征标标记边，可以确定布劳尔特征标之间的关系；而对我们而言更重要的是，平面 布劳尔树的结构以及标记边的单模，能够确定某些模的结构。特别地，给定一棵平面布劳尔树，它是一个星形，且有一条边标记为单模 S，那么 S 的射影提升 P_S 是单列的（也就是说， P_S 的子模构成一个全序链），其首尾两个合成因子都同构于 S，其余合成因子及其出现顺序则由布劳尔树中心顶点周围相关边的排列顺序决定。注意，在证明的其余部分，我们假设 G 是单的。正如我们将看到的，在每种情况下， F^{Ω} 都是单列的，并且

因此， G 的任何自同构在子模格上都作用平凡，从而当 G 几乎单时，结论仍然成立。

设 $G = \mathrm{Suz}(q)$ 满足 $q = 2^{2d+1}$，并设 $m^2 = 2q$。由于 $q^2+1 = (q+m+1)(q-m+1)$，且这里的两个因子互素，因此得到两种情形： $p \mid (q+m+1)$ 和 $p \mid (q-m+1)$。在 [18,Section 3(E)] 中已证明，当 $p \mid (q-m+1)$ 时， H 是不可约的，因此从现在起我们假设 $p \mid (q+m+1)$。在此情形下， [18, Case 1, p.11] 表明 H 是可约的，不过对 [18] 第 12 页的分析有一处小错误。具体而言，短语“$\mathcal{U} \leqslant \mathcal{M}$ 或 $\mathcal{U}^{\perp} \leqslant M$”应改为“$\mathcal{U} \leqslant \mathcal{M}^{\perp}$ 或 $\mathcal{U} \geqslant \mathcal{M}$”，而且 Section 3(E) 最后一段的分析还遗漏了一种情形。为完成分析，我们应用循环亏格群的 Brauer 树理论（例如参见 [2, Section 17]）。此情形的 Brauer 树在 [18, Case 1, p.11] 中给出正确（顶点标记为特征标 1、 ω_1、 ω_2 和 η_j），并且文中也指出亏格群是循环的。 p 整除 $q+m+1$ 这一事实意味着 p 不整除 G 的点稳定子的阶，因此 F^{Ω} 是一个射影模（参见 [19, Lemma 3] 证明的第一段）。事实上，由于 F^{Ω} 不可分解且具有一维顶， F^{Ω} 是平凡模的射影提升。根据 [2, Section 17], ，我们可以推知 F^{Ω} 的结构：它是 Brauer 树中与特征标 1 相邻的边的射影提升（[18, Case 1, p. 11]）。由于 Brauer 树是星形的，我们立即看到 F^{Ω} 是单列的。此外， ω_1、 η_j 和 ω_2 的度 $m(q-1)/2$ 、 $(q-1)(q-m+1)$ 和 $m(q-1)/2$ 之和为 $q^2-1 = \dim(H)$，并且按升序对应于 H 的合成因子的维数（对应于在 Brauer 树的顶点 α 周围顺时针旋转）。因此， $\mathrm{LinDim}_p(G, \Omega) = m(q-1)/2+1$，表 1 的第 7 行成立。

设 $G = \mathrm{Ree}(q)$ 在 q^3+1 个点上作用，且 G ，并令 $m^2 = 3q$。首先，若 $p = 2$ ，则由命题 3.8 和定理 3.9] 可知线性维数为 q^2-q+1，因此第 9 行成立。现在假设 $p \neq 2$，根据 [18, 第 3(H) 节], ，我们需要考虑 p 整除 $q+1$、 $q+m+1$ 或 $q-m+1$的情形。注意到 m 和 q 都是 3 的非平凡幂，因此 3 不整除因子 $q+1$、 $q+m+1$ 或 $q-m+1$中的任何一个。因此$p \neq 2$， 3，并且根据 [10, 第 2.1], 节，各种情形下的亏格群确实都是循环群，所以 Brauer树如 [10, 定理 4.2–4.4]所示。由于 $p \neq 2$， 3 且 p 整除 q^3+1，可知 p不整除 G的点稳定子的阶。因此 F^{Ω} 是射影的，特别是平凡模的射影提升。因此，我们可以通过分析相关 Brauer树中与平凡特征标 ξ_1 相邻的边，来确定 F^{Ω} 的结构。首先，若 $p \mid q+1$ ，则需要考察 [10, 定理 4.2(a)]中的树。此情形下的置换模在 [11, 第 59] 页有更详细的研究。特别是，文中证明 F^{Ω} 是单列的，且 H 的合成因子的维数按升序排列为 $(mq^2-m)/6+(q^2-q)/2$、$(q-1)(q^2-mq/3-m/3+1)$和 $(mq^2-m)/6+(q^2-q)/2$。因此第 10 行成立。若 q整除 $q+m+1$ ，则相关的平面嵌入的Brauer树见 [10, 定理 4.3] （注意[10, 定理 4.3]中有一处笔误；特征标 ξ_7 应为 ξ_6，参见 [10]第 882–883 页定理 4.3 的证明）。由于 Brauer树是星形的，因此 F^{Ω}是单列的。由于 $F\Omega$ 是自对偶的，我们可以假设 S_1、 S_2、 S_3、 S_2^*、 S_1^*是 H的合成因子，按升序排列；其 Brauer特征标分别由 p-正则类上 ξ_4、 ξ_5、 χ_t、 ξ_6、 ξ_3的限制给出，其中S_1^*、 S_2^*是 S_1、 S_2的对偶模，而 S_3是自对偶的。因此，

$$\begin{aligned}
\dim(S_1) = \dim(S_1^*) &\leqslant \frac{m}{3}(q^2-1), \\
\dim(S_2) = \dim(S_2^*) &\leqslant \frac{m}{6}(q-1)(q-m+1), \text{ and,} \\
\dim(S_3) &\leqslant (q^2-1)(q-m+1).
\end{aligned}$$

由于维数$(H) = q^3-1$ ，可知上述三个不等式实际上都是等式。因此，线性维数为 $m(q^2-1)/3+1$，从而证明了第 11 行。对于剩余情形，即 p

整除 $q-m+1$，所关注的 Brauer树见 $[\mathbf{10}, \text{定理 } \mathbf{4}。3],$，这表明 H 是不可约的。证明至此完成。□

10. 一些公开问题

本文最后提出一些公开问题，并探讨进一步的研究方向。

我们的结果突显了确定本原置换群线性维数的重要性，尤其是那些不包含在积作用下缠绕积中的本原置换群。其余本原置换群分为三类：仿射型、对角型和几乎单型。我们在例 9.1 中确定了 LinDim_F(仿射一般线性群(d,F) F^d)，并在第8节和定理 1.5 中考察了一些几乎单群。其他本原几乎单群的例子包括对称群和交错群在其“标准”作用下的情形：作用于分拆和子集。后一种作用的线性维数已在定理 1.4 中确定。这引出了以下自然问题。

Problem 10.1. 确定所有域上本原群 $G <$ 仿射一般线性群(d,q) 的线性维数。

Problem 10.2. 确定对角型群的线性维数。

Problem 10.3. 确定几乎单群本原作用的线性维数，例如 $\mathrm{PSL}_n(q)$ 在具有 $1<k<n-1$ 的 n 维向量空间的 k 维子空间集合上的作用。

我们在定理 1.4 中看到，对于 $n \geqslant 10$， S_n 作用于 k-元集合时，其线性维数为$n-1$ 或 $n-2$。我们猜想，对于 $n \geqslant 5$，这一结论也成立。我们还在定理 8.7 中看到，对于均匀划分上的作用，其在 $\mathbb{C}$ 上的线性维数为 $(n^2-3n)/2$。这引出了一个自然的问题。

Problem 10.4. 设 S_n 在集合 Ω 上本原作用，且 Ω 不是$\{1,2\ldots,n\}$的 k-子集集合。是否有 $\mathrm{LinDim}_F(S_n,\ \Omega) \geqslant (n^2-3n)/2$?

对于本原群 G，我们在推论4.11中看到，见证要么是不可约的，要么有一个唯一的余维一子模，且该子模不可约。我们不知道对群 G 或域 F 是否存在任何条件可以保证见证是不可约的。不过，如果见证不是不可约的，这会对一阶上同调产生影响：存在一个 G 的模 V，使得 $H^1(G,\ V) \neq 0$，见 $[\mathbf{3}, (\mathbf{17.11})]$。由此引出：

Problem 10.5. W 见证不可约的充要条件是什么?

对于非本原群 $G \leqslant S_k \wr S_\ell$，我们在例 6.1中看到，见证可以有两个以上的合成因子。在所给的例子中，这些合成因子都是 S_ℓ 在 ℓ 个点上的置换模的合成因子，因此受到限制。因此，我们提出以下问题：

Problem 10.6. 传递群 G 的 $\mathrm{LinDim}_F(G,\Omega)$ 见证 V 的合成因子个数是否存在一个绝对上界?

非传递群的见证的合成因子数量不存在绝对上界。设 $N \geqslant 3$ 为一个自然数。对于每个 k，令 S_k 自然地作用于大小为 k的集合 I_k 上。于是，直积 $G=\prod_{k=3}^{N+2} S_k$ 在大小为$\sum_{k=3}^{N+2} k$的不交并 $\Omega = \dot{\bigcup}_{k=3}^{N+2} I_k$ 上非传递地作用。由定理 5.5，$\mathrm{LinDim}_F(G,\Omega)$ 的见证 V 必须是直和 $V=\bigoplus_{k=3}^{N+2} V_k$，其中每个 V_k 都是 $\mathrm{LinDim}_F(S_k,\Omega_k)$ 的见证。特别地，我们看到 V 至少有 N 个合成因子。

如果 F 是域 L 的扩张，那么引理 3.2 给出了 $\mathrm{LinDim}_L(G,\Omega)$ 关于 $\mathrm{LinDim}_F(G,\Omega)$ 的界。理解这种关系是值得探究的。

Problem 10.7. 如果 F 是域 L 的扩域，请给出 $\mathrm{LinDim}_F(G,\ \Omega)$ 关于 $\mathrm{LinDim}_L(G,\ \Omega)$ 的精确公式。

在 [8, 命题 23] 中，证明了存在一个同态 $\rho\colon\ S_{2^n} \to$ 仿射一般线性群$(2^n-2,\ 2)$ 和一个单射 $\iota\colon \{1,2,\dots,2^n\} \to \mathbb{F}_2^{2^n-2}$，使得

$$(\omega^g)\iota = (\omega\iota)^{g\rho}. \tag{10}$$

可以将 Ω 上域 F 的群作用 G的<style id='1'>仿射维数 定义为满足存在一个同态 $\rho\colon\ G \to$ 仿射一般线性群$(d,\ F)$ 和单射 $\iota\colon\ \Omega\ \to F^d$，使得（10）成立的最小整数 d。

Problem 10.8. 建立群作用的仿射维数理论 .

一种类似的可能性是建立关于群作用的射影维数的理论。这将是满足以下条件的最小 d：存在一个同态 $\rho\colon G \to \mathrm{PGL}_d(F)$，以及一个从 Ω 到 F^d 的一维子空间集合的单射 ι，使得（10）成立。

参考文献

[1] Navid Alamati、Luca De Feo、Hart Montgomery 和 Sikhar Patranabis。《密码学群作用及其应用》。载于《密码学进展——ASIACRYPT 2020：密码学与信息安全理论及应用第 26 届国际会议论文集》，韩国大田，2020 年 12 月 7—11 日，第二卷 26，第 411—439 页。施普林格，2020 年。[2] Jonathan L. Alperin。《局部表示论：作为有限群局部表示论入门的模表示》。剑桥大学出版社，1993 年。[3] M. Aschbacher。《有限群论》，剑桥高等数学研究丛书第 10 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2000 年。[4] Edward F. Assmus 和 J ennifer D. Key。《设计及其码》。剑桥数学论丛第 103 号。剑桥大学出版社，1992 年。[5] Matthew Bardoe 和 Peter Sin。一般线性群 $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{F}_q)$ 在 $P_n(\mathbb{F}_q)$ 和 $\mathbb{F}_q^{n+1}$ 上作用的置换模。《伦敦数学会杂志》 61(1)：58—80，2000 年。[6] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust。Magma 代数系统：I. 用户语言。《符号计算杂志》24(3-4)：235—265，1997 年。计算代数与数论（伦敦，1993 年）。[7] Peter J Cameron。《置换群》，伦敦数学会学生教材第 45 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999 年。[8] Giuseppe D'Alconzo 和 Antonio J. Di Scala。群作用的表示及其在密码学中的应用。《有限域及其应用》99：102476，2024 年。[9] C. Godsil 和 K. Meagher。Erd ˝os–Ko–Rado 定理：代数方法。剑桥大学出版社，2015 年。[10] Gerhard Hiss。Ree 群的布劳尔树。《代数通讯》19(3)：871—888，1991 年。[11] Gerhard Hiss。关于 Ree 单位的关联矩阵。《设计、码与密码学》10：57—62，1997 年。[12] Gerhard Hiss。厄米函数域、经典单位与三维酉群的表示。《数学研究》15(2)：223—243，2004 年。[13] I. Martin Isaacs。《有限群的特征标理论》。AMS Chelsea 出版社，罗得岛州普罗维登斯，2006 年。1976 年原版的订正版重印本，[学术出版社，纽约；MR0460423]。[14] A. A. Ivanov 和 Cheryl E. Praeger。关于有限仿射 2-弧传递图。《欧洲组合学杂志》14(5)：421—444，1993 年。[15] G. D. James。关于对称群不可约表示的最小维数。《剑桥哲学会数学会刊》94(3)：417—424，1983 年。[16] Peter Kleidman 和 Martin Liebeck。《有限经典群的子群结构》，伦敦数学会讲义系列第 129 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990 年。[17] Peter Landrock 和 Gerhard O. Michler。Ree 型单群的主 2-块。《美国数学会汇刊》260(1)：83—111，1980 年。

[18] Brian Mortimer。已知二重传递群的模置换表示。《伦敦数学会会刊》，3(1)：1—20，1980 年。[19] Peter M. Neumann。素数次数的传递置换群。《伦敦数学会杂志》第二辑，5：202—208，1972 年。[20] Cheryl E. Praeger 和 Csaba Schneider。置换群与笛卡尔分解，第 449 卷，伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2018 年。[21] B. E. Sagan。《对称群》。施普林格，第二版，2001 年。[22] Ascher Wagner。特征为 2 的域上 S_n 和 A_n 的最小次数忠实线性表示。《数学杂志》，151(2)：127—137，1976 年。[23] Helmut Wielandt。《有限置换群》。学术出版社，纽约—伦敦，1964 年。由 R. Bercov 从德文译出。

（Devillers、Giudici、Morgan） Department of Mathematics and Statistics, The University of Western Australia, Perth WA 6009, Australia电子邮箱地址:
alice.devillers@uwa.edu.au, michael.giudici@uwa.edu.au电子邮箱地址:
luke.morgan@uwa.edu.au

(Hawtin) Faculty of Mathematics, University of Rijeka, Rijeka 51000, Croatia
电子邮箱地址: dhawtin@math.uniri.hr

(Klawuhn) Department of Mathematics, Paderborn University, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn, Germany.
电子邮箱地址: klawuhn@math.upb.de