由稳定性条件构造外三角结构及其在辫群表示中的应用

HOEL QUEFFELEC、ANNE-LAURE THIEL 和 EMMANUEL WAGNER

Abstract. 我们利用 Bridgeland 稳定性条件及其相关度量，为三角范畴赋予外三角结构，并研究其外三角 Grothendieck 群。这项研究的动机来自 Khovanov-Seidel 对 Burau 表示的范畴化；从中可以提取出 Lawrence-Krammer-Bigelow 表示，从而揭示辫群的这两个忠实表示之间的关系。

arXiv:2512.16142v1 [math.QA] 18 Dec 2025

1. Introduction

辫群的 Burau 表示由 Burau [Bur35] 于 1934年 引入，他给出了该表示的显式公式。此后，人们从不同角度对其进行了重新诠释。与本文考量最为接近的一种描述如下。考虑 n股辫群 B_n，以及 V $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的向量表示。随后，辫群利用 R-矩阵作用于 $V^{\otimes n}$，这体现为 Schur-Weyl 对偶性的一个变形版本，或者等价地说，该作用经由 Hecke 代数分解。空间 $V^{\otimes n}$ 可以分解为由 n、$n-2$、.....、$-n$ 索引的权空间；由于 B_n 的作用与$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的作用相交换，因此每个权空间都是 B_n的一个表示。权为 n的表示是平凡表示，而权为 $n-2$ 的表示则是 Burau 表示。

关于 Burau 表示的忠实性问题受到了广泛关注。很早以前人们就已知道，在 $n=3$ 情形下，该表示是忠实的 [MP69]。Moody、Long-Paton 和 Bigelow 通过几个步骤证明，只要 $n \geq$5 [，该表示就不忠实 99]Moo91, LP93, Big99]。因此， $n=4$ 情形仍未解决。

大约在同一时期，人们以两种颇为不同的方式有趣地解决了这一忠实性缺陷：Krammer 和 Bigelow 在 Lawrence 的工作基础上，给出了一个更复杂的忠实有限维表示 [Law90, Kra02, Big01]。另一方面，Khovanov 和 Seidel 将 Burau 表示提升为范畴上的作用，并证明了它的忠实性 [KS02]。本文旨在将这两种表示联系起来。

1.1. **LKB 表示**。LKB 表示源自与构形空间相关的同调考量 [Law90, Big01], ，但也可以采用更具代数意味的表述 [Kra02]。与上述 Burau 表示的构造更为接近的是，它可以出现在 $\mathfrak{sl}_2$ [Koh12, Mar22, LTV22] 的 Verma 模 $\mathfrak{sl}_2$ [的 n-重张量积中，方法是聚焦于最高权减 4 的权空间。显式公式见于不同文献；我们在第3.2节给出的公式出自 [PP02]。

LKB 表示的忠实性结果由 Krammer 和 Bigelow 证明。Bigelow 采用了拓扑方法，而 Krammer 给出了利用 Garside 结构的归纳证明；不过，这两种证明的相似之处在于，它们都证明最高次数中的某些系数不会消失。

1.2. **Khovanov-Seidel 表示**。Khovanov 和 Seidel 解决 Burau 表示忠实性缺陷的思路另辟蹊径 [KS02]。他们没有提高表示的维数并保持其线性，而是将表示替换为一个范畴，其中的生成对象对应于 Burau 表示的基。我们将在第 3.1 节回顾该范畴的构造。此处只需说明，Khovanov 和 Seidel 定义了一个三角范畴，并明确列出了用于在同伦意义下构造复形的不可分解投射对象。随后，辫子通过自等价作用于该范畴。

Khovanov 和 Seidel 的范畴表示忠实性的证明，基于这样一个事实：挖孔圆盘中的曲线与范畴中的某些对象类之间存在对应关系；因此可以采用组合论和几何论证。

1.3. **外三角结构**。一个耐人寻味的问题是，这两种表示是否彼此相关。一个线索是，可以在 Khovanov-Seidel 的范畴上考虑多种分次，其中一些分次下，不可分解模的集合与 LKB 基具有相同的基数，并且有类似的描述（见 [BT11、LQ21]）。问题在于，滤过并不

在辫群的作用下保持不变，因此无法以唯一的方式提升 LKB 基。这一困难反映了其与代数几何之间丰富的交集，并促使人们研究辫群在稳定条件模空间上的作用（见 [BDL20] 及其中的参考文献）。借用 Bridgeland 在其著作 [Bri07] 中提出的稳定性条件概念，可以采用度量方法研究这一作用。这一视角将对我们的方法大有裨益。

另一个值得指出的困难是，缺少一种 K_0，可用于建立范畴表示与线性表示之间的联系，尤其是 LKB 表示所需的两个变量使这一问题更加突出。

本文采用外三角结构的概念来弱化 K_0 的概念，从而得到一种介于经典格罗滕迪克群（过小）与分裂格罗滕迪克群（过大）之间的对象。这一更接近簇代数领域的代数概念源自 Nakaoka 和 Palu [NP19]。我们的主要结果之一（定理 2.4）表明，根据稳定性条件，可以自然地在 Khovanov-Seidel范畴上导出一种外三角结构。在较弱的假设下，这一结果可推广到配备中心荷的任意三角范畴。该结果基于一类特殊三角形的应用，我们称之为薄三角形，因为在它们的一条边上，三角不等式（使用 Bridgeland度量）退化。值得注意的是，我们撰写本文期间，这一相同结果最近也出现在 [WWZZ25]，中，并有其他应用。

我们在定理 2.10 中陈述的主要理论结论是，我们可以描述与这一外三角结构相关联的外三角 K_0。在 Khovanov-Seidel 范畴的情形下，令人惊讶的是，这使得第二个变量得以出现，而且所得结果的维数与 LKB 表示相同。

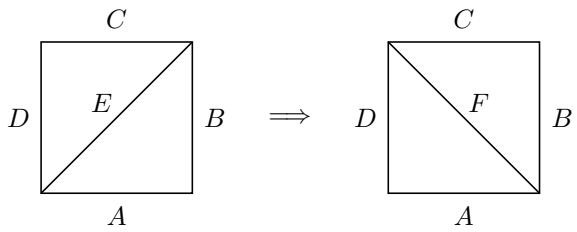
遗憾的是，每个稳定性条件都对应一个这样的 K_0，而相关的外三角结构在辫群作用下并不保持不变。因此，我们使用一系列同构，将这些格罗滕迪克群组合起来，重新导出 LKB 表示（见定理 4.4）。

1.4. **展望**。 如式 (17) 所述，基变换矩阵的表达式颇为引人入胜。一般而言，这些矩阵的系数似乎应当以某种方式与某些 Hom空间的维数相关，而我们希望弄清其中的关系。另外也很容易想到两种其他的推广方向。其一是将这一方法推广到 Artin-Tits群，采用 Paris 在类型 A之外定义 LKB 表示时所用的 [Par02] 。最令人期待的成果是能够运用这一策略解决忠实性问题。另一方向则是转向映射类群，其线性性尚待证明。

致谢。 Tony Licata 在过去十年间一直密切参与这个项目，我们非常感激他在项目发展过程中分享的诸多想法。我们衷心感谢 Yann Palu 耐心地讲解，并对本文早期版本提出意见，其中包括修正定理 2.4 的证明。

2. Thin triangles

2.1. **三角范畴**。 我们将在三角范畴的语境下开展讨论。这些范畴配备了一族特殊三角和一个移位函子 $X \mapsto X[1]$，它们满足一系列公理 [GM13]。我们采用 Dyckerhoff-Kapranov 在 [DK18]，中使用的约定会很方便：对象用线段表示，态射用角表示。特别是，三角范畴中的八面体公理可以简洁地表示为三角剖分中的一次翻转：



值得注意的是，例如， F 是由 B 和 C 之间的锥构造而成的。

2.2. **外三角结构**。 外三角范畴这一较宽松的概念将是本文的核心。该概念由 Nakaoka 和 Palu [NP19]，提出；关于这一主题的综述，请参阅 Palu [Pal17] 。如果我们所研究的范畴带有三角范畴的结构，

那么定义便可以用更简洁的方式表述。特别是，抽象定义中的两个条件 ET2 和 ET3 在这种情况下自动满足。

定义 2.1。 三角范畴 $\mathcal{C}$ 上的外三角结构，是指选取一组 Δ 恰当三角（称为外三角），并满足以下条件。若 $X \to Y \to Z \xrightarrow{\delta}$ 是一个外三角，且 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$，则该三角

(ET1) $$X' \to Cone(f \circ \delta) \to Z \xrightarrow{f \circ \delta}$$

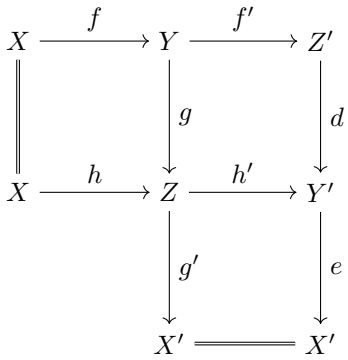
是一个外三角。同样，如果 $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z', Z)$， $X \to Cone(\delta \circ g) \to Z' \xrightarrow{\delta \circ g}$ 是一个外三角。

进一步 此外，如果 X、 X'、 Y、 Z 和 Z' 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，使得以下正合三角属于 Δ ：

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} Z' \; and \; Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{g'} X'$$

则存在 $Y' \in \mathcal{C}$ 和映射，使得下图交换，且其中所有三角形均属于 Δ:

(ET4)

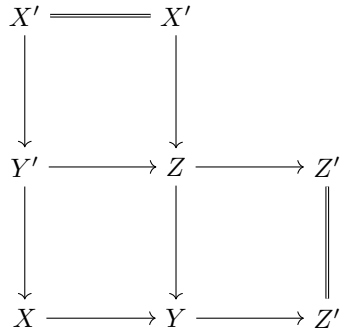


类似地，如果我们有 *in* Δ*:*

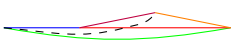
$$X \to Y \to Z' \; and \; X' \to Z \to Y$$

那么存在 Y'，使得下图交换，且所有三角形都属于 Δ:

(ET4$^{\mathrm{op}}$)



稍后，我们将展示一类称为薄的三角形。上述公理在此情境下可作如下说明。这里的启发式是：若将两个薄三角形进行变异，所得三角形也仍然是薄的。



$-\ Z$
$-\ Y$
$-\ X'$
$-\ Z'$
$-\ X$

$\longrightarrow$

$\text{- - -}\ Y'$

with $X \to Z \to Y'$
and $Z' \to Y' \to X'$
in Δ

2.3. **稳定性条件**。 为了选取集合 Δ来定义外三角结构，我们将使用 Bridgeland 在三角范畴上的稳定性条件概念 [Bri07]。回顾稳定性条件的定义。

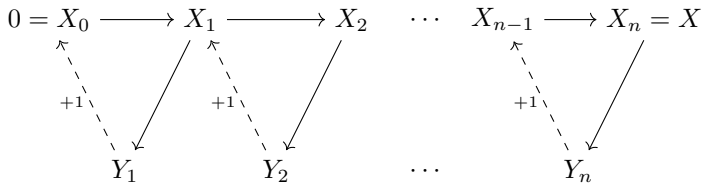
定义 2.2。 设 $\mathcal{C}$ 是一个三角范畴。稳定性条件 τ 是一个对 $(\mathcal{P}, Z)$ ，满足：

- $\mathcal{P}$ 一个切片，即一个满加性子范畴 $\mathcal{P}(\phi)$ ，对所有 $\phi \in \mathbb{R}$ 均成立；这些子范畴中的对象称为半稳定对象；简单的半稳定对象称为稳定对象； ϕ 称为 $\mathcal{P}(\phi)$中任意对象的相位；

- Z 中心荷是一个群同态 $Z:\ K_0(\mathcal{C})\mapsto\mathbb{C}$。

此外， $\mathcal{P}$ 和 Z 还须满足以下条件：

(1) $\mathcal{P}(\phi+1)=\mathcal{P}(\phi)[1]$; (2) 若 $A\in\mathcal{P}(\phi)$ 且 $B\in\mathcal{P}(\psi)$，并且 $\phi>\psi$，则 $\mathrm{Hom}(A,B)=0$; (3) 对于非零对象 $X\in\mathcal{C}$，存在一个滤过（称为Harder-Narasimhan 滤过，简称 *HN* 滤过）：



其中所有三角形都是正合的， $Y_i\in\mathcal{P}(\phi_i)$ 和 $\phi_1>\phi_2>\cdots>\phi_n$;

(4) $Z\left(\mathcal{P}(\phi)\setminus\{0\}\right)\subset\mathbb{R}^+$，${}^*e^{i\pi\phi}$。

切片 $\mathcal{P}([0,1))$ 构成了与该切片相关的一个首选 t-结构的心。

$\mathcal{C}$ 上的稳定性条件集合记为 $Stab(\mathcal{C})$。 $\mathbb{C}^*$ 在 $Stab(\mathcal{C})$上有一个自然作用：在中心荷 Z上按此作用，在切片上则通过按相位平移来作用。商记为 $PStab(\mathcal{C})=Stab(\mathcal{C})/\mathbb{C}^*$。

按照 Bridgeland 的做法，可以通过将 HN 滤过中所有元素在中心荷下的像的范数相加，为对象定义一个度量（称为 质量 或 τ-质量）

$$m_\tau(X)=\sum_{X_i\in HN(X)}|Z(Y_i)|. \tag{1}$$

零对象的质量规定为 0。

2.4. 薄三角构成一种外三角结构。 在下一节中，我们只会用到度量 m_τ的存在性，它不必来自稳定性条件。我们假设给定一个度量m_τ，它关于直和可加、在移位下不变，并且满足恰当三角上的三角不等式。接着考虑以下这一族 Δ_τ，我们将其称为薄三角

$$\Delta_\tau=\{A\to B\to C\mid A,B,C\in\mathcal{C},\ m_\tau(B)=m_\tau(A)+m_\tau(C).\}$$

请注意，这组三角在三角平移下并不封闭：我们要求三角中间的对象是最长的。

Re注记 2.3。 一个重要的观察是，除非 X 是零对象，否则下面的三角并非 薄 in

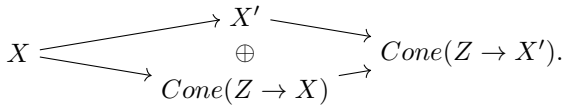
$$X[1]\to Cone(\mathrm{id}_X)\to X.$$

事实上，中间对象同伦于零，因此其质量为零。另一方面，这个恰当三角的两次旋转都是薄三角。这一点对于赋予格罗滕迪克群一个多项式环上的模结构至关重要，正如我们稍后恢复辫子的 *LKB* 表示时将会看到的那样。

以下是本文第一部分的主要结果。

定理 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有 *Bridgeland* 稳定性条件 τ的三角范畴。那么，与之相关的薄三角集合 Δ_τ 赋予 $\mathcal{C}$ 一个外三角结构。

证明. 我们首先验证 (ET1)。考虑以下恰当三角



由于这是一个恰当三角，可得

$$m_\tau(X')+m_\tau(Z\to X)\le m_\tau(X)+m_\tau(Z\to X').$$

现在，可以利用 $m_\tau(Z\to X)=m_\tau(X)+m_\tau(Z)$（因为相应的三角是薄的）来简化上述不等式，得到

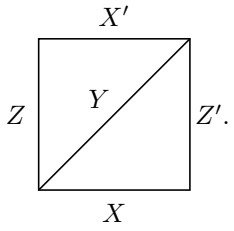
$$m_\tau(X')+m_\tau(Z)\le m_\tau(Z\to X').$$

结合恰当三角 $X' \to Cone(Z \to X') \to Z$ 所关联的三角不等式，可得

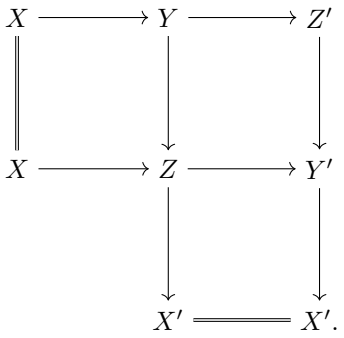
$$m_\tau(Z \to X') = m_\tau(Z) + m_\tau(X')$$

如所愿。(ET1) 的另一种形式也出于类似的理由成立。

让我们考虑 (ET4) 以及属于 Δ_τ 的三角形 $X \to Y \to Z'$ 和 $Y \to Z \to X'$。我们有



利用八面体公理，我们得到 Y' 的存在，即 Y 的翻转，从而得到 (ET4) 中的交换图



我们要证明三角形 $X \to Z \to Y'$ 和 $Z' \to Y' \to X'$ 是薄的。

由于这些是三角形，我们有

$$m_\tau(Z) \le m_\tau(X) + m_\tau(Y') \tag{2}$$
$$m_\tau(Y') \le m_\tau(Z') + m_\tau(X').$$

这些结合起来得到

$$m_\tau(Z) \le m_\tau(X) + m_\tau(Z') + m_\tau(X') = m_\tau(Y) + m_\tau(X').$$

右侧的等式成立是因为 $X \to Y \to Z'$ 是薄的。不过，上面的左端和右端各项实际上相等，因为 $Y \to Z \to X'$ 是薄的。因此，(2) 中的两个不等式实际上都是等式，从而这两个三角形是薄的，公理 (ET4) 成立。

公理 ($ET4^{op}$) 基于类似的理由成立。 □

注 2.5。 由证明可知，交集 $\bigcap_{k=1}^{n} \Delta_{\tau_k}$ 也诱导出一个外三角结构。更一般地说，定理 *2.4* 对于在直和下可加且对正合三角满足三角不等式的度量也成立。

2.5. **另一种外三角结构**。 定理 2.4 以及为定理 2.10 的证明所发展出的思想，都与 [BDL20, 附录 A] 中的可整流滤过概念相近（尤其参见命题 A.9）。Heng 的博士论文 [Hen22]的附录中给出了这一概念的一种更具图示性的介绍。我们将简要回顾这一概念，并说明它提供了一种替代方法：通过在三角范畴上选择一个稳定性条件来构造外三角结构。

让我们固定 τ 上的一个稳定性条件 $\mathcal{C}$。回顾如下定义。

定义 2.6。 一个特殊三角形 $A \to B \to C \xrightarrow{\delta}$ 称为可整除的，如果 $\forall \phi \in \mathbb{R}$，以下映射复合为零

$$C_{>\phi} \to C \xrightarrow{\delta} A[1] \to A_{\le\phi}[1],$$

其中，$C_{>\phi}$ 表示属于 $\mathcal{P}((\phi, +\infty))$ 的 C 的极大子模，而 $A_{\le\phi}$ 表示属于 $\mathcal{P}((-\infty, \phi])$的 A 的极大商。

这一定义的动机在于，在这种情况下，出现在B 的 HN 滤过中的稳定对象，是 A 的稳定对象与 C的稳定对象的并集。

因此，我们可以如下引入可整化三角形的集合 Δ_τ^r

$$\Delta_\tau^r = \{A \to B \to C \text{ rectifiable}, \ \ A, B, C \in \mathcal{C}\}.$$

事实证明　这些结构由此构成一个外三角结构　　构。

命题 2.7. 三角形集合 Δ_τ^r 导出了一个外三角结构。

证明。 所有公理均已验证：(ET1) 及其对偶版本由 [BDL20，命题 A.4] 或 [Hen22，命题 B.0.4], 推出；(ET4) 和 (ET4$^{\mathrm{op}}$) 则由 [Hen22，命题 B.0.8]推出。□

注 2.8. 在有限型情形下，对于一般稳定性条件， Δ_τ 和 Δ_τ^r 应当导出相同的结构。然而，它们在墙上的表现恰好相反：墙上有更多薄三角，但可整化三角形更少。

2.6. **外三角 Grothendieck 群**。 范畴上的外三角结构导出了外三角格罗滕迪克群的概念，其构造如下：仅将薄三角线性化。

定义 2.9 ([PPPP23，定义 4.8])。 与所选三角形集合 Δ 相关联的外三角 *Grothendieck* 群，是由同构类$[X]$生成的自由阿贝尔群对以下关系取商所得：对于每个 $X \in \mathcal{C}$，对 Δ中的所有三角形 $X \to Y \to Z$，均有关系 $[X]-[Y]+[Z]$。

例如，在 Khovanov-Seidel 的类型 A_n 中，我们将看到（推论 4.1）对于一般的稳定性条件，得到一个秩为 $n_{(n+1)-2}$ 的自由 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$-模；而通常的格洛腾迪克群在 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 上的秩为 n。

我们先一般性地陈述下一个定理，然后再将其具体化到辫群的情形（见推论 4.1）。

在下一个定理中，我们要求稳定对象的质量线性无关。对于我们之后将关注的有限型 A 情形，这仅仅是为了方便；因为即使条件不成立，我们也可以对稳定性条件作微小扰动，而不改变薄三角的集合。

定理 2.10。 设 $\mathcal{C}$ 为一个带有给定稳定性条件 τ 及薄三角集合 Δ_τ的三角范畴。假设稳定对象的中心荷的模（或质量）在 $\mathbb{Z}$上是线性无关的。那么，与稳定性条件τ 相关并记作 $K_0^\tau(\mathcal{C})$ 的外三角 *Grothendieck* 群在 $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}]$ 上由处于与 τ相关的首选 t-结构的心中的稳定对象的同构类自由生成。变量 s 表示三角平移。

定理 2.10 的证明将基于引理 2.11，其中我们将使用阿贝尔范畴中的合成列概念。为解释这一思想，考虑一个对象 $X \in \mathcal{C}$。得益于其 Harder-Narasimhan 滤过，可以将该对象切成切片。于是，HN 滤过中出现的每个半稳定对象 Y_i 都是阿贝尔范畴 $\mathcal{P}(\phi)$中的一个对象（见 [Bri07，引理 5.2] 或 [MS17，习题 5.9]）；根据 Jordan-H¨older 定理，该对象又能以本质唯一的方式分解为简单对象（或等价地，稳定对象）。给定 Y_i，我们将用 $JH(Y_i)$表示组成 Y_i的简单对象及其重数所构成的集合。现在，对于 X，我们可以关联 $JH(HN(X))$，即组成 X的 HN 滤过中出现的半稳定对象的简单对象集合，并按重数计数。

引理 2.11. 设 $A \to B \to C$ 是一个薄三角。我们有

$$JH(HN(B)) = JH(HN(A)) \cup JH(HN(C)).$$

换句话说， B 的 *HN* 滤过中所有项的乔丹–赫尔德分解的并集，与 A 和 C 的 *HN* 滤过中所有稳定对象的乔丹–赫尔德分解的并集相同。

证明。 注意，在每个阿贝尔范畴 $\mathcal{P}(\phi)$ 中，单对象就是稳定对象　　s.

从 $m_\tau(B) = m_\tau(A) + m_\tau(C)$ 开始。对于 $X \in \{A, B, C\}$，注意

$$m_\tau(X) = \sum x_i m_\tau(S_i) \tag{3}$$

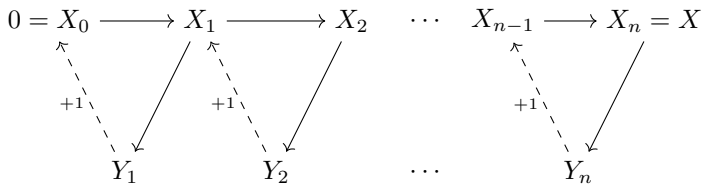
其中 S_i 表示所有稳定对象。这是先计算 X 的 HN 滤过，再使用方程 (1) 中的恒等式所得的结果。随后，每个半稳定对象都可以通过取合成列进一步分解为单对象。注意，在方程 (3) 中，对于所有 i， x_i 都是非负的，并且计数每个 S_i 出现的次数。此外，由于我们假设了 $\mathbb{Z}$ 线性无关，数值 $m_\tau(X)$ 决定了 x_i。

因此，三角是薄的这一条件可重新表述为

$$b_i = a_i + c_i, \ \forall i.$$

这就得出了该结果。 □

定理 *2.10* 的证明。 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 X 都有一个由 τ 诱导的 Harder-Narasimhan 滤过，其半稳定对象为 Y_i，如下所示



We 首先要证明，$[X] \in K_0^{\tau}(\mathcal{C})$可以表示为半稳定对象 Y_i的线性组合 .

为此，考虑三角形 $X_{n-1} \to X_n \to Y_n$。由 m_τ 的定义可知，这个三角形是薄的，因此

$$[X] = [X_n] = [X_{n-1}] + [Y_n]\,.$$

对象 Y_n 是半稳定对象，我们可以通过归纳得出， $[X_{n-1}]$ 是半稳定对象的线性组合。但半稳定对象本身又可以通过一系列薄三角分解为稳定对象。事实上，半稳定对象 B 是指存在一个三角形 $A \to B \to C$ ，其中 A、B、 C都属于同一个 $\mathcal{P}(\phi)$。由此可得 $Z(B) = Z(A) + Z(C)$；又因为它们的相位相同，所以 $m_\tau(B) = m_\tau(A) + m_\tau(C)$。因此，任何对象都可以表示为稳定对象的线性组合。此外， Y_i 都可以表示为相位属于 $[0,1)$ 的半稳定对象的移位。由此可知，心中的稳定对象的移位张成外三角 Grothendieck 群。

现在固定切片的心中所有稳定对象的列表 $\{S_i\}$ 。我们要证明，这些稳定对象的所有三角平移自由生成 $K_0^{\tau}(\mathcal{C})$，使其成为一个 $\mathbb{Z}$-模。为此，令 M 为由这些稳定对象的所有移位形式生成的自由 $\mathbb{Z}$-模

$$M = \mathbb{Z}\langle [S_i[l]] \rangle.$$

回顾一下， $K_0^{\mathrm{add}}(\mathcal{C})$，即 $\mathcal{C}$ 的加性 Grothendieck 群，是由对象的同构类在关系 $[A \oplus B] = [A] + [B]$ 下生成的自由 $\mathbb{Z}$-模。可以如下定义一个从 $K_0^{add}(\mathcal{C})$ 到 M 的映射

$$\begin{aligned} \psi : K_0^{\mathrm{add}}(\mathcal{C}) &\to M \\ X &\mapsto \sum_{W \in JH(HN(X))} [W]. \end{aligned}$$

其构造方式与引理 2.11 中相同：先取 HN 滤过中出现的半稳定对象的形式组合，再用它们的合成列替换半稳定对象。引理 2.11 保证映射 ψ 可以通过 $K_0^{\tau}(\mathcal{C})$ 分解。因此，稳定对象在 $K_0^{\tau}(\mathcal{C})$ 中线性无关。

因此， $K_0^{\tau}(\mathcal{C})$具有自由 $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}]$-模结构，其基为 $\{S_i\}$。这里，乘以 s 对应于三角平移自函子的诱导作用。□

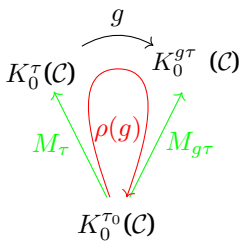
2.7. 范畴作用所产生的线性表示? 先验地，并没有理由认为薄三角集合在 $AutEq(\mathcal{C})$的作用下保持不变。不过，我们可以在稳定性条件空间 $Stab(\mathcal{C})$中固定一个基点τ_0 ，并考虑自等价作用下 τ_0 的轨道 T （稍后我们将进一步对 T取商）。

为了提供更大的灵活性，我们将在稍微一般一些的设定下给出定义。

定义 2.12。 设 G是作用于三角范畴 $\mathcal{C}$的群。我们固定一个稳定性条件$_{\sim}\tau_0$ 及其薄三角集合 Δ_{τ_0}。令 T 为 $G \cdot \tau_0$ ，并令 $T = T/\sim$ 为其关于某个$\widetilde{}$等价关系 $\sim$的商。对于任意 $\tau \in T$，(G, T) 的识别系统是指选择一个 $\mathbb{Z}$-模同构$_{\sim}M_\tau$: $K_0^{\tau_0}(\mathcal{C}) \simeq K_0^{\tau}(\mathcal{C})$。

之后，我们将考虑模去 $\mathbb{C}^*$-作用的稳定性条件，并将具有相同稳定对象的一般条件视为等同。

由这样的系统以及每个外三角 Grothendieck 群的一组基，可以尝试通过考察以下内容来获得 G 中元素的矩阵表示



~在上文中，我们滥用了记号来表示 $K_0^{\tau}(\mathcal{C})$：我们将 τ 与其在 T 中的等价类视为相同。

定义 2.13。 如果 $\rho(g)$ 仅取决于 g （而不取决于 τ），则称该识别系统相容。

于是，我们在 $K_0^{\tau_0}(\mathcal{C})$ 上得到一个良定义的表示。

问题 2.14. 何时存在这样的相容系统？它何时能带来有趣的结果？

我们通过证明 LKB 表示可以由 Khovanov-Seidel 范畴作用以这种方式得到，初步回答这个问题。

如果使用 T 时不作进一步限制，那么我们可能会有过多的自由度，正如下一个引理所述。

引理 2.15. 假设群 G 在稳定性条件 τ_0 上自由作用，且 $K_0^{\tau_0}(\mathcal{C})$ 是某个交换环 R 上秩有限的自由模 r。那么， G 的任意秩为 r 的 R-线性表示都可以由一个识别系统恢复。

证明。 任意选取一个可逆矩阵 M_{τ_0}，它表示 $K_0^{\tau_0}(\mathcal{C})$ 的一个自同态。将给定的表示记为 ρ；滥用记号，我们将其视为

$$\rho : G \to End(K_0^{\tau_0^{\mathrm{ref}}}).$$

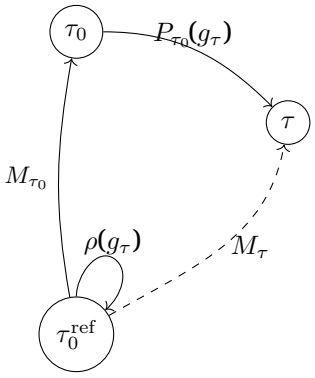
其中 τ_0^{ref} 无非就是 τ_0，使用这种记号是为了强调 M_{τ_0} 未必是单位矩阵这一事实。

对于任意 $g \in G$ 和 $\tau \in T$，我们将从 $K_0^{\tau}(\mathcal{C})$ 到 $K_0^{g\tau}(\mathcal{C})$ 的 g 诱导作用所得到的矩阵记为 $P_\tau(g)$。注意，对于任意 g，$g' \in G$ 和 $\tau \in T$，都有 $P_\tau(g'g) = P_{g\tau}(g')P_\tau(g)$。由于该作用是自由的，对于任意 $\tau \in T$，都存在唯一的 $g_\tau \in G$ 使得 $\tau = g_\tau \tau_0$。于是存在唯一的矩阵 M_τ，由以下条件确定：

$$M_\tau^{-1} P_{\tau_0}(g_\tau) M_{\tau_0} = \rho(g_\tau).$$

这个过程可以表示如下

(4)



还需验证，对于所有 $g \in G$, $M_{g\tau}^{-1} P_\tau(g) M_\tau$ 都不依赖于 τ。我们有

$$\begin{aligned} M_{g\tau}^{-1} P_\tau(g) M_\tau &= M_{gg_\tau\tau_0}^{-1} P_{g_\tau\tau_0}(g) M_{g_\tau\tau_0} \\ &= \rho(gg_\tau) M_{\tau_0}^{-1} P_{\tau_0}(gg_\tau)^{-1} P_{g_\tau\tau_0}(g) P_{\tau_0}(g_\tau) M_{\tau_0} \rho(g_\tau)^{-1} \\ &= \rho(g)\rho(g_\tau) M_{\tau_0}^{-1} P_{\tau_0}(gg_\tau)^{-1} P_{\tau_0}(gg_\tau) M_{\tau_0} \rho(g_\tau)^{-1} \\ &= \rho(g). \end{aligned}$$

□

注 2.16. 引理 *2.15* 似乎为从范畴作用中恢复表示提供了相当大的自由度。在我们的语境中，需要注意的是，首要挑战在于找到一种解范畴化过程，使之能够得到一个二变量表示。这促使我们将研究与外三角结构联系起来，也是这一过程得以实现的关键要素。此外，我们从范畴数据中提取 *LKB* 表示的方式保留了若干理想的对称性：它通过 $PStab$ 分解，而且具有相同组合结构的两个稳定性条件也会被识别（这就是等价关系 $\sim$）。这尤其意味着，（对偶）*Garside* 元保持所选参考稳定性条件的等价类不变。确保这些对称性的范畴表示与 *LKB* 表示之间的相容性，最终需要相当多的工作——见定理 *4.4* 及其证明。最后，识别系统的形式使我们希望这两种表示之间的联系有助于发现新的组合结构，见注 *4.6*。

3. Khovanov-Seidel and LKB braid representations

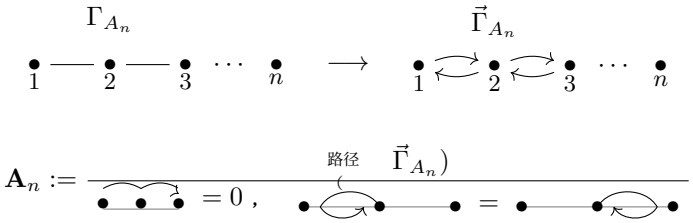
3.1. **Khovanov-Seidel 表示**。

3.1.1. 范畴。我们希望利用从 Khovanov 和 Seidel [KS02] 引入的范畴上的稳定性条件继承而来的外三角结构。该范畴带有辫群作用，其去范畴化可恢复 Burau 表示 [Bur35]。

该范畴被表述为 $\mathbb{Z}-$ 分次的投射模在所谓的之字形代数上的同伦范畴；该代数与 A_n 型 Dynkin 图相关。此构造已推广到任意单边 Artin-Tits 群，并自此得到广泛研究。

从几何群论的角度来看，理解 Bridgeland 稳定性条件模空间的结构及其所承载的作用，是一个重要问题（参见 [BDL20] 及其中的参考文献）。在此，我们将尝试借助稳定性条件，只对 Khovanov-Seidel 作用进行部分线性化。

在类型 A_n 中，之字形代数 $\mathbf{A}_n$ 是与双重箭图相关联的路径代数的商，如下所述



顶点集合 $\{i\}$ 诱导出一组本原幂等元 $\{e_i\}$，进而诱导出一组完备的不可分解左射影模 $\{P_i = \mathbf{A}_n e_i\}$；分次由路径长度给出。路径长度分次移位 $k \in \mathbb{Z}$ 记作 $\langle k\rangle$，而同调移位 $l \in \mathbb{Z}$ 记作 $\{l\}$。

定义 3.1. 本文讨论的主要范畴是分次射影$\mathbf{A}_n$-模的同伦范畴，记作 $\mathcal{C}(A_n)$（或简记为 $\mathcal{C}$）。

我们将在第 4.1 节进一步详述分次。

3.1.2. 作用。这个范畴可以通过自等价赋予一个作用，即 B_{n+1} 股辫群在 $n+1$ 股上的作用。这些自等价由对 P_i'的球面扭生成（例如参见 [KS02]和 [BT11] ）。它们由与以下双模复形作张量积给出

$$\Sigma_i = \mathbf{A}_n e_i \otimes_{\mathbb{C}} e_i\mathbf{A}_n\{-1\} \xrightarrow{f} \mathbf{A}_n \tag{5}$$

$$\Sigma_i^{-1} = \mathbf{A}_n \xrightarrow{g} \mathbf{A}_n e_i \otimes_{\mathbb{C}} e_i\mathbf{A}_n\langle -2\rangle\{1\}. \tag{6}$$

映射 f 由乘法给出，而映射 g 是它的伴随映射，并且可以明确确定。 [KS02] 中的主要结果是，这构造出了辫群的忠实作用。

3.2. **LKB 表示**。大约在 Khovanov 和 Seidel 通过将 Burau 表示提升为范畴表示，解决其忠实性问题的同时，Krammer [Kra02]和 Bigelow [Big01], 在 Lawrence [Law90], 工作的基础上，证明了 Burau 表示的第二对称幂的一种变形具有忠实性。如今，这种表示被称为劳伦斯–克拉默–比格洛（ LKB）表示；这一结果也由此表明辫群是线性的。

本文所发展的工具的主要应用，是证明 LKB 表示可以从 Khovanov-Seidel 范畴作用导出，见定理 4.4。

T为了研究 LKB 表示，我们遵循保卢齐和 Paris 的约定 [PP02].

定义 3.2。 B_{n+1} 的 *LKB* 表示由其在一个秩为 $n(n+1)\,2$ 的自由 $\mathbb{Z}[x,y]$-模上的作用给出，该模由满足 ~~$1 \leq i$~~ $< j \leq n+1$ 的向量 e_{ij} 张成。其作用定义如下：

$$\sigma_k \cdot e_{ij} = \begin{cases} xe_{i-1j} + (1-x)e_{ij} & if\, k = i-1 \\ e_{i+1j} - xy(x-1)e_{kk+1} & if\, k = i < j-1 \\ -x^2 y e_{kk+1} & if\, k = i = j-1 \\ e_{ij} - y(x-1)^2 e_{kk+1} & if\, i < k < j-1 \\ e_{ij-1} - xy(x-1)e_{kk+1} & if\, i < j-1 = k \\ xe_{ij+1} + (1-x)e_{ij} & if\, k = j \\ e_{ij} & otherwise. \end{cases}$$

4. Recovering the LKB representation

本节针对 Khovanov-Seidel 之字形代数，全面阐述第 2 节中概述的构造，以恢复 LKB 表示。

4.1. **双变量** K_0。 我们先固定 τ_0，即 $\mathcal{C}(A_n)$ 上一个优选的稳定性条件。我们对 τ_0 的选择如下。首先，我们声明稳定对象的集合。这些对象是存在一个极小复形的对象，且其中所有微分映射均为 $P_i \to P_{i+1}\{1\}\langle -1\rangle$ 这一类型。由 [LQ21 定理 2.7] 可知，这些给定的稳定对象由一个移位以及与类型为 A 的 Dynkin 图相关联的根系中的一个正根确定。实际上，忽略移位后，这些复形由一对 $1 \leq i < j \leq n+1$ 确定：

$$P_i \to P_{i+1} \to \cdots \to P_{j-1}.$$

若要使定义更加精确，就需要按照相位递增的顺序排列稳定对象，然后为它们在 Z 下的像选定确切的值。[BDL25 第 6] 节中给出了这类选择的直观图示描述。就我们的目的而言，只需承认这样的选择存在即可。

为便于后文使用，请注意，这一 τ_0 的选择与对称群中 Coxeter 元的选择有关，而后者等价于固定 Dynkin 图的一个定向。我们选择将类型为 A 的 Dynkin 图定向为从左到右，这对应于选择 Coxeter 元$c = s_1 \cdots s_n$。这一选择在辫群中提升为所谓的（对偶）Garside 元 $\gamma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$，其一个关键特征是， γ 会保留与 τ_0 相关联的稳定对象集合（例如参见公式 19）。

此外，我们假设 τ_0 的选取使得稳定对象在中心荷 Z 下的像在 $\mathbb{Z}$ 上线性无关。这是一个通常成立的技术条件，并且能够确保一个对象的质量决定其 HN稳定对象。

如第 2.7 节所述，我们首先考虑

$$T = B_{n+1} \cdot \tau_0,$$

辫群作用下的 τ_0 轨道。应当回顾的是，辫群在稳定条件模空间上的作用是自由的 [HL24，第 7.25], 条命题，但并非传递的。事实上，辫群的作用只会改变稳定对象，而稳定对象的相位集合保持不变。该作用的一个基本域自然分裂为若干组合类，这些组合类由某些稳定对象的相位对齐处的墙分隔开来。在类型 A_3中，这一点已经很明显。熟悉稳定性条件与平面中点配置之间对应关系的读者会看到，四个点可以形成一个正方形，或形成一个环绕某个点的三角，而这两种配置无法通过辫子相互关联。集合 T 的意义在于，为每个基本域选择一个首选配置（稍后我们将选择凸形的配置）。

或许有必要更仔细地考察这些分次。事实上，我们手头有两种分次：同调分次和路径长度（量子）分次。它们的和诱导出

t-结构的分次，而该结构是选择 τ 的基础。我们将这种分次称为三角分次，其移位记作 $[k]$。更确切地说，我们定义 $X[k]\langle l\rangle = X\{k\}\langle l-k\rangle$。

结合路径长度分次与三角分次，我们通过令.....在 $K_0^{\mathcal{T}}(\mathcal{C})$ 上诱导一个 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$作用

$$[X[1]] = s[X] \quad \text{and} \quad [X\langle 1\rangle] = q[X].$$

下一个结果的一个关键推论是，该模是自由的。对于习惯于经典格罗滕迪克群的人来说，这有些违反直觉，因为在经典格罗滕迪克群中，下述三角

$$X[1] \to (X \xrightarrow{\mathrm{id}} X[1]) \to X$$

诱导出 $[X[1]] = -[X]$。之所以没有这种关系，是因为上述三角不是薄的，参见注 2.3。此外，

$$sq[X] = [X[1]\langle 1\rangle] = [X\{1\}\langle 0\rangle]$$

表明同调移位也在 $K_0^{\mathcal{T}}(\mathcal{C})$ 上诱导一个 $\mathbb{Z}$作用，我们将其记为

$$[X\{1\}] = t[X],$$

显然，其中 t 与 sq 相对应。

在本文后续部分，我们将使用这一 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$-模结构，定理 2.10 在我们的情形下具体表述如下。

推论 4.1. 设 $\tau \in T$，并令 Δ_τ 为相应的薄三角集合。那么，外三角 *Grothendieck* 群可描述如下

$$K_0^{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]\langle \alpha,\ \alpha \in \Phi^+\rangle.$$

这里 Φ^+ 表示 *Dynkin* 型 A 的根系的正根集合，并可用单根 α_i*'s* 显式描述为

$$\Phi^+ = \{\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_{j-1},\ 1 \le i < j \le n+1\}.$$

证明。 这是定理 (2.10) 的直接应用，并利用了稳定对象由正根分类这一事实。这是 [LQ21，定理 2.7]（另见 [BDL23，命题 4.2 和定理 1.2]，其中给出了更一般且具构造性的表述）。□

4.2. **还原 LKB 表示**。 遵循第 2.7 节的策略，我们将分两步重构 LKB 表示：首先得到 q，t-置换矩阵，可将其视为群胚表示的某种单值矩阵。然后，我们将所有内容拉回到同一个基点，从而得到 LKB 矩阵。

回想一下， T 表示在辫群作用下 τ_0 的轨道。对于某个辫子 β，稳定性条件 $\beta\tau_0$ 和 τ_0 可能具有相同的稳定对象集合，因此也具有相同的组合数据来构造外三角结构。我们希望识别这类稳定性条件。为此，我们在 T 上定义一个等价关系：若 $\tau \sim \tau'$~具有相同的稳定对象集合，则称它们等价。由此得到集合 $T = T/\sim$。我们常将一个~稳定性条件 τ 与其在 T中的等价类视为同一对象。

~对于每个 $\tau \in T$，我们都在心中具体选定一组稳定对象，其分次由指定的 q 决定，因而也由 t 决定。用$\mathbf{B}_\tau$ 表示这一选择。这也将为外三角 Grothendieck 群确定一个优选基。

对于任意辫子 β 和任意选择 τ_1，记 $\tau_2 = \beta\tau_1$ 为 τ_1 在 β 对稳定性条件模空间的作用下的像。那么， $\beta\mathbf{B}_{\tau_1}$ 是一组稳定对象，经分次移位后可生成 τ_2的所有稳定对象

$$\forall S_i \in \mathbf{B}_{\tau_2},\ \exists k, l \in \mathbb{Z} \text{ and } S'_j \in \mathbf{B}_{\tau_1} \text{ such that } \beta S'_j = S_i\{k\}\langle l\rangle.$$

由此，我们构造矩阵 $P_{\tau_1}(\beta)$，其中 $t^k q^l$ 位于位置 $(i,\ j)$。

注 4.2。 我们自然有

$$P_{\tau_1}(\beta_2\beta_1) = P_{\beta_1\tau_1}(\beta_2) P_{\tau_1}(\beta_1).$$

现在，我们选择 τ_0^{ref} 作为基点，它是稳定性条件 τ_0 与优选集合 $\mathbf{B}_{\tau_0}$ 的组合，后者为以下集合

$$P_{i,j} = P_i\{i-j+1\}\langle -i+j-1\rangle \to P_{i+1}\{i-j+2\}\langle -i+j-2\rangle \to \cdots \to P_{j-1} \tag{7}$$

对所有 $1 \le i < j \le n+1$。

回顾一下，我们将识别系统定义为一组可逆矩阵，用来表示以下同构

$$\forall \tau_1 \in \widetilde{T},\ M_{\tau_1} : K_0^{\tau_0^{\mathrm{ref}}}(\mathcal{C}) \to K_0^{\tau_1}(\mathcal{C}).$$

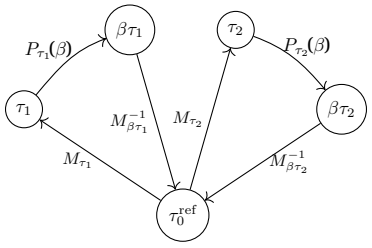
我们特别指出，对于 M_{τ_0}，我们不会选择单位矩阵；这意味着我们为 $K_0^{\tau_0}(\mathcal{C})$ 选择的基不同于由$\mathbf{B}_{\tau_0}$ 诱导的基。

定义 2.13 可以改述为：如果一个识别系统与辫群的作用相容，那么

$$\forall \beta, \forall \tau_1, \tau_2 \in \widetilde{T}, M_{\beta\tau_1}^{-1} P_{\tau_1}(\beta) M_{\tau_1} = M_{\beta\tau_2}^{-1} P_{\tau_2}(\beta) M_{\tau_2}.$$

上　　述内容意味着，将复合得到的 $K_0^{\tau_0^{\mathrm{re}}}(\mathcal{C})$ 的两个自同态应当相等　　al

(8)



下面的陈述仅仅是一个观察。

命题　4.3. 相容系统在 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]\langle \alpha \in \Phi^+ \rangle$ 上诱导出一个辫群表示　　.

证明。 关键在于复合陈述，而这可由注 4.2 得出。　　□

这是我们这一框架的主要应用。

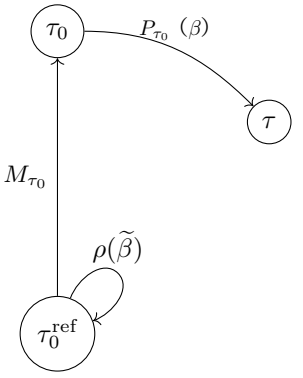
定理　　~**4.4.** 存在一个关于(B_{n+1}, T) 的识别系统，可以恢复 *LKB* 表示　　*n.*

我们再次强调，与引理 2.15 相比，我们要求识别系统尊重范畴的某些对称性，这使得 T 中的元素数量减少了~。定理 4.4 证明的主要目标，是说明这些对称性在 LKB 框架中也能得到良好体现。

证明。 先约定一些记号。回想一下，将辫子 β 从 $K_0^{\tau}(\mathcal{C})$ 到 $K_0^{\beta\tau}(\mathcal{C})$ 的范畴作用去范畴化后得到的矩阵记为 $P_\tau(\beta)$。另一方面，回想一下， ρ 是 Paoluzzi–Paris 约定下的 LKB 表示。由于不同参考文献采用的约定不同，我们将 σ_i 的范畴作用与 $\rho(\sigma_i^{-1})$ 对应起来。给定 β，我们将~记作 β：它是通过将各字母取逆得到的辫子（注意，我们保留字母的顺序，因此这是一个群同态，而不是由取逆映射给出的群反同态）。

~假设给定矩阵 M_{τ_0}，并考虑辫子 β 以及 τ 在 T中的 $\beta\tau_0$ 代表元。

(9)



那么存在唯一的 M_τ 使得

$$M_\tau^{-1} P_{\tau_0}(\beta) M_{\tau_0} = \rho(\widetilde{\beta}).$$

~这一过程允许对任意 $\tau \in T$定义矩阵 M_τ，但 τ_0 除外（那里已经做出了选择）。然而，我们需要验证该定义不依赖于所选的特定辫子 β。假设 $\beta\tau_0$ 和 $\beta'\tau_0$ 具有相同的代表元。

这意味着， τ_0 在 $\mu = (\beta')^{-1}\beta$ 作用下的稳定对象的像是稳定对象的移位。我们首先证明，这种移位对所有稳定对象都是一致的。注意，只需对$P_i = P_{i,\ i+1}$证明这一点，因为其他稳定对象都可由这些对象通过锥运算和移位得到。固定 i，并定义 S, S' 两个

τ_0-稳定对象，并令 k 和 l 在 $\mathbb{Z}$ 中由 $\mu(P_i) = S[k]$ 和 $\mu(P_{i+1}) = S'[l]$给出。接着利用$P_{i,\ i+2} = P_i \to P_{i+1}$，因此 $\mu(P_{i,\ i+2})$是一个介于 $S[k]$ 和 $S'[l]$之间的映射的锥。已知该锥包含于心的某个移位中，便可推出 $k = l$。对所有 i进行上述操作，意味着 $\mu(\oplus_i P_i)$仅集中在一个s-次数上。随后可应用 [LQ21, Theorem 4.1] ，证明对某个 l 有 $\mu = \gamma^l$ 。需要指出的是， [LQ21] 并未提及稳定性条件。然而， [LQ21] 中与 γ 相关的重次结构与 τ_0密切相关。具体而言，重次结构的心中的不可分解对象是 τ_0的稳定对象，因此 [LQ21, Theorem 4.1] 确实适用于我们的情形。

总之，要求 $\beta'\tau_0 = \beta\tau_0 \in \widetilde{T}$等价于要求 $(\beta')^{-1}\beta = \gamma^l$ 对某个 l 的取值成立。我们将由 β 和 β' 确定的两个矩阵记为 M_β 和 $M_{\beta'}$：

$$M_\beta = P_{\tau_0}(\beta)M_{\tau_0}\rho(\widetilde{\beta})^{-1} \text{ and } M_{\beta'} = P(\beta')M_{\tau_0}\rho(\widetilde{\beta'})^{-1}.$$

因此，$M_\beta = M_{\beta'}$ 当且仅当 $M_{\beta'}M_\beta^{-1} = \mathrm{Id}$，这可表示为

$$P_{\tau_0}(\beta')M_{\tau_0}\rho(\widetilde{\beta'})^{-1}\rho(\widetilde{\beta})M_{\tau_0}^{-1}P_{\tau_0}(\beta)^{-1} = \mathrm{Id}$$

或者等价地

$$M_{\tau_0}\rho(\widetilde{\gamma}^l)M_{\tau_0}^{-1} = P_{\tau_0}(\gamma^l).$$

因此，当且仅当下式成立时，才存在唯一确定的矩阵

$$M_{\tau_0}\rho(\widetilde{\gamma})M_{\tau_0}^{-1} = P_{\tau_0}(\gamma). \tag{10}$$

证明的核心是说明该方程存在一个解，换言之，$\rho(\widetilde{\gamma})$ 可以对角化，且其特征值由 $P_{\tau_0}(\gamma)$ 指定。我们将 $K_0^{\tau_0^{\mathrm{ref}}}(\mathcal{C})$ 的优选基 $\{[P_{i,j}]\}$ 与 $\{e_{i,j}\}$ 对应起来；为简化记号，从现在起，我们直接写作 $P_{i,\ j}$ ，而不再写 $[P_{i,j}]$。

为了简化计算，我们改为计算 $\rho(\widetilde{\gamma}^{-1})$，其中 $\widetilde{\gamma}^{-1} = \sigma_n \cdots \sigma_1$；为简化记号，我们省略 ρ。公式如下

$$\widetilde{\gamma}^{-1}e_{i,j} = \begin{cases} \sum_{r=1}^{j-2}\sum_{s=r+1}^{n}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s} - \sum_{r=1}^{j-2}(x-1)x^{n+1-r}ye_{r,n+1} \\ \quad -x^{n-j+3}ye_{j-1,n+1} + \sum_{s=j}^{n}x^{s-j+2}y(x-1)e_{j-1,s}, \quad \text{if } i = 1. \\ xe_{i-1,j-1}, \quad \text{if } i > 1. \end{cases} \tag{11}$$

让我们证明这些恒等式。若 $i \neq 1$，则

$$\begin{aligned}(\sigma_n \cdots \sigma_1)e_{i,j} &= (\sigma_n \cdots \sigma_{i-1})e_{i,j} = (\sigma_n \cdots \sigma_i)(xe_{i-1,j} + (1-x)e_{i,j}) \\ &= (\sigma_n \cdots \sigma_{i+1})(xe_{i-1,j} + (1-x)e_{i+1,j}) = \dots \\ &= (\sigma_n \cdots \sigma_{j-1})(xe_{i-1,j} + (1-x)e_{j-1,j}) = (\sigma_n \cdots \sigma_j)(xe_{i-1,j-1}) = xe_{i-1,j-1}.\end{aligned}$$

现在我们来考察 $i = 1$ 的情形。容易计算得

$$(\sigma_n \cdots \sigma_1)e_{12} = -x^2y(\sigma_n \cdots \sigma_2)e_{12} = \cdots = -x^{n+1}ye_{1,n+1} + \sum_{s=2}^{n}x^sy(x-1)e_{1,s}$$

这与 (11) 一致。

最后，假设 $i = 1$ 和 $j > 2$。计算得

$$\begin{aligned}&(\sigma_n \cdots \sigma_1)e_{1j} = (\sigma_n \cdots \sigma_2)(e_{2j} - xy(xy-1)e_{12}) = \dots \\ &= (\sigma_n \cdots \sigma_{j-1})(\sum_{r=1}^{j-3}\sum_{s=r+1}^{j-2}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s} - \sum_{r=1}^{j-3}(x-1)yx^{j-1-r}e_{r,j-1} - xy(x-1)e_{j-2,j-1} + e_{j-1,j}).\end{aligned}$$

这等于

$$(\sigma_n \cdots \sigma_j)(\sum_{r=1}^{j-2}\sum_{s=r+1}^{j-1}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s} - \sum_{r=1}^{j-2}(x-1)x^{j-r}ye_{r,j} - x^2ye_{j-1,j}).$$

第一项由 $\sigma_n \cdots \sigma_j$ 稳定。可以计算得出

$$\begin{aligned}(\sigma_n \cdots \sigma_j)(-\sum_{r=1}^{j-2}(x-1)x^{j-r}ye_{rj}) &= (\sigma_n \cdots \sigma_{j+1})(-\sum_{r=1}^{j-2}(x-1)x^{j+1-r}ye_{r,j+1} + \sum_{r=1}^{j-2}(x-1)^2x^{j-r}ye_{r,j}) \\ &= \cdots = \sum_{r=1}^{j-2}(x-1)x^{n+1-r}ye_{r,n+1} + \sum_{r=1}^{j-2}\sum_{s=j}^{n}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s}.\end{aligned}$$

对于最后一项，我们得到

$$(\sigma_n\cdots\sigma_j)e_{j-1,j}=(\sigma_n\cdots\sigma_{j+1})(xe_{j-1,j+1}+(1-x)e_{j-1,j})=x^{n-j+1}e_{j-1,n+1}+\sum_{s=j}^{n}(1-x)x^{s-j}e_{j-1,s}.$$

合并所有项可得到（11）。

现在我们明确地定义 M_{τ_0} 的一个解（并明确计算其逆），如下所示

$$M_{\tau_0}e_{i,j}=P_{i,j}+\sum_{s=i+1}^{j-1}(1-x^{-1})P_{i,s} \tag{12}$$

$$M_{\tau_0}^{-1}P_{i,j}=e_{i,j}-\sum_{s=i+1}^{j-1}x^{s-j}(x-1)e_{i,s}.$$

接下来，验证这一点是一项繁琐的计算

$$M_{\tau_0}\widetilde{\gamma}^{-1}M_{\tau_0}^{-1}P_{i,j}=\begin{cases}xP_{i-1,j-1} & \text{if } i\neq 1,\\ (-x^{n-j+3}y)P_{j-1,n+1} & \text{if } i=1.\end{cases} \tag{13}$$

为说明这一点，我们先考虑 $i>1$ 的情形。于是

$$P_{i,j}\xrightarrow{M_{\tau_0}^{-1}}e_{i,j}-\sum_{r=i+1}^{j-1}x^{r-j}(x-1)e_{i,r}$$

$$\xrightarrow{\sigma_n\cdots\sigma_1}x\left(e_{i-1,j-1}-\sum_{r=i+1}^{j-1}x^{r-j}(x-1)e_{i-1,r-1}\right)\xrightarrow{M_{\tau_0}}xP_{i-1,j-1}.$$

现在我们考虑 $i=1$ 的情形。我们从以下内容出发

$$M_{\tau_0}^{-1}P_{1,j}=e_{1,j}-\sum_{r=2}^{j-1}x^{r-j}(x-1)e_{1,r}.$$

将 $\sigma_n\cdots\sigma_1$ 应用于此式，可得到（由（11）可知）以下 8 个表达式之和。

$$A:=\sum_{r=1}^{j-2}\sum_{s=r+1}^{n}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s}$$

$$B:=-\sum_{r=1}^{j-2}(x-1)x^{n+1-r}ye_{r,n+1}$$

$$C:=-x^{n-j+3}ye_{j-1,n+1}$$

$$D:=\sum_{s=j}^{n}x^{s-j+2}y(x-1)e_{j-1,s}$$

$$E:=-\sum_{r=2}^{j-1}x^{r-j}(x-1)\sum_{s=1}^{r-2}\sum_{t=s+1}^{n}(x-1)^2x^{t-s}ye_{s,t}=\sum_{s=1}^{j-3}\sum_{t=s+1}^{n}(x-1)^2x^{t-j+2}y(1-x^{j-s-2})e_{s,t}$$

$$F:=\sum_{r=2}^{j-1}x^{r-j}(x-1)\sum_{s=1}^{r-2}(x-1)x^{n+1-s}ye_{s,n+1}=-\sum_{s=1}^{j}-3x^{n+3-j}(x-1)u(1-x^{j-s-2})e_{s,n+1}$$

$$G:=\sum_{r=2}^{j-1}(x-1)x^{n+3-j}ye_{r-1,n+1}$$

$$H:=-\sum_{r=2}^{j-1}x^{r-j}(x-1)\sum_{s=r}^{n}x^{s-r+2}y(x-1)e_{r-1,s}=\sum_{s=1}^{j-1}\sum_{t=s+1}^{n}x^{t-j+2}y(x-1)^2e_{s,t}.$$

现在我们收集 $e_{r,\ s}$ 的系数

- 若 $r\leq j-3$ 且 $s\leq n$，则来自 A、E 和 H 的贡献相互抵消；
- 若 $r\leq j-3$ 且 $s=n+1$，则来自 B、F 和 G 的贡献相互抵消；
- 如果 $r=j-2$ 和 $s\leq n$，则来自 A 和 H的贡献相互抵消；

- 如果 $r = j-2$ 和 $s = n+1$，则来自 B 和 G的贡献相互抵消；
- 若 $r = j-1$ 且 $s \le n$，则只有 D 有贡献；
- 若 $r = j-1$ 且 $s = n+1$，则只有 C 有贡献；
- 若 $r \ge j$，则没有贡献。

因此我们得到

$$(\sigma_n \cdots \sigma_1) M_{\tau_0}^{-1} P_{1,j} = (-x^{n-j+3}y)(e_{j-1,n+1} + \sum_{s=j}^{n} x^{s-n-1}(1-x)e_{j-1,s})$$

由此可推得

$$M_{\tau_0} \widetilde{\gamma}^{-1} M_{\tau_0}^{-1} P_{1,j} = -x^{n-j+3} P_{j-1,n+1}.$$

现在我们想将式（13）的结果与范畴作用得到的矩阵进行比较。回顾式（7）中 $P_{i,\ j}$ 的定义，可以显式地计算

$$P_{\tau_0}(\sigma_n^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) P_{i,j} = \begin{cases} t^{2-j+n} q^{j-3-n} P_{j-1,n+1} & \text{if } i = 1, \\ t q^{-1} P_{i-1,j-1} & \text{if } i \neq 1. \end{cases} \tag{14}$$

由于 γ 将稳定对象映射为稳定对象，且该作用退范畴化为根上的韦伊群作用，因此只需检验分次移位。

先考虑 $i \neq 1$的情形。此时

$$(\sigma_n^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) P_{i,j} = (\sigma_n^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}) P_{i,j}.$$

将 σ_{i-1}^{-1} 作用于对象 $P_{i,\ j}$会使 $P_{i-1}\langle -i+j-2\rangle\{i-j+2\}$ 的一份副本出现，而下一步生成元的作用不会影响它。由于在对象 $P_{i-1,\ j-1}$中，因子 P_{i-1} 处于同调次数 $i-j+1$ 和量子次数 $-i+j-1$，因此可得同调分次上的缺陷为 $+1$，量子分次上的缺陷为 -1，从而得到公式 (14)。

现在，对于 $i = 1$，我们有

$$(\sigma_n^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) P_{1,j} = (\sigma_n^{-1} \cdots \sigma_{j-1}) P_{j-1,j} = (\sigma_n^{-1} \cdots \sigma_j^{-1}) P_{j-1,j}\langle -2\rangle\{1\}.$$

注意到 $P_{j-1,\ j}$ 其实就是 P_{j-1}。项 $P_{j-1}\langle -2\rangle\{1\}$在其余生成元的作用下保持稳定，因此必须将它与 $P_{j-1,\ n+1}$中的 $P_{j-1}\langle n-j+1\rangle\{-n+j-1\}$ 副本进行比较。这解释了 (14) 中的系数 $t^{2-j+n}q^{j-3-n}$。

接下来对变量作如下识别，即可得到所需的恒等式

$$\begin{cases} x = tq^{-1} \\ y = -t^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -x^{-1}y^{-1} \\ t = -y^{-1}. \end{cases}$$

现在，我们已经证明存在一个良定义的识别系统，满足

$$M_{\beta\tau_0}^{-1} P_{\tau_0}(\beta) M_{\tau_0} = \rho(\widetilde{\beta}).$$

为了完成证明，我们需要检查它是否与辫群的作用相容，正如方程（8）所形式化的那样。与引理 2.15 中一样，我们看到，对于任意稳定性条件 τ 以及任意将 τ 映射到 τ'的辫子β，都有

$$M_{\tau'}^{-1} P_{\tau}(\beta) M_{\tau} = \rho(\widetilde{\beta}),$$

这就推出了方程（8）。要证明上述公式，可以选取一个将 τ_0 映射到 τ的辫子 β_0。于是我们有

$$M_{\tau'}^{-1} P_{\tau_0}(\beta\beta_0) M_{\tau_0} = \rho(\widetilde{\beta\beta_0}).$$

But

$$P_{\tau_0}(\beta\beta_0) = P_{\tau}(\beta) P_{\tau_0}(\beta_0) \text{ and } \rho(\widetilde{\beta\beta_0}) = \rho(\widetilde{\beta})\rho(\widetilde{\beta_0}).$$

注意到以下事实后，结论便可得出

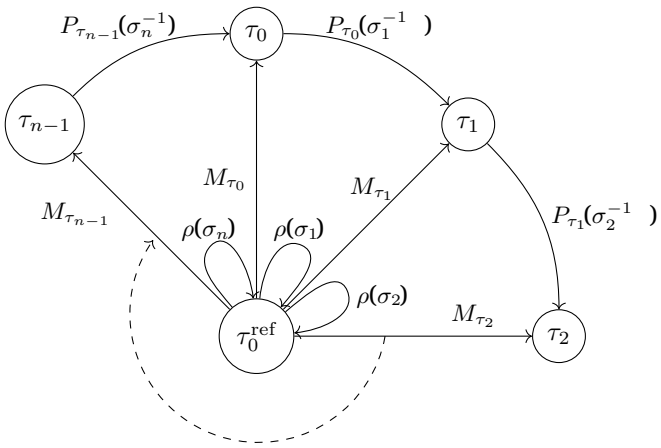
$$\rho(\widetilde{\beta_0}) = M_{\tau}^{-1} P_{\tau_0}(\beta_0) M_{\tau_0}.$$

因此，我们得到一个能够还原 LKB 表示的相容系统。 □

4.3. 显式矩阵与另一种表示。 现在，我们将显式描述其中涉及的稳定性条件对应的基底 $\mathbf{B}_\tau$，以及相关的识别系统。

考虑以下情形：

(15)



回顾第 4.1 节，τ_0 对应于 Dynkin 图从左到右的定向：其稳定对象中涉及的微分映射只有 $P_i \to P_{i+1}\{1\}\langle -1\rangle$这一类，并且沿着 Dynkin 图的定向。在 [LQ21], 中，考虑了 Dynkin 图的其他定向，而与之关联的重次结构最终由稳定性条件 τ_k实现。通过 Dynkin 图的定向来理解这一描述，将有助于整理 τ_k'的稳定对象的描述。

通过归纳推理，可以很容易地证明，每个 τ_k'都对应于由 Dynkin 图的以下定向所导出的稳定性条件：

$$\tau_k \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & & & k-1 & & k & & k+1 & k+2 & & & n \\ \bullet & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots & \bullet \end{array}$$

这句话的意思是，稳定对象将由约化复形实现，且只使用符合上述定向的微分映射。例如，将 σ_1^{-1}作用于(7)中的 τ_0–稳定对象时，只会影响$P_{i,\ j}$ （当 $i=1$ 为 2 时）。如果 $i=1$，那么有一部分 $P_1 \to P_2\{1\}\langle -1\rangle$ 会变成$P_2\{1\}\langle -1\rangle$。如果 $i=2$，那么 P_2 在 σ_1^{-1}作用下产生一个 $P_2 \to P_1\{1\}\langle -1\rangle$的副本，这与 τ_1中顶点 1 和 2 之间边的新定向一致。

我们作如下选择。对于基 $\mathbf{B}_{\tau_k} = \{P^k_{i,j}\}_{i,j}$，我们在 $K_0^{\tau_k}(\mathcal{C})$ 中选择这些复形的同构类：

(16)

$$P^k_{i,j} = \begin{array}{ccccccccc} P_i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{k-1} & \longrightarrow & P_k & & \\ & & & & \oplus & \nearrow & \oplus & & \\ & & & & P_{k+1} & \longrightarrow & P_{k+2} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_{j-1} \end{array}$$

其中最右项位于同调分次和量子分次 0，除非 $i \le k$ and $j \ge k+3$。后一种情况下，最右项为 $P_{j-1}\{-1\}\langle 1\rangle$。其余项的移位依此确定。

引理 4.5。 令 M_{τ_k} 为如下定义的矩阵：

(17)

$$M_{\tau_k} e_{i,j} = \sum_{i',j'} \delta^{i,j}_{i',j'} \alpha^{c^{i,j}_{i',j'}} P^k_{i',j'},$$

其中

- $\alpha = 1 - x^{-1}$;
- $\delta^{i,j}_{i',j'} = 1$ *if* $P^k_{i',j'}$ *is a quotient of* $P^k_{i,j}$, *and* $\delta^{i,j}_{i',j'} = 0$ *otherwise;*
- $c^{i,j}_{i',j'}$ *is the number of irreducible components of* $\mathrm{Cone}(P^k_{i',j'} \to P^k_{i,j})$.

由此得到定理 *4.4* 中的相容识别系统。

证明。 回顾定理 4.4 的证明，我们进行了如下变量的识别：$x = tq^{-1}$ 和 $y = -t^{-1}$。为了降低计算的复杂度，我们验证对于任意 k,

$$P_{\tau_0}(\sigma_k^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) M_{\tau_0} = M_{\tau_k} \rho(\sigma_k \cdots \sigma_1).$$

让我们将方程（17）写得更明确一些。我们有

$$M_{\tau_k} e_{i,j} = P^k_{i,j} + \sum_{\substack{j'=i+1 \\ j'\neq k+1}}^{j-1} \alpha P^k_{i,j'} + \delta_{k+1>i} \sum_{j'=k+2}^{j-1} \alpha^2 P^k_{k+1,j'} + \delta_{i<k+1}\delta_{j>k+1}\alpha P^k_{k+1,j} \tag{18}$$

其中，上述求和中，上标小于下标的项均视为零。

回顾一下，对于 $k=0$, M_{τ_0}，其表达式更为简洁：

$$M_{\tau_0} e_{i,j} = P^0_{i,j} + \sum_{j'=i+1}^{j-1} \alpha P^0_{i,j'}.$$

此外，直接计算可得：

$$\sigma_k^{-1}\cdots\sigma_1^{-1} P^0_{i,j} = \begin{cases} P^k_{k+1,j} & \text{if } i=1,\ k<j-1 \\ P^k_{k,k+1}\{1\}\langle -2\rangle & \text{if } i=1,\ k=j-1 \\ P^k_{j-1,k+1}\{k-j+2\}\langle j-k-3\rangle & \text{if } i=1,\ k\geq j \\ P^k_{i-1,j-1}\{1\}\langle -1\rangle & \text{if } 1<i\leq k \text{ and } j\leq k+1 \\ P^k_{i-1,j}\{1\}\langle -1\rangle & \text{if } 1<i\leq k \text{ and } j\geq k+2 \\ P^k_{i-1,j}\{1\}\langle -1\rangle & \text{if } i=k+1 \\ P^k_{i,j} & \text{if } i>k+1. \end{cases} \tag{19}$$

由定理 4.4 证明中的计算可得：

$$\sigma_k\cdots\sigma_1 e_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{s=r+1}^{k}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s} - \sum_{r=1}^{k-1}(x-1)yx^{k+1-r}e_{r,k+1} & \\ \qquad - xy(x-1)e_{k,k+1} + e_{k+1,j} & \text{if } i=1,\ j-1>k \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{j-2}\sum_{s=r+1}^{k}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s} - \sum_{r=1}^{j-2}(x-1)x^{k+1-r}ye_{r,k+1} & \\ \qquad - x^{k-j+3}ye_{j-1,k+1} + \displaystyle\sum_{s=j}^{k}x^{s-j+2}y(x-1)e_{j-1,s} & \text{if } i=1,\ j\leq k+1 \\ xe_{i-1,j} + (1-x)e_{k+1,j} & \text{if } i>1,\ k<j-1 \\ xe_{i-1,j-1} & \text{if } k+1\geq i>1,\ k\geq j-1 \\ e_{i,j} & \text{if } i>k+1. \end{cases} \tag{20}$$

证明的最后部分基于以下几种情况的分类：

- $i>1$, $j\leq k+1$;
- $i>1$, $j\geq k+2$;
- $i=1$, $k<j-1$;
- $i=1$, $j=k+1$;
- $i=1$, $j\leq k$.

我们明确讨论情形 $i=1,\quad k<j-1$，其他情形留给读者处理。我们先来计算

$$\begin{aligned} e_{1,j} &\xrightarrow{M_{\tau_0}} P^0_{1,j} + \sum_{j'=2}^{j-1}\alpha P^0_{1,j'} \\ &\xrightarrow{P_{\tau_0}(\sigma_k^{-1}\cdots\sigma_1^{-1})} P^k_{k+1,j} + \alpha\sum_{j'=2}^{k}(-x^{k-j+3}y)P^k_{j'-1,k+1} + \alpha(-x^2y)P^k_{k,k+1} + \sum_{j'=k+2}^{j-1}\alpha P^k_{k+1,j'}. \end{aligned} \tag{21}$$

我们将此表达式与

$$
\begin{aligned}
e_{1,j} &\xrightarrow{\rho(\sigma_k\cdots\sigma_1)} \sum_{r=1}^{k-1}\sum_{s=r+1}^{k}(x-1)^2x^{s-r}ye_{r,s}-\sum_{r=1}^{k-1}(x-1)yx^{k+1-r}e_{r,k+1}-xy(x-1)e_{k,k+1}+e_{k+1,j}\\
&\xrightarrow{M_{\tau_k}} \sum_{r=1}^{k-1}\sum_{s=r+1}^{k}(x-1)^2x^{s-r}y(P^k_{r,s}+\sum_{j'=r+1}^{s-1}\alpha P^k_{r,j'})\\
&\quad-\sum_{r=1}^{k-1}(x-1)yx^{k+1-r}(P^k_{r,k+1}+\sum_{j'=r+1}^{k}\alpha P^k_{r,j'})\\
&\quad-xy(x-1)P^k_{k,k+1}+P^k_{k+1,j}+\sum_{j'=k+2}^{j-1}\alpha P^k_{k+1,j'}. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

我们用 A 到 G 表示式 (22) 中出现的项，它们可表示如下（对项 B中的求和重新排列后）：

$$A=\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{s=r+1}^{k}(x-1)^2x^{s-r}yP^k_{r,s}$$

$$B=\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{j'=r+1}^{k-1}\alpha x^{j'+1-r}(1-x^{k-j'})(1-x)yP^k_{r,j'}$$

$$C=-\sum_{r=1}^{k-1}(x-1)yx^{k+1-r}P^k_{r,k+1}$$

$$D=-\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{j'=r+1}^{k}\alpha(x-1)yx^{k+1-r}P^k_{r,j'}$$

$$E=-xy(x-1)P^k_{k,k+1}$$

$$F=P^k_{k+1,j}$$

$$G=\sum_{j'=k+2}^{j-1}\alpha P^k_{k+1,j'}.$$

现在，回顾 $\alpha=1-x^{-1}$，让我们比较方程 (21) 和 (22) 中的各项，

- $P^k_{k+1,\ j}$ 在 (21) 中的系数为 1，并且在 (22) 中只出现在项 F 中，且系数相同；
- $P^k_{r,\ k+1}$ 与 $1\le r\le k-1$ 一起，在 (21) 中出现时的系数为 $-\alpha x^{k-r+2}y$，并且在 (22) 中只出现在项C 中，系数相同；
- $P^k_{k,\ k+1}$ 在 (21) 中的系数为 $-\alpha x^2y$，并且在 (22) 中只出现在项 E 中，且系数相同；
- $P^k_{k+1,\ s}$ 与 $s<j$ 一起，在 (21) 中出现时的系数为 α，并且在 (22) 中只出现在项 G 中，系数相同。

这就涵盖了式 (21) 中出现的所有项。接下来只需验证式 (22) 中其余各项均相互抵消。在这种情况下只有 $P^k_{r,\ s}$ 与 $r\le k-1, s\le k$，它出现在项 A, B 和 C中。容易验证，系数之和确实为零。

□

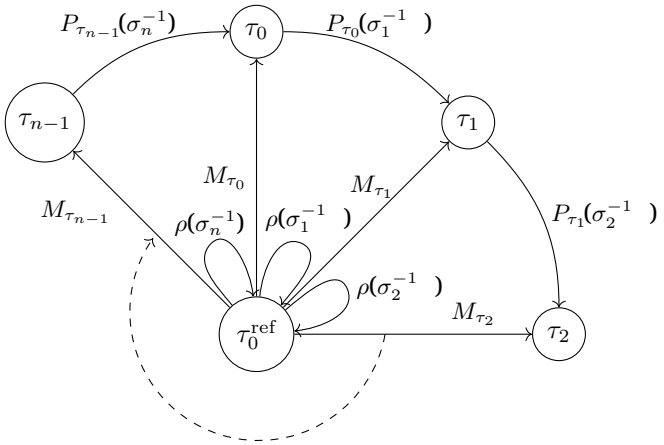
注 4.6. 将矩阵写成(17) 中的形式颇为耐人寻味。若能了解这一公式在多大程度上可以推广到所有稳定性条件，并更深入地理解计数中的系数与态射空间的维数之间的关系，将会很有意思。显式计算表明，这些公式一般并不直接成立。

看来，引理 4.5 中的公式仅在 α 的两个取值下才能给出辫群的表示——一个是引理 4.5 中的取值，另一个是 $\alpha=0$，如下文所述。这个版本令人想起 Tong-Yang-Ma 表示 [TYM96]。

命题 4.7。 在引理 *4.5* 的公式 (17) 中将符号 α 替换为0，即可得到一个由广义置换矩阵给出的辫群表示。

证明。 在这个版本中，情况与 (15) 类似。我们可以省去对生成元取逆的步骤；这一步源于 LKB 表示与范畴作用之间不一致的约定。

(23)



矩阵 M_{τ_k} 只是单位矩阵，它们将基元素与其所范畴化的根对应起来。因此，现在我们省略下标 k，只写 $P_{i,j}$。这一选择决定了与生成元 σ_i 相关联的矩阵（目前还没有理由要求它们满足辫子关系）。进而，这也决定了与任意辫子 β相关联的矩阵；而且，由于我们还希望像陈述中那样要求 $M_{\beta\tau}$ 是置换矩阵，这就确定了基 $\mathbf{B}^{\beta\tau}$的选择。由于不同的辫子将 τ_0 映到同一个 τ 时，可能会要求选择不同的基，因此我们需要检查是否存在一个解。

回顾式（16）中基 $\{P_{i,j}\}$的显式表达式。按照式（15）应用生成元后，可以显式地计算出矩阵

(24)
$$\sigma_{k+1}^{-1}P_{i,j}=\begin{cases} tq^{-2}P_{k+1,k+2} & \text{if } i=k+1,\ j=k+2\\ P_{k+2,j} & \text{if } i=k+1,\ j>k+2\\ tq^{-1}P_{k+1,j} & \text{if } i=k+2\\ tq^{-1}P_{i,k+2} & \text{if } j=k+1\\ P_{i,k+1} & \text{if } i<k+1,\ j=k+2\\ P_{i,j} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意， σ_k 只有在 $i=k$或 $k+1$或 $j=k$或 $k+1$时，才会对基向量 $P_{i,\ j}$产生非平凡作用。在这些情况下，它所能做的只是交换 k和 $k+1$。因此，关于 $|r-s|>1$ 的交换关系 $\sigma_r\sigma_s=\sigma_s\sigma_r$ 显然成立。

对于辫子关系，考虑两个词 $\sigma_k^{-1}\sigma_{k+1}^{-1}\sigma_k^{-1}$ 和 $\sigma_{k+1}^{-1}\sigma_k^{-1}\sigma_{k+1}^{-1}$。它们都只会影响满足 i或 j的元素 $P_{i,j}$。让我们考虑所有情况

- 若 $i=k, j=k+1$: 两种情况下都得到 $t^2q^{-3}P_{k+1,k+2}$；
- 若 $i=k, j=k+2$: 两种情况下都得到 $t^2q^{-2}P_{k,k+2}$；
- 若 $i=k, j>k+2$: 两种情况下都得到 $P_{k+2,j}$；
- 若 $i=k+1, j=k+2$: 两种情况下都得到 $t^2q^{-3}P_{k,k+1}$；
- 若 $i=k+1, j>k+2$: 两种情况下都得到 $tq^{-1}P_{k+1,j}$；
- 若 $i=k+2$: 则两种情况下均得到 $t^2q^{-2}P_{k,\ j}$；
- 若 $j=k$: 则两种情况下均得到 $t^2q^{-2}P_{i,\ k+2}$；
- 若 $j=k+1, i<k$: 则两种情况下均得到 $tq^{-1}P_{i,\ k+1}$；
- 若 $j=k+2, i<k$: 则两种情况下均得到 $P_{i,\ k}$。

这就穷尽了所有需要检验的情况。

现在，w 我们考虑基的选择是否唯一。设 β_1 和 β_2 满足 at $\beta_1\tau_0$ 和 $\beta_2\tau_0$ 在 $\widetilde{T}$中有相同的代表元。这意味着，对于某个 l，有 $\beta_1=\beta_2\gamma^l$。

固定 τ的一个任意基$\mathbf{b}$，并考虑 C_1 （分别为 C_2）：所选基与 β_1 （分别为 β_2）所指定的基之间的基变换矩阵。由此可得

$$C_1P_{\tau_0}(\beta)=\rho(\beta_1),\ C_2P_{\tau}(\beta_2)=\rho(\beta_2).$$

上文中的矩阵 P 是相对于所选基 $\mathbf{b}$ 计算的。我们希望

$$C_1=C_2\Leftrightarrow\rho(\beta_1)P_{\tau_0}(\beta_1)^{-1}P_{\tau_0}(\beta_2)\rho(\beta_2)^{-1}=\mathrm{Id}.$$

这等价于

$$P_{\tau_0}(\gamma^k) = \rho(\gamma^k),$$

这由我们的定义可得。

□

References

[BDL20] A. Bapat、A. Deopurkar 和 A. M. Licata, *A Thurston compactification of the space of stability conditions*, arXiv:2011.07908。[BDL23] , *Spherical objects and stability conditions on 2-Calabi–Yau quiver categories*, 《数学杂志》303（2023），第 1 期，13。[BDL25] , *A sphere of spherical objects*, https://arxiv.org/2509.13912。[Big99] S. Bigelow, *The Burau representation is not faithful for n= 5*, 《几何与拓扑》3（1999），第 1 期，397–404。[Big01] , *Braid groups are linear*, 《美国数学会杂志》14（2001），第 2 期，471–486。[Bri07] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, 《数学年刊》（2007），317–345。[BT11] C. Brav 和 H. Thomas, *Braid groups and Kleinian singularities* **351** 2011 4, , 《数学年刊》（），第 – 期。[Bur35] W. Burau, *Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, 《汉堡大学数学研讨会论文集》11（1935），第 1 期，179–186。[DK18] T. Dyckerhoff 和 M. Kapranov, *Triangulated surfaces in triangulated categories*, 《欧洲数学会杂志》20（2018），第 6 期，1473–1524。[GM13] S. I Gelfand 和 Y. I Manin, *Methods of homological algebra*, Springer科学与商业媒体，2013。[Hen22] E. X. C. Heng, *Categorification and dynamics in generalised braid groups*, 博士论文，澳大利亚国立大学（澳大利亚），2022。[HL24] E. Heng 和 A. M. Licata, *Stability conditions and Artin–Tits groups*, arXiv:2412.15919。[Koh12] T. Kohno, *Quantum and homological representations of braid groups*, 《构形空间：几何、组合学与拓扑》，Springer，2012，第 355–372 页。[Kra02] D. Krammer, *Braid groups are linear*, 《数学年刊》（2002），131–156。[KS02] M. Khovanov 和 P. Seidel, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions*, 《美国数学会杂志》15（2002），第 1 期，203–271。[Law90] R.J. Lawrence, *A universal link invariant*, 《数学与粒子物理学的交汇》（牛津，1988），应用数学研究所会议丛书新系列，第 24 卷，牛津大学出版社，纽约，1990，第 151–156 页。[LP93] D. D Long 和 M. Paton, *The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$* **32** 1993 2, , 《拓扑学》（），第 – 期。[LQ21] A. Licata 和 H. Queffelec, *Braid groups of type ADE, Garside monoids, and the categorified root lattice*, 《高等师范学校科学年刊》（2021）。[LTV22] A. Lacabanne、D. Tubbenhauer 和 P. Vaz, *Verma Howe duality and LKB representations*, arXiv:2207.09124。[Mar22] J. Martel, *A homological model for $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ Verma modules and their braid representations*, 《几何与拓扑》26（2022），第 3 期，1225–1289。[Moo91] J. A. Moody, *The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n*, 《美国数学会通报》25（1991），第 2 期。[MP69] W. Magnus 和 A. Peluso, *On a theorem of VI Arnol'd*, 《纯粹与应用数学通讯》22（1969），第 5 期，683–692。[MS17] E. Macrì 和 B. Schmidt, *Lectures on Bridgeland stability*, 第 139–211 页，Springer国际出版，查姆，2017。[NP19] H. Nakaoka 和 Y. Palu, *Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures*, 《拓扑、几何与微分范畴笔记》60（2019），第 2 期，117–193。[Pal17] Y. Palu, *Some applications of extriangulated categories*, 阿贝尔研讨会，Springer，2017，第 217–254 页。[Par02] L. Paris, *Artin monoids inject in their groups*, 《瑞士数学评论》77（2002），609–637。[PP02] L. Paoluzzi 和 L. Paris, *A note on the Lawrence–Krammer–Bigelow representation*, 《代数与几何拓扑》2（2002），第 1 期，499–518。[PPPP23] A. Padrol, Y. Palu, V. Pilaud 和 P.-G. Plamondon, *Associahedra for finite-type cluster algebras and minimal relations between g-vectors* **127** 2023 3, 513 588 , 《伦敦数学会会刊》（），第 – 期。[TYM96] D.-M. Tong、S.-D. Yang 和 Z.-Q. Ma, *A new class of representations of braid groups*, 《理论物理通讯》26（1996），第 4 期，483。[WWZZ25] L. Wang、J. Wei、H. Zhang 和 P. Zhou, *Extriangulated length categories: torsion classes and τ-tilting theory*, arXiv:2502.07367。

France-Australia Mathematical Sciences and Interactions ANU - CNRS International Research Labora-tory, Australia*Email address*: hoel.queffelec@cnrs.fr

Université Bourgogne Europe, CNRS, IMB UMR 5584, 21000 Dijon, France
Email address: Anne-Laure.Thiel@ube.fr

Univ Paris Cité, IMJ-PRG, Univ Paris Sorbonne, UMR 7586 CNRS, F-75013, Paris, France*Email address*: wagner@imj-prg.fr