特殊纤　　汉克尔矩阵坐标截面的纤维　　S

K. ANSALDI、D. LIRA、M. MOSTAFAZADEHFARD、K. SALONI 和 L.SECCIA

arXiv:2512.16165v1 [math.AC] 18 Dec 2025

ABSTRACT. 我们研究与 Hankel 行列式理想的某些坐标截面相关联的特殊纤维。我们明确描述了它们的定义方程，并指出这些方程具有自然的矩阵结构。特别地，我们证明这些方程是 Cohen–Macaulay 的，而且一般而言，不能仅由二次式和三次式生成。相反，我们证明，其极小生成元的次数会随着所涉及子式的大小而增加。在一种情形下，我们还证明 Rees代数是纤维型的。此外，我们计算了这些特殊纤维的代数不变量。我们的结果部分建立在 Ramkumar 和 Sammartano 关于 2-行列式理想的研究之上，并对其加以拓展，同时回答了 Cunha、Mostafazadehfard、Ramos 和 Simis 在早期工作中提出的一些问题。

1. INTRODUCTION

T本文中，一般 *Hankel* 矩阵指形如以下形式的矩阵

$$\mathcal{H}_{l,m} \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_l & x_{l+1} & \cdots & x_{l+m-1} \end{pmatrix},$$

其中 x_1，……，x_{l+m-1} 是无限域 $\mathbb{K}$ 上特征为零的多个不定元。当 $l = m$时，矩阵 $\mathcal{H}_{l,\ l}$ 是一个一般对称矩阵，其元素沿每条反对角线均为常数。

所谓*Hankel*行列式理想，是指标准分次多项式环 $I_t(\mathcal{H}$中的理想$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{l+m-1}]$，它由 t阶子式 $\mathcal{H}$生成。Hankel行列式理想因其与代数几何的深刻联系而受到广泛研究。由这些理想定义的典型几何对象是有理正规滚曲面及其割线簇；此外，它们还应用于离散几何、图论、表示论和统计学（例如参见 [AFS16、Rai13]）。

在交换代数中，得益于 [BV88、Con98、Eis88]的研究，这些理想已得到充分理解。它们定义不可约簇，其同调性质和代数不变量也已得到确定。文献 [CMRS22、CMSV18、Sec21]进一步分析了 Hankel 行列式理想的结构与奇点。大量研究致力于探讨其爆破代数。确定这些代数的定义方程是代数与几何中的经典难题；这等价于求出射影空间中图和有理映射像的隐式方程，因此称为隐式化问题。在 Hankel 行列式理想的框架下，Conca、Herzog 和 Valla 首先解决了这一问题 [CHV96]，针对的是平衡的正规滚曲面；随后 Sammartano [Sam20] 将其推广到任意有理正规滚曲面。在这些结果的基础上，文献 [RS24]还计算了任意 2-行列式理想的爆破代数的定义方程。而有理正规滚曲面的割线簇情形则在文献 [Din11、LS23]中得到研究。

本文着重研究 Hankel行列式理想的坐标截面的爆破代数，这些坐标截面是通过将最后 r 个 $\mathcal{H}$ 的元素设为零得到的（详情见第 2.1节）。具体而言，我们考虑次极大子式。其代数几何性质最早由 [CMRS22] 研究；鉴于其几何意义以及与极映射的联系，这些子式也自然引人关注，详见 [CRS08]。

2020年数学主题分类：13A30, 14M12 13H15 13D02。关键词：特殊纤维、Rees代数、极映射、Hankel矩阵、行列式理想、Koszul、正则性、重数、理想的约化、 a-不变量。

我们分析以下两种极端退化：

$$\mathcal{H}[n-1] \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & 0 \\ x_{n+1} & x_{n+2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{H}[1] \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} & x_{2n} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 $\mathcal{H}[n-1]$ 代表最退化的情形，此时将最多数量的元素设为零（也就是说，在不使任何次极大子式消失的前提下，能够设为零的变量数量最多）。相比之下，矩阵 $\mathcal{H}[1]$ 对应最不退化的情形，其中右下角恰好有一个零。

我们的主要结果可概括如下：

主定理。 (1) 令 $I = I_n(\mathcal{H}[n-1])$ 为 $\mathcal{H}[n-1]$ 的次极大子式所生成的理想：

- 特殊纤维环 $\mathcal{F}(I)$ 是 *Cohen–Macaulay* 的，其定义理想由 *Pl¨ucker* 关系和拉普拉斯关系 (9)生成。这些关系都是二次关系，并构成特殊纤维环 $\mathcal{F}(I)$定义理想的 *Gröbner* 基。特别地，特殊纤维是 *Koszul* 的。

- 令 $J[n-1]$ 为$\det \mathcal{H}$ 的梯度理想的坐标截面。与 $J[n-1]$ 相关联的有理映射$\Theta_{J[n-1]}$是到其像上的双有理映射。因此，我们推出 $J[n-1]$ 的特殊纤维的重数。

(2) 令 $I = I_n(\mathcal{H}[1])$ 为 $\mathcal{H}[1]$ 的次极大子式理想：

- 特殊纤维环 $\mathcal{F}(I)$ 是一个 *Gorenstein*环，其定义理想由 *Pl¨ucker* 关系以及恰好一个额外的次数为 n 的关系极小生成，该额外关系源自大小为 n^2 (16) 的方阵行列式为零。

- *Rees*代数 $\mathcal{R}(I)$ 是纤维型的；因此，其定义方程由定义特殊纤维的关系以及定义对称代数的 *Eagon-Northcott* 关系给出。此外， I 具有线性幂，尽管 *Rees*代数不是 *Koszul*。

这些结果部分回答了 [CMRS22, 问题 29]中提出的一些问题。在这两种情况下，特殊纤维都是 Cohen–Macaulay；在第二种情况下，它甚至是 Gorenstein，且该理想为纤维型。然而，我们证明，一般而言，特殊纤维并不像 [CMRS22] 中的猜想那样由二次式和三次式极小生成。相反，极小生成元的次数取决于零的个数和矩阵的大小。

值得强调的是，我们发现的所有关系都具有优美的矩阵结构；也就是说，它们可以通过广义拉普拉斯展开，由某些行列式的消失推导出来。这一点尤其重要，因为非极大子式之间的关系一向难以描述，特别是当出现超出 Pl¨ucker 二次式的高次数关系时，正如我们的情形。

请注意，本文考察的所有理想的余维均为 3，但都不是 Gorenstein。关于余维 3 Gorenstein理想的爆破代数的结果，见 [KPU17、Mor96]。特别地，它们都是 n-行列式理想，意义与 [RS24] 中的定义一致；也就是说，它们是具有预期余维的 n-阶子式理想。因此，我们期望本文的结果能够为 [RS24] 中的结果从 2-行列式理想推广到余维为 3 的 n-行列式理想提供一些启示。在这一背景下，矩阵 $H[n-1]$（由 $\mathcal{H}[n-1]$ 将其元素重新排列为一个矩形 $n \times (n+2)$ 矩阵得到；见公式（1））可被视为高维类比：在 [RS24] 中，为构造 2-行列式理想的克罗内克–魏尔斯特拉斯（KW）标准形而使用的、特征值为 0 的若尔当块。在证明主定理 (1) 时，我们实际上证明了 $I_n(\mathcal{H}[n-1])$ 的特殊纤维与以下理想的二阶子式理想的特殊纤维同构

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+2} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+2} & 0 \end{pmatrix}.$$

按照 [RS24], 的记号，这是 $\mathscr{H}_{n+1,0}$ 中的一个理想；也就是说，这是一个余维为 $n+1$ 的 2-行列式理想，其 KW 标准形中没有卷曲块，且恰有一个特征值为 0 的若尔当块。

然而，我们强调， $n > 2$ 的情形更为微妙，因为对于 n-行列式理想，目前尚无 KW 标准形的类似结果，而且这种分类很可能并不存在。

最后，我们强调主定理 (1) 中的双有理性结果尤为重要，因为它给出了梯度理想的坐标截面的特殊纤维的重数。这带来了对具有最大可能重数的约化理想的一种新诠释，我们将其称为极大约化。这些理想同时满足两个性质：它们是 I 的约化理想，且与之关联的有理映射是双有理的。

论文提纲。下面简要介绍各节的内容。第2节旨在引入记号，并回顾全文将用到的一些定义和已知结果。第3节聚焦于最退化的情形，即对应于矩阵 $\mathcal{H}[n-1]$ 的情形。为计算 $I_n(\mathcal{H}[n-1])$ 的特殊纤维的定义方程，我们将问题归约为 Ramkumar 和 Sammartano 在 [RS24] （定理 3.9）中研究的 2-行列式理想情形。受格拉斯曼流形经典对偶性质的启发，我们利用对应格拉斯曼流形的子式偏序集之间的同构所诱导的 $\mathbb{K}$-代数同构 (10) 完成这一归约（见注释 3.5）。由此我们推得，特殊纤维有一个由二次式生成的 Gr¨obner 基，因此它是 Koszul 的（定理 3.12）。最后，我们研究与理想 $I_n(H[n-1])$ 的一个特殊约化相关联的映射的双有理性（第3.1节）。第4节讨论相反的情形，即恰好一个变量被设为零。我们证明，此时特殊纤维是 Gorenstein 的，由 Pl¨ucker 关系以及恰好一个额外的次数为 n 的关系生成；该关系源于变量 x_i 中一个 n^2-子式的消失（定理 4.7）。此外，我们证明该理想具有线性幂且属于纤维型，因此可以显式描述 Rees代数的方程（命题 4.11）。除上述结果外，我们还计算了两种情形下的代数不变量，例如正则性、重数、约化数和 a-不变量（推论 3.11、3.13、4.9、4.10）。

2. Preliminaries and notations

2.1.**Hankel矩阵的坐标截面**。本文中，我们考虑如下形式的一般方形*Hankel*矩阵

$$\mathcal{H}_{n+1,n+1} \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & \cdots & \cdots & x_{n+2} \\ x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & x_{n+3} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} & \cdots & x_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

通过坐标截面 $\mathcal{H}$ ，我们指的是通过 $\mathcal{H}$ 将某些变量设为零后得到的矩阵。从几何上看，这对应于对环境空间取坐标超平面截面，因此这一术语由此而来。受 [CMRS22], 的启发，本文考虑最后 r 个变量上的坐标截面，其中 $r = 0$，1，……，$n-1$。我们将得到的矩阵记为 $\mathcal{H}[r]$:

$$\mathcal{H}[1] \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} & x_{2n} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}[2] \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_n & \dots & x_{2n-3} & x_{2n-2} & x_{2n-1} \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-2} & x_{2n-1} & 0 \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots, \mathcal{H}[n-1] \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & 0 & 0 \\ x_{n+1} & x_{n+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

采用这一记号，我们可将一般情形 $\mathcal{H}$ 还原为 $\mathcal{H}[0]$。对于给定的 r， $\mathcal{H}[r]$ 的基环是多项式环 $S_r = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{2n+1-r}]$。不过，若不会引起混淆，在讨论中固定 r 时，我们将此环简记为 S。

我们将研究由 $\mathcal{H}[r]$ 的次极大子式生成的理想的爆破代数。按照行列式理想文献中的惯例，我们将其记为 $I_n(\mathcal{H}[r])$。

Hankel矩阵的一项关键结构性质，使我们能够将对次极大子式的研究简化为对极大子式的研究。Gruson–Peskine 最先在一般Hankel矩阵中观察到了这一点（[GP82]）。然而，对于 $\mathcal{H}$ 的坐标截面，这一结论同样成立（参见 [CMRS22，引理 1。4]其中给出了明确表述）。

命题2.1 ([CMRS22，GP82])。 $I_n(\mathcal{H}_{n+1,\ n+1}[r]) = I_n(\mathcal{H}_{n,\ n+2}[r])$，对所有 $r = 1$，……， $n-1$。

由于通常处理极大子式更为方便，从现在起，我们将矩形的 $n \times (n+2)$ 退化Hankel矩阵记为 $H[r]$，即

$$H[r] := \mathcal{H}_{n,n+2}[r] = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_{n+2-r} & \cdots & \cdots & x_{n+2} \\ x_2 & \ldots & x_{n+3-r} & \cdots & \cdots & x_{n+3} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ x_{n-r} & \ldots & x_{2n+2-r} & \cdots & \cdots & x_{2n+1-r} \\ \vdots & & \vdots & & \iddots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \iddots & & \vdots \\ x_n & \ldots & x_{2n+1-r} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

众所周知，理想 $I_t(\mathcal{H}_{n+1,\ n+1})$ 是素理想，且对任意 $2n-2t+3$，其预期余维为 $1 \le t \le n+1$。特别地，当 $t = n$ 时，我们有 $\mathrm{ht}(I_n(\mathcal{H}_{n+1,\ n+1})) = 3$。相应坐标截面也具有相同的性质；详情请参阅 [Eis88，命题 4。3]以及 [CMRS22，命题 2。4]。特别地， $I_n(\mathcal{H}[r])$ 定义了一个 Cohen–Macaulay环。

2.2. 爆破代数。 我们的研究重点是考察与理想$I_n(H[r])$相关的爆破代数，其中 $1 \le r \le n-1$。对于 $0 \le r \le n-1$， $I_n(H[r])$的*Rees*代数和特殊纤维环分别记作 $\mathcal{R}[r]$ 和 $\mathcal{F}[r]$，其定义如下：

$$\mathcal{R}[r] := S[I_n(H[r])t] = \bigoplus_{a \ge 0} (I_n(H[r]))^a t^a \subset S[t]$$

$$\mathcal{F}[r] := \mathcal{R}[r] \otimes_S \mathbb{K} \cong \mathbb{K}[I_n(H[r])t].$$

由于 $I_n(H[r])$ 的所有生成元都是次数相同的齐次元素，因此 $\mathcal{F}[r] \cong \mathbb{K}[I_n(H[r])]$.这两个代数都可以表示为多项式环的商

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} := S[T_{\mathbf{i}} |\ \mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_n\} \text{ is an } n\text{-subset of } \{1, \ldots, n+2\}],$$

and

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} := \mathbb{K}[T_{\mathbf{i}} |\ \mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_n\} \text{ is an } n\text{-subset of } \{1, \ldots, n+2\}].$$

按照惯例，指标视为相差一个置换；例如， $T_{\{1,3,4\}} = T_{\{3,4,1\}} = T_{\{4,1,3\}}$。考虑以下满同态

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{R}[r] & \text{and} & \psi : \mathcal{P}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}[r] \\ T_{\mathbf{i}} \longmapsto [\mathbf{i}]\, t & & T_{\mathbf{i}} \longmapsto [\mathbf{i}] \end{array} \tag{2}$$

其中 $[\mathbf{i}]$ 表示对应于有序列集合 $\{i_1, \ldots, i_n\}$ 的极大子式。这些映射的核记为

$$\mathcal{J}[r] := \ker(\phi) \quad \text{and} \quad \mathcal{K}[r] := \ker(\psi),$$

分别称为 Rees代数 $\mathcal{R}[r]$ 和特殊纤维环 $\mathcal{F}[r]$的定义或表示理想。

Rees代数 $\mathcal{R}[r]$ 具有一个自然的双重分次，其定义如下：

$$\deg(x_i) = (1,0) \qquad \deg(T_i) = (0,1) \qquad \deg(t) = (-n,1).$$

在此赋值下， $\mathbb{K}$-代数同态 ϕ和 ψ 都是零次齐次的，特殊纤维环 $\mathcal{F}[r]$是由双次数 $(0, *)$ 组成的齐次子环 $\mathcal{F}[r] \subset \mathcal{R}[r]$。 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ 中的双次数 (k, l) 定义如下：第一分量 k 记录 S中的多项式次数，第二分量 l 对应于变量 T_i 在 S上的次数，或者等价地，对应于变量 t的幂次。

理想 I 的特殊纤维环维数称为 解析扩张度 I，记作 $\ell(I) = \dim(\mathcal{F}(I))$。这一不变量与约化理想和双有理性密切相关（参见第 2.3 节和第 3.1节）。

命题 2.2。 [Vas05，命题 1。89] 设 I 是标准分次多项式环S中的一个理想。以下不等式成立

$$\operatorname{ht}(I) \leq \ell(I) \leq \min\{\mu(I), \dim(S)\},$$

其中 μ（I）是最小 生成元个数。若 I 具有最大解析展度，

$$\ell(I) = \min\{\mu(I), \dim(S)\}.$$

注 2.3. 根据 [CMRS22，命题 2.8] 本文考虑的所有理想都具有最大解析展度，也就是说， ℓ（I_n（$H[r]$）$=$ 维数 $S_r = 2n - r + 1$。

求出 $\mathcal{F}[r]$ 和 $\mathcal{R}[r]$ 的定义方程是一项艰巨的任务，但这对于研究它们的同调性质和几何性质至关重要（例如，参见 [BCV15]，[CHV96]，[Sam20]）。特别值得关注的是这样一种情形：Rees代数由特殊纤维的方程与对称代数的方程共同定义。

定义 2.4. 若理想 $I_n(H[r])$满足： $\mathcal{J}[r]$ 由双次数为 $(0, *)$ 和 $(*, 1)$ 的元素生成，则称其为纤维型。等价地， $\mathcal{R}[r]$ 的定义方程由 $\mathcal{F}[r]$ 的定义方程以及由 $I_n(H[r])$的第一关系导出的方程组成。

2.3. **理想的约化**。 本文无意回顾理想约化理论；感兴趣的读者可直接参阅 [HS06]。不过，为了阐述清楚，我们想先介绍几个概念。

理想 I 的一个约化，粗略地说，是一个较小的理想，它控制着 I 的幂的渐近行为。

定义 2.5。 [HS06，定义 1.2.1 和 8.3。1] 设 I 是环 R中的一个理想。理想 $J \subset I$称为 的约化 I，如果 $JI^k = I^{k+1}$ 对某个整数 k成立。 J 的约化 I 称为 极小约化，如果它关于包含关系是极小的，也就是说，它不真包含 I的另一个约化。

现在我们回顾理想 I 的绝对约化数这一概念。它是一个代数不变量，用来衡量一个约化距离生成 I 的幂还有多远。

定义 2.6. [HS06，定义 8.2。3] 设 J 是 I的一个约化。相对于， I 的 J约化数是满足以下条件的最小整数 k：$JI^k = I^{k+1}$。记为 $\mathrm{r}_J(I)$。

其绝对约化数为 I 是

$$\min\{\mathrm{r}_J(I) : J \text{ is a minimal reduction of } I\}.$$

一般而言，即使在诺特环上，理想也不一定存在极小约化。然而，在诺特局部环或标准分次多项式环上（如本文所讨论的情形），极小约化总是存在的。虽然一般而言极小约化并不唯一，但在较弱的假设下，任何极小约化的生成元个数都相同，且等于该理想的解析扩张度。

命题 2.7。 [HS06，命题 8.3。7] 若 S 是剩余域为无限域的标准分次多项式环，且 J 是 I的约化，则 $\mu(J) = \ell(I)$ 当且仅当 J 是 I的极小约化。5

2.4. Eagon-Northcott 与 Pl¨ucker 关系。 本节最后回顾极大子式之间的经典关系，这些关系将在后文中用到，因为它们自然地出现在 $I_n(H[r])$ 的爆破代数的定义方程中。

2.4.1. *Eagon-Northcott 关系。* 理想 $I_n(H[r])$ 是具有预期余维的完美理想，并由一个线性项矩阵的极大子式生成。因此，它具有由 Eagon–Northcott 复形给出的线性极小自由分解。此处，我们仅回顾该分解产生的首批线性 syzygy，更多细节请参阅 [BV88，第 2.C 章] 。

令 i_1、.....、$i_{n+1} \in [n+2]$ 为任意递增的列指标，并令 $k \in [n]$。考虑 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} C_{i_1} & C_{i_2} & \dots & C_{i_{n+1}} \\ x_{i_1+k-1} & x_{i_2+k-1} & \dots & x_{i_{n+1}+k-1} \end{pmatrix},$$

其中 C_{i_j} 表示 $H[r]$ 的第 i_j 列，并且当 $i_j + k - 1 > 2n + 1 - r$ 时，我们令 $x_{i_j+k-1} = 0$。换言之，$\begin{pmatrix} C_{i_1} & C_{i_2} & \dots & C_{i_{n+1}} \end{pmatrix}$ 的第 k 行重复出现。由于该矩阵的行列式为零，沿最后一行展开可得线性 syzygy

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{i_j+k-1}[i_1 \dots \widehat{i_j} \dots i_{n+1}] = 0,$$

其中 ^表示省略。因此， $I_n(H[r])$ 的对称代数由以下关系生成：

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{i_j+k-1} T_{i_1 \dots \widehat{i_j} \dots i_{n+1}}. \tag{3}$$

2.4.2. Pl¨ucker 关系。 设 $\mathrm{Gr}(n, n+2)$ 表示基域 $\mathbb{K}$ 上一个（$n+2$）维向量空间的 n 维子空间所构成的格拉斯曼流形。Pl¨ucker 嵌入将 $\mathrm{Gr}(n, n+2)$ 实现为 $\mathbb{P}\binom{n+2}{n}^{-1} = \mathrm{Proj}\,\mathbb{K}[T_{\mathbf{i}} \mid |\mathbf{i}| = n]$ 的一个子簇。Pl¨ucker 理想记为 $\mathscr{P}_{n,n+2}$，它是 $[\mathbf{i}]$ 之间代数关系所构成的理想。等价地，它编码了一个 $n \times (n+2)$ 一般矩阵的极大子式之间的所有关系。众所周知，Pl¨ucker 理想是一个由称为 Pl¨ucker 关系的二次关系生成的素齐次理想。对于任意指标子集 $\mathbf{I}$、$\mathbf{J}$，$\subset [n+2]$ 使得 $|\mathbf{I}| = n-1$ 和 $|\mathbf{J}| = n+1$，相应的 Pl¨ucker 关系是众所周知的交错和

$$\sum_{\lambda=1}^{n+1} (-1)^{\lambda} [i_1, \dots, i_{n-1}, j_\lambda][j_1, \dots, \hat{j_\lambda}, \dots, j_{n+1}] = 0, \tag{4}$$

其中 $\hat{}$ 表示省略。注意，若 $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J}$，则上述关系是平凡的，因为求和中的每一项要么为零，要么与另一项相抵消（两者符号相反）。因此，唯一非平凡的关系来自形如 $\mathbf{I} = \{i_1, \dots, i_{n-2}, a\}$ 和 $\mathbf{J} = \{i_1, \dots, i_{n-2}, b, c, d\}$且满足 $a < b < c < d$的子集。相应的极大子式上的非平凡 Pl¨ucker 关系为

$$\begin{aligned} [i_1, \dots, i_{n-2}, a, b][i_1, \dots, i_{n-2}, c, d] - [i_1, \dots, i_{n-2}, a, c][i_1, \dots, i_{n-2}, b, d] + \\ + [i_1, \dots, i_{n-2}, a, d][i_1, \dots, i_{n-2}, b, c] = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

注意，每个关系（5）恰好包含三项。

注2.8. Pl¨ucker 理想 $\mathscr{P}_{n,n+2}$ 由所有如下形式的二次式生成：

$$\mathrm{PLU}_{\mathbf{I}} = T_{\mathbf{I}\cup\{a,b\}} T_{\mathbf{I}\cup\{c,d\}} - T_{\mathbf{I}\cup\{a,c\}} T_{\mathbf{I}\cup\{b,d\}} + T_{\mathbf{I}\cup\{a,d\}} T_{\mathbf{I}\cup\{b,c\}}, \tag{6}$$

其中 $\mathbf{I} \subset [n+2]$ with $|\mathbf{I}| = n-2$ and a， b， c， d 是其余互不相同的指标，且 $a < b < c < d$。Pl¨ucker 关系中的每一项都是两个变量 $T_{\mathbf{i}}$ 和 $T_{\mathbf{j}}$ 的乘积，指标集 $\mathbf{i}$ 和$\mathbf{j}$ 恰好共有 $n-2$ 个元素。

注 2.9。 根据 [CMRS22，命题 4。1] 的特殊纤维 $I_n(\mathcal{H})$ 同构于同尺寸一般矩阵的极大子式理想的特殊纤维，而众所周知，后者同构于格拉斯曼流形的坐标环。因此，Pl¨ucker 关系生成了 $\mathcal{K}[0]$ 的特殊纤维的定义理想 $I_n(\mathcal{H})$。当我们使 $\mathcal{H}$退化时，可能会出现次数更高的方程。不过，我们仍有以下包含链：

$$\mathscr{P}_{n,n+2} = \mathcal{K}[0] \subseteq \mathcal{K}[1] \subseteq \mathcal{K}[2] \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{K}[n-1]. \tag{7}$$

3. Degeneration $r = n-1$

本节研究极端退化情形：Hankel矩阵中包含模式所允许的最多零项，也就是当 $r = n-1$ and

$$H[n-1] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \ldots & x_{n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & 0 & 0 \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们先确定特殊纤维 $\mathcal{F}[n-1]$ 的定义方程，即理想 $\mathcal{K}[n-1]$ 的一组生成元。

根据备注 2.9，Pl¨ucker 理想包含于 $\mathcal{K}[n-1]$。然而在这种情况下，仅靠 Pl¨ucker 关系并不能生成 $\mathcal{K}[n-1]$；还会出现额外关系。尽管如此，这些额外关系仍然是二次的，并具有矩阵结构。为了准确描述它们，我们引入以下记号。

在矩阵 $H[n-1]$ 中，令 C_i 表示第 i 列。我们可以写成

$$H[n-1] = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} & C_{n+2} \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\} \in \binom{[n+2]}{n-2}$，其中 $\binom{[N]}{c}$ 表示 $[N]$ 的所有基数为 c 的子集所构成的集合。我们定义

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}} := \left(\begin{array}{ccccc|cccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_{n+1} & C_{n+2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_2 & C_3 & \ldots & C_{n+2} & 0 & C_{a_1} & C_{a_2} & \ldots & C_{a_{n-2}} \end{array}\right).$$

因此， $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$ 是一个 $2n \times 2n$ 方阵，分为两个大小均为 $n \times 2n$ 的块。我们将上方的块记作 $\mathcal{L}^{\mathrm{T},\,\mathbf{a}}$，下方的块记作 $\mathcal{L}^{\mathrm{B},\,\mathbf{a}}$。当$\mathbf{a}$ 的含义由上下文明确时，我们就简写为$\mathcal{L}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathcal{L}^{\mathrm{B}}$。

注 3.1. 我们注意到，$\det(\mathcal{L}_{\mathbf{a}}) = 0$. 事实上，执行以下行变换后

$$-R_k + R_{n+k-1} \to R_{n+k-1} \quad \text{for} \quad k = 2, \ldots, n$$

下方的块变为

$$\mathcal{L}^{\mathrm{B}} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & C_{a_1} & C_{a_2} & \ldots & C_{a_{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ x_{n+1} & x_{n+2} & 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array}\right).$$

因此， $\mathcal{L}^{\mathrm{B}}$ 的所有 n阶子式都为零，故整个行列式为零。

现在，我们利用互补子式的广义拉普拉斯展开，得到一个关于n阶子式的关系式。$\det(\mathcal{L}_{\mathbf{a}})$可沿最后 n 行展开为

$$\det(\mathcal{L}_{\mathbf{a}}) = \sum_{\Lambda \in \binom{[2n]}{n}} (-1)^{\sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda + \frac{n(3n+1)}{2}} L^{\mathrm{B}}_{\Lambda} L^{\mathrm{T}}_{\Lambda^c}, \tag{8}$$

其中， L^{B}_{Λ} 表示底部块中由索引为 Λ 的列确定的 n 子式，而 $L^{\mathrm{T}}_{\Lambda^c}$表示顶部块中由索引为 $\Lambda^c = [n+2]\backslash\Lambda$ 的列确定的其互补 n 子式。

符号由用于得到子式 L^{B}_{Λ} 的所有行和列所对应索引之和决定。行始终为 $n+1,\ \ldots,\ 2n$，列则由 Λ 确定。

根据矩阵的结构，下方块中的任意非零 n 阶子式必然包含列 $C_{\mathbf{a}} = \{C_{a_1}, \ldots, C_{a_{n-2}}\}$，以及另外两列，例如 C_i 和 C_j。事实上，如果下方块中的一个 n 阶子式未包含所有列 $C_{\mathbf{a}}$，那么它在上方块中的余子式就为零，因此不会在展开式中产生新的项。于是，我们总有

$$L^{\mathrm{B}}_{\Lambda} = \det(C_i, C_j, C_{a_1}, \ldots, C_{a_{n-2}}) \quad \text{and} \quad L^{\mathrm{T}}_{\Lambda^c} = \det(C_1 \ldots \widehat{C_{i-1}} \ldots \widehat{C_{j-1}} \ldots C_{n+2}),$$

其中 $\widehat{\ }$ 表示省略。此外，这些加项的符号仅取决于 i 和 j，并由下式给出

$$(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}+i+j-2+\frac{3(n-2)(n+1)}{2}} = (-1)^{i+j+1}.$$

这启发我们作出如下定义。

定义 3.2。 设$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\} \in \binom{[n+2]}{n-2}$ 是 $[n+2]$ 的一个子集，其基数为 $n-2$。令$B := \{2, \ldots, n+2\} \setminus \mathbf{a}$。我们将与$\mathbf{a}$ 对应的拉普拉斯关系 定义为多项式

$$\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}} := \sum_{\{i,j\} \subset B} \mathrm{sgn}(i,j)\ T_{\{i,j\} \cup \mathbf{a}} T_{[n+2] \setminus \{i-1, j-1\}} \ \in\ \mathbb{K}[T_{\mathbf{s}} \mid \mathbf{s} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset [n+2]], \tag{9}$$

其中 $\mathrm{sgn}(i,\ j) = (-1)^{i+j+1+\eta_i+\eta_j}$ 满足 $\eta_k := |\{\, a_s \in \mathbf{a} \mid a_s < k \,\}|$。等价地，$\eta_k$ 是$\mathbf{a}$ 中严格位于 k左侧的元素个数。

拉普拉斯关系符号中的修正项 $\eta_i + \eta_j$，补偿了将$\mathbf{a}$中由 i和 j 索引的列重新排序时所产生的符号变化。由于变量 $T_{\mathbf{i}}$ 在其指标集的置换下定义，因此必须包含此项，以确保每个子式的乘积都带有正确的符号。

因此可直接推出，拉普拉斯关系属于 $\mathcal{K}[n-1]$。

引理 3.3。 $\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}} \in \mathcal{K}[n-1]$ 对每个$\mathbf{a} \in \binom{[n+2]}{n-2}$均成立，也就是说，$\psi(\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}}) = 0$。

证明。 根据定义 3.2，我们有 $\psi(\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}}) = \det \mathcal{L}_{\mathbf{a}}$。结论由注记 3.1 得出。 □

例 3.4。 令 $n = 4$ 并固定一个 $= \{5, 6\} \in \binom{[6]}{2}$。与此选择相对应的 8×8 矩阵为一个

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}} = \left(\begin{array}{cccccc|cc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & 0 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & 0 & C_5 & C_6 \end{array}\right).$$

沿最后 4 行进行广义拉普拉斯展开，得到：

$$-[2456]^2 + [2356][3456] + [1456][3456],$$

相应的拉普拉斯关系为

$$\mathrm{LAP}_{5,6} = -T^2_{2456} + T_{2356}T_{3456} + T_{1456}T_{3456}.$$

现在我们证明，拉普拉斯关系与 Pl¨ucker 关系共同生成 $\mathcal{K}[n-1]$。为此，我们将证明 $\mathcal{K}[n-1]$ 同矩阵的二阶子式理想的特殊纤维同构

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+2} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+2} & 0 \end{pmatrix}.$$

后一个特殊纤维是 [RS24]中以更一般的方式研究的 2-行列式理想的特殊纤维的一种特殊情形。为此，受格拉斯曼流形经典对偶性质的启发 $Gr(n,\ n+2) \cong Gr(2,\ n+2)$，我们构造了一个 $\mathbb{K}$-代数同构

$$\varphi : \mathbb{K}[T_{\mathbf{i}} \mid \mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset [n+2]] \longrightarrow \mathbb{K}[T_{k_1,k_2} \mid \{k_1, k_2\} \subset [n+2]] \tag{10}$$

它保持了底层子式的偏序集结构。回顾一下，泛型 $n \times (n+2)$ 矩阵的极大子式集合 $\Pi_{n,\ n+2}$ 按以下关系构成偏序：

$$[i_1 \dots i_n] \preceq [j_1 \dots j_n] \Leftrightarrow i_k \leq j_k \ \text{ for all } k = 1, \dots, n.$$

φ 的构造如下。给定一个指标子集 $\mathbf{k} \in [N]$，用$\mathbf{k}^c := [N] \setminus \mathbf{k}$表示其补集，并用 $c(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^c$ 表示补映射。

令 σ 为对称群 $\mathfrak{S}_N$ 中关于由相邻对换 $(i\ i+1)$ 构成的生成集的最长元素；用单行记号表示为 $\sigma = (N\ N-1 \dots 1)$。我们定义

$$\varphi(T_{\mathbf{i}}) := T_{\sigma(\mathbf{i}^c)},$$

其中 $N = n+2$。容易验证，$\sigma \circ c = c \circ \sigma$，即 $\sigma(\mathbf{k}^c) = \sigma(\mathbf{k})^c$。此外，$c$ 和σ 都是对合，这意味着 $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ 和 $c \circ c = \mathrm{id}$。因此，$(\sigma \circ c)^{-1} = c \circ \sigma$，并且我们有$\varphi^{-1}(T_{\{i,j\}}) = T_{\sigma(\{i,j\}^c)}$。

注释 3.5. 复合映射 $\sigma \circ c$ 自然地在相应的极大子式偏序集上诱导出一个同构

$$\sigma \circ c : \Pi_{n,n+2} \longrightarrow \Pi_{2,n+2}.$$

事实上，c和 σ 都是双射且反序，因此它们的复合是双射且保序。换言之，φ 将相应偏序集中对应于同一元素的变量对应起来。

我们通过一个例子来说明这一同构。

Exam例 3.6. 考虑图 Π_4 中的两个极大子式偏序集6 和$\Pi_{2,6}$，见图 1 .

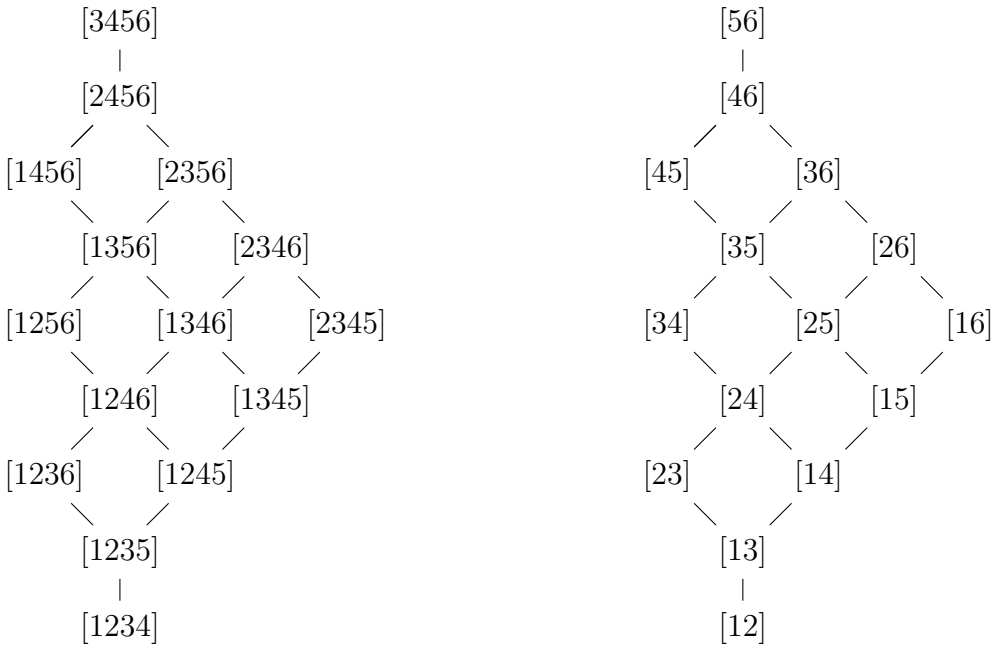

FIGURE 1. 极大子式的同构偏序集$\Pi_{4,\ 6}$和 $\Pi_{2,6}$

同构 φ 将表示子式的变量对应到相应偏序集中对应于同一元素的变量。例如，$\varphi(T_{1346}) = T_{25}$ 和 $\varphi(T_{1245}) = T_{14}$。

在引理 3.8 中，我们证明在 φ 下，拉普拉斯关系（9）和 $\mathbf{Gr}(n, n+2)$ 的普吕克关系分别双射映射到 [RS24] 中的拉普拉斯关系和 $\mathbf{Gr}(2, n+2)$ 的普吕克关系；这些像共同生成 $\mathcal{F}(I_2(\mathbf{L}))$ 的定义理想。

以下关于拉普拉斯关系（9）结构的观察将有助于证明这一结果。

注 3.7。 恰好有 $\binom{n+2}{n-2} = \binom{n+2}{4}$ 个拉普拉斯关系。每个关系中的加项数量取决于 $1 \in \mathbf{a}$ 是否成立。更确切地说：

- 如果 $1 \in \mathbf{a}$，那么 $|B| = 4$。因此，$\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}}$ 有 $\binom{4}{2} = 6$ 个加项。这样的方程有 $\binom{n+1}{n-3}$ 个。
- 如果 $1 \notin \mathbf{a}$，那么 $|B| = 3$。因此，$\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}}$ 有 $\binom{3}{2} = 3$ 个加项。这样的方程共有 $\binom{n+1}{n-2}$ 个。

引理 3.8. 由 *Pl¨ucker* (6) 和拉普拉斯关系 (9) 生成的理想经由 φ同构于 $\mathcal{F}(I_2(\mathbf{L}))$的定义理想。

证明。为证明该引理，我们证明，对于每个拉普拉斯关系 $\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}}$，其像 $\varphi(\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}})$ 恰好与 [RS24]中所述的一个拉普拉斯关系重合。我们分两种情况讨论。

首先假设 $1 \notin \mathbf{a}$。根据注记 3.7，有 $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$，且 $1 < \alpha < \beta < \gamma$，并且

$$\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}} = \text{符号}(\alpha,\beta) T_{\mathbf{a}\cup\{\alpha,\beta\}} T_{\{\alpha-1,\beta-1\}^c} + \text{符号}(\alpha,\gamma) T_{\mathbf{a}\cup\{\alpha,\gamma\}} T_{\{\alpha-1,\gamma-1\}^c} + \text{符号}(\beta,\gamma) T_{\mathbf{a}\cup\{\beta,\gamma\}} T_{\{\beta-1,\gamma-1\}^c}.$$

注意，$\mathbf{t}\,(\mathbf{a} \cup \{\alpha, \beta\})^{\,c} = \{1, \gamma\}$，其他项也类似。应用 φ 可得 s:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}}) &= \operatorname{sgn}(\alpha,\beta) T_{\sigma(\{1,\gamma\})}\ T_{\sigma(\{\alpha-1,\beta-1\})} + \operatorname{sgn}(\alpha,\gamma) T_{\sigma(\{1,\beta\})}\ T_{\sigma(\{\alpha-1,\gamma-1\})} + \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\beta,\gamma) T_{\sigma(\{1,\alpha\})} T_{\sigma(\{\beta-1,\gamma-1\})} \\
&= \operatorname{sgn}(\alpha,\beta) T_{n+3-\gamma,n+2}\ T_{n+4-\beta,n+4-\alpha} + \operatorname{sgn}(\alpha,\gamma) T_{n+3-\beta,\ n+2}\ T_{n+4-\gamma,n+4-\alpha} + \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\beta,\gamma) T_{n+3-\alpha,n+2} T_{n+4-\beta,n+4-\gamma}.
\end{aligned}$$

这些关系与 [RS24] 中得到的关系 (5.6) 相同

$$\det \begin{pmatrix} C_{n+3-\gamma} & C_{n+3-\beta} & C_{n+3-\alpha} & C_{n+2} \\ C_{n+4-\gamma} & C_{n+4-\beta} & C_{n+4-\alpha} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

事实上，由于 $\mathbf{a} \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{2, \ldots, n+2\}$，不难验证

$$\eta_\alpha = \alpha - 2, \quad \eta_\beta = \beta - 3, \quad \text{and} \quad \eta_\gamma = \gamma - 4.$$

因此，

$$\operatorname{sgn}(\alpha,\beta) = \operatorname{sgn}(\beta,\gamma) = -\operatorname{sgn}(\alpha,\gamma) = 1.$$

现在假设 $1 \in \mathbf{a}$。类似的计算表明，关系 $\mathrm{LAP}_{\mathbf{a}}$ 对应于 [RS24]中的关系 (5.5)。论证与前一种情况类似，为简洁起见，此处略去。

容易验证，φ 在 $\mathrm{Gr}(n,\ n+2)$ 的 Pl¨ucker 关系与 $\mathrm{Gr}(2,\ n+2)$ 的 Pl¨ucker 关系之间诱导了一个双射。证明至此完成。□

利用引理 3.3 和引理 3.8，我们得到特殊纤维的定义方程 $\mathcal{F}[n-1]$.

定理 3.9。 *Pl¨ucker* 关系 (6) 和拉普拉斯关系 (9) 生成了特殊纤维环 $\mathcal{K}[n-1]$的理想 $\mathcal{F}[n-1]$。特别地，$\mathcal{F}[n-1] \cong \mathcal{F}(I_2(\mathbf{L}))$。

证明。令 $\mathcal{K}'$ 为由 Pl¨ucker 关系和拉普拉斯关系生成的理想。由注 2.9 和引理 3.3，$\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}[n-1]$。此外，$\mathcal{K}'$ 与特殊纤维环的定义理想$\mathcal{F}(I_2(\mathbf{L}))$ 同构，这是由引理 3.8得出的。特别地，$\mathcal{K}'$ 是素理想，并且根据 [RS24，命题 A.1] 其余维为

$$\mathrm{ht}(\mathcal{K}') = \binom{n+2}{2} - (n+2).$$

根据注释 2.3，$\mathcal{F}[n-1]$ 具有最大解析展度，因此 $\mathrm{ht}(\mathcal{K}[n-1]) = \mathrm{ht}(\mathcal{K}')$。因此，我们得到 $\mathcal{K}' = \mathcal{K}[n-1]$. 注意，这两个代数都定义在同一个多项式环上，并且它们的定义方程通过 φ同构，因此

$$\mathcal{F}[n-1] \cong \mathcal{F}(I_2(\mathbf{L})).$$ □

我们通过一个例子说明拉普拉斯关系（9）与 [RS24]中的关系之间的一一对应。

例 3.10。 设 $n = 4$，并设 $\mathrm{LAP}_{5,6}$ 为例 3.4中的拉普拉斯关系，即

$$\mathrm{LAP}_{5,6} = -T_{2456}^2 + T_{2356}T_{3456} + T_{1456}T_{3456}.$$

应用 φ （见图1），得到

$$\varphi(\mathrm{LAP}_{5,6}) = -T_{46}^2 + T_{36}T_{56} + T_{45}T_{56}.$$

这对应于 [RS24] 中的拉普拉斯方程（按其记号，LAP3,4,5,6），它由以下子式为零得出

$$\det\begin{pmatrix} C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ C_4 & C_5 & C_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

由定理 3.9 和 [RS24的命题 A.1], 可直接推出:

推论 3.11. *$\mathcal{F}[n-1]$ 是 Cohen–Macaulay 的，且其重数为 $2^{n+1}-n-2$。*

此外，我们可以在 $\preceq$ 上定义一个项序 $\mathbb{K}[T_{\mathbf{s}} \mid \mathbf{s}=\{s_1,\dots,s_n\}\subset[n+2]]$，使得 $T_{\mathbf{s}} \preceq T_{\mathbf{s}'}$ 如果 $\varphi(T_{\mathbf{s}}) \preceq_{RS} \varphi(T_{\mathbf{s}'})$ 其中 $\preceq_{RS}$ 表示 [RS24]中定义的项序。根据 [RS24定理 6.1], 可知 $\mathcal{F}[n-1]$ 是 Koszul 的。

推论 3.12. *Pl¨ucker 关系和拉普拉斯关系构成 $\mathcal{K}[n-1]$ 关于 $\preceq$ 的 Gr¨obner 基。特别地，特殊纤维 $\mathcal{F}[n-1]$ 是 Koszul 的。*

最后，我们指出，定理 3.9 中的同构使我们能够计算 $I_n(H[n-1])$ 的约化数，以及其特殊纤维的 a-不变量。

推论 3.13。 *$I_n(H[n-1])$ 的约化数与其特殊纤维的正则性相同，为*

$$\mathrm{r}(I_n(H[n-1])) = \mathrm{reg}(\mathcal{F}[n-1]) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor.$$

因此， a-不变量 $I_n(H[n-1])$ 为

$$\mathrm{a}(\mathcal{F}[n-1]) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor - (n+2).$$

证明。由定理 3.9 和推论 3.11， $\mathcal{F}[n-1] \cong \mathcal{F}(I_2(\mathbf{L}))$，且这两个环都是 Cohen–Macaulay 环。这意味着 $\mathrm{r}(I_n(H[n-1])) = \mathrm{r}(I_2(\mathbf{L}))$。正如 RS24 第 8], 节末尾所述，我们可以应用 CHV96 推论 4.8] 来计算 $\mathrm{r}(I_2(\mathbf{L}))$。使用 RS24], 的术语，理想 $I_2(\mathbf{L})$ 是一个 KW 型 $(\emptyset, n+2)$ 理想，这意味着其余维为 $n+1$，且相应矩阵没有卷曲块（即 $d=0$），并且恰有一个若尔当块。应用 CHV96 推论 4.8] ，取 $d=0$ 和 $c=n+2$，得到:

$$\mathrm{r}(I_n(H[n-1])) = \mathrm{r}(I_2(\mathbf{L})) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor.$$

由于 $\mathcal{F}[n-1]$是 Cohen–Macaulay 的，我们有 $\mathrm{r}(I_n(H[n-1])) = \mathrm{reg}(\mathcal{F}[n-1])$。此外，

$$\mathrm{a}(\mathcal{F}[n-1]) = \mathrm{reg}(\mathcal{F}[n-1]) - \ell(I_n(H[n-1])) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor - (n+2). \qquad \square$$

3.1. **双有理映射的应用。** 现在，我们简要讨论前述结果的几何对应物。受关于类调和超曲面和行列式的既有研究启发（参见 [CRS08、 MS16]），我们证明，与 $I_n(\mathcal{H}[n-1])$ 的某些约化相关的射影映射是双有理映射。我们将这些约化称为极大约化（参见备注 3.15和定义 3.16）。事实上，众所周知，对于一般Hankel矩阵，与行列式相关的极映射从来都不是双有理映射 [Nog20、 MS16]。受 [Huh12引理启发（参见方程（12）及其相关讨论），我们不直接研究梯度理想本身，而是考察一般Hankel矩阵的梯度理想的坐标截面，由此得到这一情形下的双有理映射。

现在我们回顾一些关于混合重数的一般事实。设 $I=(f_0,\dots,f_s)\subset S$是由 $t+1$ 个同次数齐次形式生成的理想。与 I 相关的有理映射是由 I 的生成元定义的射影空间上的映射；我们将其记为

$$\Theta_I : \mathbb{P}^t \dashrightarrow \mathbb{P}^s. \tag{11}$$

众所周知， $\mathfrak{m}$ 和 I的混合重数（记作 $e_i(\mathfrak{m} \mid I)$）与 Θ_I的射影次数一致，其中 $\mathfrak{m}$ 是 S 的极大齐次理想（参见 [Har92，例 19。4]

以及 [Huh12，注 4]）。更准确地说，混合重数序列 $e_i(\mathfrak{m} \mid I)$ 由非负整数组成，其最后一个（或某些文献中的第一个）非零项满足

$$e_\ell(\mathfrak{m} \mid I) = \deg(\Theta_I) \cdot e(\mathcal{F}(I)).$$

若 $\mathrm{ht}(I) > 0$ 则 $\ell = \ell(I) - 1$ 其中 $\ell(I)$ 是 I的解析扩张度， [KV89]。

下面的结果表明，混合重数在约化下保持不变。

引理 3.14 ([Huh12], 引理 30)。 设 I, J 是 S 的理想，且 J 是 I的约化。那么

$$e_i(\mathfrak{m} \mid I) = e_i(\mathfrak{m} \mid J) \quad \textit{for all } 0 \le i \le \dim S - 1.$$

特别地， 两个序列中最后一个非零项相同。因此，我们得到

$$\deg(\Theta_I) \cdot e(\mathcal{F}(I)) = \deg(\Theta_J) \cdot e(\mathcal{F}(J)). \tag{12}$$

后一恒等式是本节的关键。

注 3.15. 如果 J 是 I 的极小约化，那么 $\mathcal{F}(J)$ 同构于一个多项式环，且 $e(\mathcal{F}(J)) = 1$；因此，$\deg(\Theta_J)$ 达到可能的最大值，而 Θ_J 未必是双有理的。反过来，如果 J 是 I 的一个约化，且 Θ_J 到其像是双有理映射，那么 $\deg(\Theta_J) = 1$，并且 $e(\mathcal{F}(J))$ 达到其最大值。

这一观察引出了以下定义：

定义 3.16. 设 S 是无限域 $\mathbb{K}$ 上的多项式环， $J \subset I \subset S$ 是由次数相同的形式生成的理想，且 J 是 I 的约化。若 $\deg(\Theta_J) = 1$，则称 J 是 I 的极大约化。

注 3.17. 如果 I 存在极大约化，那么 $\ell(I) = \dim S$。事实上，极大约化 J 定义了一个双有理映射。特别地，该映射是支配的，因此具有最大解析展度，即 $\ell(J) = \dim S$。由于约化保持解析扩张度，结论得证。

现在，我们回顾一种用于判定双有理映射的代数工具。粗略来说，如果 I 具有最大解析展度和足够多的线性 syzygy，那么 Θ_I 就是一个双有理映射。

定理 3.18。 [DHS12，定理 3。2] 设 $\Theta_I : \mathbb{P}^t \dashrightarrow \mathbb{P}^s$ 是如下有理映射： I 如 (11)所示。如果$\ell(I) = t + 1$ 且 秩 M_1 至少为 t，那么 Θ_I 是到其像上的双有理映射。这里， M_1 表示 I 的表示矩阵中由所有线性 *syzygy* 组成的子矩阵。

现在我们将这些结果应用于 $I_n(H[n-1])$。令 $F = \det(\mathcal{H})$，并用 $J = (\nabla F)$ 表示其梯度理想。根据 [CMRS22, 定理 4.6]， J 是 $I_n(\mathcal{H})$ 的极小约化。令 $J[r]$ 表示通过令 $x_{2n-r+2} = \cdots = x_{2n+1} = 0$（其中 $0 < r \le n-1$）而得到的 J 的特化。于是 $J[r]$是 $I_n(H[r])$ 的约化，但不再是极小约化。将恒等式 (12) 应用于 $I_n := I_n(\mathcal{H}[n-1])$ 和 $J[n-1]$，可得

$$\deg(\Theta_{I_n}) \cdot e(\mathcal{F}[n-1]) = \deg(\Theta_{J[n-1]}) \cdot e(\mathcal{F}(J[n-1])). \tag{13}$$

我们将证明Θ_{I_n} 和 $\Theta_{J[n-1]}$ 都是双有理映射；因此二者的次数均为 1。由此，我们计算 $e(\mathcal{F}($ $J[n-1]))$。

引理 3.19. 设 $I = I_n(H[r])$，则对于任意 $0 \le r \le n-1$，有理映射 Θ_I 都是双有理映射。

证明。 理想 $I_n(H[r])$ 是预期余维的完美理想，因此它具有由 Eagon-Northcott 复形给出的极小线性分解。线性 syzygy 的子矩阵（此处所有 syzygy 都是线性的）的秩为 $\binom{n+2}{2} - 1$。由注 2.3，$\ell(I_n(H[r])) = 2n + 1 - r$。由定理3.18即可得出结论。 □

命题 3.20. $\Theta_{J[n-1]}$ 是一个双有理映射。

证明。 由于 $J[n-1]$是 $I_n(H[n-1])$ 的约化，它具有最大解析展度，即 $\ell(J[n-1]) = n + 2$。在 [CRS08 的引理 4.2 (iii)], 中，计算了 $J[n-1]$ 的一个线性 syzygy 子矩阵。更准确地说，他们给出了梯度理想 $\nabla f^{(n+1)}$的线性 syzygy，其中 $f^{(n+1)} := \det(\mathcal{H}[n-1])$:

$$\begin{pmatrix} nx_1 & (2n)x_2 & 2(n-1)\,x_3 & 2(n-2)x_4 & \dots & 2x_{n+1} \\ (n-1)x_2 & (2n-1)x_3 & (2n-3)x_4 & (2n-5)x_5 & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 2x_{n-1} & (n+2)x_n & (n)x_{n+1} & (n-2)x_{n+2} & \dots & 0 \\ x_n & (n+1)\,x_{n+1} & (n-1)x_{n+2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n)x_{n+2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x_{n+2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(n+2)\times(n+1)} \tag{14}$$

具体而言， $\nabla f_{(n+1)} = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n+2}})$。注意， $J[n-1] = \nabla f_{(n+1)} + (\frac{\partial F}{\partial x_{n+3}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{2n+1}})$， 因此 $\nabla f_{(n+1)}$的线性 syzygy 构成了 $J[n-1]$的线性 syzygy 矩阵的一个子矩阵。我们断言，矩阵 (14) 的秩恰好为 $n+1$.。删除第一行后得到一个上三角矩阵，其对角线元素均非零，条件是基域的特征大于n 或为零。因此，该矩阵的秩为 $n+1$，结论由定理3.18得证。 □

推论 3.21. 理想 $J[n-1]$ 是 I_n（$H[n-1]$）的极大约化，其重数由 e（$\mathcal{F}$（$J[n-1]$））$= 2^{n+1} - n - 2$.给出

证明. 由于 $J[n-1]$是 I_n（$H[n-1]$）的约化，且 deg($\Theta_{J[n-1]}$) $= 1$，因此 $J[n-1]$是极大约化。由恒等式（13）和引理 3.19，可得 e（$\mathcal{F}$（$J[n-1]$））$= e$（$\mathcal{F}[n-1]$）。最后，由推论 3.11可得 e（$\mathcal{F}$（$J[n-1]$））$= 2^{n+1} - n - 2$，证毕。□

4. Degeneration $r = 1$

现在我们转而关注另一种极端退化情形，即当 $r = 1$ 且

$$H[1] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_n & \dots & x_{2n-2} & x_{2n-1} & x_{2n} \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} & x_{2n} & 0 \end{pmatrix}.$$

我们再次从确定特殊纤维的定义方程 $\mathcal{F}[1]$开始；等价地，也就是确定理想 $\mathcal{K}[1]$的一组生成元。在这种情形下，我们将看到，除了 Pl¨ucker 关系外，只需再添加一个关系即可生成 $\mathcal{K}[1]$。不过，这个生成元的次数为 n。这一结果对 [CMRS22 中提出的一个问题（问题 2）给出了否定答案。9]。

我们首先证明 $\mathcal{F}[1]$ 是 Gorenstein 的，并且 $\mathcal{K}[1]$ 除了 Pl¨ucker 关系外，恰由一个额外关系生成。

命题 4.1。 特殊纤维环 $\mathcal{F}[1]$ 是 *Gorenstein* 的，并且 $\mathcal{K}[1]$ 由 *Pl¨ucker* 关系以及 $\mathcal{F}[0]$ 上恰好一个正则元生成。

证明。 如注记 2.9中所述，Pl¨ucker 理想包含于 $\mathcal{K}[1]$。考虑满射

$$\pi_1 : \mathcal{F}[0] \twoheadrightarrow \mathcal{F}[1]. \tag{15}$$

有 $\mathcal{F}[\quad 0]/\ker(\pi_1) \cong \mathcal{F}[1]$。根据注记 2.3 $\mathcal{F}[1]$ 具有最大解析展度，因此我们有 ve

$$\dim \mathcal{F}[0]/\ker(\pi_1) = \dim(\mathcal{F}[1]) = 2n.$$

此外，已知 $\mathcal{F}[0] \cong \mathrm{Gr}(n, n+2)$ 是 Cohen–Macaulay 唯一分解整环，因此是 Gorenstein 的（参见[Hoc73，推论 3.2]）。这意味着

$$\mathrm{ht}(\ker(\pi_1)) = \dim(\mathcal{F}[0]) - \dim(\mathcal{F}[1]) = 1.$$

因此，ker(π_1) 是唯一分解整环中的一个高度一素理想，所以它是由正则元 $f$over $\mathcal{F}[0]$ 生成的主理想。特别地，由于 $\mathcal{F}[0]$ 是 Gorenstein， $\mathcal{F}[1]$ 也是 Gorenstein。□

我们将在定理 4.7 中证明，命题 f 4.1中的额外关系是次数为n的多项式，它来自以下矩阵的广义拉普拉斯展开式 $n^2 \times n^2$ 。

$$\mathcal{L}[1] \coloneqq \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_{n+1} & C_{n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & C_3 & \dots & C_{n+2} & 0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{n+1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & C_3 & \dots & C_{n+2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_1 & \dots & C_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_2 & \dots & C_{n+2} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

该矩阵由 $n-1$ 个垂直块组成，每个块都包含一个非零子块，该子块与下一个块部分重叠，从而形成阶梯状模式。第一个非零块为

$$\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{n+1} & C_{n+2} \\ C_2 & \dots & C_{n+2} & 0 \end{pmatrix},$$

其余每个 $n-2$ 非零块则为

$$\begin{pmatrix} C_1 \dots C_{n+1} \\ C_2 \dots C_{n+2} \end{pmatrix}.$$

引理 4.2。 $\mathcal{L}[1]$ 的行列式为零。

证明。 若将第 n^2-n+1 行替换为线性组合

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} R_{n^2-jn+j} \longrightarrow R_{n^2-n+1},$$

该行将变为零。因此，$\det \mathcal{L}[1] = 0$. □

通过迭代应用按互补子式展开的广义拉普拉斯展开，我们得到一个关于 n阶子式的关系。具体而言， $\mathcal{L}[1]$ 的行列式可以从最后 n行的 n阶子式开始展开，并逐步向上对各个后续块进行归纳，处理n 行。由此我们得到如下形式的关系：

$$\det \mathcal{L}[1] = \sum_{\substack{(A_1,\dots,A_n) \\ A_k \subseteq \{1,\dots,n^2\},\, |A_k|=n \\ A_i \cap A_j = \emptyset}} \operatorname{sgn}(A_1,\dots,A_n) \prod_{k=1}^{n} \det\left(\mathcal{L}_{A_k}^{(k)}\right), \tag{17}$$

其中， $\mathcal{L}_{A_k}^{(k)}$ 是由索引为 A_k 的列构成的第 k 个行块的 $n \times n$ 子矩阵。注意，根据列的选择，这个和中的许多项实际上为零。

我们将与此关系对应的 $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ 中所得的次数为 n 的多项式记为 f_{LAP} 。

下一个例子展示了多项式 f_{LAP} 的构造。

例 4.3. 考虑 $n=3$，上述关系 f_{LAP} 是由以下 9 阶子式消失得到的一个三次多项式

$$\mathcal{L}[1] = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{pmatrix}.$$

沿着最后一块 3 行的 3阶子式展开，可得：

$$\begin{aligned} \det \mathcal{L}[1] =& [345] \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & C_1 \end{pmatrix} - [245] \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & C_2 \end{pmatrix} + \\ & [235] \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & C_3 \end{pmatrix} - [234] \det \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & C_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

接下来，我们可以进一步展开这四个 6阶子式。这些展开式已在公式（8）中计算得出。利用定义3.2中的拉普拉斯多项式，相应的代数关系可写为

$$f_{\mathrm{LAP}} = T_{345}\,\mathrm{LAP}_1 - T_{245}\,\mathrm{LAP}_2 + T_{235}\,\mathrm{LAP}_3 - T_{234}\,\mathrm{LAP}_4\,.$$

注意， $f_{\mathrm{LAP}} \in \mathcal{K}[n-1]$，这与备注2.9一致。不过，值得强调的是，在这种情况下，拉普拉斯多项式不是3阶子式之间的二次关系，因为上面出现的6阶子式都非零。的显式表达式是

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{LAP}} =& T_{345}(+T_{123}T_{345} - T_{124}T_{245} + T_{125}T_{235} + T_{134}T_{145} - T_{135}^2 + T_{145}T_{125}) \\
&- T_{245}(T_{234}T_{145} - T_{135}T_{235} + T_{245}T_{125}) + T_{235}(-T_{235}^2 + T_{234}T_{245} + T_{345}T_{125}) \\
&- T_{234}(T_{234}T_{345} + T_{135}T_{345} - T_{245}T_{235}) \\
=& T_{123}T_{345}^2 - T_{124}T_{245}T_{345} + T_{125}T_{145}T_{345} + 2T_{125}T_{235}T_{345} - T_{125}T_{245}^2 \\
&+ T_{134}T_{145}T_{345} - T_{135}^2T_{345} - T_{135}T_{234}T_{345} + T_{135}T_{235}T_{245} - T_{145}T_{234}T_{245} \\
&- T_{234}^2T_{345} + 2T_{234}T_{235}T_{245} - T_{235}^3.
\end{aligned}$$

根据定义， ψ（f_{LAP}） $=$ 行列式 $\mathcal{L}[1] = 0$。因此， $f_{\mathrm{LAP}} \in \mathcal{K}[1]$。我们的目标是证明，该多项式与普¨吕克关系（6）一起最小生成 $\mathcal{K}[1]$（见定理4.7）。

我们先对多项式 f_{LAP} 的结构作一些观察，这些观察将有助于证明定理4.7。

命题 4.4。 多项式 $f_{\mathrm{LAP}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ 可以写成

$$f_{\mathrm{LAP}} = -T^{n-1}_{2,3,\ldots,n+1}\,T_{3,4,\ldots,n+2} - T^{n}_{2,3,\ldots,n,n+2} + f',$$

其中， f' 中的每个单项式都至少包含一个变量 $T_{\mathbf{i}}$ ，且该变量不同于上面的前三个变量。

证明。 首先，我们注意到，两个单项式$T^{n-1}_{2\,3}$、、.....、$_{n+1}\,T_{3}$、$_{4}$、.....、$_{n+2}$ 和T^{n}_{2}、$_{3}$、.....、$_{n}$、$_{n+2}$ 在拉普拉斯展开式中恰好各出现一次，因此不能被任何其他项抵消。

单项 式 T^{n}_{2}，$_{3}$，...，$_{n}$，$_{n+2}$ 对应于在每一行中选取列上的 n-子式 ns

$$\begin{pmatrix} C_2 & C_3 & \cdots & C_n & C_{n+2} \end{pmatrix}.$$

在每一步中，这一选择都由 $\mathcal{L}[1]$的块结构唯一确定。

Simi类似地，单项式 $T^{n-1}_{2\,3}$，，...，$_{n+1}\,T_{3}$，$_{4}$，...，$_{n+2}$ 对应于选取一次子式 r

$$\left(C_3, C_4, \ldots, C_{n+2}\right),$$

以及 $n-1$ 次子式

$$\left(C_2, C_3, \ldots, C_{n+1}\right).$$

根据 $\mathcal{L}[1]$的结构， C_{n+2} 必须始终从第一行块中选取。因此，形成单项式 $T^{n-1}_{2\,3}$，，...，$_{n+1}\,T_{3}$，$_{4}$，...，$_{n+2}$ 所需的所有其他选择都唯一确定。

我们注意到，这两个单项式的符号可以通过广义拉普拉斯展开中的通常符号公式确定；不过，由于它们与我们的论证无关，我们省略其具体计算。

现在我们证明，展开式中的任何其他单项式都至少包含一个不同于三个指定变量的变量 $T_{\mathbf{i}}$。假设展开式中有一项给出单项式

$$M := T^{\alpha}_{2,3,\ldots,n+1}T^{\beta}_{3,4,\ldots,n+2}T^{\gamma}_{2,3,\ldots,n,n+2}.$$

我们将证明， M 只有两种可能：

$$T^{n-1}_{2,3,\ldots,n+1}T_{3,4,\ldots,n+2} \quad \text{or} \quad T^{n}_{2,3,\ldots,n,n+2}.$$

如前所见，在展开式的每一项中，我们总有一个子式包含来自第一行块的列C_{n+2} 。因此，与 M 中的三个变量对应的唯一可能的子式为

$$\begin{pmatrix} C_3 & C_4 & \cdots & C_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} C_2 & C_3 & \cdots & C_n & C_{n+2} \end{pmatrix}.$$

假设我们从第一行取了$(C_2\ C_3\ \cdots\ C_n\ C_{n+2})$。这意味着我们在第二行块中选取了一个同时包含 C_2 和 C_{n+2}的子式。在与 M中的变量对应的子式中，唯一符合条件的子式恰好就是同一个，即$(C_2\ C_3\ \cdots\ C_n\ C_{n+2})$。这一模式在后续每一行中重复出现，从而得到唯一的项$T^n_{2,\ 3,\ \ldots\ldots n,\ n+2}$。

或者，假设我们展开式中的项包含来自第一行块的$\begin{pmatrix} C_3 & C_4 & \cdots & C_{n+2}\end{pmatrix}$。这意味着在第二行块中，我们选取了一个包含 C_2 和 C_3、但不包含 C_{n+2}的子式。与 M一致的唯一选择是$\begin{pmatrix} C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1}\end{pmatrix}$.。以此方式继续处理后续所有行，所选内容便唯一确定，从而得到该项

$$T^{n-1}_{2,3,\ldots,n+1}T_{3,4,\ldots,n+2}.$$ □

注 4.5. 多项式 f_{LAP} 不属于 Pl¨ucker 理想。事实上，二次 Pl¨ucker 关系中的所有单项式都是平方自由的，而 f_{LAP} 含有变量T_2的纯幂$_{,\ 3,\ n,\ n+2}$。

例 4.6. 如果 $n = 4$ 多项式 f_{LAP} 是由以下矩阵的拉普拉斯展开得到的四次多项式：

$$\mathcal{L}[1] = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{pmatrix}.$$

沿最后 4 行对 $\det(\mathcal{L}[1])$ 展开，得到

$$\det(\mathcal{L}[1]) = [3456]\,\mathcal{M}_1 - [2456]\,\mathcal{M}_2 + [2356]\,\mathcal{M}_3 - [2346]\,\mathcal{M}_4 + [2345]\,\mathcal{M}_5,$$

其中 $\mathcal{M}_i$ 表示余补 12×12 子式

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & 0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_i \end{pmatrix}.$$

完整的拉普拉斯展开得到一个多项式 $f_{\mathrm{LAP}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$，其显式表达式过长，无法在此写出。因此，我们仅记录后续结果证明中会用到的各项：

$$f_{\mathrm{LAP}} = -T^4_{2346} - T^3_{2345}T_{3456} + \text{other terms}.$$

现在可以证明，除了 Pl¨ucker 关系之外，f_{LAP} 是生成 $\mathcal{F}[1]$ 的定义理想所需的唯一额外方程。

定理 4 .7. 特殊纤维的定义理想 $I_n(H[1])$ 是 $\mathcal{K}[1] = \mathscr{P}_{n,\ n+2} + (f_{\mathrm{LAP}})$.

证明。令 π_1 为（15）中的满射。我们证明 f_{LAP} 在模理想 $\mathscr{P}_{n,n+2}$意义下不可约。由于 $\mathcal{F}[0]$ 是唯一分解整环，由不可约元生成的理想是素理想，因此 $\ker\ \pi_1 = (f_{\mathrm{LAP}})$。这意味着 $\mathcal{K}[1] = \mathscr{P}_{n,n+2} + (f_{\mathrm{LAP}})$。下文中，为简化记号，我们将 $\mathscr{P}_{n,n+2}$ 记作 $\mathscr{P}$。

根据命题 4.4 和注记 4.5 我们知道 $f_{\mathrm{LAP}} \notin \mathscr{P}$ 可以写成

$$f_{\mathrm{LAP}} = T^{n-1}_{2,3,\ldots,n+1}\,T_{3,4,\ldots,n+2} + T^n_{2,3,\ldots,n,n+2} + f'$$

其中 f' 中的每个单项式都至少含有一个变量 $T_{\mathbf{i}}$，且该变量不属于

$$T_{2,3,\ldots,n+1},\ T_{3,4,\ldots,n+2},\ T_{2,3,\ldots,n,n+2}.$$

为了证明 f_{LAP} 在模 $\mathscr{P}$ 意义下不可约，我们将把上述三个变量之外的所有变量特化为零。由此，我们在较小的环中得到一个不可约多项式，从而推得 f_{LAP} 在 $\mathscr{P}$ 上不可约。注意，展开式中两个（唯一的）单项式的符号与证明无关。因此，为方便起见，我们假设这两项的符号均为正。令

$$\mathscr{T} := (T_{\mathbf{i}} \mid \mathbf{i} \notin \{[2,3,\ldots,n+1],\ [3,4,\ldots,n+2],\ [2,3,\ldots,n,n+2]\})$$

并考虑将 $\mathscr{T}$ 中的所有变量设为零所得到的特化。注意 $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{T}$，也就是说，特化后，所有 Plücker 关系都变为零。事实上，子式$[2,3,\dots,n+1]$、$[3,4,\dots,n+2]$和 $[2,3,\dots,n,n+2]$ 中的任意一对都共享 $n-1$ 个指标；因此，根据注记 2.8，无法由其中两个子式的乘积构造出非平凡的 Plücker 关系。因此，特化后，

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}}{\mathscr{P}+(f_{\mathrm{LAP}})+\mathscr{T}} = \frac{\mathbb{K}\left[T_{2,3,\dots,n+1},\ T_{3,4,\dots,n+2},\ T_{2,3,\dots,n,n+2}\right]}{(\overline{f})},$$

其中

$$\overline{f} = T_{2,3,\dots,n+1}^{n-1}\, T_{3,4,\dots,n+2} + T_{2,3,\dots,n,n+2}^{n}.$$

注意，f 是$T_{3,4,\dots,n+2}$ 上以唯一分解整环 $A := \mathbb{K}\left[T_{2,3,\dots,n+1},\ T_{2,3,\dots,n,n+2}\right]$为系数的本原一次多项式，其系数互素；因此，$f$ 在 $A\left[T_{3,4,\dots,n+2}\right]$上不可约。

f 在 $A\left[T_{3,4,\dots,n+2}\right]$上的不可约性意味着 f_{LAP} 在 $\mathcal{F}[0]$上不可约。事实上，假设对某些 $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$中的多项式 g 和 h，有 $f_{\mathrm{LAP}} - gh \in \mathscr{P}$。由于 f_{LAP} 是齐次的，我们可以选取 g 和 h 使其在 $\mathcal{F}[0]$ 中为齐次多项式。由于所有 Plücker 关系在特化后都变为 0，我们得到

$$\overline{f} = \overline{g}\,\overline{h}.$$

由于 f 是不可约齐次多项式，其中一个因子（设为 g）必为单位（次数为零）。因此，g 是模 $\mathscr{P}$意义下次数为零的齐次多项式，故模$\mathscr{P}$为单位。证毕。

□

注4.8。 不可约性的证明与基域无关，并且多项式 f_{LAP}在几何上不可约。

推论4.9。 a不变量等于 $\mathcal{F}[1]$ 的 -2，其正则性为 $2n-2$，这与 $I_n(H[1])$的约化数一致。

证明。 设 X 是一个大小为 $n \times (n+2)$ 的一般矩阵。由 [BH92，推论1。4] 我们知道

$$a(\mathcal{F}(I_n(X))) = -(n+2).$$

由 [CMRS22，命题4。1], 中的同构可得 $a(\mathcal{F}[0]) = -(n+2)$。

由于 f_{LAP} 是一个次数为 $\deg(f_{\mathrm{LAP}}) = n$ 的正则齐次元素，且在 $\mathcal{F}[0]$上，由 [BH93，推论3.6。14] 我们得到

$$a(\mathcal{F}[1]) = a(\mathcal{F}[0]) + \deg(f_{\mathrm{LAP}}) = -n-2+n = -2.$$

a不变量等于将相应环的希尔伯特级数视为有理函数后所得的次数。特别地，由于 $\mathcal{F}[1]$ 是 Cohen–Macaulay 环，我们有

$$a(\mathcal{F}[1]) = \operatorname{reg}(\mathcal{F}[1]) - \dim(\mathcal{F}[1]).$$

此外，根据 [Vas05，命题 1，85] 有 $\operatorname{reg}(\mathcal{F}[1]) = \mathrm{r}(I_n(H[1]))$。因此

$$-2 = \operatorname{reg}(\mathcal{F}[1]) - \dim(\mathcal{F}[1]) = \mathrm{r}(I_n(H[1])) - \ell(I_n(H[1])) = \mathrm{r}(I_n(H[1])) - (2n).$$

因此 $\operatorname{reg}(\mathcal{F}[1]) = \mathrm{r}(I_n(H[1])) = 2n-2.$ □

推论 4.10。 $\mathcal{F}[1]$ 的重数为 $\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$. ——

证明。 </style'>格拉斯曼流形 $Gr(,\ n+2)$ 与 $\mathcal{F}[0]$ 同构，$\mathcal{F}[0]$ 因此它们具有相同的重数。根据格拉斯曼簇的对偶性质，$\mathrm{Gr}(n,\ n+2) \cong \mathrm{Gr}(2,\ n+2)$，而 $\mathcal{F}[0]$ 的重数等于 $\mathrm{Gr}(2,\ n+2)$ 的重数，即著名的卡特兰数，

—— $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$，（参见 [Ful98，例 14.7。11]）。由于 f_{LAP} 是 n 中次数为$\mathcal{F}[0]$的齐次正则元，并且 $\mathcal{F}[1] \cong \mathcal{F}[0]/(f_{\mathrm{LAP}})$，因此

$$e(\mathcal{F}[1]) = \deg(f_{\mathrm{LAP}}) \cdot e(\mathcal{F}[0]) = n \cdot \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \qquad \square$$

我们通过观察 $I_n(H[1])$ 属于纤维型，来结束本节。特别是，这为 $\mathcal{R}[1]$给出了显式定义方程。在此过程中，我们还证明了 $I_n(H[1])$ 具有线性幂，也就是说，它的所有幂都有线性分解。已知，如果理想 I 的 Rees 代数是 Koszul 代数，那么 I 就具有线性幂 [Blu01，推论 3。6]。特别地，这适用于非退化的 Hankel 行列式理想；Conca 已证明它们的 Rees 代数是 Koszul 代数 [Con98，定理 4。7]。下一个结果表明，$I_n(H[1])$ 也具有线性幂，尽管它的 Rees 代数不是 Koszul 代数。

命题 4.11。*Rees* 代数 $\mathcal{R}[1]$属于纤维型，且 $I_n(H[1])$ 具有线性幂。特别是，它的定义理想 $\mathcal{J}[1]$ 由 f_{LAP} 以及 *Eagon–Northcott* 关系(3)和 *Pl¨ucker* 关系(6)生成。

证明。根据 BCV15 定理 3.7] 和 CMRS22 命题 2.4]，$I_n(H[1])$ 的纤维型性质和线性幂性质可直接得到。这意味着 $\mathcal{J}[1]$ 由对称代数的定义理想与特殊纤维的定义方程共同生成。由于根据 CMRS22 命题 2.4(i)，$I_n(H[1])$ 的余维符合预期，众所周知，Eagon-Northcott 复形可以解析 $I_n(H[1])$（参见 EN62 定理 2]）。结合这一结果与定理 4.7，我们得出，f_{LAP}连同 Eagon–Northcott 关系和 Pl¨ucker 关系生成 $\mathcal{J}[1]$，如所声称。□

因此，我们还可以递归地计算所有 k 的 $I_n(H[1])$ 的 Betti数^k 。

推论 4.12。对于所有 k，我们有

$$\beta_i^{S_1}(I_n(H[1])^k) = \beta_i^S(I_n(\mathcal{H})^k) - \binom{2n}{i}\beta_{2n}^S(I_n(\mathcal{H})^k).$$

证明。对于所有 k，变量 x_{2n+1} 是一个几乎 $S/(I_n(\mathcal{H})^k)$-正则元，当且仅当对于任意满足 $P \neq \mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$ 的素理想 $P \in \cup_k \in \mathrm{Ass}(S/(I_n(\mathcal{H})^k))$，都有 $x_{2n+1} \notin P$；其中 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$ 表示齐次极大理想。该结果由 BCRV22 引理 8.78] 和 Con98 推论 3.18] 得出。□

5. Further questions

最后，我们讨论一些由本研究引出、有趣的问题。

一个自然的下一步是分析中间情形，并进一步了解余维为 3 的 n-行列式理想的特殊纤维的结构。

问题 5.1。求出 $\mathcal{F}[r]$ 对于 $r = 2, \ldots\ldots, n-2$ 的定义方程。

根据备注 2.9 以及定义我们方程的矩阵结构（另见例 4.3），自然可以猜想 $\mathcal{K}[r]$由 Pl¨ucker 关系和次数为 $n-r+1$ 的额外关系最小生成；这些额外关系来自某些子式的消失，其结构与本文所展示的子式相似。然而，主要难点在于证明这些关系确实生成整个理想 $\mathcal{K}[r]$。

在此背景下，理解本文所述关系背后的组合学将很有趣，也很有用。

问题 5.2. 用它们的底层偏序集描述 LAP$_{\mathbf{a}}$ 和 f_{LAP} 。

众所周知，Pl¨ucker 关系（5）可以直接从极大子式的偏序集中读出：偏序集中的每一对不可比对都对应一个 Pl¨ucker 关系，而这种关系中的另外两项是可比子式的乘积，它们相对于不可比子式对称地位于较高和较低的秩位置。特别地，Pl¨ucker 关系中的所有项具有相同的总秩，即每个乘积中出现的指标之和为常数。我们希望为其他类别的

关系找到类似的刻画，这些关系正是本文研究的对象。结果表明，即使在这些情形下，关系中所有项的总秩也是常数，并且可以明确计算。对于 f_{LAP}，该常数为 $^{n}{}_{(n+1)(n+2)\ 2}$；而对于 LAP$_{\mathbf{a}}$，该常数为$\sum_{a\in\mathbf{a}} a + {}_{(n+2)(n+3)}{}_{2} \overline{\qquad} + 2$。此外，利用引理3.8中的同构，将对应的 2-子式偏序集与9中引入的项序结合起来，就可以精确确定偏序集中哪些子式对会产生拉普拉斯关系（ [RS24]）。然而，目前仍不清楚如何根据偏序集完整、明确地描述这些关系中出现的各项。

另一个有趣的 问题涉及这些理想的纤维型和线性幂性质 .

问题 5 .3. $\mathcal{R}[r]$ 对于 $r \geq 2$是否属于纤维型？对于 $r \geq 2$， $I_n(H[r])$是否具有线性幂 ？

注意， [BCV15，定理 3。7] 不适用于以下情形： $H[r]$ 其中 $r \geq 2$，因为 ht$(I_j(H[r])) \geq \min\{2(n+1-j)+1,\ 2n+1-r\}$ 不满足。类似地，也无法通过 [BCV15，引理 2。4] 进行归纳论证，因为有限长度假设对$k = 2$已经不成立。不过，计算实验表明，对于任意 r都属于纤维型，且该理想具有线性幂（对较小的 k值已验证）。

致谢。 我们的工作始于 2024 年在 Casa Matem´atica Oaxaca 举办的研讨会 交换代数中的女性 *III*。我们感谢本次研讨会的组织者让我们的团队得以聚在一起。我们感谢 CMO-BIRS 提供的优良工作条件。

作者感谢 Yevgeniya Jonah Tarasova 就本文内容进行讨论。他们还感谢 Alessio Sammartano 和 Matteo Varbaro 对本文早期稿件提出意见。KS 部分获得印度政府 SERB（ANRF）POWER 项目资助，项目编号为 SPG/2022/002099。LS 部分获得 SNSF 项目资助，项目编号为 TMPFP2 217223。

References

[AFS16] Carlos Amendola、Jean-Charles Faugere 和 Bernd Sturmfels，高斯混合的矩矩阵簇，《代数统计学杂志》7 (2016)，第 1 期。[BCRV22] Wilfred Bruns、Aldo Conca、Claudiu Raicu 和 Matteo Varbaro，《行列式、Gröbner基与上同调》，Springer数学专著，2022年。[BCV15] Winfried Bruns、Aldo Conca 和 Matteo Varbaro，极大子式与线性幂，《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal）2015 (2015)，第 702 卷，41–53。[BH92] Winfried Bruns 和 Jürgen Herzog，关于 a不变量的计算，《数学手稿》77 (1992)，201–213。[BH93] ，《Cohen-Macaulay环》，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[Blu01] Stefan Blum，双分次 Koszul 代数的子代数，《代数杂志》242 (2001)，第 2 期，795–809。[BV88] Winfried Bruns 和 Udo Vetter，《行列式环》，数学讲义，第1327卷，Springer出版社，柏林，1988年。[CHV96] Aldo Conca、Jürgen Herzog 和 Giuseppe Valla，应用于爆破代数的 Sagbi 基，《纯粹与应用数学杂志》 474 (1996)，113–138。[CMRS22] Rainelly Cunha、Maral Mostafazadehfard、Zaqueu Ramos 和 Aron Simis，一般Hankel矩阵的坐标截面，《代数杂志》611 (2022)，285–319。[CMSV18] Aldo Conca、Maral Mostafazadehfard、Anurag K. Singh 和 Matteo Varbaro，Hankel行列式环具有有理奇点，《数学进展》335 (2018)，111–129。[Con98] Aldo Conca，Hankel矩阵行列式理想的直化定律与幂，《数学进展》138 (1998)，263–292。[CRS08] Ciro Ciliberto、Francesco Russo 和 Aron Simis，类调和超曲面与 Hessian 消失的超曲面，《数学进展》218 (2008)，第 6 期，1759–1805。[DHS12] A. V. Doria、S. H. Hassanzadeh 和 A. Simis，特征无关的双有理性判据，《数学进展》230 (2012)，第 1 期，390–413。[Din11] Le Dinh Nam，扩张Hankel矩阵的行列式理想，《纯粹与应用代数杂志》215 (2011)，第 6 期，1502–1515。[Eis88] David Eisenbud，行列式簇的线性截面，《美国数学杂志》110 (1988)，第 3 期，541–575。[EN62] J. A. Eagon 和 D. G. Northcott，由矩阵定义的理想及与之相关的某个复形，《伦敦皇家学会会刊 A辑》269 (1962)，188–204。[Ful98] William Fulton，《交理论》，第2版，《数学及其边界领域成果》第三辑：现代数学概述丛书 [《数学及相关领域成果》第三辑：现代数学概述丛书], 第2卷，Springer出版社，柏林，1998年。

[GP82] Laurent Gruson 和 Christian Peskine，《射影空间中的曲线：割线簇》，《枚举几何与经典代数几何》（尼斯，1981），数学进展丛书，第24卷，Birkhäuser，波士顿，1982年，第1–31页。[Har92] Joe Harris，《代数几何》，数学研究生教材，第133卷，Springer出版社，纽约，1992年，入门课程。[Hoc73] M. Hochster，格拉斯曼簇及其舒伯特子簇是算术 Cohen–Macaulay 的，《代数杂志》25 (1973)，40–57。[HS06] Craig Huneke 和 Irena Swanson，《理想、环与模的整闭包》，伦敦数学学会讲义丛书，第336卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[Huh12] June Huh，射影超曲面的 Milnor数与图的色多项式，《美国数学会杂志》25 (2012)，第 3 期，907–927。[KPU17] Andrew R. Kustin、Claudia Polini 和 Bernd Ulrich，定义高度为三的 Gorenstein理想之爆破代数的方程，《代数与数论》11 (2017)，第 7 期，1489–1525。[KV89] Daniel Katz 和 J. K. Verma，扩张Rees代数与混合重数，《数学杂志》202 (1989)，第 1 期，111–128。[LS23] Kuei-Nuan Lin 和 Yi-Huang Shen，有理正规滚曲面的割线簇之爆破代数，《集刊数学》74 (2023)，第 1 期，247–278。[Mor96] Susan Morey，余维为二和三的理想之爆破的方程，《纯粹与应用代数杂志》109 (1996)，第 1 期，197–211。[MS16] Maral Mostafazadehfard 和 Aron Simis，双有理行列式，《代数杂志》450 (2016)，59–101。[Nog20] Jefferson Ribeiro Nogueira，《有理正规曲线的特征类与割线》，博士论文，弗卢米嫩塞联邦大学，2020年4月6日。[Rai13] Claudiu Raicu，3×3 催化矩阵的子式，《数学研究通讯》20 (2013)，第 4 期，745–756。[RS24] Ritvik Ramkumar 和 Alessio Sammartano，关于2-行列式理想的Rees代数，《伦敦数学会杂志》109 (2024)，第 1 期，e12821。[Sam20] Alessio Sammartano，有理正规滚曲面的爆破代数，《美国数学会汇刊》373 (2020)，第 2 期，797–818。[Sec21] Lisa Seccia，Hankel矩阵的Knutson理想与行列式理想，《纯粹与应用代数杂志》225 (2021)，第 12 期，106788。[Vas05] Wolmer Vasconcelos，《整闭包：Rees代数、重数与算法》，Springer数学专著，2005年。

Wabash College电子邮箱地址:
ansaldik@wabash.edu

Federal Rural University of the Semi-Arid Region电子邮箱地址: dayane.lira@ufersa.edu.br

Federal University of Rio de Janeiro电子邮箱地址: maral@im.ufrj.br

Indian Institute of Technology Patna电子邮箱地址: ksaloni@iitp.ac.in

University of Neuchâtel电子邮箱地址:
lisa.seccia@unine.ch