arXiv:2512.16170v1 [math.OA] 18 Dec 2025

经典概率与自由概率中 *-随机变量的德·菲内蒂型定理的完整分类

WEIHUA LIU

Abstract. 经典分布对称性可描述为在矩阵结构的半群（或群）的作用下保持不变，进而可描述为在由矩阵元函数生成的矩阵半群（或群）上的连续函数的余作用下保持不变。通过考虑矩阵结构上的非交换矩阵元函数，Woronowicz 引入了紧量子群的余表示，即 Woronowicz 的 C^*-代数（亦称紧矩阵伪群）。我们证明，每个非平凡的随机变量有限序列都具有由 Woronowicz C^*-代数确定的最大分布对称性。这为紧量子群的分类建立了一个概率框架。此外，我们对经典概率和自由概率背景下，所有在源自紧矩阵量子群的分布对称性下保持不变的 *-随机变量的 de Finetti 型定理进行了分类。我们的结果表明，在这些背景下仅存在有限多种德·菲内蒂定理类型，而相关的（量子）群范畴正是 Banica 和 Speicher 引入的易（量子）群。

1. Introduction

经典的元素置换群 S_n of n 和作用于 n 维空间上的正交群 O_n，在随机变量 n $x_1, \cdots, x_n$ 上有自然作用。对于 $\sigma \in S_n$，我们可以将 x_i 发送到 $x_{\sigma(i)}$；而对于$n\sigma = (q_{i,j})_{i,j=1,\cdots,n} \in O_n$，我们可以将 x_i 发送到 $\sum_{k=1} q_{i,k}x_k$。如果随机变量的联合分布在相应群的作用下保持不变，则称其具有可交换性（或正交性）。对于可交换性，我们有

$$(x_1, \cdots, x_n) \overset{d}{=} (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

对所有 $\sigma \in S_n$，而对于正交性，我们有

$$(x_1, \cdots, x_n) \overset{d}{=} (\sum_{k=1}^{n} q_{1,k}x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} q_{n,k}x_k)$$

对所有 $\sigma = (q_{i,j})_{i,j=1,\cdots,n} \in O_n$·，只要假设所有有限子序列都具有给定性质，这两种关于有限个随机变量的对称性便可推广到随机变量的无限序列。注意，通过令 $\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j=1,\cdots,n}$，也可以用矩阵运算将可交换性表述为正交性。基于这一观察，我们可以利用对 $n \times n$ 矩阵中元素进行的矩阵运算，引入可交换性和正交性之外的随机变量分布对称性。给定实数域上的两个 $n \times n$ 矩阵 $g = (g_{i,j})$ 和 $h = (h_{i,j})$，若

$$(x_1, \cdots, x_n) \overset{d}{=} (\sum_{k=1}^{n} g_{1,k}x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} g_{n,k}x_k)$$

and

$$(x_1, \cdots, x_n) \overset{d}{=} (\sum_{k=1}^{n} h_{1,k}x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} h_{n,k}x_k),$$

then

$$\begin{aligned}(x_1,\cdots,x_n) &\overset{d}{=} (\sum_{k=1}^{n} g_{1,k}x_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n} g_{n,k}x_k)\\ &\overset{d}{=} (\sum_{l=1}^{n} h_{1,l}\sum_{k=1}^{n} g_{l,k}x_k,\cdots,\sum_{l=1}^{n} h_{n,l}\sum_{k=1}^{n} g_{l,k}x_k)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}(hg)_{1,k}x_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n}(hg)_{n,k}x_k\right),\end{aligned}$$

其中 $(hg)_{i,j}$ 是 hg 的第 (i,j) 个元素。因此，$(x_1,\cdots,x_n)$ 的联合分布在由 g 和 h 生成的半群的矩阵运算下保持不变。另两种重要的分布对称性，即平稳性和可扩展性，也可以通过对由 $(\delta_{i,i+1})_{i,j\in N}$ 和 $\{(\delta_{i,f(i)})_{i,j\in N}|f$ 生成的无限维矩阵半群进行矩阵运算来定义： $\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f$ 严格递增 $\}$，分别。可交换性的研究可追溯至 20 世纪 30 年代，当时德·菲内蒂证明，取值于 $\{0,1\}$ 的无限可交换随机变量序列是条件独立同分布的。随后，Hewitt 和 Savage 将这一结果推广到取值于紧豪斯多夫空间的随机变量 [13]。另一方面，Freedman 研究了正交随机变量序列，并证明具有这一性质的无限序列是条件独立高斯族 [12]。对于可扩展性，Ryll-Nardzewski 证明了一个推广的德·菲内蒂型定理：无限可扩展随机变量序列是条件独立同分布的。

问题 1.1. 对于高斯以外的分布，我们是否也有德·菲内蒂型定理？此外，对于给定的（无限维）矩阵半群，我们是否也有德·菲内蒂型定理?

作为一种非经典概率理论，非交换概率由冯·诺伊曼于二十世纪三十年代初提出。粗略地说，在非常一般的非交换概率框架中，随机变量的集合被一个（非交换）代数取代，称为概率空间，而期望则被线性泛函取代。Voiculescu 为解决自由群冯·诺伊曼代数的同构问题而引入的自由独立性，是非交换概率中独立关系的一种量子类比。值得注意的是，基于结合律和混合矩通用计算规则这两项自然要求，随机变量仅有两种幺正普适独立关系：经典独立性和自由独立性 [23]。这里，普适独立关系是指：概率空间上的期望泛函完全由满足给定关系的子概率空间上的期望泛函所确定。非交换概率中的独立关系比经典概率中的更为复杂。事实上，如果不要求普适关系是幺正的，就会出现另一种独立类型，即布尔独立性 [26]。如果不要求结合律，我们还会遇到无穷多种满足一种称为条件独立性的共同弱条件的独立关系 [14]。此外，我们能够构造非交换随机变量的无限可交换序列，使其满足无穷多种对称普适独立关系[14]。因此，在非交换概率中，经典可交换性无法像在经典情形中那样有条件地确定一种普适独立关系。即使将可交换性加强为正交性，我们仍无法得到任何普适独立关系的德·菲内蒂型刻画。例如，无限序列的 q-高斯随机变量虽然正交，却不满足任何一种共同的普适独立关系 [6]。在非交换概率中，关于可交换性的德·菲内蒂型定理如下：如果由随机变量可交换序列生成的概率空间具有良好的性质，例如是带有忠实正规态的 W*概率空间，那么这些随机变量就是条件独立的 [15]。要刻画一种给定的普适独立关系（例如自由性），需要比经典可交换性更强的分布对称性。

1987年，Woronowicz 引入了紧矩阵量子群的概念，它为非交换结构 [36] 提供了对称性。给定一个李群 $G\subset M_n(\mathbb{C})$，根据魏尔斯特拉斯定理， G 上的连续函数代数 $C(G)$ 由 $\{u_{i,j}|i,j,=1,\cdots,n\}$ 生成，其中 $u_{i,j}(g)=g_{i,j}$ 对于 $g=(g_{i,j})\in M_n(\mathbb{C})$。映射 $\Delta(u_{i,j})=\sum u_{i,k}\otimes u_{k,j}$ 定义了从 $C(G)$ 到 $_{k=1}$ 的同态

$C(G) \otimes C(G)$，称为余乘法。考虑由元素 $\{u_{i,j} | i, j, = 1, \cdots, n\}$ 生成的非交换 C^*-代数 $\mathcal{A}$，其上定义良好的余乘法 $\Delta(u_{i,\ j}) = \sum u_{i,\ k} \otimes u_{k,\ j}$ 从 $_{k=1}\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{A}$，并满足其他一些条件，便可得到紧矩阵量子群的概念。在这一框架下，Wang 引入了置换群和正交群的量子类似物 $\mathcal{A}_s(n)$ 和 $\mathcal{A}_o(n)$。与经典李群 $G \subset M_n(\mathbb{C})$ 相关的分布对称性，可以通过矩阵元函数 $u_{i,\ j} \mid i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$ 加以扩展。因此，由 $\mathcal{A}_s(n)$ 和 $\mathcal{A}_o(n)$ 生成的分布对称性应用于非交换概率中，分别称为量子可交换性和量子正交性。

K¨ostler 和 Speicher 发现，量子可交换性可用于刻画自由性。事实上，他们证明，在带有忠实正规态的 W^*-概率空间中，无限序列的非交换自伴随机变量是量子可交换的，当且仅当这些随机变量同分布，且相对于到其尾代数上的条件期望是自由的 [16]。之后，Curran [8]证明了非自伴随机变量的德·菲内蒂定理的自由类比，也证明了与 Wang 的量子正交群相关的 Freedman 结果的自由类比[9]。由此自然引出一个问题：

问题 1.2。 对于自由高斯以外的分布，是否也有德·菲内蒂型定理？这些定理是什么？

要回答问题（1.1）和问题（1.2），我们当然需要考察置换群和正交群（包括量子群）以外的矩阵群和矩阵量子群。在 [3], 通过考察由某些分拆张成的张量范畴——这些分拆来自 S_n的张量范畴——Banica 和 Speicher 引入了易群和易量子群的概念。结合 Weber 的一项工作 [35], ，我们知道，在（包含端点的） S_n 与 O_n 之间有六个易群，在（包含端点的） A_s（n）与 A_o（n）之间有七个易量子群。在 [2], Banica、Curran 和 Speicher 在经典概率中发现了除原始德·菲内蒂定理和 Freedman 的结果之外的两个德·菲内蒂型定理，也在自由概率中发现了量子可交换情形和量子正交情形之外的两个自由德·菲内蒂型定理。之后，作者证明，在自伴情形下，经典概率中恰有四个德·菲内蒂型定理，自由概率中也恰有四个德·菲内蒂型定理[17]。这表明，不同的矩阵群或矩阵量子群可能产生相同的德·菲内蒂定理。此外，对于 [17], 中的每个德·菲内蒂型定理，都存在一种最大分布对称性：如果随机变量除了满足给定的分布对称性之外，还满足更多分布对称性，那么该德·菲内蒂定理便不成立。此外，最大分布对称性由易群或易量子群表示。因此，无限序列随机变量的最大分布对称性（量子）群的分类，比易（量子）群的分类更粗。

本文对经典概率与自由概率中 $*$-随机变量的所有德·菲内蒂型定理进行了分类。我们发现，在这些情形下，能够导出非平凡德·菲内蒂定理的最大分布对称性由酉群和量子酉群给出。因此， $*$-随机变量的德·菲内蒂定理所对应的最大分布对称性来自介于（量子）置换群与（量子）酉群之间的（量子）群。

在 [29, 28], ，Tarrago 和 Weber 对自由情形和群情形中的酉易（量子）群进行了分类。与自伴情形类似，我们将看到， $*$-随机变量的最大分布对称性由 Tarrago 和 Weber 所确定的某些易群或易量子群表示。对于满足特定泛关系的量子群，我们将采用与 [29, 28] 类似的记号。

基于随机变量经典独立或自由独立这一假设，我们得到以下关于有限序列的 de Finetti 型定理。

定理 1. 设 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 是一个取值于 $\mathcal{B}$ 的概率空间。

A. 自由情形：假设 x_1、$\cdots$、$x_n \in \mathcal{M}$ 自由独立。那么，(1) x_i's 同分布，当且仅当 (x_1、$\cdots$、x_n) 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{S}^+$、$n)$- 不变。

(2) x_i's 是同分布的正交元，当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{O}^+,n)$-不变。(3) x_i's 是同分布的平移正交元，当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{B}_s^+,n)$-不变。(4) x_i's 是同分布的对称元，当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{H}_s^+,n)$-不变。(5) x_i's 是同分布的 m-酉元（对于 $m\geq 3$），当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{H}_m^+,n)$-不变。(6) x_i's 是同分布的自由酉元，当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{H}_0^+,n)$-不变。(7) x_i's 是同分布的 R-对角元，当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{H}'^+,n)$-不变。(8) x_i's 是同分布的平移圆元，当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{B}^+,n)$-不变。(9) x_i's 是同分布的圆元，当且仅当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{U}^+,n)$-不变。

B. 经典情形：设 $\mathcal{M}$ 是一个交换概率空间，且 x_1、$\cdots$、$x_n\in\mathcal{M}$ 条件独立。那么，(1) x_i 同分布，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{S}$、$n)$ 不变。(2) x_i 是同分布的正交元素，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{O}$、$n)$ 不变。(3) x_i 是同分布的平移正交元，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{B}_s$、$n)$ 不变。(4) x_i 是同分布的对称元，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{H}_s$、$n)$ 不变。(5) 对于 $m\geq 3$，x_i 是同分布的 m- 酉元，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{H}_m$、$n)$ 不变。(6) x_i 是同分布的酉元，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{H}_0$、$n)$ 不变。(7) x_i 是同分布的平移高斯元，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{B}$、$n)$ 不变。(8) x_i 是同分布的高斯元，当且仅当 $(x_1$、$\cdots$、$x_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上关于 $C(\mathcal{U}$、$n)$ 不变。

可以看出，上述定理在纯代数框架下成立。自由情形与经典情形的一个区别是，经典情形中不存在 R-对角元。

对于随机变量的无限序列，其分布对称性由一列大小为 n 的（量子）群 $\mathcal{A}=(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 给出。对于前一定理中出现的、具有相同性质且大小为 n 的量子群序列 $C(\mathcal{A},\ n)$，我们记作 $\mathcal{A}=(C(\mathcal{A},\ n))_{n\in\mathbb{N}}$，例如 $\mathcal{S}^+=(C(\mathcal{S}^+,\ n))_{n\in\mathbb{N}}$。随机变量可交换序列的两个简单例子是：(1) 独立同分布（i.i.d.）随机变量；(2) 完全相同的随机变量。证明德·菲内蒂型定理的一种粗略思路，是将可交换序列中的 i.i.d. 部分与相同部分分离。为了分析相同部分，可以将随机变量的指标移至无穷远处 [15]，或者取与（量子）群上的 Haar 态相关联的有限序列的平均值之极限 [8]。这两种方法都能达到相同的目的：确定不变尾代数，（量子）群在其上平凡作用。因此，分布对称性也适用于经典独立或自由独立的算子值随机变量。结合 Curran 关于 $*$-随机变量在 W^*-概率空间中的可交换序列的德·菲内蒂型定理，我们得到以下结果。

定理 2. 设 $(\mathcal{M},\phi)$ 是一个 W^*-概率空间，ϕ 是正规忠实的，且 $\mathcal{M}$ 由无限序列的随机变量 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 生成。假设 (x_i) 的联合分布是 $\mathcal{A}$-不变的，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{S}^+$、$\mathcal{O}^+$、$\mathcal{B}_s^+$、$\mathcal{H}_s^+$、$\mathcal{B}^+$、$\mathcal{H}_m^+$、$\mathcal{H}_0^+$、$\mathcal{H}'^+$、$\mathcal{U}^+$、$\mathcal{S}$、$\mathcal{O}$、$\mathcal{B}_s$、$\mathcal{H}_s$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{H}_m$、$\mathcal{H}_0$、$\mathcal{U}$ 之一。那么，存在

一个含幺 W^*-子代数 $\mathcal{B}$ 以及一个保持 ϕ 的条件期望 $\mathbb{E}: \mathcal{M} \to \mathcal{B}$，使得以下结论成立：

A. F自由情形:

(1) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{S}^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值分布。(2) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{O}^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值正交分布。(3) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_s^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值移位正交分布。(4) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{H}_s^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值分布，使得 x_i、$-x_i$ 同分布。(5) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{B}^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值移位圆分布。(6) 若对于 $m \geq 3$ 有 $\mathcal{A} = \mathcal{H}_m^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值m-酉分布。(7) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{H}_0^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值自由酉分布。(8) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{H}'^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值 R-对角分布。(9) 若有 $\mathcal{A} = \mathcal{U}^+$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，并具有同分布的 $\mathcal{B}$ 值圆分布。

B. 经典情形：假设 $\mathcal{M}$ 是交换的。在这种情况下，$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是经典复值随机变量。

(1) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{S}$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立且同分布。(2) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{O}$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立，且具有相同的正交分布。(3) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_s$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立，且具有相同的平移正交分布。(4) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{H}_s$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立且同分布，使得 $x_i, -x_i$ 同分布。(5) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立，且具有相同的平移高斯分布。(6) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{H}_m$，对于 $m \geq 3$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立，且具有相同的 m-酉分布。(7) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{H}_0$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立，且具有相同的酉分布。(8) 若 $\mathcal{A} = \mathcal{U}$，则 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中给定 $\mathcal{B}$ 后条件独立，且具有相同的高斯分布。

我们将看到，定理 2 依赖于将量子对称性传递到算子值联合分布上，而这以条件期望保持 ϕ且 ϕ忠实为基础。事实上，在更一般的情形下，只要假设 ϕ 的 GNS表示是忠实的，条件期望便存在，这涵盖了更多有趣的例子，见 [10, 11]。

设 $X = (x_1, \cdots,)$ 是带有忠实态ϕ的概率空间中的一个随机变量无限序列。则可以如下定义其分布对称集：它是由紧量子群构成的序列族

$$\mathcal{DS}(X, \phi) = \{A = (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} | (x_1, \cdots, x_n) \text{ is } \mathcal{A}_n - \text{invariant for all } n\}.$$

另一方面，给定一列维数为 n 的紧量子群 $A = (\mathcal{A}_n)_{n=1,\cdots}$，我们可以如下定义随机变量无限序列的 $\mathcal{A}$-不变族

$$\mathcal{JD}(A) = \{(X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \phi) | (x_1, \cdots, x_n) \text{ is } \mathcal{A}_n - \text{invariant for all } n\}.$$

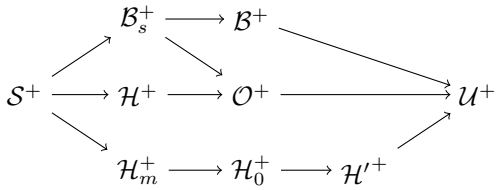
我们将看到，来自带有忠实态的概率空间的有限可交换随机变量序列，无论其期望是否非零或协方差是否为零，都在某个极大（量子）群下保持不变。因此，对于随机变量的无限（量子）可交换序列 $X=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$\mathcal{DS}(X,\phi)$ 在以下意义下有极大元 $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_n)$：对于所有 $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_n)\in\mathcal{DS}(X,\phi)$，都有 $\mathcal{B}_n\subset\mathcal{A}_n$ 对所有 n。为方便起见，将 $\mathcal{DS}(X,\phi)$ 记作 $=\mathcal{A}$。我们确定交换随机变量和量子可交换随机变量的所有可能极大元 $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_n)$。

定理 3. 设 $(\mathcal{M},\phi)$ 是一个 W^*-概率空间，ϕ 是正规忠实的，且 $\mathcal{M}$ 由一个非零随机变量无限序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 生成。若 $X=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的 $*$-联合分布在 $\mathcal{A}$ 下不变，其中 $\mathcal{A}=(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是关于 n 的一列紧矩阵量子群，则有以下结论：

A. 自由情形：若 $\mathcal{S}^+\subset\mathcal{DS}(X,\ \phi)$，则 $\mathcal{DS}(X,\ \phi)$ 取值于 $\mathcal{S}^+$, $\mathcal{O}^+$, $\mathcal{B}_s^+$, $\mathcal{H}_s^+$, $\mathcal{B}^+$, $\mathcal{H}_m^+$, $\mathcal{H}_0^+$,$\mathcal{H}'^+$, $\mathcal{U}^+$。B. 经典情形：若 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{DS}(X,\ \phi)$ 且 $\mathcal{M}$ 是交换的，则 $\mathcal{DS}(X,\ \phi)$ 取值于 $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$,$\mathcal{B}_s$, $\mathcal{H}_s$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{U}$。

上述定理表明，对于无限序列，自由概率和经典概率中有限多种分布可以由德·菲内蒂型定理刻画。此外，上述定理中的所有量子群和经典群都为相应的分布提供了最大分布对称性。

下图展示了自由概率中这些最大分布对称性之间的关系。对于经典概率，该图几乎完全相同，只需去掉量子符号，而 $\mathcal{H}'^+$ 没有经典对应物。



值得一提的是，在 [4], 中，作者使用酉对偶群来定义分布对称性；在该群中，量子群到张量积的余乘映射被替换为到自由积的映射。酉对偶群远大于 Wang量子酉群。因此，即使对于有限序列，在这种对称性下保持不变也意味着具有自由性。

除第一节引言外，本文其余部分安排如下。第2节回顾经典概率、自由概率和酉量子群中的必要概念与结果。

第3节将证明，所有随机变量有限序列都具有由量子半群产生的最大分布对称性。此外，如果这些随机变量的期望非零或协方差为零，那么其最大分布对称性由量子酉群给出。

在第4节中，我们建立了出现在德·菲内蒂型定理中的群和量子群所满足的普适条件。我们将看到，这些普适条件定义了普适的 C^*-双代数，并自然地成为紧量子群。此外，我们还将给出具体的余表示，以证明所有这些普适量子群彼此不同。

在第5节中，我们介绍累积量消失的随机变量，并给出标量情形下的例子。

在第6节中，我们证明定理 1 和定理 2。

在第7节中，我们探讨量子群泛关系的性质，以建立定理 3。

在第8节中，我们证明定理 3。

第9节包含总结性评论与说明。

2. Definitions and Notation

我们首先介绍算子值自由概率理论的基本概念，尤其着重于其在 [24] 中得到充分发展的组合方面。在标量值情形中，可通过将条件期望替换为线性泛函来调整定义和结果，参见 [20, 31]。

定义 2.1. 一个 $\mathcal{B}$值概率空间 $(\mathcal{M},\mathbb{E})$ 由一个含幺 $*$-代数 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{A}$ 的一个 $*$-子代数 $\mathcal{B}$（其中包含 $1_{\mathcal{A}}$）以及一个含幺 $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ 双模线性映射 $\mathbb{E}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 组成，即 $\mathbb{E}[1_{\mathcal{A}}]=1_{\mathcal{A}}$, $\mathbb{E}[a_1+a_2]=\mathbb{E}[a_1]+\mathbb{E}[a_2]$ 和

$$\mathbb{E}[b_1a_1b_2]=b_1\mathbb{E}[a_1]b_2,$$

对所有 $a_1,a_2\in\mathcal{A}$, $b_1,b_2\in\mathcal{B}$。 $\mathcal{M}$ 中的元素称为 $\mathcal{B}$值随机变量，或简称随机变量。

当 $\mathcal{B}=\mathbb{C}$， $(\mathcal{A},\mathbb{E})$ 简称为非交换概率空间。此外，如果 $\mathcal{M}$ 是冯·诺依曼代数，且 $\mathbb{E}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的正规态，则 $(\mathcal{A},\mathbb{E})$ 是一个 W^*-概率空间。如果 $\mathbb{E}[xx^*]=0$ 蕴含 $x=0$，则称 $\mathbb{E}$ 忠实。本文假设 $\mathbb{E}$ 忠实，但不一定是迹态，即一般而言 $\mathbb{E}[xy]\neq\mathbb{E}[yx]$ 。如果 $\mathcal{A}$ 是交换代数，则称 $(\mathcal{A},\mathbb{E})$ 为交换概率空间。

以 下列示例说明了前述定义与经典概率之间的关系 .

例 2.2. 设 Ω $\Sigma,\mu)$ 是一个经典概率空间，且 $\mathcal{F}\subset\Sigma$ 是一个 σ-子代数。

(1) 数对 $(L^\infty(\mu)$ $\mathbb{E})$ 是一个交换概率空间，其中 $L^\infty(\mu)$ 是有界Σ-测度函数构成的代数，而 $\mathbb{E}$ 是期望泛函 $\mathbb{E}(f)=\int f d\mu$。 (2) 对于 $1\le p\le\infty$，令 $L^p(\mu)$ 为具有有限 p阶矩的随机变量集合。那么，$L(\mu)=\bigcap_{p\in\mathbb{N}} L^p(\mu)$ 是一个代数，且 $(L(\mu)$ $\mathbb{E})$ 是一个交换概率空间。(3) 设 $\mathcal{M}=L^\infty(\mu)$，并令 $\mathcal{B}=L^\infty(\mu|_{\mathcal{F}})$ 为 Ω 上有界 $\mathcal{F}$-可测函数构成的子代数。那么，$(\mathcal{M},\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}])$ 是一个 $\mathcal{B}$-值概率空间。

在实非交换情形下，即 $\mathcal{M}$ 是一个非交换代数，为了研究随机变量与来自 $\mathcal{B}$的常数之积，我们需要考虑乘积的顺序。例如，通常而言， xyb, xby, ybx, ybx^* 是 $\mathcal{M}$ 中的不同元素。此外，由于期望定义在由这些随机变量生成的代数上，我们的非交换随机变量具有各阶有限混合矩。为了研究 $\mathcal{M}$中的元素，我们引入以下带有 $\mathcal{B}$中系数的非交换多项式 $*$-代数。

记号 2.3. 给定一个指标集 $\mathcal{I}$，我们用 $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(\mathcal{B})=\mathcal{B}\langle t_i,t_i^*:i\in\mathcal{I}\rangle$ 表示由 $\mathcal{B}$、不定元 $\{t_i|i\in\mathcal{I}\}$ 及其伴随元 $\{t_i^*|i\in\mathcal{I}\}$自由生成的 $*$-代数。若$\mathcal{I}=\{1,\cdots,n\}$，则令 $\mathcal{Q}_n(\mathcal{B})=\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(\mathcal{B})$；若 $\mathcal{B}=\mathbb{C}$，则令 $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}=\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(\mathcal{B})$。

根据 $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(\mathcal{B})$ 的泛性质，对于 $\mathcal{B}$-值概率空间 $(\mathcal{M},\ \mathbb{E})$ 中的任意随机变量族 $x=(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$，存在唯一的 $*$-同态 $ev_x:\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(\mathcal{B})\to\mathcal{M}$，使得 $ev_x(t_i)=x_i$ 且$ev_x(b)=b$ 对所有 $b\in\mathcal{B}$. 均成立。我们将 $ev_x(p)$ 记为 $p(x)$，其中 $p\in\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(\mathcal{B})$。

定义 2.4。 设 $x=(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{B}$-值概率空间 $(\mathcal{M},\ \mathbb{E})$ 中的随机变量族。 x 的联合分布是一个映射 $\mathbb{E}_x:\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}(\mathcal{B})\to\mathcal{B}$，定义为

$$\mathbb{E}_x(p)=\mathbb{E}(p(x)).$$

当 $\mathcal{I}=\{i\}$ 仅包含一个元素时， $\mathbb{E}_{x_i}$ 称为 x_i 的分布。

注意，由于 $\mathbb{E}$ 是 $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ 双模线性的， $\mathbb{E}_x$ 也是 $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ 双模线性的。因此，$(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 的联合分布由其联合矩决定

$$\mathbb{E}[b_0x_{i_1}^{d_1}b_1x_{i_2}^{d_2}\cdots b_{k-1}x_{i_k}^{d_k}b_k],$$

对于 $k\in\mathbb{N}$, b_0，$\cdots$，$b_k\in\mathcal{B}$, i_1，$\cdots$，$i_k\in\mathcal{I}$和 d_1，$\cdots$，$d_k\in\{1,*\}$。

2.1. **自由概率**。 现在，我们转而介绍 $\mathcal{B}$ 值概率中的独立关系。

定义 2.5. 设 $x=(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 是一个取值于 $\mathcal{B}$ 的概率空间 $(\mathcal{M},\mathbb{E})$ 上的随机变量族，且 $\mathbb{E}_x$ 是 x的联合分布。

(1) 若相对于 $\mathbb{E}$ 满足以下条件，则称这些变量条件独立：

$$\mathbb{E}_x[p_1\cdots p_k]=\mathbb{E}_x[p_1]\cdots\mathbb{E}_x[p_k],$$

对任意 $p_j\in\mathcal{B}\langle t_{i_j},t_{i_j}^*\rangle$，只要 $j=1,\cdots,k$ 和 $i_1,\cdots,i_k\in\mathcal{I}$ 两两不同，便有上述结论。

(2) 若满足以下条件，则称这些变量在 上带合并自由，或相对于 $\mathbb{E}$自由：

$$\mathbb{E}_x[p_1\cdots p_k]=0,$$

对任意 $p_j\in\mathcal{B}\langle t_{i_j},t_{i_j}^*\rangle$，只要 $\mathbb{E}_x[p_j]=0$ 对 $j=1,\cdots,k$ 和 $i_1,\cdots,i_k\in\mathcal{I}$ 均满足$i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_k$。

注 2.6. 一般而言，条件独立性并非 Speicher 意义下的普适概念 [23], ，因为联合分布 $\mathbb{E}_x$ 未必仅由 $\mathbb{E}_{x_i}$的分布决定，即使 $\mathcal{B}=\mathbb{C}$也是如此。例如，条件独立关系无法提供关于联合矩$\mathbb{E}[x_1x_2x_1]$的信息。事实上，基于条件独立性假设 [14]，定义 $\mathbb{E}_x$ 的方法有无穷多种。

然而，如果我们进一步假设 $\mathcal{M}$ 是一个交换代数，那么 $\mathbb{E}_x$ 就完全由 $\mathbb{E}_{x_i}$的分布决定，因为随机变量的乘积可以任意重新排列。在这种情况下，我们便得到概率论中经典的条件独立性概念。

相比之下，自由独立性提供了一种递归方法，通过逐步降低非交换多项式的次数，利用各个 x_i的分布来确定$(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 的联合分布。

此外，如果 $\mathcal{M}$ 是交换的，且$(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 在 $\mathcal{M}$中自由，那么至多一个 x_i 位于 $\mathcal{B}$之外，其余的都来自 $\mathcal{B}$。

2.2. **分拆**。 在交换概率空间中的算子值条件独立性和自由独立性，都可以用 Speicher [24]发展的组合理论来刻画；另见[20]。这些理论主要依赖于非交叉分拆和累积量的概念，我们将在下文介绍。

定义 2.7。 设 $\mathcal{S}$ 是一个有序集。

(1) $\mathcal{S}$的一个分拆 π是由若干两两不相交的非空集合 $V_1,\cdots,V_r$组成的族，其并集为 $\mathcal{S}$。集合$V_1,\cdots,V_r$称为 π的块。 S的所有分拆构成的集合记为 $\mathcal{P}(\mathcal{S})$。(2) 给定两个分拆 π,σ，若 π 的每个块都包含于 σ的某个块中，我们称 $\pi\leq\sigma$ 。(3) 若不存在四元组 (s_1,s_2,r_1,r_2)，使得 $s_1<r_1<s_2<r_2$, $s_1,s_2\in V$, $r_1,r_2\in W$且 V,W是 π的两个不同块，则称分拆 $\pi\in\mathcal{P}(\mathcal{S})$为非交叉分拆。 $\mathcal{S}$ 上的非交叉分拆族记为 $NC(\mathcal{S})$。(4) 设 $\mathcal{I}$为指标集， $\tilde{\mathbf{i}}=(i_1,\cdots,i_k)\in\mathcal{I}^k$是取自 $\mathcal{I}$的指标序列，且 $[k]=\{1,\cdots,k\}$是带有自然序的 k-整数集合。我们将 $\ker\mathbf{i}$ 记为 $\mathcal{P}([k])$中的一个元素，其块为以下关系的等价类

$$s\sim t\Leftrightarrow i_s=i_t$$

为了刻画本文中将出现的 $*$-随机变量的特定分布，我们引入以下与 $\{1,*\}$ 序列相关的定义。

定义 2.8。 令 $[k]=\{1,\cdots,k\}$ 和 $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_k)$ 为来自 $\{1,*\}$ 的一个由 $\mathbf{k}$ 个元素组成的序列。因此，可以利用 $NC(k)$ 中的分拆来对 $\mathbf{d}$

(1) 如果 $\pi\in NC(k)$ 满足：对于 π 的每个块， $*$ 的数量与 $\mathbf{1}$ 的差可被 m 整除，那么我们称 π 关于 $\mathbf{d}$ 是 m-可整除的。关于 $\tilde{\mathbf{d}}$ 的 m-可整除非交叉划分集合记作 $NC^{\tilde{\mathbf{d}},m}(k)$。

(2) 如果 $\pi \in NC(k)$ 满足：对于 π 的每个块，$*$ 的数量与 1 的数量相等，那么我们称 π 关于 $\mathbf{d}$ 是 ∞-可整除的。关于 $\tilde{\mathbf{d}}$ 的 ∞-可整除非交叉划分集合记作 $NC^{\tilde{\mathbf{d}},\infty}(k)$。(3) 如果 $\pi \in NC(k)$ 满足：在 π 的每个块中，$*$ 与 1 交替出现且次数相等，那么我们称 π 关于 $\mathbf{d}$ 是交替的。关于 $\mathbf{d}$ 的交替分拆集合记作 $NC^{\mathbf{d}}(k)$。(4) 如果 $\pi \in NC_2(k)$ 满足：π 的每个块都包含 $*$ 和 1，那么我们称 π 关于 $\mathbf{d}$ 是交替配对分拆。关于 $\mathbf{d}$ 的交替配对分拆集合记作 $NC_2^{\mathbf{d}}(k)$。

注 2.9。 给定整数 m_1，m_2 使得 m_1 整除 m_2，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\tilde{\mathbf{d}} \in \{1, *\}^k$，我们有

$$NC_2^{\tilde{\mathbf{d}}}(k) \subseteq NC^{\tilde{\mathbf{d}}}(k) \subseteq NC^{\tilde{\mathbf{d}},\infty}(k) \subseteq NC^{\tilde{\mathbf{d}},m_2}(k) \subseteq NC^{\tilde{\mathbf{d}},m_1}(k)$$

类似地，我们可以定义相应的 $\mathbf{d}$ 的分拆，以研究可交换随机变量的分布。

2.3. $\mathcal{B}$-泛函、累积量与矩。

定义 2.10。 设 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 为一个取值于 $\mathcal{B}$ 的概率空间。

(1) 一个取值于 $\mathcal{B}$ 的泛函是一个 k-线性映射 $\rho^{(k)}: \mathcal{M}^k \to \mathcal{B}$，满足

$$\rho^{(k)}(b_0 a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_k b_k) = b_0 \rho(a_1, b_1 a_2, \cdots, b_{k-1} a_k) b_k$$

对所有 $a_1, \cdots, a_k \in \mathcal{M}$ 和 $b_0, \cdots, b_k \in \mathcal{B}$。

(2) 若 $\mathcal{A}$ 是交换的。$\mathcal{B}$ 值 k-线性映射序列 $(\rho^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ 可扩展为取值于 $\mathcal{B}$ 的线性泛函 $\rho^{(\pi)}$，其中 $\pi \in P(k)$ 如下：

$$\rho^{(\pi)}(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{V\in\pi} \rho(V)(a_1, \cdots, a_k),$$

其中，若 $V = (i_1 < i_2 < \cdots < i_s)$ 是 π 的一个块，则

$$\rho(V)(a_1, \cdots, a_n) = \rho^{(s)}(a_{i_1}, \cdots, a_{i_s}).$$

(3) 给定取值于 $\mathcal{B}$ 的 k-线性映射序列 $(\rho^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$，对于 $\pi \in NC(k)$，我们可以递归地定义 $\rho^{(\pi)}: \mathcal{A}^{\otimes_{\mathcal{B}} k} \to \mathcal{B}$，如下所示：

$$\rho^{(\pi)}(a_1, \cdots, a_k) = \rho^{(\pi\setminus V)}(a_1, \cdots, a_l \rho^{(s)}(a_{l+1}, \cdots, a_{l+s}), a_{l+s+1}, \cdots, a_k)$$

其中 $V = (l+1, l+2, \cdots, l+s)$ 是 π 的一个区间块。

(4) 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$\mathcal{B}$-值矩函数 $E^{(k)}: \mathcal{A}^{\otimes_{\mathcal{B}} k} \to \mathcal{B}$ 定义为

$$E^{(k)}(a_1, \cdots, a_k) = \mathbb{E}[a_1 \cdots a_k].$$

(5) $\mathcal{B}$-值自由累积量函数 $\kappa^{(k)}: \mathcal{A}^{\otimes_{\mathcal{B}} k} \to \mathcal{B}$ 递归定义如下：

$$E^{(k)}(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\pi\in NC(k)} \kappa^{(\pi)}(a_1, \cdots, a_k)$$

根据 Speicher [24], ，以下关于累积量的消失条件刻画了自由性和经典独立性。

定理 2.11。 设 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 是一个 $\mathcal{B}$-值概率空间，且 $(x_i)_{i\in I}$ 是其中的一个随机变量族。

(1) 假设 $\mathcal{M}$ 是一个交换代数。若 $(x_i)_{i\in I}$ 在给定 $\mathcal{B}$ 的条件下独立，则

$$\rho^{(k)}(b_0 x_{i_1} b_1, x_2, \cdots, x_{i_k} b_k) = 0,$$

对于所有 $k \in \mathbb{N}$，只要存在某个 $1 \le j_1, j_2 \le k$，使得 $i_{j_1} \ne i_{j_2}$。

(2) $(x_i)_{i\in I}$ is f在……之上自由 $\mathcal{B}$ if

$$\kappa^{(k)}(b_0 x_{i_1} b_1, x_2, \cdots, x_{i_k} b_k) = 0,$$

对于所有 $k \in \mathbb{N}$，只要对于某个 $1 \le j_1$ $i_{j_1} \ne i_{j_2}$，$j_2 \le k$。

2.4. **紧量子群**。紧矩阵量子群的概念由 Woronowicz 在 [36] 中提出，随后在 [37]中进一步完善为以下等价定义。

定义 2.12. 对于 $n \geq 1$，紧矩阵量子群是一个含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$，并配有一个 C^*-同态 Δ，从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{A}$，满足

- $\mathcal{A}$ 由 n^2 个元素 $u_{i,j}$、$ij = 1$、$\cdots$、n生成
- 矩阵 $u = (u_{i,j})$ 和 $\bar{u} = (u_{i,j}^*)$ 在 $M_n(\mathcal{A})_n$中可逆
- $\Delta(u_{i,j}) = \sum u_{i,k} \otimes u_{k,j}{}_{k=1}$

若 $u = (u_{i,j})$，则紧量子群是酉的，因此 $\bar{u}_{i,j} = (u_{i,j}^*)$ 是 $M_n(\mathcal{A})$ 中的酉元。

设 $u^t = (u_{j,i})$ 是 u 的转置。由于 $\bar{u}$ 可逆，其共轭转置 $(\bar{u})^* = u^t$ 也可逆。

在 [1]中，$\mathcal{A}$ 被视为紧量子李群 G 上的连续函数集合，记作 $C(G)$，尽管一般而言 $\mathcal{A}$ 不一定是交换的。$\mathcal{A}$ 值矩阵 $u = (u_{i,j})$ 被称为 $\mathcal{A}$ 的余表示。我们将量子群 G 及其余表示 u 构成的二元组记作 (G, u)。(H, v) 的量子子群定义为一个二元组 (G, u)，满足存在一个 $*$同态 $\Phi\colon C(H) \to C(G)$，使得 $\Phi(v_{i,j}) = u_{i,j}, \forall i, j = 1, \cdots, n.$ 在此背景下，我们考虑 Wang 在 [34] 中引入的极大紧量子酉群 $C(\mathcal{U}^+, n)$。该量子群是由 $\{u_{i,j} | i, j = 1, \cdots, n\}$ 生成的普适 C^* 代数，并满足以下代数关系：

$$\sum_{k=1}^{n} u_{i,k} u_{j,k}^* = \sum_{k=1}^{n} u_{i,k}^* u_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i} u_{k,j}^* = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i} u_{k,j}^* = \delta_{i,j} 1.$$

余乘法是良定义的，因为 $(\Delta(u_{i,j}))$ 满足上述关系。事实上，我们将证明，只要求四个求和条件中的两个成立就足够了；其余两个将自动成立。

本文将研究自由概率中德·菲内蒂型定理的分布对称性，它们介于 Wang 在 [34] 中引入的以下两个基本量子群之间。

定义 2.13. 量子酉群和量子置换群：

(1) $C(\mathcal{U}^+, n)$ 是由 n^2 个元素 $u_{i,j}$ 生成的通用 C^*-代数，其中 $u = (u_{ij})$ 是 $M_n(C(\mathcal{U}^+, n))$ 中的酉元。(2) $C(\mathcal{S}^+, n)$ 是由 n^2 个正交投影 u_{ij} 生成的通用 C^*-代数，其中 $u = (u_{ij})$ $M_n(C(\mathcal{S}^+, n))$ 的任意一行或一列之和都是 $C(\mathcal{S}^+, n)$ 的单位元。

2.5. **随机变量的量子分布对称性 $*$-随机变量**。注意，给定量子群 $\mathcal{A}$ 关于 n 的余表示 $u = (u_{i,j})$，存在唯一的 $*$-同态 $\alpha_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{B}\langle t_k, t_k^* | 1 \leq k \leq n\rangle \to \mathcal{B}\langle t_k, t_k^* | k \in \mathbb{N}\rangle \otimes \mathcal{A}$，它将由 t_k、其伴随元 t_k^* 关于 $1 \leq k \leq n$ 以及代数 $\mathcal{B}$ 生成的代数中的元素映射到其与 $\mathcal{A}$ 的代数张量积，使得

$$\alpha_{\mathcal{A}}\left(t_i^d\right) = \sum_{k=1}^{n} t_k^d \otimes u_{k,i}^d$$

对于任意 $1 \leq k \leq n, d \in \{1, *\}$ 和 $\alpha_{\mathcal{A}}(b)$，对所有 $b \in \mathcal{B}$ 均有 $= b \otimes 1_{\mathcal{A}}$。现在，我们将此余作用应用于由 $\mathcal{A}$ 在非交换随机变量 n 上诱导的分布对称性。

定义 2.14。设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中的一个随机变量序列，且 $\mathcal{A}$ 是由 $u = (u_{i,j})$ 生成的紧量子群。若

$$(\mu_x \otimes id_{\mathcal{A}})(\alpha_{\mathcal{A}}(p)) = \mu_x(p) 1_{\mathcal{A}}$$

对于所有 $p \in \mathcal{B}\langle t_k, \ t_k \mid k = 1, \ \cdots, \ n\rangle$，其中 μ_x 是 $(x_1, \ \cdots, \ x_n)$ 的联合分布 .

更明确地说，随机变量序列 $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 是 $\mathcal{A}$-不变的，当且仅当

$$\sum_{1 \leq i_1, \cdots i_k \leq n} \mathbb{E}\left[b_0 x_{i_1} b_1 x_{i_2} \cdots b_{k-1} x_{i_k} b_k\right] \otimes u_{i_1,j_1} \cdots u_{i_k,j_k} = \mathbb{E}\left[b_0 x_{j_1} b_1 \cdots b_{k-1} x_{j_k} b_k\right] \otimes 1_{\mathcal{A}},$$

对所有 $1 \leqslant j_1, \cdots, j_k \leqslant n, b_0, \cdots, b_k \in \mathcal{B}$ 均成立。

无限序列随机变量的分布对称性（x_n）$_{n\geq 1}$ 由一列紧量子群刻画，适用于 $n \geq 1$。给定量子群的余表示 $u =$ （$u_{i,\ j}$），对于 n，$*$-同态 $\alpha_{\mathcal{A}}$ 自然延拓为 $\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}}$：$\mathcal{B}\langle t_k,\ t_k^* | k \in \mathbb{N}\rangle \to \mathcal{B}\langle t_k,\ t_k^* | k \in \mathbb{N}\rangle \otimes \mathcal{A}$，使得

$$\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}}\left(t_i^d\right) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n t_k^d \otimes u_{k,i}^d & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant n \\ t_i^d & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$d \in \{1, *\}$ 以及所有 $b \in \mathcal{B}$，$\alpha_{\mathcal{A}}$（b）$= b \otimes 1_{\mathcal{A}}$。为方便起见，我们将 $\alpha_{\mathcal{A}}$ 简记为 $\tilde{\alpha}_{\mathcal{A}}$。

定义 2.15。设 $x =$ （x_n）$_{n\geq 1}$ 是（$\mathcal{M}$，$\mathbb{E}$）中的无限序列随机变量，且 $\mathbb{A} =$（$\mathcal{A}_n$）$_{n\geq 1}$ 是 n 的一列紧量子群。若 x 是 $\mathbb{A}$-不变的，则

$$(\mu_x \otimes id_{\mathcal{A}_n})(\alpha_{\mathcal{A}_n}(p)) = \mu_x(p)1_{\mathcal{A}_n}$$

对所有的 $p \in \mathcal{B}\langle t_k, t_k \mid k \geq 1\rangle$，其中 μ_x 是 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的联合分布。

3. Maximal distributional symmetry for finite sequences of random variables

首先，我们将由量子群产生的分布对称性这一概念推广到与给定随机变量有限序列相关联的分布对称性。

定义 3.1. 设 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 是取值于 $\mathcal{B}$ 的概率空间 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 上的随机变量序列，并设 μ 是相对于 $\mathbb{E}$ 的 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 的联合分布。设 $\mathcal{A}$ 是由 $\{u_{i,j} | i, = 1, \cdots, n\}$ 生成的含幺 C^*-代数，并定义同态 α：$\mathcal{B}\langle X_1, \cdots, X_n\rangle \to \mathcal{B}\langle X_1, \cdots, X_n\rangle \otimes \mathcal{A}$，其由以下元素生成

$$\alpha(X_i) = \sum_{k=1}^n X_k \otimes u_{k,i}, \quad \alpha(b) = b \otimes 1_{\mathcal{A}}$$

对所有 $i = 1$，$\cdots$，n 和 $b \in \mathcal{B}$。我们称 $(x_i)_{i=1,\ \cdots,\ n}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的，如果

$$\mu[p] \otimes 1_{\mathcal{A}} = \mu \otimes id_{\mathcal{A}}(\alpha(p)),$$

对所有 $p \in \mathcal{B}\langle X_1,\ \cdots,\ X_n\rangle$。

命题 3.2。给定一个 $\mathcal{B}$ 值概率空间 $(\mathcal{M},\ \mathbb{E})$ 中的随机变量序列 $(x_i)_{i=1,\ \cdots,\ n}$，令 $\mathcal{A}$ 为由 $\{u_{i,j} | i, = 1, \cdots, n\}$ 生成的泛 C^*-代数，使得矩阵 $u = (u_{i,\ j})$ 在 $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ 中是酉的，且 $(x_i)_{i=1,\ \cdots,\ n}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的。那么，$\mathcal{A}$ 构成一个紧量子群。

证明。为了证明 $\mathcal{A}$ 构成一个紧量子群，我们需要证明余表示$u = (u_{i,\ j})$ 非空，并且映射 $\Delta(u_{i,\ j}) = \sum_{k=1}^n u_{i,\ k} \otimes u_{k,\ j}$ 在 $\mathcal{A}$ 上定义了一个余乘法。Since $\mathcal{A}$ contains包含通过将 $u_{i,j}$ 映射到 $\delta_{i,j}$得到的平凡表示，$u =(u_{i,j})$非空 y.

$_n$其次，根据Wang量子酉群的定义，$(\sum u_{i,k} \otimes u_{k,j})_{i,j=1,\cdots,n}$ 显然是酉的-$_{k=1}$

显然在 $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ 中。

设 $(d_1,\ \cdots,\ d_m)$ 是来自 $\{1, *\}$ 的一列 m 元素。那么，我们有

$$b_0 x_{j_1}^{d_1} b_1 x_{j_2}^{d_2} \cdots x_{j_m}^{d_m} b_m \otimes (\sum_{k_1=1}^n u_{j_1,k_1} \otimes u_{k_1,i_1})^{d_1} \cdots (\sum_{k_1=1}^n u_{j_m,k_m} \otimes u_{k_m,i_m})^{d_m}$$

$$= \sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^n b_0 x_{j_1}^{d_1} b_1 x_{j_2}^{d_2} \cdots x_{j_m}^{d_m} b_m \otimes \left(u_{j_1,k_1}^{d_1} \cdots u_{j_m,k_m}^{d_m}\right) \otimes \left(u_{k_1,i_1}^{d_1} \cdots u_{k_m,i_m}^{d_m}\right)$$

and

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\otimes Id_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\left[\sum_{j_1,\cdots,j_m,k_1,\cdots,k_m=1}^{n}b_0x_{j_1}^{d_1}b_1x_{j_2}^{d_2}\cdots x_{j_m}^{d_m}b_m\otimes\left(u_{j_1,k_1}^{d_1}\cdots u_{j_m,k_m}^{d_m}\right)\otimes\left(u_{k_1,i_1}^{d_1}\cdots u_{k_m,i_m}^{d_m}\right)\right]\\ =&\mathbb{E}\otimes Id_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\left[\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}b_0x_{k_1}^{d_1}b_1x_{k_2}^{d_2}\cdots x_{k_m}^{d_m}b_m\otimes 1_{\mathcal{A}}\otimes\left(u_{k_1,i_1}^{d_1}\cdots u_{k_m,i_m}^{d_m}\right)\right]\\ =&\mathbb{E}\otimes Id_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}}\left[\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}b_0x_{i_1}^{d_1}b_1x_{i_2}^{d_2}\cdots x_{i_m}^{d_m}b_m\otimes 1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}}\right].\end{aligned}$$

$_n$因此，族 $\{\sum u_{i,k}\otimes u_{k,j}\}$ 是 $(x_i)_{i=1,\ \cdots,\ n}$-不变的。根据 $\mathcal{A}$ 的泛性质，该族$_{k=1}$诱导出一个 $*$-同态 $\Delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{A}$，其定义为

$$\Delta(u_{i,j})=\sum_{k=1}^{n}u_{i,k}\otimes u_{k,j},$$

这表明 Δ 是 $\mathcal{A}$上的余乘法。 □

回顾一下，量子半群是一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$，配备了一个 $*$-同态 $\Delta\in\mathrm{Mor}(\mathcal{A},\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$，称为余乘法，并满足

$$(\Delta\otimes id_{\mathcal{A}})\,\Delta=(id_{\mathcal{A}}\otimes\Delta)\,\Delta.$$

如命题 3.2 所述，去掉 $u=(u_{i,\ j})$为酉的通用条件后，所得的通用 C^*-代数构成一个量子半群。

接下来，我们将说明，在某些情况下，$u=(u_{i,\ j})$在 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$中为酉的条件会自动成立，其中包括许多源自自由概率的有趣且著名的例子。

定义 3.3. $\mathcal{B}$-值概率空间$(\mathcal{M},\ \mathbb{E})$中的序列$(x_i)_{i=1,\ \cdots,\ n}$称为二阶可交换的，如果它们的一阶和二阶矩是可交换的。也就是说

$$\mathbb{E}[x_i]=\mathbb{E}[x_{\sigma(i)}],\quad \mathbb{E}[x_ibx_j]=\mathbb{E}[x_{\sigma(i)}bx_{\sigma(j)}]$$

对所有 $\sigma\in S_n$, $1\le i,\ j\le n$, $b\in\mathcal{B}$。

在非交换随机变量的联合分布语言中，$(x_i)_{i=1,\ \cdots,\ n}$ 在一个 $\mathcal{B}$ 值概率空间 $(\mathcal{M},\ \mathbb{E})$ 中是二阶可交换的，当且仅当

$$\mu[p]\otimes 1_{C(S,n)}=\mu\otimes id_{C(S,n)}(\alpha(p)),$$

对所有满足 $\deg\ p\le 2$ 的 $p\in\mathcal{B}\langle X_1,\ \cdots,\ X_n\rangle$。

引理 3.4. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^* 代数，且 $\{u_{i,j}|i,=1,\cdots,n\}\subset\mathcal{A}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,j}^*=\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}^*u_{k,j}=\delta_{i,j}1_{\mathcal{A}}$$

对所有 $i,\ j$。那么，$u=(u_{i,\ j})$ 在 $M_n(\mathcal{A})$ 中是酉的。

证明。注意到 $u^*u=1_{M_n(\mathcal{A})}$，$u$ 是 $M_n(\mathcal{A})$ 中的一个偏等距。如果 $uu^*<1_{M_n(\mathcal{A})}$，那么 uu^* 的对角元素之和小于 $n1_{\mathcal{A}}$。然而，uu^* 的对角元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_{i,j}u_{i,j}^*=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}u_{i,j}u_{i,j}^*=n1_{\mathcal{A}}.$$

因此，$u=(u_{i,\ j})$ 在 $M_n(\mathcal{A})$ 中是酉的。

□

命题 3.5。 设 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 是一个取值于 $\mathcal{B}$ 的概率空间 $(\mathcal{M},\ \mathbb{E})$ 上的二重可交换随机变量序列，并且 $\mathcal{A}$ 是由 $\{u_{i,j}|i,=1,\cdots,n\}$ 生成的含幺 C^*-代数，使得 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 具有 $\mathcal{A}$-不变性。假设以下条件之一成立:

(1) $\mathbb{E}[x_1]\neq 0$。(2) 对所有 $b\in\mathcal{B}$, $\mathbb{E}[x_1]=0$

和 $\mathbb{E}[x_1bx_2]=0$ 。

进一步假设 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 均非零且彼此不同，并且对于 $i\neq j$，存在 $b\in\mathcal{B}$ 使得 $\mathbb{E}[x_ibx_i^*]\neq\mathbb{E}[x_ibx_j^*]$。那么，矩阵 $u=(u_{i,j})$ 是 $M_n(\mathcal{A})$ 中的酉矩阵。

n证明。 情况 (1): 由于对于所有 $i\neq j$, $\mathbb{E}[x_i]\otimes 1_A=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[x_k]\otimes u_{k,i}$ 和 $\mathbb{E}[x_i]=\mathbb{E}[x_j]\neq 0$，我们有 $\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}=n1_{\mathcal{A}}$ 对所有 $i=1,\ ..,\ n$ 均成立。因此，对于所有 $i,\ j=1,\ \cdots,\ n$，有 $\sum_{k,l=1}^{n}u_{k,i}u_{l,j}^*=(\sum_{k=1}^{n}u_{k,i})(\sum_{l=1}^{n}u_{l,j}^*)=1_{\mathcal{A}},$ 。注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x_ibx_i^*]\otimes 1_{\mathcal{A}}&=\sum_{k,l=1}^{n}\mathbb{E}[x_kbx_l^*]\otimes u_{k,i}u_{l,i}^*\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[x_kbx_k^*]\otimes u_{k,i}u_{k,i}^*+\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\mathbb{E}[x_kbx_l^*]\otimes u_{k,i}u_{l,i}^*\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[x_1bx_1^*]\otimes u_{k,i}u_{k,i}^*+\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\mathbb{E}[x_1bx_2^*]\otimes u_{k,i}u_{l,i}^*\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 是二阶可交换的。因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x_ibx_i^*]\otimes 1_{\mathcal{A}}&=\mathbb{E}[x_1bx_1^*]\otimes\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,i}^*+\mathbb{E}[x_1bx_2^*]\otimes(\sum_{k,l=1}^{n}u_{k,i}u_{l,i}^*-\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,i}^*)\\&=\mathbb{E}[x_1bx_1^*]\otimes\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,i}^*+\mathbb{E}[x_1bx_2^*]\otimes(1_{\mathcal{A}}-\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,i}^*),\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}[x_1bx_1^*]\otimes(1_{\mathcal{A}}-\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,i}^*)=\mathbb{E}[x_1bx_2^*]\otimes(1_{\mathcal{A}}-\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,i}^*)$$

n对所有 $b\in\mathcal{B}$. 回顾一下，存在 $b\in\mathcal{B}$ 使得 $\mathbb{E}[x_1bx_1^*]\neq\mathbb{E}[x_1bx_2^*]$. 这意味着 $\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,i}^*=n1_{\mathcal{A}}$ 对所有 i。类似地，我们有 $\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}^*u_{k,i}=1_{\mathcal{A}}$.

另一方面，对于 $i\neq j$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x_ibx_j^*]\otimes 1_{\mathcal{A}}&=\sum_{k,l=1}^{n}\mathbb{E}[x_kbx_l^*]\otimes u_{k,i}u_{l,j}^*\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[x_kbx_k^*]\otimes u_{k,i}u_{k,j}^*+\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n}\mathbb{E}[x_kbx_l^*]\otimes u_{k,i}u_{l,j}^*\\&=\mathbb{E}[x_1bx_1^*]\otimes\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,j}^*+\mathbb{E}[x_1bx_2^*]\otimes(1_{\mathcal{A}}-\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,j}^*),\end{aligned}$$

这意味着

$$(\mathbb{E}[x_1bx_1^*]-\mathbb{E}[x_1bx_2^*])\otimes\sum_{k=1}^{n}u_{k,i}u_{k,j}^*=0$$

$_n$ $_n$对所有 $b \in \mathcal{B}$。由此可得 $\sum_{k=1} u_{k,i} u_{k,j}^* = 0$。类似地，$\sum_{k=1} u_{k,i}^* u_{k,j} = 0$.

情形（2）：若对所有 i， $\mathbb{E}[x_i] = 0$，且对所有 $i \neq j$， $\mathbb{E}[x_i b x_j] = 0$, $b \in \mathcal{B}$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x_i b x_i^*] \otimes 1_{\mathcal{A}} &= \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}[x_k b x_l^*] \otimes u_{k,i} u_{l,i}^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[x_k b x_k^*] \otimes u_{k,i} u_{k,i}^* + \sum_{k,l=1, k\neq l}^{n} \mathbb{E}[x_k b x_l^*] \otimes u_{k,i} u_{l,i}^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[x_1 b x_1^*] \otimes u_{k,i} u_{k,i}^*\end{aligned}$$

$_n$ $_n$因此 $\sum_{k=1} u_{k,i} u_{k,i}^* = 1_{\mathcal{A}}$ 对所有 i。类似地，我们有 $\sum_{k=1} u_{k,i}^* u_{k,i} = 1_{\mathcal{A}}$.

另一方面，对于 $i \neq j$ 和 $b \in \mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{E}[x_i b x_j^*] \otimes 1_{\mathcal{A}} &= \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}[x_k b x_l^*] \otimes u_{k,i} u_{l,j}^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[x_k b x_k^*] \otimes u_{k,i} u_{k,j}^* + \sum_{k,l=1, k\neq l}^{n} \mathbb{E}[x_k b x_l^*] \otimes u_{k,i} u_{l,j}^* \\ &= \mathbb{E}[x_1 b x_1^*] \otimes \sum_{k=1}^{n} u_{k,i} u_{k,j}^*\end{aligned}$$

$_n$ $_n$由此可得 $\sum_{k=1} u_{k,i} u_{k,j}^* = 0$。类似地，$\sum_{k=1} u_{k,i}^* u_{k,j} = 0$.

由引理 3.4， u =($u_{i,j}$) 在 $M_n(\mathcal{A})$ 中是酉的。 □

众所周知， q-高斯布朗运动 [6], 、混合 q-高斯布朗运动 [22], ，甚至满足更一般的变形交换关系 [7] 的随机变量，都满足命题 3.5 中的第二个条件。因此，这些例子的最大分布对称性来自量子酉群。

另一个有趣的例子是同分布的 ϵ-自由独立 [18, 27] 随机变量，它们满足命题 3.5 中的条件。因此，它们的分布对称性也来自量子酉群。事实上，这些例子的最大分布对称量子群至少包含 Speicher 和 Weber 的具有部分交换关系[25]的量子群。

另一方面，根据文献 [30, 36]，每个紧量子群 $\mathcal{A}$都存在一个 Haar 态 h ，使得对于 $\mathcal{A}$ 上的任意态 ρ ，都有（ $\rho \otimes h$ ） Δ = （ $h \otimes \rho$ ） Δ = ρ （ I ） h 。这一性质可推广至 $\mathcal{A}$ 的余表示 u = ($u_{i,\ j}$)。固定 j，考虑由 $\{u_{i,j} | i$ =1， $\cdots$， $k\}$ 生成的代数 $\mathcal{M}_j$ ，并将 $\mathcal{A}$ 的 Haar 态限制在 $\mathcal{M}$ 上。于是， $\{u_{i,j} | i = 1, \cdots, k\}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的。因此，每个余表示都包含在一个量子半群中，该量子半群源自一列随机变量所关联的最大分布对称性。总之，我们似乎可以建立一个用于分类紧量子群的概率框架。

4. Universal conditions for quantum groups

本节将研究 C^*-代数生成元所满足的普适条件，使得 C^*-代数成为紧量子群。设 $\mathcal{A}$ 为由 n^2 个 $\{u_{i,j} | i, j = 1, \cdots, n\}$ 生成的 C^*-代数，且 u = ($u_{i,\ j}$) 是酉的。根据定义 2.12， $\mathcal{A}$ 是量子群$_n$，当且仅当映射 $u_{i,\ j} \to \sum u_{i,\ k} \otimes u_{k,\ j}$ 可扩张为从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ 的同态。$_{k=1}$

引理 4.1。设 $\mathcal{A}$ 为一个 C^*-代数，$\{u_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\}\in\mathcal{A}$、$(d_1,\ \cdots,\ d_m)\in\{1,*\}^m$ 以及 $v_{i,j}=\sum_{k=1}^n u_{i,k}\otimes u_{k,j}\in\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{A}$。若

$$\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}^{d_1}u_{k,i_2}^{d_2}\cdots u_{k,i_m}^{d_m}=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_{m-1},i_m}1_{\mathcal{A}}$$

对于所有 $i_1,\ \cdots,\ i_m\in[n]$，则

$$\sum_{k=1}^n v_{k,i_1}^{d_1}v_{k,i_2}^{d_2}\cdots v_{k,i_m}^{d_m}=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_{m-1},i_m}1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}}$$

对于所有 $i_1,\ \cdots,\ i_m\in[n]$。

证明。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n v_{k,i_1}^{d_1}v_{k,i_2}^{d_2}\cdots v_{k,i_m}^{d_m}\\
=&\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j_1=1}^n u_{k,j_1}^{d_1}\otimes u_{j_1,i_1}^{d_1}\right)\cdots\left(\sum_{j_m=1}^n u_{k,j_m}^{d_m}\otimes u_{j_m,i_m}^{d_m}\right)\\
=&\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_m=1}^n\sum_{k=1}^n\left(u_{k,j_1}^{d_1}\cdots u_{k,j_m}^{d_m}\otimes u_{j_1,i_1}^{d_1}\cdots u_{j_m,i_m}^{d_m}\right)\\
=&\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_m=1}^n\left(\delta_{j_1,j_2}\cdots\delta_{j_{m-1},j_m}\otimes u_{j_1,i_1}^{d_1}\cdots u_{j_m,i_m}^{d_m}\right)\\
=&\sum_{j=1}^n\left(1_{\mathcal{A}}\otimes u_{j,i_1}^{d_1}\cdots u_{j,i_m}^{d_m}\right)\\
=&\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_{m-1},i_m}(1_{\mathcal{A}}\otimes 1_{\mathcal{A}})
\end{aligned}$$

□

引理 4.1 给出了使 $\mathcal{A}$ 成为量子群的许多普适条件。然而，这些条件并非彼此独立，我们将证明每个条件都可以归结为以下情形之一。

命题 4.2。设 $\mathcal{A}$ 是由 n^2 个元素 $\{u_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\}$ 生成的 C^*-代数，并且 $u=(u_{i,j})$ 在 $M_n(\mathcal{A})$ 中是酉的。若元素 $\{u_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\}$ 满足以下条件之一，则集合 $\{\sum_{k=1}^n u_{i,k}\otimes u_{k,j}|i,j=1,\cdots,n\}$ 也满足相应的条件。

(1) $\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}u_{k,i_2}=\delta_{i_1,i_2}$, for all $i_1,,i_2\in[n]$

(2) $\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}u_{k,i_2}^*u_{k,i_3}u_{k,i_4}^*=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_3,i_4}$, for all $i_1,\cdots,i_4\in[n]$

(3) $\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}u_{k,i_2}u_{k,i_3}^*u_{k,i_4}^*=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_3,i_4}$, for all $i_1,\cdots,i_4\in[n]$

(4) For fixed $m\in\mathbb{Z}^+$: $\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}u_{k,i_2}\cdots u_{k,i_m}=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_{k-1},i_k}$, for all $i_1,\cdots,i_m\in[n]$

证明。(1) 应用引理 4.1，令 $m=2$ and $\mathbf{d}=(1,1)$。(2) 应用引理 4.1，令 $m=4$ and $\mathbf{d}=(1,1,*,*)$。(3) 应用引理 4.1，令 $m=4$ and $\mathbf{d}=(1,1,*,*)$。(4) 应用引理 4.1，令 $d_i=1$ for all i。

□

引理 4.3。假设 $\mathcal{A}$ 是由 n^2 个元素 $\{u_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\}$ 生成的 C^*-代数，且$nu=(u_{i,j})$ 在 $M_n(\mathcal{A})$ 中是酉的，并且 $\sum_{k=1} u_{k,,i_1}u_{k,i_2}=\delta_{i_1,i_2}$，对所有 $i_1,,i_2\in[n]$均成立。那么，对所有$i,j=1,\cdots,n$，$u_{i,}$ $_j=u_{i,j}^*$ 均成立。

$_n$证明。注意到$\sum u_{k,\ i_1}u_{k,\ i_2}=\delta_{i_1,\ i_2}$等价于 $u^Tu=1_n$，其中 1_n 是 $M_n(\mathcal{A})$ 的单位元。$_{k=1}$因此，

$$(u_{j,i})=u^T=u^{-1}=u^*=(u_{j,i}^*).$$

通过比较矩阵的各项，我们得到 $u_{i,\ j}=u_{i,\ j}^*$对所有 $i,\ j=1,\ \cdots,\ n$均成立。

□

$_n$根据上述 $u_{i,\ j}$ 与 $\sum u_{i,\ j}$之间的关系，我们给出量子$^{k=1}$群的以下定义。

定义 4.4。设 $C(\mathcal{S}^+,\ n)$、$C(\mathcal{O}^+,\ n)$、$C(\mathcal{B}_s^+,\ n)$、$C(\mathcal{H}_s^+,\ n)$、$C(\mathcal{B}^+,\ n)$、$C(\mathcal{H}_m^+,\ n)$，其中 $m\geq 3$、$C(\mathcal{H}_0^+,\ n)$ 和 $C(\mathcal{H}'^+,\ n)$ 是由 $\{u_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\}$ 生成的普适 C^*-代数，使得它们是 $C(\mathcal{U}^+,\ n)$ 的量子子群，并分别满足以下条件:

$_n$自伴情形：接下来，假设对所有 $i_1,,i_2\in[n]$，$\sum u_{k,i_1}u_{k,i_2}=\delta_{i_1,i_2}$。那么，$_{k=1}u_{i,j}=u_{i,j}^*$对所有 $i,j=1,\cdots,n$。

(1) $C(\mathcal{S}^+,n)$：$u_{i,j}$是正交投影，即对所有 $i,j=1,\cdots,n$，$u_{i,j}=u_{j,i}^*=u_{i,j}^2$。(2) $C(\mathcal{O}^+,n)$：无需满足其他条件。$_n$ $_n$(3) $C(\mathcal{B}_s^+,n)$：对所有 $i,j=1,\cdots,n$，$\sum u_{i,k}=\sum u_{k,j}=1$。$_{k=1}$ $_{k=1}$(4) $C(\mathcal{H}_s^+,n)$：对所有 $i,j=1,\cdots,n$，$u_{i,j}^2$是正交投影。

非自伴情形:

(1) $C(\mathcal{B}^+,n)$: $\sum_{k=1}^n u_{i,k}=\sum_{k=1}^n u_{k,j}=1$ for all $i,j=1,\cdots,n$.

(2) $C(\mathcal{H}_m^+,n)$ with $m\geq 3$: $\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}u_{k,i_2}\cdots u_{k,i_m}=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_{m-1},i_m}$, for all $i_1,\cdots,i_m\in[n]$.

(3) $C(\mathcal{H}_0^+,n)$: $\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}u_{k,i_2}u_{k,i_3}^*u_{k,i_4}^*=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_3,i_4}$, for all $i_1,\cdots,i_4\in[n]$.

(4) $C(\mathcal{H}'^+,n)$: $\sum_{k=1}^n u_{k,i_1}u_{k,i_2}^*u_{k,i_3}u_{k,i_4}^*=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_3,i_4}$, for all $i_1,\cdots,i_4\in[n]$.

注 4.5。对于 $C(\mathcal{H}_m^+,n)$，当满足 $m=2$时，我们得到 $C(\mathcal{O}^+,n)$；当满足 $m=1$时，我们得到 $C(\mathcal{B}^+,n)$。前述定义中的下标 s n 表示相应代数的生成元是自伴的。

根据上述普适量子群所满足的泛关系，我们可以确立它们之间的以下关系。

命题 4.6。对于固定的 $n\geq 1$，我们有

(1) $C(\mathcal{S}^+,n)\subset C(\mathcal{B}_s^+,n)\subset C(\mathcal{B}^+,n)\subset C(\mathcal{U}^+,n)$. (2) $C(\mathcal{S}^+,n)\subset C(\mathcal{H}_s^+,n)\subset C(\mathcal{O}^+,n)\subset C(\mathcal{U}^+,n)$. (3) $C(\mathcal{B}_s^+,n)\subset C(\mathcal{O}^+,n)$. (4) 对于 $m\geq 3$: $C(\mathcal{S}^+,n)\subset C(\mathcal{H}_m^+,n)\subset C(\mathcal{H}_0^+,n)\subset C(\mathcal{H}'^+,n)\subset C(\mathcal{U}^+,n)$

证明。根据定义，1)-3) 显然。此外，我们有 $C(\mathcal{S}^+,n)\subset C(\mathcal{H}_m^+,n)$ 以及$C(\mathcal{H}'^+,n)\subset C(\mathcal{U}^+,n)$。还需证明，对于所有 $m\geq 3$，$C(\mathcal{H}_m^+,n)\subset C(\mathcal{H}_0^+,n)\subset C(\mathcal{H}'^+,n)$。为方便起见，我们记 $\delta(i_1,\cdots,i_k)=\delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_{k-1},i_k}$对于所有 $k\geq 2$。

$_n$假设对于所有 $i_1,\cdots,i_m\in[n]$，有 $\sum u_{k,i_1}u_{k,i_2}\cdots u_{k,i_m}=\delta(i_1,\cdots,i_m)$，
则$_{k=1}$

$$\sum_{k=1}^{n}u^*_{k,i_m}\cdots u^*_{k,i_1}=\delta(i_1,\cdots,i_m)$$

对所有 i_1，$\cdots$，$i_m\in[n]$。由此可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}u_{k,j_1}\cdots u_{k,j_m}\right)\left(\sum_{k'=1}^{n}u^*_{k',i_m}\cdots u^*_{k',i_1}\right)=\delta(i_1,\cdots,i_m)\delta(j_1,\cdots,j_m),$$

设 $j_m=i_m$。则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}u_{k,i_1}u_{k,j_2}\cdots u_{k,j_m}\right)\left(\sum_{k'=1}^{n}u^*_{k',i_m}\cdots u^*_{k',i_1}\right)=\delta(i_1,\cdots,i_m,j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}),\tag{1}$$

$_n$由于 $\sum_{i_m=1}^{n}u^*_{k',\ i_m}u_{k,\ i_m}=\delta_{k',\ k}$，且 $\sum_{i_m=1}^{n}\delta(i_m,\ j_{m-1},\ i_{m-1})=\delta_{i_{m-1},\ j_{m-1}}$，将方程 (1) 对 i_m 求和，得到

$$\sum_{k=1}^{n}u_{k,i_1}u_{k,j_2}\cdots u_{k,j_{m-1}}u^*_{k,i_{m-1}}\cdots u^*_{k,i_1}=\delta(i_1,\cdots,i_{m-1},j_1,\cdots,j_{m-1}),\tag{2}$$

类似地，令 $i_3=j_3$，$\cdots$，$i_{m-1}=j_{m-1}$，并将方程(2) 对 i_2，$\cdots$，i_{m-2}从 1 到 n 求和，得到

$$\sum_{k=1}^{n}u_{k,i_1}u_{k,i_2}u^*_{k,j_2}u^*_{k,j_1}=\delta(i_1,i_2,j_1,j_2).$$

由此可得 $C(\mathcal{H}_m^+,\ n)\subset C(\mathcal{H}_0^+,\ n)$。现在，只需证明 $C(\mathcal{H}_0^+,\ n)\subset C(\mathcal{H}'^+,\ n)$。

假设 $_n\ \sum_{k=1}^{n}u_{k,\ i_1}u_{k,\ i_2}u^*_{k,\ i_3}u^*_{k,\ i_4}=\delta(i_1,\ \cdots,\ i_4)$，对所有 i_1，$\cdots$，$i_4\in[n]$，则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}u_{k,i_1}u_{k,i_2}u^*_{k,i_3}u^*_{k,i_4}\right)\left(\sum_{k'=1}^{n}u_{k',j_1}u_{k',j_2}u^*_{k',j_3}u^*_{k',j_4}\right)=\delta(i_1,\cdots,i_4)\delta(j_1,\cdots,j_4).\tag{3}$$

再次令 $i_4=j_1$，并对 j_1 求方程(3)的和，得到

$$\sum_{k=1}^{n}u_{k,i_1}u_{k,i_2}u^*_{k,i_3}u_{k,j_2}u^*_{k,j_3}u^*_{k,j_4}=\delta(i_1,\cdots,i_3,j_2,\cdots,j_4).\tag{4}$$

注意，

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1=1}^{n}\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n}u^*_{k_1,i_1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}u_{k,i_1}u_{k,i_2}u^*_{k,i_3}u_{k,j_2}u^*_{k,j_3}u^*_{k,j_4}\right)\right]\\&=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1=1}^{n}u^*_{k_1,i_1}u_{k,i_1}\right)u_{k,i_2}u^*_{k,i_3}u_{k,j_2}u^*_{k,j_3}u^*_{k,j_4}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\delta_{k,k_1}u_{k,i_2}u^*_{k,i_3}u_{k,j_2}u^*_{k,j_3}u^*_{k,j_4}\\&=\sum_{k=1}^{n}u_{k,i_2}u^*_{k,i_3}u_{k,j_2}u^*_{k,j_3}u^*_{k,j_4}\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i_1=1}^{n}\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n}u^*_{k_1,i_1}\right)(\delta(i_1,\cdots,i_3,j_2,\cdots,j_4))\right]=\left(\sum_{k_1=1}^{n}u^*_{k_1,j_4}\right)\delta(i_2,i_3,j_2,\cdots,j_4).$$

因此，我们有

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k,i_2}u_{k,i_3}^{*}u_{k,j_2}u_{k,j_3}^{*}u_{k,j_4}^{*} = \left(\sum_{k_1=1}^{n} u_{k_1,j_4}^{*}\right)\delta(i_2,i_3,j_2,\cdots,j_4).$$

同样，我们有

$$\sum_{j_4=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i_2}u_{k,i_3}^{*}u_{k,j_2}u_{k,j_3}^{*}u_{k,j_4}^{*}\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n} u_{k_2,j_4}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i_2}u_{k,i_3}^{*}u_{k,j_2}u_{k,j_3}^{*}$$

and

$$\sum_{j_4=1}^{n}\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n} u_{k_1,j_4}^{*}\right)\delta(i_2,i_3,j_2,\cdots,j_4)\left(\sum_{k_2=1}^{n} u_{k_2,j_4}\right)\right] = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} u_{k_1,j_3}^{*}u_{k_2,j_3}\delta(i_2,i_3,j_2,j_3)$$

因此，我们有

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k,i_2}u_{k,i_3}^{*}u_{k,j_2}u_{k,j_3}^{*} = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} u_{k_1,j_3}^{*}u_{k_2,j_3}\delta(i_2,i_3,j_2,j_3) \tag{5}$$

若 $\delta(i_2,\ i_3,\ j_2,\ j_3)=0$，则有 $\sum_{k=1} u_{k,\ i_2}u_{k,\ i_3}^{*}u_{k,\ j_2}u_{k,\ j_3}^{*}=0=\delta(i_2,\ i_3,\ j_2,\ j_3)$。

若 $\delta(i_2,\ i_3,\ j_2,\ j_3)=1$，则 $i_2=i_3=j_2=j_3$。由于 $\sum_{k=1} u_{k,\ j_3}u_{k,\ j_3}^{*}=1_{\mathcal{A}}$ 且 $u_{k,\ j_3}u_{k,\ j_3}^{*}\geq 0$ 对所有 k,$u_{k,\ j_3}u_{k,\ j_3}^{*}\leq 1_{\mathcal{A}}$均成立。因此

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k,j_3}u_{k,j_3}^{*}u_{k,j_3}u_{k,j_3}^{*} \leq \sum_{k=1}^{n} u_{k,j_3}u_{k,j_3}^{*} = 1_{\mathcal{A}}. \tag{6}$$

因此,

$$\sum_{j_3=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_{k,j_3}u_{k,j_3}^{*}u_{k,j_3}u_{k,j_3}^{*} \leq n1_{\mathcal{A}}. \tag{7}$$

另一方面，将 $i_2=i_3=j_2=j_3$ 代入公式（6），可得

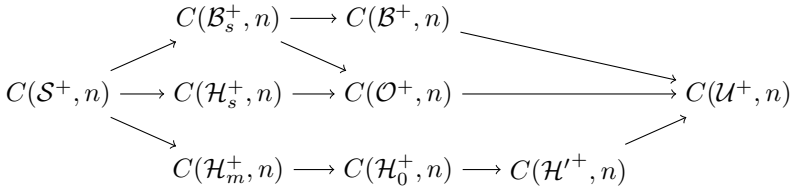
$$\sum_{j_3=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_{k,j_3}u_{k,j_3}^{*}u_{k,j_3}u_{k,j_3}^{*} = \sum_{j_3=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} u_{k_1,j_3}^{*}u_{k_2,j_3} = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\delta_{k_1,k_2} = n1_{\mathcal{A}}$$

因此，不等式（6）中的等号成立。我们总有

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k,i_1}u_{k,i_2}^{*}u_{k,i_3}u_{k,i_4}^{*} = \delta_{i_1,i_2}\cdots\delta_{i_3,i_4},$$

对所有的 $i_1,\ \cdots,\ i_4\in[n]$。由此可得 $C(\mathcal{H}_0^{+},\ n)\subset C(\mathcal{H}'^{+},\ n)$。 □

综上，对每个 n，都有如下图示。



在上图中，$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$的量子子群。现在，我们给出一些例子，以说明上述关系对于 $n\geq 3$是恰当的。

例 4.7。要证明 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的真量子子群，只需给出 $\mathcal{B}$ 的一个矩阵表示，而它不是 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示。

(1) 对于 $C(\mathcal{S}^+,\ n) \subsetneq C(\mathcal{B}_s^+,\ n) \subsetneq C(\mathcal{B}^+,\ n) \subsetneq C(\mathcal{U}^+,\ n)$：令 $n=3$，并考虑以下 $C(\mathcal{B}_s^+,\ n)$ $C(\mathcal{B}^+,\ n)$ $C(\mathcal{U}^+,\ n)$ 的矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i & \frac{1}{2}-i & 0 \\ \frac{1}{2}-i & \frac{1}{2}+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（2）对于 $C(\mathcal{S}^+,\ n) \subsetneq C(\mathcal{H}_s^+,\ n) \subsetneq C(\mathcal{O}^+,\ n) \subsetneq C(\mathcal{U}^+,\ n)$。令 $n=2$，并考虑 $C(\mathcal{H}_s^+,\ n)$ $C(\mathcal{O}^+,\ n)$ $C(\mathcal{U}^+,\ n)$ 的以下矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（3）对于 $C(\mathcal{B}_s^+,\ n) \subsetneq C(\mathcal{O}^+,\ n)$。令 $n=2$，并考虑 $C(\mathcal{O}^+,\ n)$ 的以下矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$$

（4）对于 $m \geq 3$，考虑以下矩阵表示：

令 $u_{i,\ j} = \delta_{i,\ j} e^{\theta\pi i}$ 满足 $\theta = \frac{2}{m}$，则 $(u_{i,\ j})$ 是 $C(\mathcal{H}_m^+,\ n)$ 的表示，但不是 $C(\mathcal{S}^+,\ n)$ 的表示。

令 $u_{i,\ j} = \delta_{i,\ j} e^{\theta\pi i}$ 满足 θ，且为无理实数。于是，若 $*$ 的个数与 $\tilde{\mathbf{d}}$ 中 $\mathbf{1}$ 的个数不相等，则 $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,\ 1}^{d_1} \cdots u_{\alpha,\ 1}^{d_k} \neq 1$。在这种情况下，$(u_{i,\ j})$ 是 $C(\mathcal{H}_0^+,\ n)$ 的表示，但不是 $C(\mathcal{H}_m^+,\ n)$ 的表示。

考虑 $C(\mathcal{H}'^+,\ n)$ 的如下表示：设 $u_{i,\ j} \in M_2(\mathbb{C})$，使得

$$u_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而对于其余的 i,j，有 $u_{i,j} = \delta_{i,j} 1_{M_2(\mathbb{C})}$。在这种情况下，我们有 $u_{\alpha,1}^2 = (u_{\alpha}^*,1)^2 = 0$ 对所有 α 都成立，由此可知，仅当 $\tilde{\mathbf{d}}$ 是交错的且 $|\tilde{\mathbf{d}}|$ 是偶数时，才有 $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha}^{d_1},1 \cdots u_{\alpha}^{d_k},1 = 1$。在这种情况下，$(u_{i,j})$ 是 $C(\mathcal{H}_0^+,n)$ 的一个表示，但不是 $C(\mathcal{H}'^+,n)$ 的表示。注意，$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$ 是 $C(\mathcal{U}^+,n)$ 的一个矩阵表示，但不是 $C(\mathcal{H}'^+,n)$ 的矩阵表示。因此，我们有 $C(\mathcal{S}^+,n) \subsetneq C(\mathcal{H}_m^+,n) \subsetneq C(\mathcal{H}_0^+,n) \subsetneq C(\mathcal{H}'^+,n) \subsetneq C(\mathcal{U}^+,n)$。

德·菲内蒂型定理中随机变量的刻画依赖于累积量的消失条件，而这些条件由分拆描述。因此，我们需要以下关于量子群生成元在块上的单位元刻画，以便将这些恒等式推广到非交叉分拆和一般分拆。

命题 4.8. 设 $\mathcal{A}(n)$ 是由 $\{u_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\})$ 生成的量子群。那么，我们有以下恒等式。

- 自伴情形：$_n$(1) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{S}^+,n)$，则 $\sum_{\alpha=1}^{k} u_{\alpha,i}^k = 1$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}^+$ 均成立。$_n$(2) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{O}^+,n)$，则 $\sum_{\alpha=1}^{k} u_{\alpha,i}^k = 1$ 当且仅当 $k=2$。$_n$(3) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{B}_s^+,n)$，则 $\sum_{\alpha=1}^{k} u_{\alpha,i}^k = 1$ 当且仅当 $k=1,2$。$_n$(4) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{H}_s^+,n)$，则 $\sum_{\alpha=1}^{k} u_{\alpha,i}^k = 1$ 当且仅当 k 为偶数。

- 非自伴　联合情形：令 $k \in \mathbb{Z}^+$ 和 $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1,\cdots,d_k)$ 是来自 $\{1,*\}$ 的一个由 $\mathbf{k}$ 个元素组成的序列　.

(1) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{B}^+, n)$: 对于 $1 \le i \le n$, $\sum_{k=1}^{n} u_{\alpha,i}^{d_1} \cdots u_{\alpha,i}^{d_k} = 1$，当且仅当 $k = 1$ 或 $k = 2$ 且 $\tilde{\mathbf{d}} = \{1, *\}$ 或 $\{*, 1\}$。

(2) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{H}_m^+, n)$ 满足 $m \ge 3$: 对于 $1 \le i \le n$, $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i}^{d_1} \cdots u_{\alpha,i}^{d_k} = 1$ 当且仅当 $*$ 与 1 的数量之差可以被 m 整除时，$\tilde{\mathbf{d}}$。

(3) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{H}_0^+, n)$: 对于 $1 \le i \le n$, $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i}^{d_1} \cdots u_{\alpha,i}^{d_k} = 1$ 当且仅当 $\mathbf{d}$ 中的 $*$ 与 $\tilde{}$1 的数量相等。

(4) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{H}'^+, n)$: 对于 $1 \le i \le n$, $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i}^{d_1} \cdots u_{\alpha,i}^{d_k} = 1$ 当且仅当 $k \in 2\mathbb{Z}^+$ 且 $\tilde{}$ $\mathbf{d}$ 是交错的。(5) 若 $\mathcal{A}(n) = C(\mathcal{U}^+, n)$: 对于 $1 \le i \le n$, $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i}^{d_1} \cdots u_{\alpha,i}^{d_k} = 1$ 当且仅当 $k = 2$ 且 $\tilde{\mathbf{d}}$ $=\{1, *\}$或 $\{*, 1\}$。

证明。关于自伴情形，参见[17]。下文将重点讨论非自伴情形:

1) 根据 $C(\mathcal{B}^+, n)$的定义，我们有 $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,1}^{d_1} \cdots u_{\alpha,1}^{d_k} = 1$，若 $k = 1$ 或 $k = 2$ 且 $\tilde{\mathbf{d}} = \{1, *\}$ 或 $\{*, 1\}$。注意到 $C(\mathcal{B}_s^+, n) \subset C(\mathcal{B}^+, n)$，该方程仅在 $k = 1$时成立。2. 当 $k = 2$时，考虑例 4.7 中的表示。令

$$u_{1,1} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, u_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, u_{2,1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, u_{2,2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

对于其他$u_{i,j}$，令$u_{i,j} = \delta_{i,j}$。于是，我们有$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,1}^2 \neq 1$ 且$\sum_{\alpha=1}^{n} (u^*)_{\alpha,1}^2 \neq 1$。

2）根据（$\mathcal{H}_m^+$, n）的定义，我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i} u_{\alpha,j}^{m-1} = \delta_{i,j}.$$

由于（$u_{i,j}$）在 $M_n(\mathcal{A})$ 中是酉的，因此我们有 $u_{i,j}^* = u_{ij}^{m-1}$。由此可得 $u_{\alpha,1}^{d_1} \cdots u_{\alpha,1}^{d_k} = u_{\alpha,1}^{lm}$，其中存在某个$l \in \mathbb{Z}^+$，前提是 $*$ 与 $\tilde{\mathbf{d}}$ 中 1 的个数之差能被 m 整除。

另一方面，我们有 $u_{i,j} = (u_{i,j}^*)^{m-1} = u_i^{(m-1)^2}{}_{,j}$。由此可得 $u_{\alpha,i}^{lm} = u_{\alpha}^{l'm}{}_{,i}$，其中存在某个 $l' \le m - 2$。在方程（2）中，令 $i_1 = i_2 = \cdots - i_{l'} = 1$，并将该方程对 $j_{l'+1}$, $\cdots$, j_{m-1} 从 1 到 n 求和。得到

$$1 = \sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i}^{l'} (u_{\alpha,i}^*)^{l'} = \sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i}^{l'm}.$$

令 $u_{1,1} = \underline{e^{\frac{2\pi i}{m}}}$，并令其余的 $u_{i,j}$ 取 $u_{i,j} = \delta_{i,j}$。那么，$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i}^{d_1} \cdots u_{\alpha,1}^{d_k} \neq 1$，前提是 $\tilde{}$ 个 $*$ 与 $\mathbf{d}$ 中 1 的个数之差不能被 m 整除。

3）应用上一种情形的方法，令 $v = (u_{i,j}^2 u_{i,j}^*)_{i,j=1,\cdots,n} \in M_n(\mathcal{A})$，可得 $vu = uv = 1_n$。由此可知 $u_{i,j} = u_{i,j}^2 u_{i,j}^*$ 以及 $u_{i,j}^* = u_{i,j} (u_{i,j}^*)^2$ 以及

$$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,j}^* u_{\alpha,i}^2 u_{\alpha,i}^* = \delta_{i,j}.$$

由于 $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i_1} u_{\alpha,i_2} u_{\alpha,i_3}^* u_{\alpha,i_4}^* = \delta(i_1, i_2, i_3, i_4)$ 和 $\sum_{\alpha'=1}^{n} u_{\alpha',i_5}^* u_{\alpha',i_4} = \delta_{i_5,i_4}$，我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\alpha'=1}^{n} u_{\alpha',i_5}^* u_{\alpha,i_1} u_{\alpha,i_2} u_{\alpha,i_3}^* u_{\alpha,i_4}^* u_{\alpha',i_4} = \delta(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5).$$

由此可得

$$\begin{aligned}\delta(i_1,i_2,i_3,i_5) &= \sum_{i_4=1}^{n}\delta(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)\\ &= \sum_{i_4=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\alpha'=1}^{n}u_{\alpha',i_5}^{*}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}u_{\alpha,i_3}^{*}u_{\alpha,i_4}^{*}u_{\alpha',i_4}\\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\alpha'=1}^{n}u_{\alpha',i_5}^{*}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}u_{\alpha,i_3}^{*}\delta_{\alpha,\alpha'}\\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i_5}^{*}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}u_{\alpha,i_3}^{*}.\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\delta(i_1,i_2,i_5,i_6) = \sum_{i_3=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\alpha'=1}^{n}u_{\alpha',i_6}^{*}u_{\alpha,i_5}^{*}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}u_{\alpha,i_3}^{*}u_{\alpha',i_3} = \sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i_6}^{*}u_{\alpha,i_5}^{*}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}.$$

沿用 $C(\mathcal{H}_0^+,n)\subseteq C(\mathcal{H}'^+,n)$ 的证明，我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i}^{*}u_{\alpha,i}u_{\alpha,i}^{*}u_{\alpha,i} = 1$$

且对于所有 i,α，$u_{\alpha,i}^{*}u_{\alpha,i}$ 都是正交投影。

设 $v' = (u_{i,j}^{*}u_{i,j}^{2})_{i,j=1,\cdots,n}\in M_n(\mathcal{A})$。于是，我们有 $u^{*}v' = 1_{M_n(\mathcal{A})}$。由此可得 $u_{i,j} = u_{i,j}^{*}u_{i,j}^{2}$ 和 $u_{i,j}^{*} = (u_{i,j}^{*})^2u_{i,j}$。因此，我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}\left(u_{\alpha,i}^{*}\right)^2u_{\alpha,i} = \delta_{i,j}.$$

现在，我们通过归纳法完成充分性部分的证明。由于 u 是酉的，因此等式对 $k=2$ 成立。对于 $k=4$，$\mathbf{d}$ 可以是以下之一

$$(1,*,1,*),(*,1,*,1),(1,*,*,1),(1,1,*,*),(*,*,1,1),(*,1,1,*),$$

方程在所有这些情况下都成立。

假设方程对 $k=2l$ where $l\geq 2$ 成立。

当 $k=2l+2$。若 $\tilde{\mathbf{d}}$ 是交错的，则 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i}^{d_1}\cdots u_{\alpha,i}^{d_k}$ 等于 $\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_{\alpha,i}u_{\alpha,i}^{*}\right)^k$ 或 $\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_{\alpha,i}^{*}u_{\alpha,i}\right)^k$ 中的一个，n n因此等于 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i}u_{\alpha,i}^{*}$ 或 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i}^{*}u_{\alpha,i}$ 中的一个，而这两者都等于 $1_{\mathcal{A}}$。

If $\tilde{\mathbf{d}}$ 不是交错的，因为 $\tilde{\mathbf{d}}$ 中有三个连续项等于 $(1,1,*)$，$(*,\tilde{*},1)$，$(*,1,1)$，$(1,*,*)$。由于 $u_{i,j}^{*} = (u_{i,j}^{*})^2u_{i,j} = u_{i,j}(u_{i,j}^{*})^2$ 对所有 i，j 都成立，因此该情形可归结为 $k=2l$ 的情形。根据归纳法，方程成立。

该陈述的必要部分遵循例 4.7 中的表示。

n4) 由于 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}^{*}u_{\alpha,i_3}u_{\alpha,i_4}^{*} = \delta_{i_1,i_2,i_3,i_4}$ 对所有 i_1，$\cdots$，$i_4\in[n]$，应用前一种情形中的方法，我们得到

$$\delta_{i_1,i_2,i_3,i_5} = \sum_{i_4=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\alpha'=1}^{n}u_{\alpha',i_5}^{*}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}^{*}u_{\alpha,i_3}u_{\alpha,i_4}^{*}u_{\alpha',i_4} = \sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i_5}^{*}u_{\alpha,i_1}u_{\alpha,i_2}^{*}u_{\alpha,i_3}.$$

$\tilde{}$因此，$u_{i,j}u_{i,j}^{*}$ 和 $u_{i,j}^{*}u_{i,j}$ 对所有 i，j 都是投影。若 $\mathbf{d}$ 是交错的，则由前一种情形可知，$\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,i}^{d_1}\cdots u_{\alpha,i}^{d_k}$ 等于 $1_{\mathcal{A}}$。

该陈述的必要部分也可由例 4.7 中的表示得出。

5)根据 $C(\mathcal{U}^+,\ n)$的定义， $C(\mathcal{O}^+,\ n)$和 $C(\mathcal{H}'^+,\ n)$都是 $C(\mathcal{U}^+,\ n)$的量子子群，因此方程成立当且仅当 $k=2$ 且$\mathbf{d}$ 是交错的。

□

5. Vanishing-cumulants for single random variables

本文提出的分类结果与累积量消失条件密切相关。因此，我们需要根据累积量对随机变量进行分类。在下述定义中，我们引入了一种基于自由概率中非零自由累积量的分类。对于经典概率中的定义，只需将自由累积量替换为经典累积量即可。

定义 5.1. 设 x 是一个 $\mathcal{B}$值概率空间 $(\mathcal{A},\mathbb{E})$中的元素。

(1) 如果对每个 $k\in\mathbb{N}$和 $b_1,\cdots,b_k\in\mathcal{B}$，我们都有

$$\kappa^{\pi}(x^{d_1}b_1,\cdots,x^{d_k}b_k)=0$$

除非 π 的所有块大小均为偶数，否则称 x 为对称元素。

(2) 如果对每个 $k\in\mathbb{N},\tilde{\mathbf{d}}\in\{1,*\}^k$和 $b_1,\ \cdots,\ b_k\in\mathcal{B}$，我们有

$$\kappa^{(\pi)}(x^{d_1}b_1,\cdots,x^{d_k}b_k)=0$$

除非 $\pi\in NC_2(k)$，否则我们称 x 为一个正交元素。此外，如果 x 是自伴的，那么 x 称为半圆元素。

(3) 如果 x 是 $\mathcal{B}$中的一个正交（半圆）元素与一个常值元素之和，那么 x 称为一个平移正交（半圆）元素。

(4) 给定满足 $m\geq 3$的 $m\in\mathbb{N}$，如果对每个 $k\in\mathbb{N},\ \tilde{\mathbf{d}}\in\{1,*\}^k$和 $b_1,\ \cdots,\ b_k\in\mathcal{B}$，我们有

$$\kappa^{\pi}(x^{d_1}b_1,\cdots,x^{d_k}b_k)=0$$

$\tilde{}$除非 $\pi\in NC^{\mathbf{d},\ m}(k)$，否则我们称 x 为一个 m-酉元素。

(5) 如果对于每个 $k\in\mathbb{N},\tilde{\mathbf{d}}\in\{1,*\}^k$以及 $b_1,\cdots,b_k\in\mathcal{B}$，我们都有

$$\kappa^{\pi}(x^{d_1}b_1,\cdots,x^{d_k}b_k)=0$$

$\tilde{}$除非 $\pi\in NC^{\mathbf{d},\infty}(k)$, 否则我们称 x 为自由酉元素。

(6) 如果对于每个 $k\in\mathbb{N},\tilde{\mathbf{d}}\in\{1,*\}^k$以及 $b_1,\cdots,b_k\in\mathcal{B}$，我们都有

$$\kappa^{\pi}(x^{d_1}b_1,\cdots,x^{d_k}b_k)=0$$

$\tilde{}$除非 $\pi\in NC^{\mathbf{d}}(k)$, 否则我们称 x 为 R-对角元素

(7) 如果对于每个 $k\in\mathbb{N},\tilde{\mathbf{d}}\in\{1,*\}^k$以及 $b_1,\cdots,b_k\in\mathcal{B}$，我们都有

$$\kappa^{\pi}(x^{d_1}b_1,\cdots,x^{d_k}b_k)=0$$

$\tilde{}$除非 $\pi\in NC_2^{\mathbf{d}}(k)$，否则称 x 为圆元。

(8) 如果 x 是 $\mathcal{B}$中的圆元与常值元素之和，则称 x 为平移圆元。

请注意，与非交叉划分相关的累积量消失条件取决于其中包含的块。因此，上述定义中的分拆可以替换为一个大小为 k 的单块。我们也可以定义平移的 R-对角元或平移的 k-酉元；然而，我们将看到，这些元素并没有对应的德·菲内蒂定理。在经典概率中，假定随机变量彼此可交换；因此，经典概率中没有 R-对角元的对应定义。请注意，圆元和半圆元素是自由概率中的中心极限定律，因此，它们在经典概率中的对应物是实高斯分布和复高斯分布。根据概率空间自由积的性质，在标量情形下，由自由独立自伴随机变量生成的概率空间自动具有迹。因此，W^*-概率空间绝不会是 III 型。

标量值圆元由 Voiculescu 在 [32] 通过 Fock 空间上的产生算子引入，随后在 [33]中研究了算子值情形。由于圆元具有最

简单的累积量消失条件，因此，将定义 5.1 中任意类型的随机变量与圆元进行自由加法卷积后，所得结果仍属于同一类型。这可用于构造许多非平凡的随机变量实例（定义见定义 5.1），尤其是在 III 型概率空间中 [21]。 [19] 中引入的 R-对角元旨在研究 Haar 酉元和圆元；其算子值情形被证明是随机范德蒙德矩阵的极限分布律 [5]。

6. Finite sequences of symmetric random variables

回顾一下，原始的德·菲内蒂型定理指出，无限可交换随机变量序列是同分布且条件独立的。德·菲内蒂型定理的量子类比断言，无限量子可交换实值随机变量序列是同分布且条件自由独立（或算子值自由独立）的，并且已推广到适用于 $*$-随机变量 [8]。

在本文中，对于可交换随机变量，量子群位于置换群与酉群之间；而在非交换框架中，量子群则位于量子置换群与量子酉群之间。因此，对于随机变量的无限序列，我们可以假设它们要么是同分布且条件经典独立的，要么是同分布且条件自由独立的。

因此，对称随机变量的分类可归结为单个算子值随机变量的分类。我们将说明，来自量子群的分布刻画自然会导出关于累积量的消失条件。在下面的定义中，我们从一个任意量子群开始。

定义 6.1. 设 $\mathcal{A}$ 是关于 n 的紧矩阵量子群，其生成元为 $(u_{i,j})$。对于每个 $k \in \mathbb{N}, \tilde{\mathbf{d}} = (d_1, \cdots, d_k) \in \{1, *\}^k$，我们称 $\tilde{\mathbf{d}}$ 为一个 $\mathcal{A}$-序列，当且仅当

$$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,j}^{d_1} u_{\alpha,j}^{d_2} \cdots u_{\alpha,j}^{d_k} = 1$$

对所有 $j = 1, \cdots, n$ 均成立。对于每个 $m \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, \cdots, d_m) \in \{1, *\}^k$，我们将 $NC^{\mathcal{A}, \tilde{\mathbf{d}}}(m) \subset NC(m)$ 定义为非交叉划分集合 π，其中各块限制在$\mathbf{d}$ 上时均为 $\mathcal{A}$-序列。

对于 $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, \cdots, d_k) \in \{1, *\}^k$ 和 $\tilde{\mathbf{i}} = (i_1, \cdots, i_k) \in [n]^k$，我们将 $u_{i_1,j}^{d_1} \cdots u_{i_k,j}^{d_k}$ 记作 $u_{\tilde{\mathbf{i}},j}^{\tilde{\mathbf{d}}}$。根据定义，对于每个 $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, \cdots, d_k) \in \{1, *\}^k$ 和 $\pi \in NC^{\mathcal{A}, \tilde{\mathbf{d}}}(k)$，有

$$\sum_{\tilde{\mathbf{i}} \in [n]^k, \pi \leq \ker \tilde{\mathbf{i}}} u_{\tilde{\mathbf{i}},1}^{\tilde{\mathbf{d}}} = 1_{\mathcal{A}}.$$

需要谨慎的是，$NC^{\mathcal{A}, \tilde{\mathbf{d}}}(k)$ 不一定包含所有满足上述方程的非交叉分拆 π。这一观察表明，紧矩阵量子群的某些普适条件并不影响相应变量的分布。这也解释了为什么基于 de Finetti 型定理对量子群进行的概率分类，比易量子群的分类更粗略。

命题 6.2。设 $\mathcal{A}$是一个紧矩阵量子群，n 的生成元为 $(u_{i,j})$，且 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 是一个取值于 $\mathcal{B}$ 的概率空间。假设 $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{M}$ 自由独立、同分布且具有 $\mathcal{A}$ 不变性。那么，对于每个 $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, \cdots, d_k) \in \{1, *\}^k$，累积量

$$\kappa^{(k)}\left[b_0 x_1^{d_1}, b_1 x_1^{d_2} \cdots, b_{k-1} x_1^{d_k} b_k\right] = 0$$

除非

$$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,j}^{d_1} u_{\alpha,j}^{d_2} \cdots u_{\alpha,j}^{d_k} = 1$$

对于所有 $j = 1, \cdots, n$。

证明。 根据 $\mathcal{A}$-不变性的定义，我们有

$$\mathbb{E}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1\right] = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{E}\left[b_0 x_\alpha^{d_1} b_1\right] \otimes u_{\alpha,1}^{d_1}.$$

鉴于 $\kappa^{(1)}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1\right] = \mathbb{E}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1\right]$ 和 x_i同分布，因此可知

Not t

$$\kappa^{(1)}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1\right] = \sum_{\alpha=1}^{n} \kappa^{(1)}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1\right] \otimes u_{\alpha,1}^{d_1}.$$

通过比较 $\kappa^{(1)}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1\right]$的系数，我们得到 $\kappa^{(1)}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1\right] = 0$，除非 $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,\ 1}^{d_1} = 1$。由于 x_i同分布，将 1 替换为 j，便可得出该结论对 $k = 1$成立。

假设该结论对 1，$\cdots$，$k-1$成立。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[b_0 x_1^{d_1} b_1 x_1^{d_2} \cdots x_k^{d_k} b_k\right] \otimes 1 \\
&= \sum_{\tilde{\mathbf{i}} \in [n]^k} \mathbb{E}\left[b_0 x_{i_1}^{d_1} b_1 x_{i_2}^{d_2} \cdots x_{i_k}^{d_k} b_k\right] \otimes u_{\tilde{\mathbf{i}},1}^{\tilde{\mathbf{d}}} \\
&= \sum_{\tilde{\mathbf{i}} \in [n]^k} \sum_{\pi \in NC(k)} \kappa^{(\pi)}\left[b_0 x_{i_1}^{d_1}, b_1 x_{i_2}^{d_2}, \cdots, b_{k-1} x_{i_k}^{d_k} b_k\right] \otimes u_{\tilde{\mathbf{i}},1}^{\tilde{\mathbf{d}}} \\
&= \sum_{\pi \in NC(k)} \sum_{\tilde{\mathbf{i}} \in [n]^k} \kappa^{(\pi)}\left[b_0 x_{i_1}^{d_1}, b_1 x_{i_2}^{d_2}, \cdots, b_{k-1} x_{i_k}^{d_k} b_k\right] \otimes u_{\tilde{\mathbf{i}},1}^{\tilde{\mathbf{d}}}
\end{aligned}$$

由于 x_i自由独立，对于给定的分拆 π，累积量 $\kappa^{(\pi)}\left[b_0 x_{i_1}^{d_1}, b_1 x_{i_2}^{d_2}, \cdots, b_{k-1} x_{i_k}^{d_k} b_k\right]$ 0˜不为零的充要条件是 π 的每个块都包含相同的 x_i。这意味着 $\mathbf{keri} \geq \pi$。因此，方程的最后一项变为

$$\sum_{\pi \in NC(k)} \sum_{\substack{\tilde{\mathbf{i}} \in [n]^k \\ \pi \leq \ker \tilde{\mathbf{i}}}} \kappa^{(\pi)}\left[b_0 x_{i_1}^{d_1}, b_1 x_{i_2}^{d_2}, \cdots, b_{k-1} x_{i_k}^{d_k} b_k\right] \otimes u_{\tilde{\mathbf{i}},1}^{\tilde{\mathbf{d}}}$$

再次，由于 x_i 同分布，且每个分拆 π 的所有块都包含相同的 x_i，我们可以将上述项中的所有元素替换为 x_1。因此，我们得到

$$\sum_{\pi \in NC(k)} \sum_{\substack{\tilde{\mathbf{i}} \in [n]^k \\ \pi \leq \ker \tilde{\mathbf{i}}}} \kappa^{(\pi)}\left[b_0 x_1^{d_1}, b_1 x_1^{d_2}, \cdots, b_{k-1} x_1^{d_k} b_k\right] \otimes u_{\tilde{\mathbf{i}},1}^{\tilde{\mathbf{d}}}$$

根据归纳法，上述方程中所有可能的非零项都对应于至少包含两个块且含有整体块 1_k 的那些分拆。$\pi \in NC^{\mathcal{A},\ \mathbf{d}}(k)$。因此，我们得到

$$\sum_{\pi \in NC^{\mathcal{A},\tilde{\mathbf{d}}}(k), \pi \neq 1_k} \sum_{\substack{\tilde{\mathbf{i}} \in [n]^k \\ \pi \leq \ker \tilde{\mathbf{i}}}} \kappa^{(\pi)}\left[b_0 x_1^{d_1}, b_1 x_1^{d_2}, \cdots, b_{k-1} x_1^{d_k} b_k\right] \otimes u_{\tilde{\mathbf{i}},1}^{\tilde{\mathbf{d}}} + \sum_{\alpha=1}^{n} \kappa^{(k)}\left[b_0 x_1^{d_1}, b_1 x_1^{d_2}, \cdots, b_{k-1} x_1^{d_k} b_k\right] \otimes u_{\alpha,1}^{d_1} u_{\alpha,1}^{d_2} \cdots u_{\alpha,1}^{d_k}$$

对于固定的 $\pi \in NC^{\mathcal{A},\tilde{\mathbf{a}}}(k)$，注意到 $\sum_{\tilde{\mathbf{i}}\in[n]^k,\pi\leq\ker\tilde{\mathbf{i}}} u^{\mathbf{d}}_{\tilde{\mathbf{i}}1} = 1_{\mathcal{A}}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[b_0x_1^{d_1}b_1x_1^{d_2}\cdots x_1^{d_k}b_k\right]\otimes 1_{\mathcal{A}}\\
=&\sum_{\pi\in NC^{\mathcal{A},\tilde{\mathbf{a}}}(k),\pi\neq 1_k}\kappa^{(\pi)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]\\
&+\sum_{\alpha=1}^{n}\kappa^{(k)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]\otimes u_{\alpha,1}^{d_1}u_{\alpha,1}^{d_2}\cdots u_{\alpha,1}^{d_k}
\end{aligned}$$

另一方面，根据矩-累积量公式，我们有

$$\mathbb{E}\left[b_0x_1^{d_1}b_1x_1^{d_2}\cdots x_k^{d_k}b_k\right]\otimes 1_{\mathcal{A}}=\sum_{\pi\in NC(k)}\kappa^{(\pi)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]$$

同样，依据关于 k 累积量消失的归纳法，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[b_0x_1^{d_1}b_1x_1^{d_2}\cdots x_k^{d_k}b_k\right]\otimes 1_A\\
=&\sum_{\pi\in NC^{\mathcal{A},\tilde{\mathbf{a}}}(k),\pi\neq 1_k}\kappa^{(\pi)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]+\kappa^{(k)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\kappa^{(k)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]=\sum_{\alpha=1}^{n}\kappa^{(k)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]\otimes u_{\alpha,1}^{d_1}u_{\alpha,1}^{d_2}\cdots u_{\alpha,1}^{d_k},$$

这表明 $\kappa^{(k)}\left[b_0x_1^{d_1},b_1x_1^{d_2},\cdots,b_{k-1}x_1^{d_k}b_k\right]=0$ 除非 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,1}^{d_1}u_{\alpha,1}^{d_2}\cdots u_{\alpha,1}^{d_k}=1_{\mathcal{A}}$.

将 1 替换为 j，证明便完成了。 □

应用命题 4.8，我们得到定理 1 的自由部分。回顾以下关于由 $*$-随机变量构成的无限量子可交换序列的德·菲内蒂型定理：

定理 6.3。设 $(\mathcal{M},\phi)$ 是一个 W^*-概率空间，ϕ 是正规忠实的，且 $\mathcal{M}$ 由一个由量子可交换随机变量 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 构成的无限序列生成。那么，存在一个含幺 W^*-子代数 $\mathcal{B}$ 和一个 ϕ-保持的条件期望 $\mathbb{E}\colon \mathcal{M}\to\mathcal{B}$，使得 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M},\mathbb{E})$ 中自由独立，且具有相同的 $\mathcal{B}$-值分布。

因此，我们得到定理 2 的自由部分。要导出定理 1 和定理 2 的经典部分，只需应用经典德·菲内蒂定理并考察经典累积量。分布对称性会传递到 $\mathcal{B}$-值分布，因为该 ϕ 是忠实的，且 $\mathbb{E}$ 是一个 ϕ-保持的条件期望。

7. Properties of universal relations of quantum unitary groups

在定义 4.4 中，量子群是通过包含单位元的方程和消失条件来定义的。本节将证明，消失条件是多余的；也就是说，包含单位元的求和方程足以确定所有普适条件。因此，不是量子子群就意味着不满足关于块求和的方程。由此，相关的分布对称性会对累积量施加额外的消失条件。这正是定义 4.4 中的量子群具有最大性的根本原因：如果一列随机变量满足的是不同于最大对称性的其他对称性，那么相应的德·菲内蒂型定理便不成立。

为继续讨论，我们先介绍一些关于算子值矩阵代数的记号。对于量子群，对于一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$，我们假设 $u=(u_{i,j})$ 是 $M_n(\mathcal{A})$ 中的一个元素，其 i,j 项为 $u_{i,j}$。此外，我们假设 u 和 $\bar{u}=(u_{i,j}^*)$ 都是 $M_n(\mathcal{A})$ 中的酉元。回顾命题

4.8 中，方程涉及含有相同子指标元素乘积的求和，这类似于标量情形中的 Hadamard乘积。因此，我们可以在算子值框架中建立以下定义。

定义7.1. 设 $u, v \in M_n(\mathcal{A})$ 是 $n \times n$ 上的矩阵。 $u = (u_{i,j})$ $v = (v_{i,j})$ 的 Hadamard乘积定义为矩阵 $w = (w_{i,j}) \in M_n(\mathcal{A})$，其中 $w_{i,j} = u_{i,j}v_{i,j}$ ，记作 $u \circ v$。 k 个 u 的 Hadamard乘积记作 $u^{\circ k}$。

以下命题说明，与酉元作 Hadamard乘积具有压缩性。

命题 7.2. 设 $u = (u_{i,j})$ 是 $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ 中的酉元。那么，对于任意 $v \in M_n(\mathcal{A})$， $\|u \circ v\| \leq \|v\|$。

证明. 设 $w = u \circ v = (u_{i,j}v_{i,j})$。那么， $w^* = (v^*_{j,i}u^*_{j,i})_{i,j}$ 并且

$$w^*w = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}u^*_{\alpha,i}u_{\alpha,j}v_{\alpha,j} \right)_{i,j}$$

由于 u 是酉的，对于所有 $\alpha \in [n]$ 和 $i \neq j$，我们有

$$v^*_{\alpha,i}u^*_{\alpha,i}u_{\alpha,i}v_{\alpha,i} = v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i} - \sum_{\beta\neq\alpha}^{n} v^*_{\alpha,i}u^*_{\beta,i}u_{\beta,i}v_{\alpha,i}$$

and

$$v^*_{\alpha,i}u^*_{\alpha,i}u_{\alpha,j}v_{\alpha,j} = -\sum_{\beta\neq\alpha}^{n} v^*_{\alpha,i}u^*_{\beta,i}u_{\beta,j}v_{\alpha,j}$$

因此，

$$w^*w = Diag_n(\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i})_i - (\sum_{\beta\neq\alpha}^{n} v^*_{\alpha,i}u^*_{\beta,j}u_{\beta,j}v_{\alpha,j})_{i,j}$$

其中， $Diag_n(x_i)_i$ 表示对角矩阵 $(\delta_{i,\ j}x_i)_{i,\ j}$.

设 S 为具有以下元素的 $n^2 \times n$ 矩阵 $S_{(\beta,\alpha),\ j}$，其中 β， α， $j = 1, \cdots, n$，b 定义如下:

$$S_{(\beta,\alpha),i} = \begin{cases} u_{\beta,i}v_{\alpha,i} & \text{if } \beta \neq \alpha \\ 0 & \text{if } \beta = \alpha \end{cases}$$

那么，我们有

$$w^*w = Diag_n\left(\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i}\right) - S^*S \leq Diag_n\left(\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i}\right)$$

因此，

$$\|w^*w\| \leq \|Diag_n(\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i})\|$$

$_n$注意到 $Diag_n(\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i})$ 是 v^*v 的对角部分，因此

$$\|v\|^2 = \|v^*v\| \geq \max_{i=1,\cdots,n} \|\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i})\| = \|Diag_n(\sum_{\alpha=1}^{n} v^*_{\alpha,i}v_{\alpha,i})\| \geq \|w^*w\| = \|w\|^2.$$

证明至此完成。 □

对于 $u = (u_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$，按照量子群中的运算，我们将 $\bar{u} = (\bar{u}_{i,j})$ 记作，其中$\bar{u}_{i,j} = u^*_{i,j}$。因此，我们有 $\bar{u} = (u^t)^* = u^{(t*)}$，其中 u^t 是 u 的转置，(i, j)-项为 $u_{j,i}$。

引理 7.3。假设 u， $\bar{u} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ 是酉的。令 $k \geq 2$ 和 $d_1, \cdots, d_k \in \{1, *\}$。令 $d_1, \cdots d_k \in \{1, t*\}$，使得 $\bar{d_j} = 1$ 当且仅当 $d_j = 1$. 如果对于所有 $j = 1, \cdots, n$，都有 $\sum_{\alpha=1}^{n} u^{d_1}_{\alpha,\ j}u^{d_2}_{\alpha,\ j} \cdots u^{d_k}_{\alpha,\ j} = 1_{\mathcal{A}}$，那么

(1) $u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k}=\overline{u^{\bar{d}_1}}$.

(2) $u_{i,j}^{d_2}\cdots u_{i,j}^{d_k}=\left(u_{i,j}^{d_1}\right)^*$ for all $i,j=1,\cdots,n$.

(3) $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}^{d_2}\cdots u_{\alpha,j}^{d_k}u_{\alpha,j}^{d_1}=1_{\mathcal{A}}$ for all $j=1,\cdots,n$.

证明。注意到 $u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k}=(u_{i,j}^{d_2}\cdots u_{i,j}^{d_k})_{i,j}$，因此 $(u^{\bar{d}_1})^t(u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k})$ 的对角元素为 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}^{d_1}u_{\alpha,j}^{d_2}\cdots u_{\alpha,j}^{d_k}=1$。根据命题 7.2，我们有 $\|(u^{\bar{d}_1})^t(u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k})\|\leq 1$，由此可得

$$(u^{\bar{d}_1})^t(u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k})=1_{M_n(\mathcal{A})}.$$

由于 $(u^{\bar{d}_1})^t$ 要么是 $\bar{u}^*$，要么是 u^*，且两者都是酉的，因此这就证明了 (1)。由此可得

$$(u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k})=\left((u^{\bar{d}_1})^t\right)^*=\overline{u^{\bar{d}_1}}=\left((u_{i,j}^{d_1})^*\right)_{i,j},$$

and

$$(u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k})(u^{\bar{d}_1})^t=1_{M_n(\mathcal{A})}.$$

注意，$(u^{\bar{d}_1})^*=(u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k})$ 的 (i,j) 项由 $u_{j,i}^{d_2}\cdots u_{j,i}^{d_k}$ 给出，因此 (2) 成立。通过检查 $(u^{\bar{d}_2}\circ\cdots\circ u^{\bar{d}_k})u^{\bar{d}_1}$ 的各项，我们得到

$$\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}^{d_2}\cdots u_{\alpha,j}^{d_k}u_{\alpha,j}^{d_1}=1_{\mathcal{A}}$$

对所有 $j=1,\cdots,n$。

□

回顾一下 若元素 $a\in\mathcal{A}$ 满足 aa^* 和 a^*a 都是投影，则称其为偏等距 .

引理 7.4。假设 $u,\bar{u}\in\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ 是酉的。若对所有 $j=1,\cdots,n$，均有 $\sum_{\alpha=1}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}=1_{\mathcal{A}}$，则有

(1) $\sum_{\alpha=1}u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*=1$ 对所有 $j=1,\cdots,$

(2) 所有 $u_{i,j}$ 都是偏等距 (3) $u_{i,k}^*u_{j,k}=u_{i,k}u_{j,k}^*=0$

对所有 $k=1,\cdots,n$, $i\neq j$

证明。(1) 这是引理 7.3 中的情形 $k=4$, $(d_1,\cdots,d_4)=(*,1,*,1)$，因此有

$$\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*=1,$$

对所有的 $j=1,\cdots,n$。

(2) 注意，$u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*$ 均为正数，且

$$u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*\leq 1_{\mathcal{A}}.$$

因此，我们有 $u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*\leq u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*$。然而，我们还有

$$1_{\mathcal{A}}=\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}\leq\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}=1_{\mathcal{A}}.$$

由此可得 $u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}=u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}$。

因此，$u_{\alpha,j}^*u_{\alpha,j}$都是投影。同样，$u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^*$也都是投影。

$_n$(3) 由于$1_{\mathcal{A}}=\sum_{\gamma=1}u_{\alpha,\ \gamma}^{*},\ \ u_{\alpha,\ \gamma}$对于 $\alpha=1,\ \cdots,\ n,$ 以及$u_{\alpha,\ j}u_{\alpha,\ j}^{*}$也都是投影，因此我们有

$$\begin{aligned}n1_{\mathcal{A}}&=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}u_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta}^{*}\\&=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}u_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta}^{*}u_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta}^{*}\\&=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left(u_{\alpha,\beta}\left(1_{\mathcal{A}}-\sum_{\substack{\gamma=1\\\gamma\neq\beta}}^{n}u_{\alpha,\gamma}^{*},u_{\alpha,\gamma}\right)u_{\alpha,\beta}^{*}\right)\\&=n1_{\mathcal{A}}-\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1\\\gamma\neq\beta}}^{n}u_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\gamma}^{*}u_{\alpha,\gamma}u_{\alpha,\beta}^{*}\end{aligned}$$

由于所有 $u_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\gamma}^{*}u_{\alpha,\gamma}u_{\alpha,\beta}^{*}$ 均为正，因此它们必定全为零，这意味着对于所有 $\alpha,\beta=1,\cdots,n,\ u_{\alpha,\gamma}u_{\alpha,\beta}^{*}=0$ 。类似地，对于所有 $\alpha,\beta=1,\cdots,n,$ 我们也有 $u_{\alpha,\gamma}^{*}u_{\alpha,\beta}=0$ 。

□

$_n$**引理 7.5.** 假设 $u,\bar{u}\in\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ 是酉的。若对于所有 $j=1,\cdots,n,\ \sum_{\alpha=1}u_{\alpha,j}^{*}u_{\alpha,j}^{*}u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}=1$ ，则

(1) 所有 $u_{i,j}$' 均为偏等距；(2) 对于所有 $k=1,\cdots,n,$ $u_{i,k}^{*}u_{j,k}=u_{i,k}u_{j,k}^{*}=0$ ， $i\neq j$(3) 对于所有 $i,j=1,$ $\cdots,n,\ u_{i,j}u_{i,j}^{*}=u_{i,j}^{*}u_{i,j}$

证明。 这是引理 7.3 中的情形 $k=4,\ (d_1,\cdots,d_4)=(*,*,1,1),$ 我们有 $u_{i,j}=u_{i,j}^{*}u_{i,j}u_{i,j}$ ，因此$u_{i,\ j}^{*}=u_{i,j}^{*}u_{i,j}^{*}u_{i,j}$对 $i,j=1,\cdots,n.$成立。因此，我们有

$$u_{i,j}u_{i,j}^{*}=u_{i,j}^{*}u_{i,j}u_{i,j}u_{i,j}^{*}$$

and

$$u_{i,j}u_{i,j}^{*}=u_{i,j}u_{i,j}^{*}u_{i,j}^{*}u_{i,j}$$

$_n$由引理 7.3，我们有 $\sum_{\alpha=1}u_{\alpha,j}^{*}u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}u_{\alpha,j}^{*}=1$对所有 $j=1,\cdots,n$成立，因此得到

$$u_{i,j}^{*}u_{i,j}=u_{i,j}^{*}u_{i,j}u_{i,j}u_{i,j}^{*}$$

and

$$u_{i,j}^{*}u_{i,j}=u_{i,j}u_{i,j}^{*}u_{i,j}^{*}u_{i,j}.$$

因此，我们有

$$u_{i,j}u_{i,j}^{*}=u_{i,j}^{*}u_{i,j}=u_{i,j}u_{i,j}^{*}u_{i,j}^{*}u_{i,j}=\left(u_{i,j}^{*}u_{i,j}\right)^{2}.$$

这蕴含结论（1）和（3）。结论（2）的证明参照引理 7.4。 □

这两个引理将分别应用于 $\mathcal{H}'^{+}$ 和 $\mathcal{H}_0^{+}$。引理 7.4 与引理 7.5 的主要区别在于，满足引理 7.5 中方程的元素必须是正规的，而引理 7.4 中没有这一条件。

命题 7.6。 假设 $u,\bar{u}\in\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ 是酉的。令 $\tilde{\mathbf{d}}\in\{1,*\}^k,$ 其中 $k\geq3$。若 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha}^{d_1},_j u_{\alpha}^{d_2},_j\cdots u_{\alpha}^{d_k},_j=1_{\mathcal{A}}$对所有 $j=1,\cdots,n$ 均成立，则

(1) 所有 $u_{i,j}$ 都是偏等距 (2) $u_{i,k}^{*}u_{j,k}=u_{i,k}u_{j,k}^{*}=0$

对所有 $k=1,\cdots,n,\ i\neq j$

Furth ¯，如果 k 不是偶数或 d 不是交错的，那么 $u_{i,j}u_{i,j}^{*}=u_{i,j}^{*}u_{i,j}$ 对所有 $i,j=1,\cdots,n$。

证明。根据引理 7.3，我们知道 $w=(u_{i}^{d_{2},\,j}\cdots u_{i}^{d_{k},\,j})_{i,\,j}=$是一个酉元。令 $v=(u_{i}^{d_{k-1},\,j}\quad u_{i}^{d_{k},\,j})_{i,\,j}$. 根据命题 7.2，我们有 $\|v\|\leq 1$。由于 u 和 w 是酉元，因此我们有 $u_{i,\,j}u_{i,\,j}^{*}$ 和 $u_{i,\,j}^{*}u_{i,\,j}$ 都是小于或等于 $1_{\mathcal{A}}$ 的正算子。因此，我们有

$$1_{\mathcal{A}}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_{\alpha,j}^{d_{2}}\cdots u_{\alpha,j}^{d_{k}}\right)^{*}\left(u_{\alpha,j}^{d_{2}}\cdots u_{\alpha,j}^{d_{k}}\right)\leq\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_{\alpha,j}^{d_{k-1}}u_{\alpha,j}^{d_{k}}\right)^{*}\left(u_{\alpha,j}^{d_{k-1}}u_{\alpha,j}^{d_{k}}\right),$$

最后一项是 $v^{*}v$ 对角线上的一个元素。由于 $\|v^{*}v\|=\|v\|^{2}\leq 1$，我们有

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_{\alpha,j}^{d_{k-1}}u_{\alpha,j}^{d_{k}}\right)^{*}\left(u_{\alpha,j}^{d_{k-1}}u_{\alpha,j}^{d_{k}}\right)=1_{\mathcal{A}},$$

这正是引理 7.4 和引理 7.5 中的情形之一。由此可知，所有 $u_{i,\,j}$'s 都是偏等距，并且对于所有 $k=1$, $\cdots$, n, $i\neq j$, 有 $u_{i,\,k}^{*}u_{j,\,k}=u_{i,\,k}u_{j,\,k}^{*}=0$。

˜如果 1 和 $*$ 没有在d中交替出现，那么存在 $1\leq i\leq k-1$ 使得 $d_{i}=d_{i+1}$。根据引理 7.3 中的循环表述，我们可以假设 $d_{k-1}=d_{k}$。由上述对 $v^{*}v$ 的分析可知，情形如引理 7.4 所述。因此，对于所有 i, $j=1$, $\cdots$, n，都有 $u_{i,\,j}u_{i,\,j}^{*}=u_{i,\,j}^{*}u_{i,\,j}$。

如果 1 和 $*$ 在 ˜d中交替出现，且 k 为奇数，则 $d_{1}=d_{k}$。因此，对于所有 $j=1$, $\cdots$, n，都有 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,\,j}^{d_{2}}\cdots u_{\alpha,\,j}^{d_{k}}u_{\alpha,\,j}^{d_{1}}=1_{\mathcal{A}}$。这仍然是引理 7.4 所述的情形。证明完毕。

□

推论 7.7。假设 u, $\bar{u}\in\mathcal{M}_{n}(\mathcal{A})$ 是酉的。给定 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,\,j}^{d_{1}}u_{\alpha,\,j}^{d_{2}}\cdots u_{\alpha,\,j}^{d_{k}}=1$ 对于所有 $j=1$, $\cdots$, n。令 m 为序列（d_{1}, $\cdots$, d_{k}）中出现的 1 和 $*$ 的数量之差。如果 $m\geq 1$，则

$$\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}^{m}=1.$$

对于所有 $j=1,\cdots,n$

˜证明。对于 $k=1$，结论显然成立。对于 $k=2$，由于 $m\geq 1$，我们有 d = (1,1) 或 $(*,*)$。结论成立。

˜对于 $k>2$，如果 $m\geq 2$，那么 d 永远不会是交替的。根据命题 7.6，所有 $u_{i,j}$'s 都是正规偏等距。如果 1 的个数多于 $*$ 的个数，那么我们有

$$u_{\alpha,j}^{d_{1}}u_{\alpha,j}^{d_{2}}\cdots u_{\alpha,j}^{d_{k}}=u_{\alpha,j}^{m}.$$

否则，我们有

$$u_{\alpha,j}^{d_{1}}u_{\alpha,j}^{d_{2}}\cdots u_{\alpha,j}^{d_{k}}=\left(u_{\alpha,j}^{*}\right)^{m}.$$

在这两种情况下，我们都有

$$\sum_{\alpha=1}^{n}u_{\alpha,j}^{m}=1.$$

˜ ˜如果 $m=1$ 且 d 不是交替的，那么 1 和 $*$ 在 d 中交替出现，且 k 为奇数，则结论成立。□

命题 7.8. 设 $\mathcal{A}(n)$ 是由 $\{u_{i,j}|i,j=1,\cdots,n\}$ 生成的量子酉群。

$_{n}$(1) 若对所有 $i=1,\cdots,n$, $\sum_{\alpha=1}^{2}u_{\alpha,i}^{2}=1_{\mathcal{A}(n)}$，则 $\mathcal{A}(n)\subset C(\mathcal{O}^{+},n)$。$_{n}$ $_{n}$(2) 若对所有 $i=1,\cdots,n$, $\sum_{\alpha=1}^{2}u_{\alpha,i}^{2}=1_{\mathcal{A}(n)}$ 且 $\sum_{i=1}^{2}u_{i,k}=1_{\mathcal{A}(n)}$，则 $\mathcal{A}(n)\subset C(\mathcal{B}_{s}^{+},n)$。

$_{n}$ $_{n}$(3) 若 $\sum_{\alpha=1}^{2}u_{\alpha,i}^{2}=1_{\mathcal{A}(n)}$，且存在一个偶数 $k\geq 4$，使得对所有$i=1,\cdots,n$, $\sum_{\alpha=1}^{k}u_{\alpha,i}^{k}=1_{\mathcal{A}(n)}$，则 $\mathcal{A}(n)\subset C(\mathcal{H}_{s}^{+},n)$。

$_n$(4) 若对所有 $i = 1, \cdots, n$, $\sum u_{\alpha,i} = 1_{\mathcal{A}(n)}$, 则 $\mathcal{A}(n) \subset C(\mathcal{B}^+, n)$。$_{i=1}$(5) 若存在 $k \in \mathbb{N}$、$(d_1, \cdots, d_k) \in \{1, *\}^k$, 使得对所有 $j = 1, \cdots, n$, $\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^{d_1,i} u_\alpha^{d_2,i} \cdots u_\alpha^{d_k,i} = 1$, 且序列 $(d_1, \cdots, d_k)$ 中 1 和 $*$ 出现次数之差 m 大于或等于 3, 则 $\mathcal{A}(n) \subset C(\mathcal{H}_m^+, n)$。$_n$(6) 若对所有 i, $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i} u_{\alpha,i} u_{\alpha,i}^* u_{\alpha,i}^* u_{\alpha,i}^* = 1_{\mathcal{A}(n)}$, 则 $\mathcal{A}(n) \subset C(\mathcal{H}_0^+, n)$ (7) 若对所有 i, $\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,i} u_{\alpha,i}^* u_{\alpha,i} u_{\alpha,i}^* u_{\alpha,i}^* = 1_{\mathcal{A}(n)}$, 则$\mathcal{A}(n) \subset C(\mathcal{H}'^+, n)$。

证明。由引理 7.3 (2), $u_{i,j}$' 均为自伴的。结合酉条件，我们得到 $\sum_{k=1}^{n} u_{k,i} u_{k,j} = \delta_{i,j}$ 这是 $C(\mathcal{O}^+, n)$ 的普适条件。因此，(1) 成立。(2) 和 (3) 由 [17] 中给出的分类得出。(4) 直接由 $C(\mathcal{B}^+, n)$ 的定义得出。(5) 由推论 7.7 和命题 7.6 得出。(6) 由引理 7.5 得出，(7) 由引理 7.4 得出。

□

8. Proof to Theorem 3

首先，我们将证明 $\mathcal{U}^+$ 为定理 3 中量子随机变量提供了最大的分布。

引理 8.1。设 $(\mathcal{M}, \phi)$ 是一个 W^*-概率空间，ϕ 是正规忠实的，且 $\mathcal{M}$ 由一个非零随机变量无限序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 生成。若 $\mathcal{S}^+ \subset \mathcal{DS}(X, \phi)$，则 $\mathcal{DS}(X, \phi) \subset \mathcal{U}^+$。

证明。由于 $\mathcal{S}^+ \subset \mathcal{DS}(X, \phi)$，存在一个含幺 W^*-子代数 $\mathcal{B}$ 以及一个保持 ϕ的条件期望 $\mathbb{E}$: $\mathcal{M} \to \mathcal{B}$, 使得 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ 中自由独立，且具有相同的 $\mathcal{B}$-值分布。由 ϕ 的忠实性和保持 ϕ 的条件，分布对称性传递到了算子值概率空间 $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$。因此，我们有 $\mathbb{E}[x_1] \neq 0$ 或 $\mathbb{E}[x_1] = 0$，并且对所有 $b \in \mathcal{B}$都有 $\mathbb{E}[x_1 b x_2] = 0$ 。由命题 3.5, $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{U}^+, n)$。□

现在，我们可以证明定理 3 了。这里我们只关注自由情形，因为在该框架中引入交换关系后，经典情形便可直接得出。

定理 *3* 的证明。只需考虑 $\mathcal{B}$-值自由累积量的非消失条件。由于 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{U}^+$-不变的，我们无需考虑 $\kappa(x_i, x_i^*)$ 和 $\kappa(x_i^*, x_i)$。若存在 $k \geq 1$和 $\tilde{\mathbf{d}} \in \{1, *\}^k$ 使得

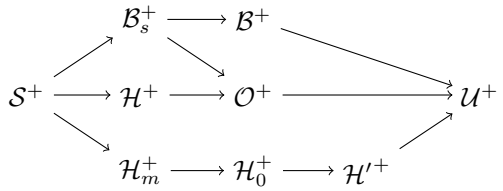
$$\kappa_{\mathbb{E}}^k(x_1^{d_1}, \cdots, x_1^{d_k}) \neq 0,$$

则根据命题 6.2,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} u_{\alpha,j}^{d_1} u_{\alpha,1}^{d_2} \cdots u_{\alpha,1}^{d_k} = 1$$

.

这意味着，对于所有 n，最大分布量子群 $\mathcal{A}_n$ 必定是定理中列出的某个群。剩下唯一需要证明的是描述不同量子群的交。回顾下图所示的量子子群关系:



如果 $\mathcal{A}_n$ 是 $C(\mathcal{O}^+,\ n)$的一个量子子群，根据 [17]中的工作，$\mathcal{A}_n$ 必定是 $C(\mathcal{O}^+,\ n)$ $C(\mathcal{H}^+,\ n)$ $C(\mathcal{B}_s^+,\ n)$，或 $C(\mathcal{O}^+,\ n)$之一。

若 $\mathcal{A}_n$ 是 $C(\mathcal{B}^+,\ n)$ 的量子子群，且 $C(\mathcal{H}'^+,\ n)$，则有 $\sum_{k=1}^{n} u_{k1} = 1_{\mathcal{A}}$, $\sum_{k=1}^{n} u_{k,\ 1} u_{k,\ 1}^* = 1_{\mathcal{A}}$，并且元素 $u_{k,\ 1}$' 均为具有正交初始空间的偏等距。令 p 为投影到 $u_{k,\ 1}$ 的初始空间上的投影。那么有

$$u_{k,1} = u_{k,1}p = \sum_{k=1}^{n} u_{k1}p = 1_{\mathcal{A}}p = p.$$

类似地，所有 $u_{i,\ j}$' 均为投影。因此，$\mathcal{A}_n$ 是 $C(\mathcal{S}^+,\ n)$ 的量子子群，也就是说 $\mathcal{A}_n = C(\mathcal{S}^+,\ n)$。

最后，若 $\mathcal{A}_n$ 是 $C(\mathcal{H}_{m_1}^+,\ n)$ 的量子子群，且 $C(\mathcal{H}'^+_{m_2},\ n)$，其中 $m_1 > m_2 \geq 3$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k1}^{m_1} = \sum_{k=1}^{n} u_{k1}^{m_2} = 1_{\mathcal{A}}.$$

注意，在这种情况下，$u_{k1}^{m_2}$' 均为投影，且 u_{k1}' 均为正规，因此有

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k1}^{m_1 - m_2} = 1_{\mathcal{A}}.$$

因此，$\mathcal{A}$ 必须是 $C(\mathcal{H}^+ m,\ n)$ 的量子子群，其中 $m = \gcd(m_1,\ m_2)$ 是 m_1 与 m_2 的最大公约数。

如果 $m = 1$，则可将其归结为 $C(\mathcal{B}^+,\ n)$ 和 $C(\mathcal{H}'^+,\ n)$ 的子群情形，从而得到 $\mathcal{A}_n = C(\mathcal{S}^+,\ n)$。
如果 $m = 2$，则导出自伴情形，它是 $C(\mathcal{O}^+,\ n)$ 的量子子群。证明完成。

□

致谢： 本工作得到浙江省自然科学基金（批准号：LR24A010002）和国家自然科学基金（批准号：12171425）的资助。

References

[1] Teodor Banica。《量子群导论》。 *arXiv:1909.08152*，2019年。[2] Teodor Banica、Stephen Curran 和 Roland Speicher。《易量子群的德·菲内蒂定理》。 *Ann. Probab.*，40 1 401 435，2012年 ( ): – 。[3] Teodor Banica 和 Roland Speicher。《正交李群的解放》。 *Adv. Math.*，222(4):1461–1501，2009年。[4] Isabelle Baraquin、Guillaume C´ebron、Uwe Franz、Laura Maassen 和 Moritz Weber。《酉对偶群的德·菲内蒂定理》。
SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.，18:论文编号 067，29，2022年。[5] March Boedihardjo 和 Ken Dykema。某些随机范德蒙德矩阵的渐近 $*$-矩。 *Adv. Math.*，318 1: –45，2017年。[6] Marek Bo˙zejko 和 Roland Speicher。广义布朗运动的一个例子。 *Comm. Math. Phys.*，137(3):519– 531，1991年。[7] Marek Bo˙zejko 和 Roland Speicher。考克斯特群上的完全正映射、变形交换关系与算子空间。 *Math. Ann.*，300(1):97–120，1994年。[8] Stephen Curran。代数的量子可交换序列。 *Indiana Univ. Math. J.*，58(3):1097–1125，2009年。[9] Stephen Curran。量子可旋转性。
Trans. Amer. Math. Soc.，362(9):4831–4851，2010年。[10] Kenneth J. Dykema 和 Claus K
¨ *Proc. Amer. Math. Soc.* 142 11 3853 3863, 2014
ostler。量子可交换随机变量的尾代数。 , ( ): – 。[11] Kenneth J. Dykema、Claus K¨ostler 和 John D. Williams。自由积 C^*-代数上的量子对称态。*Trans. Amer. Math. Soc.*，369(1):645–679，2017年。[12] David A. Freedman。推广德·菲内蒂定理的混合不变量：连续时间参数。 *Ann. Math. Statist.* 34 1194 1216, 1963 , : – 。[13] Edwin Hewitt 和 Leonard J. Savage。笛卡尔积上的对称测度。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，80:470– 501，1955 年。

[14] David Jekel 和 Weihua Liu。由树定义的非交换独立性拟环。 *Dissertationes Math.*，553:100，2020年。[15] Claus K¨ ostler。非交换扩展德·菲内蒂定理。 *J. Funct. Anal.*，258(4):1073–1120，2010年。[16] Claus K¨ostler 和 Roland Speicher。非交换德·菲内蒂定理：量子置换下的不变性等价于带合并的自由性。 *Comm. Math. Phys.*，291(2):473–490，2009年。[17] Weihua Liu。非交换概率中的一般德·芬内蒂型定理。 *Comm. Math. Phys.*，369 866，2019 3 837( ): – 。[18] Wojciech M-l otkowski。 Λ-自由概率。 *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*，7(1):27–41，2004年。[19] Alexandru Nica 和 Roland Speicher。 *R*-对角对——统一处理 Haar 酉元与圆元的方法。载于 *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*，第 12 卷，属 *Fields Inst. Commun.*，第 149–188 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。[20] Alexandru Nica 和 Roland Speicher。

Lectures on the combinatorics of free probability 335 *London Mathe-* ，第 *matical Society Lecture Note Series* 2006
卷，属 。剑桥大学出版社，剑桥，。[21] Dimitri Shlyakhtenko。自由拟自由态。 *Pacific J. Math.*，177(2):329–368，1997 年。[22] Roland Speicher。宏观场的广义统计。 *Lett. Math. Phys.*，27(2):97–104，1993年。[23] Roland Speicher。论泛积。载于

Free probability theory (Waterloo, ON, 1995) 12 *Fields Inst.* ，第 *Commun.* 257 266 1997
卷，属 ，第 – 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[24] Roland Speicher。带合并的自由积与算子值自由概率理论的组合理论。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，132(627):x+88，1998年。[25] Roland Speicher 和 Moritz Weber。具有部分交换关系的量子群。 *Indiana Univ. Math. J.*，68 6 1849( ): –1883，2019年。[26] Roland Speicher 和 Reza Woroudi。布尔卷积。载于 *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*，第 12 卷，属 *Fields Inst. Commun.*，第 267–279 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。[27] Roland Speicher 和 Janusz Wysocza´nski。经典独立性与自由独立性的混合。 *Arch. Math. (Basel)*，107(4):445– 453，2016年。[28] Pierre Tarrago 和 Moritz Weber。酉易量子群：自由情形与群情形。

Int. Math. Res. ，( ): *Not. IMRN* 18 5710 5750, 2017
– 。[29] Pierre Tarrago 和 Moritz Weber。双色非交叉划分张量范畴的分类。

J. ，：– 。 *Combin. Theory Ser. A* 154 464 506, 2018
[30] A. Van Daele。紧量子群上的 Haar 测度。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，123(10):3125–3128，1995年。[31] D. V. Voiculescu、K. J. Dykema 和 A. Nica。 *Free random variables*，第 1 卷，属 *CRM Monograph Series*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992年。以非交换概率方法研究自由积及其在随机矩阵、算子代数和自由群调和分析中的应用。[32] Dan Voiculescu。圆系统与半圆系统以及自由积因子。载于

Operator algebras unitary represen- ，，，， *tations enveloping algebras and invariant theory (Paris, 1989)* 92 *Progr. Math.* 45 60 ¨
第 卷，属 ，第 – 页。Birkhauser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年。[33] Dan Voiculescu。某些非交换算子值随机变量上的运算。第 232 号，第 243– 275 页。1995年。算子代数最新进展（奥尔良，1992年）。[34] Shuzhou Wang。紧量子群的自由积。 *Comm. Math. Phys.*，167(3):671–692，1995年。[35] Moritz Weber。易量子群的分类。 *Adv. Math.*，245:500–533，2013年。[36] S. L. Woronowicz。紧矩阵伪群。 *Comm. Math. Phys.*，111(4):613–665，1987年。[37] S. L. Woronowicz。关于紧矩阵量子群的一点说明。 *Lett. Math. Phys.*，21(1):35–39，1991年。

浙江大学数学学院，中国浙江省杭
州市 310058。电子邮箱：
lwh.math@zju.edu.cn