arXiv:2512.16246v1 [math.GR] 18 Dec 2025

具有非本原分拆偏序集的区块传递设计

CARMEN AMARRA[b]、ALICE DEVILLERS[a], *和 CHERYL E. PRAEGER[a]

Abstract. 我们研究一类区组设计：其自同构群在区块和点上均具传递性，并且保持点集的某个给定有限分划偏序集中的每个划分不变。偏序集中所有划分的全稳定子群 G是一个广义缠绕积。我们利用广义缠绕积理论，以点子集 B的"数组"为依据，给出使 B 的 G-像构成一个 G-区组传递2-设计的充要条件。这推广了此前针对偏序集为链或反链这两种特殊情形的结果。我们还针对包含三个真划分的每种偏序集，以及著名的含四个划分的 N-偏序集，给出了2-设计的显式无穷族实例。（含两个真划分的偏序集此前已有研究。）这引出了一个问题：如何为其他偏序集寻找显式实例。

关键词： 区组传递设计、点不纯设计、偏序集、群的缠绕积、广义缠绕积**2000 年数学主题分类：** 05B05、05C25、20B25 本文是澳大利亚研究委员会发现基金项目 DP200100080 的一部分。

1. Introduction

在设计型统计实验中，实验单位有时会根据可能影响观测结果的不同因素进行划分；当存在两个或更多因素时，相应的划分集合在细化关系下构成一个偏序集。Nelder 在 [16], 中描述了此类偏序集的一个类，Throckmorton 则在[18]中给出了其他例子。我们研究具有自同构群 G 的区组设计，其中该自同构群在区块上传递，并保持点集的给定划分偏序集（$\mathfrak{C}^*$, $\preccurlyeq$）不变；也就是说， G 使每个划分 $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}^*$保持不变。

定义 1.1。设有偏序集 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 和非空集 $\mathcal{P}$。令 $(\mathfrak{C}^*, \preccurlyeq')$ 为 $\mathcal{P}$ 的划分偏序集，使得 $(\mathfrak{C}^*, \preccurlyeq') \cong (I, \preccurlyeq)$。若群 $G \leqslant \mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ 在 $\mathcal{P}$ 上是$\mathcal{I}$-不纯 的，则称其在 $\mathcal{P}$ 上传递，且 G使 $\mathfrak{C}^*$中的每个划分保持不变。

由于关系 $\preccurlyeq$ 和 $\preccurlyeq'$ 通常密切相关，我们通常用同一个符号 $\preccurlyeq$表示二者。若 $|I| = 1$，则偏序集 $(\mathfrak{C}^*, \preccurlyeq)$ 仅包含一个平凡划分，其所有部分的大小均为 1；如果这个划分和仅含一个部分的划分是唯一的 G-不变划分，那么 G 在 $\mathcal{P}$上是本原的。因此，我们关注满足$|I| \geq 2$的偏序集 $(I, \preccurlyeq)$。在分析中，我们使用一个划分偏序集 $(\mathfrak{C}, \preccurlyeq)$，它可能将 $(\mathfrak{C}^*, \preccurlyeq)$ 作为真子集包含在内。定义 1.1 中采用记号 $\mathfrak{C}^*$ ，以便与后文的用法保持一致；更多细节请参见第2.2节。

区组设计是一种关联结构 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$，由有限集 $\mathcal{P}$ 的点和称为区块的点子集组成；其中，对于某些常数 k， $r > 0$，每个区块的大小均为 k ，且每个点恰好出现在 r 个区块中。若点集 $\mathcal{P}$ 的大小为 v，并且此外，对于某些常数 t， $\lambda > 0$ ，任意一个点的 t-子集都出现在 λ 个区块中，则该设计是一个 t-(v, k, λ) 设计。 $\mathcal{D}$ 的自同构是保持区块集 $\mathcal{B}$ 不变的集合 $\mathcal{P}$ 上的一个置换；若设计 $\mathcal{D}$ 存在一个使

日期：2025年12月19日。

某自同构子群在 $\mathcal{P}$ （分别为 $\mathcal{B}$）上传递作用，则称该设计点传递（分别称为区组传递）。Block 于 1967年 在 [8] 中证明，对于 $t \geq 2$，区组传递性蕴含点传递性。Delandtsheer 和 Doyen 在 [12] 中证明，几乎所有区组传递2-设计都是点本原的；而在 [11] 中，Cameron 和第三位作者描述了点非本原 2-设计族的一般构造。这些构造得到的设计包含一个或两个非平凡的不变划分。

本文的目标是大幅推广 [11], 为任意有限偏序集 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 构建区组传递的 $\mathcal{I}$-非本原 2-设计的一般理论的方法，且$|I| \geq 2$。我们还为较小的偏序集给出了此类 2-设计的显式构造。我们研究的设计具有一个广义缠绕积 作为其自同构群。所考虑的广义缠绕积是 Bailey、Rowley、Speed 和第三位作者在 [6] 中作为置换群引入的，它们基于一个偏序集 $(I, \preccurlyeq)$，见第 2.1 小节。Holland [14]和 Silcock [17]在更受限的情形下独立地构造了它们。这些群作用是某个构造的特例；Wells [19, §7]于 1976年描述了该构造，用于半群的作用，并将其称为“作用集的花环积”。在 [6, 定理 A] 中证明了，当输入作用全都是群作用且偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 满足极大条件时，Wells 的花环积作用是一个群作用。此外，对于某个重要的偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 子族，我们所考虑的广义缠绕积正是 J. A. Nelder [16]，所描述的结构的自同构群，并且这些结构经常用于分析设计型统计实验。我们要解决的一般问题如下。

问题 1. 给定一个偏序集 $\mathcal{I}$，是否存在一个 2-设计，它存在一个在点上呈 $\mathcal{I}$-可约的区组传递自同构群？若存在，请给出一个明确的构造。

当偏序集是链或反链时，文献中已有部分答案。我们将在小节 1.1 中解释这些概念，并简要概述相关结果。我们还将在小节 1.1 中提及一些在文献中的各种分类结果里“偶然”出现的 $\mathcal{I}$-可约区组传递 2-设计实例。

本文使用 [6] 关于 $\mathcal{I}$-可约群的结果，其中 $\mathcal{I} =(I \preccurlyeq)$ 满足一个称为 极大条件 的温和有限性条件，也就是说，每个非空子集 $J \subseteq I$ 都包含一个 极大元 （一个元素 $j \in J$，使得不存在满足 $j \preccurlyeq i$ 的元素 $i \in J \setminus \{j\}$）。尽管每个有限偏序集 $\mathcal{I}$ 都满足这一条件，但我们的一些结果适用于所有满足极大条件的（不一定有限的）$\mathcal{I}$，具体而言，是第 2.5 节和第 2.6 节中的结果，因此在第 2 节中，我们在需要之前不假设有限性。

类比于在满足极大条件的偏序集 $\mathcal{I} = (I \preccurlyeq)$ 上的构造 [11], ，我们将点集定义为集合 Δ_i 的笛卡尔积 $\mathcal{P} = \prod_{i\in I} \Delta_i$，其中对每个 $i \in I$ 都有 $|\Delta_i| =e_i \geq 2$。对于任意子集 $J \subseteq I$，我们定义 Δ_J: $= \prod_{i\in J} \Delta_i$，并约定 $\Delta_\varnothing$ 为单元素集；令 π_J 表示自然投影 $\mathcal{P} \to \Delta_J$。若子集 $J \subseteq I$ 满足 $j \in J$，且 $j \preccurlyeq i$ 意味着 $i \in J$，则称其为祖先子集。特别地，对每个 $i \in I$， $A[i] := \{j \in I \mid i \preccurlyeq j\}$ 都是祖先子集。我们用 $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ 表示 I 的祖先子集族。对于每个 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$，当 $\boldsymbol{\nu}$ 遍历 Δ_J 时，集合 $\{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{P} \mid \boldsymbol{\varepsilon}\pi_J = \boldsymbol{\nu}\}$ 构成 $\mathcal{P}$ 的一个划分 $\mathcal{C}_J$；这些划分 $\mathcal{C}_J$ 在细化运算下构成偏序集 $(\mathfrak{C}, \preccurlyeq)$。特别地，子集 $\mathfrak{C}^* = \{\mathcal{C}_{A[i]} \mid i \in I\}$ 构成 $(\mathfrak{C}, \preccurlyeq)$ 的一个子偏序集 $(\mathfrak{C}^*, \preccurlyeq)$，且同构于 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$。

对于子集 $B \subseteq \mathcal{P}$， B 的数组函数 χ_B 是函数

$$(1)\quad \chi_B \ : \bigcup_{J\in\mathcal{A}(\mathcal{I})} \Delta_J \to \mathbb{N}_{\geq 0}, \text{ where } \forall\, J \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) \text{ and } \forall\, \boldsymbol{\nu} \in \Delta_J,\ (\boldsymbol{\nu})\chi_B := |\{\boldsymbol{\varepsilon} \in B \mid \boldsymbol{\varepsilon}\pi_J = \boldsymbol{\nu}\}|$$

而 B 的数组 是所有像集 $(\boldsymbol{\nu})\chi_B$ 构成的多重集。与上文一样，我们考虑 1-设计 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$，其中 $\mathcal{B} = B^F$ 是元素作用于“基块” $B \subseteq \mathcal{P}$ 所得到的所有像的集合

属于一个合适的 $\mathcal{I}$-非本原子群 $F \leq \mathrm{Sym}(\mathcal{P})$，即 F 是广义缠绕积 $\prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$，其中每个 $G_i \leq \mathrm{Sym}(\Delta_i)$ 都在 Δ_i 上 2-传递。我们在第 2.3 节详细介绍这类群。我们的第一个主要结果给出了关于数组函数 χ_B 的必要且充分的算术条件，使 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 成为一个 2-设计。

定理 1.2. 设 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 是一个带有 $|I| \geq 2$ 的有限偏序集，并且对于每个 $i \in I$，令 Δ_i 为一个大小为 $e_i \geq 2$ 的有限集，并令 $\mathcal{P} = \prod_{i\in I}\Delta_i$ 为大小为 $v = \prod_{i\in I} e_i$ 的集合。对于每个 $i \in I$，令 $G_i \leq \mathrm{Sym}(\Delta_i)$ 在 Δ_i 上 2- 传递地作用，并令 $F = \prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$，如第 2.3 节所述。令 $B \subseteq \mathcal{P}$ 为大小为 k 的集合，并设 $\mathcal{B} := B^F$。那么，$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 2-设计，当且仅当，对于每个真非空祖先子集 $J \subset I$，

$$\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}\left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Delta_{J\cup S}}\left((\boldsymbol{\nu})\chi_B\right)^2\right) = \frac{k(k-1)}{v-1}\left(\prod_{i\in\partial J}(e_i-1)\right)\left(\prod_{j\in(J\cup\partial J)^c} e_j\right) \tag{2}$$

其中，J^c 表示 I 中 J 的补集，而 ∂J 是 J_c 中所有极大元构成的集合。

为了展示如何运用定理 1.2 构造新的 $\mathcal{I}$-非本原区组传递 2-设计，我们针对每个满足 $|I| = 3$、且不是链或反链的偏序集（I，$\preccurlyeq$）构造了这类设计的无穷族（这些偏序集见第 1.1 节）；此外，还针对图 3 中著名的“N”型偏序集构造了无穷族。该偏序集最初由 Throckmorton 描述（见 [18, Diagram(7)，图 3，第 26]，页，或 [6, Example 1，图 3]）。基于我们在第 5 节中的新构造（以及第 1.1 节中介绍的关于链和反链的已有工作），我们得到以下定理。

定理 1.3. 对于每个满足 $2 \leq |I| \leq 3$的偏序集 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$，以及图 *3* 中的“*N*”型偏序集 $\mathcal{I}$，都存在无穷多个2-设计 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$，使得 $\mathcal{D}$ 具有一个区组传递自同构群 G，且该群在 $\mathcal{P}$上是 $\mathcal{I}$-非本原的。

1.1. 关于链与反链的已有结果。 若 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 是一个具有 $s \geq 3$ 的 s-链，也就是说，$|I| = s$ 且 $\preccurlyeq$ 是全序，则称该设计为 s-链非本原。对于给定的点集 $\mathcal{P}$，若其允许一个 s-链非本原自同构群 G，且区块集 $\mathcal{B}$ 在 G 下构成单一轨道，我们在 [4] 中给出了关于数组的充要条件，以判定区组传递的 s-链非本原关联结构 $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是否为 2-设计。注意，[4, 定理 1.3] 是定理 1.2 在 $(I, \preccurlyeq)$ 为 s-链时的特例（我们在第 4 节定理 1.2 的证明之后对此作了更详细的说明）。此外，对于任意 $s \geq 3$，我们给出了一个显式构造，得到 [4], 中区组传递的 s-链非本原 2-设计的一个无限族，以及 [5] 中旗传递的 s-链非本原 2-设计的一个无限族。

对于任意 $s \geq 2$，偏序集 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 是一个 s-反链，当且仅当 $|I| = s$ 且 $i \preccurlyeq j$。我们将此类设计称为 s-网格非本原设计，因为点集可以视为笛卡尔积 $\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_s$，可将其想象为一个 s 维网格。当 $\mathcal{I}$ 是一个 2-反链时，对应于两个点划分，它们具有这样的性质：属于不同划分的任意两个集合恰好交于一点；点集可以排列成一个矩形网格，使得两个非平凡划分分别是行集和列集。为简洁起见，我们将 2-网格非本原设计称为网格非本原设计。构造 G- 区块传递、G- 网格非本原 2- 设计的系统方法，始于对区组传递点非本原设计的研究 [11, 第3], 节，之后由 Alavi、Daneshkhah 以及第二、第三作者在 [2], 中进一步发展；[2] 则介绍了区块传递网格非本原 2-设计的一般构造和具体实例。[11] 中的方法由 Brasi˘c 等人 [9, 10]从组合和计算角度加以发展，以对参数有界的旗传递网格非本原设计进行分类。若干网格非本原、区块传递 2-设计的实例，源自群作用点本原且其元素保持或转置一个方形 网格的例子，其中该群

$\asymp G = S_n \wr S_2$ 以点本原方式作用，且其元素保持或转置一个方形 $n \times n$ 网格，如 [2] 所述（参见设计 $\widehat{\mathcal{D}}(\Delta)$，见 [2, (1.3)]）以及 [9]。指数为 2 的基群 S_n^2 是网格非本原的；当且仅当 G 中的区块稳定子 G_B 也交换网格的行与列时，它才是区块传递的。通过这一观察，人们通过计算枚举（例如，[9, 例 8.1 和 8.2]）或作为理论分类的一部分，发现了一些 G-区块传递且 G 网格非本原的设计，见下文实例。

在与 Alavi 和 Daneshkhah [3] 的进一步研究中，我们将对 [2] 的分析推广到任意 $s \geq 2$下的 s-反链 $\mathcal{I} = (I \preccurlyeq)$。对于给定的点集 $\mathcal{P}$，若其允许一个自同构群 G，且该群为 s-网格非本原群，并且区块集 $\mathcal{B}$在 G下构成单一轨道，那么我们能够用一组称为数组（定义见 (1)）的参数，找到使区组传递的、 s-网格非本原关联结构（$\mathcal{P}$，$\mathcal{B}$）成为 2-设计的充要条件。注意，定理 1.3] 中的每个结果 [3, 都是定理 1.2 在（I，$\preccurlyeq$）为 s-反链时的特例（我们将在第 4 节定理 1.2 的证明之后对此作更详细的解释）。此外，我们还构造了一个包含 $s = 3$的区组传递、s-网格非本原 2-设计无限族，以及一个满足 $s = 4$的例子。其他区块大小较小的例子可见其他研究：

- 对于 $k = 4$，Zhan 等人 [20] 对区组传递的 2-(v，4，λ) 设计进行了分类，得到两个 G块传递、 G 网格非本原的 2-设计，其参数为 $G = S_5 \times S_5$,$v = 25$；另请参见引理 4.3 和 4.4]，或 $\lambda = 18$ 72 [20, 。
- 对于 $k = 5$，Zhao 和 Zhou [21] 发现了两个 2-(81，5，λ) 设计（其参数分别为 $\lambda = 14112$, 7056），它们都允许 $S_9 \times S_9$ 的块传递作用；具体而言，这些设计的基块如图 [21, 图 2、图 3], 所示，因为从这些图中可以看出， $S_9 \wr S_2$ 中的块稳定子会交换网格的行和列。
- 对于 $k = 6$，存在一个旗传递双平面（即一个对称的 2-(v，k，2) 设计），它允许一个保留点上的三维网格结构的块传递自同构群。其参数为 (v，k，λ) =(16，6，2), 自同构群为$2^4.S_6$；并且存在一个网格非本原自同构子群 $2^4.S_3$，它保留三个独立的点划分，这些划分构成一个 $2 \times 2 \times 4$ 网格（见 [3, 表2，第 1] 行）。
- 对于 $k = 8$，我们再次参见 [13, 表 3]：存在一个 2-(36，8，4) 设计，其自同构群 S_6 是旗正则的，并保持一种 6×6 网格结构；另有一个 2-(15，8，4) 设计，其自同构子群在块上传递（但不是旗传递），并保持一种 3×5 结构。
- 对于 $k = 20$，有两个 2-(96，20，4) 设计，它们都具有旗传递且保持网格不变划分的 ve 自同构群（见 [15] 和 [13, 表 3]）。其中一个设计的自同构群为 $2^8.S_6$，它有一个子群 $2^4.S_5$，该子群也旗传递并保持一个6×16网格。另一个设计的自同构群为 $2^6.S_5$，它有一个子群 $2^4.S_5$，该子群旗传递并保持一个 6×16 网格（事实上，存在一个由大小为 16 的部分组成的不变划分，以及两个彼此独立、由大小为 6 的部分组成的划分。）

2. Poset block structures and generalised wreath products of groups

这里介绍证明定理 1.2 所需的一些背景知识，包括偏序集以及与之相关的块结构和对称群的重要概念。这些内容大多摘自 [6]。

2.1. 偏序集及其祖先子集。 设 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集，即一个集合 I 及其上的自反且传递关系 $\preccurlyeq$。若 (i, j) 属于该关系，我们记作 $i \preccurlyeq j$；若此外 $i \neq j$，则记作 $i \prec j$。按照惯例，我们用节点表示集合 I 中的元素，并将不同的节点 i和 j 以一条边相连；如果$i \prec j$，则 i位于 j 下方，以此来直观表示偏序集 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$。若子集 $J \subseteq I$ 满足：对每个 $j \in J$，关系 $j \prec i$ 蕴含

that $i \in J$。例如，集合 I 显然是祖先子集；空集 $\varnothing$ 也满足这一条件，因此是祖先子集。此外，对每个 $i \in I$，令

$$A(i) := \{j \in I \mid i \prec j\} \quad \text{and} \quad A[i] := A(i) \cup \{i\} = \{j \in I \mid i \preccurlyeq j\},$$

根据定义可知，$A(i)$和 $A[i]$都是祖先的。注意，对于任意$i,\ j \in I$，当且仅当 $i \prec j$时，$A[i] \supsetneq A[j]$ 成立。

对于子集 $J \subseteq I$，若不存在满足 $j \prec i$的元素$i \in J$，则称元素 $j \in J$ 为 J 的极大元；换言之，$A(j) \cap J = \varnothing$。若 I 的每个子集都至少含有一个极大元，则称偏序集 $\mathcal{I}$ 满足极大条件。

我们用 $\mathcal{A}(\mathcal{I})$表示 I的所有祖先子集构成的集合。不难看出，$\mathcal{A}(\mathcal{I})$在集合论并运算下封闭。对于任意祖先子集 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$，$J$的边界$\partial J$是补集 $J_{\mathrm{c}} = I \setminus J$中的所有极大元组成的集合。注意，对于任意$S \subseteq \partial J$，并集 $J \cup S \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$。特别地，对于任意 $i \in I$，有 $i \in \partial A(i)$。此外，每个$J \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$都可以写成 $J = \bigcup_{j \in J} A[j]$。

2.2. 偏序集块结构与划分。 设 $\mathcal{I} = (I,\ \preccurlyeq)$ 是一个偏序集。对每个 $i \in I$，令 Δ_i 为一个大小为 $e_i \geq 2$ 的集合；对每个子集 $J \subseteq I$，记 $\Delta_J := \prod_{j \in J} \Delta_j$（笛卡尔积）。特别地，我们令 $\mathcal{P} := \Delta_I = \prod_{i \in I} \Delta_i$，并约定 $\Delta_\varnothing$ 是一个单元素集。对于主要结果定理 1.2，我们假设 $\mathcal{I}$ 和 e_i 都是有限的。

现在选取 $J \subseteq I$，并回顾 (5) 中的投影 $\pi_J \colon \mathcal{P} \to \Delta_J$。令 $\sim_J$ 为 $\mathcal{P}$ 上满足下述条件的等价关系：

$$\text{for all } \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{P}, \quad \boldsymbol{\delta} \sim_J \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{if and only if} \quad \boldsymbol{\delta}\pi_J = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_J.$$

另令 $\mathcal{C}_J$ 表示 $\sim_J$ 的等价类集合，因此

$$\text{setting} \quad C_{\boldsymbol{\nu}} = \{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P} \mid \boldsymbol{\delta}\pi_J = \boldsymbol{\nu}\} \quad \text{for each } \boldsymbol{\nu} \in \Delta_J, \text{ we have} \quad \mathcal{C}_J = \{C_{\boldsymbol{\nu}} \mid \boldsymbol{\nu} \in \Delta_J\}. \tag{3}$$

特别地，对于 $J \in \{\varnothing, I\}$，相应的划分为 $\mathcal{C}_\varnothing = \{\mathcal{P}\}$，而 $\mathcal{C}_I = \binom{\mathcal{P}}{1}$ 是 $\mathcal{P}$ 的单元素子集集合。当 $\mathcal{I}$ 和所有 $e_i = |\Delta_i|$ 都是有限集时，划分 $\mathcal{C}_J$ 由 d_J 个大小为 c_J 的类组成，其中

$$c_J = |\Delta_{J^{\mathrm{c}}}| = \prod_{j \in J^{\mathrm{c}}} e_j \quad \text{and} \quad d_J = |\Delta_J| = \prod_{j \in J} e_j. \tag{4}$$

对于 $J \subseteq J' \subseteq I$，投影 π_J诱导出一个自然映射 $\Delta_{J'} \to \Delta_J$，即

$$\text{for } \boldsymbol{\nu}' = (\nu_i)_{i \in J'} \in \Delta_{J'}, \text{ define} \quad \boldsymbol{\nu}'\pi_J = \boldsymbol{\nu} \quad \text{where } \boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i \in J} \in \Delta_J. \tag{5}$$

注意，对于任意满足 $\boldsymbol{\delta}\pi_{J'} = \boldsymbol{\nu}'$的 $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P}$，都有 $\boldsymbol{\delta}\pi_{J'}\pi_J = \boldsymbol{\nu}'\pi_J = \boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\delta}\pi_J = \boldsymbol{\nu}$。换言之，

$$\text{whenever } J \subseteq J' \subseteq I, \text{ the composition } \pi_{J'} \circ \pi_J = \pi_J. \tag{6}$$

于是，由 (3) 可知，对于每个 $\boldsymbol{\nu}' \in \Delta_{J'}$，$\mathcal{C}_{J'}$ 的类 $C_{\boldsymbol{\nu}'}$ 包含于 $\mathcal{C}_J$的类 $C_{\boldsymbol{\nu}}$ 中，其中$\boldsymbol{\nu}$:$= \boldsymbol{\nu}'\pi_J \in \Delta_J$；若 $J \subsetneq J'$，则这一包含关系是严格的（因为所有的 $e_j \geq 2$）。由此可知，若 $J \subsetneq J'$，则对于 $\boldsymbol{\nu}' \in \Delta_{J'}$ 和 $\boldsymbol{\nu} \in \Delta_J$，当且仅当 $\boldsymbol{\nu}'\pi_J = \boldsymbol{\nu}$ 时，$\mathcal{C}_{J'}$- 类 $C_{\boldsymbol{\nu}'}$ 包含于 $\mathcal{C}_J$- 类 $C_{\boldsymbol{\nu}}$中；包含在一个固定的 $\mathcal{C}_J$-类中的 $\mathcal{C}_{J'}$-类的数量为 $|\Delta_{J' \setminus J}| = \prod_{j \in J' \setminus J} e_j$。

总之，由 (3) 可轻易得出

- $J \subseteq J'$当且仅当 $\mathcal{C}_{J'}$是 $\mathcal{C}_J$的细化；
- $J \subsetneq J'$当且仅当 $\mathcal{C}_{J'}$是 $\mathcal{C}_J$的真细化；
- 且对于任意 $J,\ J' \subseteq I$, $\mathcal{C}_{J \cup J'} = \{C \cap C' \mid C \in \mathcal{C}_J,\ C' \in \mathcal{C}_{J'}\}$。

我们尤其关注 I 的祖先子集情形，并且对于 J， $J' \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$，记作

(7) $\mathcal{C}_{J'} \prec \mathcal{C}_J$当且仅当 $\mathcal{C}_{J'}$是 $\mathcal{C}_J$的真细化，或者等价地 $J \subsetneq J'$.

此外，我们记 $\mathcal{C}_{J'} \preccurlyeq \mathcal{C}_J$，若 $\mathcal{C}_{J'} \prec \mathcal{C}_J$ 或 $\mathcal{C}_{J'} = \mathcal{C}_J$。

回想一下， $A[j]$ 对每个 $j \in I$ 都是祖先的，并且对于每个祖先的 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$，我们有

(8) $$J = \bigcup_{j\in J} A[j], \quad \text{it follows that} \quad \mathcal{C}_J = \Big\{ \bigcap_{j\in J} C_j \;\Big|\; C_j \in \mathcal{C}_{A[j]}\ \forall\, j \in J \Big\}.$$

注意到，划分 $\mathcal{C}_{A[j]}$ 由单元素集合组成，当且仅当 j 是 I的唯一极小元，因此包含此类元素 j 的唯一祖先子集 J 是 $J = A[j] = I$。例如，当 $\mathcal{I}$ 是如图 1(a) 或 2(a) 所示的链，或图 2(d) 中的偏序集时，情况便是如此。

将这一对 $(\mathcal{P},\ \mathfrak{C})$（其中 $\mathfrak{C} := \{\sim_J \mid J \in \mathcal{A}(\mathcal{I})\}$）称为 [6,定义 4]中的 偏序集块结构。或者，将每个等价关系 $\sim_J$ 与其等价类集合 $\mathcal{C}_J$ 对应起来，偏序集块结构中的集合 $\mathfrak{C}$可以写成

(9) $$\mathfrak{C} := \{\mathcal{C}_J \mid J \in \mathcal{A}(\mathcal{I})\}.$$

关系 $\preccurlyeq$ 定义在 (7) 中的点划分集合上，是 $\mathfrak{C}$上的偏序。特别地，对于不同的 i， $j \in I$，包含关系 $A[i] \supsetneq A[j]$ 成立，当且仅当 $i \prec j$，因此 $\mathcal{C}_{A[i]} \prec \mathcal{C}_{A[j]}$ 当且仅当 $i \prec j$。由此可得，

(10) $$\text{for}\quad \mathfrak{C}^* := \{\mathcal{C}_{A[i]} \mid i \in I\},\quad \text{the 'sub-poset'}\quad (\mathfrak{C}^*, \preccurlyeq)\quad \text{is isomorphic to}\quad (I, \preccurlyeq)$$

在映射 $i \to \mathcal{C}_{A[i]}$下，对于 $i \in I$。注意，对于所有偏序集块结构（$\mathcal{P}$， $\mathfrak{C}$）， $\mathcal{C}_\varnothing \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{C}^*$。此外，$\mathfrak{C} \setminus \mathfrak{C}^*$ 可能包含其他划分 $\mathcal{C}_J$，其中 J 是非空的祖先子集，且对于任何 $i \in I$，它都不是 $A[i]$ 的形式。例如，图 2(c) 和 2(d) 中的偏序集就是这种情况，其中子集 $J = \{2, 3\}$ 是祖先子集，但对于任何 $i \in I$，它都不是 $A[i]$ 的形式，因此 $\mathcal{C}_J \notin \mathfrak{C}^*$。一般而言，如果 $\mathcal{C}_J \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{C}^*$ 且 $J \neq \varnothing$，那么根据（8）， $\mathcal{C}_J$ 的类只是 $\mathfrak{C}^*$ 中某些划分 $\mathcal{C}_{A[i]}$ 的类的交集，例如那些满足 $i \in J$ 的划分 $A[i]$ ，因为 $J = \cup_{i\in J} A[i]$。

关于 $\mathfrak{C}^*$ 的示例见图 1、2 和 3，对于 $|I| = 2$，3，以及一个带有$|I| = 4$的示例。第 5 节将对 $\mathfrak{C}$ 中的划分作更详细的描述，针对的是那些既不是链也不是反链的示例。

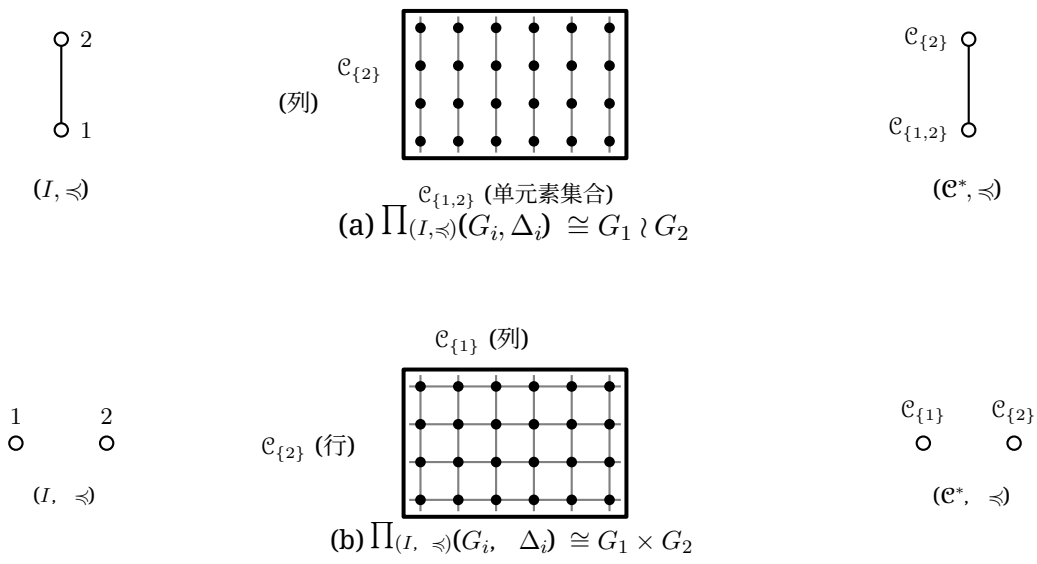
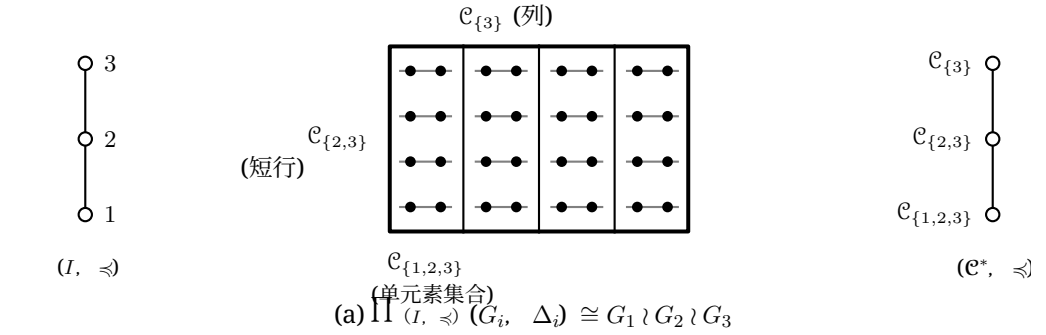
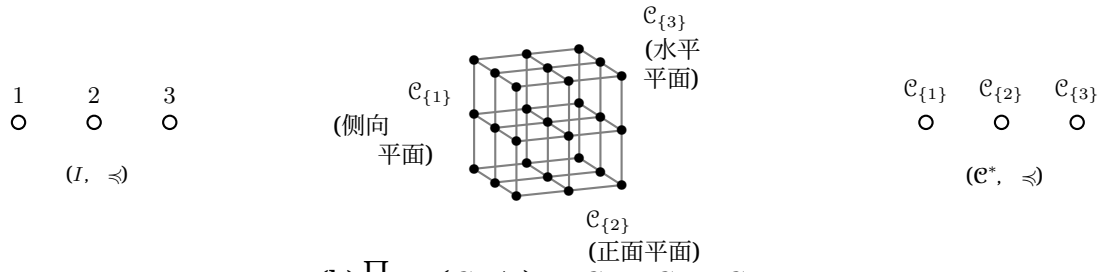


FIGURE 1. 偏序集（I， $\preccurlyeq$）的偏序集块结构，其中 $|I| = 2$



(a) $\prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i,\ \Delta_i) \cong G_1 \wr G_2 \wr G_3$



(b) $\prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i,\Delta_i) \cong G_1 \times G_2 \times G_3$

FIGURE 2. 偏序集（$I,\ \preccurlyeq$）的偏序集块结构，其中 $|I|=3$；链与反链

2.3. 群的广义缠绕积。设 $(\mathcal{P},\ \mathcal{C})$ 是相对于偏序集 $\mathcal{I}=(I,\ \preccurlyeq)$ 的偏序集块结构，其中 $\mathcal{C}$ 如 (9) 所示，点集为 $\mathcal{P}=\Delta_I=\prod_{i\in I}\Delta_i$，并假设$\mathcal{I}=(I,\ \preccurlyeq)$ 满足极大条件（见第 2.1 小节）。在证明定理 1.2 时，$\mathcal{I}$ 和 e_i 都将是有限的，但本节不假设有限性。对每个$i\in I$，令 $G_i\le \mathrm{Sym}(\Delta_i)=S_{e_i}$，其中 $e_i=|\Delta_i|\ge 2$，并将所有函数$f_i\colon \Delta_{A(i)}\to G_i$的集合记为 F_i。注意，F_i 在由 $*$ 给出的逐点乘法下构成一个群:

$$\boldsymbol{\nu}(f_i * h_i) := \boldsymbol{\nu} f_i \cdot \boldsymbol{\nu} h_i \ \forall\, \boldsymbol{\nu}\in\Delta_{A(i)} \text{ and } \forall\, f_i,h_i\in F_i, \tag{11}$$

因此 F_i 同构于笛卡尔积 $G_i^{|\Delta_{A(i)}|}$。考虑

$$F:=\prod_{i\in I}F_i=\prod_{i\in I}G_i^{|\Delta_{A(i)}|} \quad \text{with elements } f=(f_i)_{i\in I}. \tag{12}$$

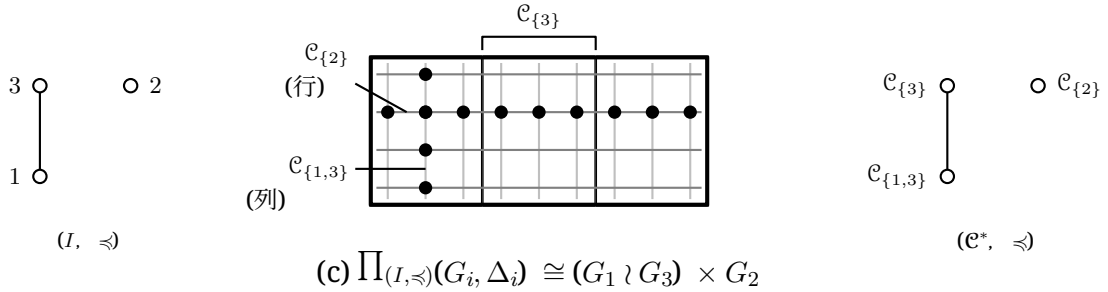
如 [6, 第 3] 节中所述，我们将 F 视为 $\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ 的一个子群：对于每个 $f\in F$，定义映射$f\colon \mathcal{P}\to\mathcal{P}$ （见 [6, 第 3 节，定义]）如下:

$$\text{for each } \boldsymbol{\delta}=(\delta_i)_{i\in I}\in\mathcal{P},\quad \boldsymbol{\delta} f:=\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_i)_{i\in I}\in\mathcal{P},\quad \text{where}\quad \varepsilon_i=\delta_i\big((\boldsymbol{\delta}\pi_{A(i)})f_i\big)\ \forall\, i\in I. \tag{13}$$

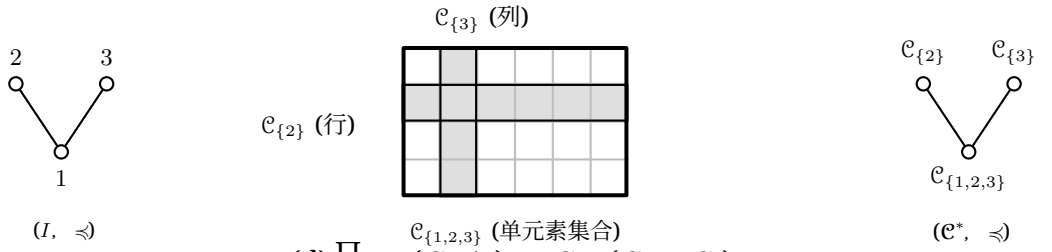
根据 [6, 引理 1], ， F 中的不同元素确定不同的映射 $\mathcal{P}\to\mathcal{P}$；由于 $\mathcal{I}$ 满足极大条件，由 [6, 引理 8] 可知，(13) 中的映射 f 是一个双射，因而属于 $\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$；并且根据 [6, 定理 A]，$\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ 的子集 F 是一个子群。顺带指出，对于映射 f 可逆而言，$\mathcal{I}$ 上的极大性条件是必要的；关于 $\mathcal{I}$包含无限升链的例子，见 [6,例 2] 。

这个子群称为 Δ_i 上置换群 G_i 的广义缠绕积，并且如 [6] 中一样，我们将其记作 $F=\prod_{(I,\ \preccurlyeq)}(G_i,\ \Delta_i)$（参见 [6, 定理 A]之后的讨论）。

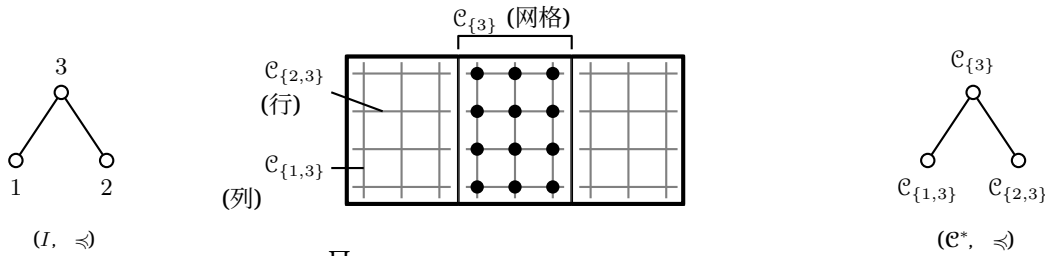
对于每个 $J\subseteq I$，回忆一下，$\pi_J\colon\mathcal{P}\to\Delta_J$ 表示自然投影映射。我们也将$F_J=\prod_{j\in J}F_j$ 和 $\varphi_J\colon F\to F_J$ 记作自然投影 $\varphi_J\colon (f_i)_{i\in I}\to(f_j)_{j\in J}$。设$J$ 是 I的一个祖先子集。那么根据 [6, 引理 2], 之后的讨论，F的作用 (13)



(c) $\prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i) \cong (G_1 \wr G_3) \times G_2$



(d) $\prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i) \cong G_1 \wr (G_2 \times G_3)$



(e) $\prod_{(I, \preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i) \cong (G_1 \times G_2) \wr G_3$

FIGURE 2. 偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 的偏序集块结构，其中包含 $|I| = 3$；既非链也非反链

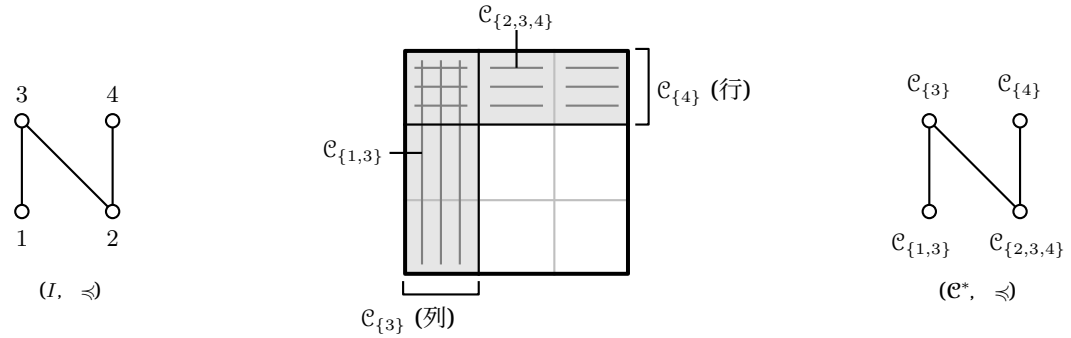


FIGURE 3. “N”偏序集的偏序集块结构

在 $\mathcal{P}$ 上诱导出 $F_J = F\varphi_J$ 在 Δ_J 上的作用；具体而言，对于 $f \in F$ 和 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_j)_{j\in J} \in \Delta_J$，选取一个点 $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P}$，使得 $\boldsymbol{\delta}\pi_J = \boldsymbol{\nu}$，并定义

$$\boldsymbol{\nu}(f\varphi_J) = (\nu_j)_{j\in J}(f\varphi_J) = (\boldsymbol{\delta}f)\pi_J, \tag{14}$$

注意到这与 $\boldsymbol{\delta}$ 的选择无关。根据 [6, 定理 A]（以及此前的引理），这个 F_J-作用是忠实的，且在 Δ_J 上的诱导群是广义缠绕积

积 $F_J = \prod_{(J,\preccurlyeq)}(G_j,\ \Delta_j)$。此外，同样根据 [6, 引理 2], ，划分 $\mathcal{C}_J$ 是 F-不变的；根据 [6, 定理 A（ii）], ，在 $\mathcal{C}_J$ 上的诱导群 $F^{\mathcal{C}_J}$ 与在 Δ_J 上的 F_J 置换同构，而这个 F-作用的核 $F_{(\mathcal{C}_J)}$ 是

$$F_{(\mathcal{C}_J)} = \{f \in F \mid f_j = \iota_j \in F_j,\ \forall\, j \in J\}, \quad \text{where } \iota_j : \boldsymbol{\nu} \to 1_{G_j} \text{ for all } \boldsymbol{\nu} \in \Delta_{A(j)} \tag{15}$$

根据 (11)， ι_j 是群 F_j的单位元。因此， $F_{(\mathcal{C}_J)}$ 可视为 $F_{J^c} = \prod_{j\in J^c} F_j$。

根据 [6, 定理 B], ，偏序集块结构 $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ 的完整自同构群（其中 $\mathcal{C}$ 如 (9) 所示）是广义缠绕积 $\prod_{(I,\preccurlyeq)}(S_{e_i}, \Delta_i)$（对每个 $i \in I$取群 $G_i = \mathrm{Sym}(\Delta_i)$）。如第2.2节末尾所述，每个 $\mathcal{C}_J \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^*$（其中 $\mathcal{C}^*$ 如 (10) 所示）都对应一个祖先集 $J = \cup_{j\in J} A[j]$；若一个置换保持每个划分 $\mathcal{C}_{A[j]}$不变（其中 $j \in J$），则它也保持 $\mathcal{C}_J$不变。因此，保持 $\mathcal{C}^*$ 中的每个划分不变的置换也保持 $\mathcal{C}$中的所有划分不变。也就是说，$\prod_{(I,\preccurlyeq)}(S_{e_i}, \Delta_i)$ 也是子结构‘$(\mathcal{P}, \mathcal{C}^*)$’的完整自同构群。

我们以两个偏序集 $\mathcal{I} = (I,\ \preccurlyeq)$（其中 $|I| = 2$）为例，结束本小节。这些例子的更一般版本将在第 2.5 小节讨论。

例 2.1。设 $(I,\ \preccurlyeq)$ 是反链 $\{1, 2\}$（见图 1b），并设 $G_i \le \mathrm{Sym}(\Delta_i)$，其中 $i =$ 为 1，2。则 $A(1) = A(2) = \varnothing$，因此笛卡尔积 $\Delta_{A(1)}$ 和 $\Delta_{A(2)}$ 都是单元素集。更重要的是，存在两个非空真祖先子集，即 $A[1] = \{1\}$ 和 $A[2] = \{2\}$；由上文讨论可知，对每个 i，都有 $F_i = G_i$，且广义缠绕积 $F = \prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i,\ \Delta_i) \cong G_1 \times G_2$。相应的 $\mathcal{P} = \Delta_1 \times \Delta_2$ 的划分为 $\mathcal{C}_{A[1]} = \big\{\{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P} \mid \delta_1 = \nu_1\} \mid \nu_1 \in \Delta_1\big\}$ 和 $\mathcal{C}_{A[2]} = \big\{\{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P} \mid \delta_2 = \nu_2\} \mid \nu_2 \in \Delta_2\big\}$。我们可以将 $\mathcal{P}$ 中的点排列成 $e_1 \times e_2$ 网格，以此直观表示偏序集块结构：具有相同 δ_1 坐标的点 $\boldsymbol{\delta}$ 位于同一行，而具有相同 δ_2 坐标的点位于同一列。于是， $\mathcal{C}_{A[1]}$ 是行的集合， $\mathcal{C}_{A[2]}$ 是列的集合，如图 1b 所示。这种偏序集块结构也称为 [2, 7, 10] 中的网格 。

例2.2。令 $(I, \preccurlyeq)$ 为链 $1 \prec 2$ （见图1a），并令 $G_i \le \mathrm{Sym}(\Delta_i)$ 对于$i =$ 1,2。于是 $A(2) = \varnothing$ 是祖先的，并且存在唯一的非空真祖先子集，即 $A[2] = A(1) = \{2\}$，相应的划分为 $\mathcal{P} = \Delta_1 \times \Delta_2$ $\mathcal{C}_{A[2]} = \big\{\{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P} \mid \delta_2 = \nu_2\} \mid \nu_2 \in \Delta_2\big\}$。由上述讨论可知， $F_1 = G_1^{|\Delta_2|}$ 、$F_2 = G_2$以及广义缠绕积 $F = \prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i) \cong G_1 \wr G_2$。点集 $\mathcal{P}$ 仍可视为例2.1中的 $e_1 \times e_2$ 网格，其中划分 $\mathcal{C}_{A[2]}$ 是列的集合。

2.4. 无序对上的轨道与轨道。设 $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ 是相对于 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 的偏序集块结构，其中 $\mathcal{C}$ 如 (9) 所示，点集为 $\mathcal{P} = \Delta_I = \prod_{i\in I} \Delta_i$，且 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 满足极大条件（见第 2.1 小节）。对每个 $i \in I$，令 $G_i \le \mathrm{Sym}(\Delta_i) = S_{e_i}$，其中$|\Delta_i| = e_i \ge 2$，并令 $F = \prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$ 为 (12) 中相应的广义缠绕积。在本小节中，我们假设每个 G_i 在 Δ_i 上都是 2-传递的，并描述F在 $\mathcal{P}$ 的有序对（轨道）和无序对上的轨道。

回顾一下，祖先子集 $J \subseteq$的边界 ∂J 是J^c中所有极大元组成的集合。例如，对于每个 $i \in I$，边界 $\partial A(i)$ 包含 i，并按约定 $\partial I = \varnothing$。对于每个 $i \in I$，令 $D_i := \{(\delta, \delta) \mid \delta \in \Delta_i\}$ 和 $E_i := \Delta_i \times \Delta_i$，并对任意 $J \subseteq I$ 和 $\Gamma_i \subseteq E_i$ 定义

$$\otimes_{i\in J}\Gamma_i := \{(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid \forall\, i \in J,\ (\delta_i, \varepsilon_i) \in \Gamma_i\}.$$

由于对于每个 i， G_i 在 Δ_i 上都是 2-传递的，因此根据 [6, 定理 C] ， F 在 $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ 中的轨道恰好是集合 O_J，其中每个 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$ 满足

$$O_J = (\otimes_{i\in J} D_i) \otimes (\otimes_{i\in \partial J}(E_i \setminus D_i)) \otimes \big(\otimes_{i\in (J\cup \partial J)^c} E_i\big)$$

（如果某个 G_i 不是 2-传递的，则此结论不成立）。等价地，

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad O_J &= \{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \delta_i = \varepsilon_i \ \forall\, i \in J \text{ and } \delta_i \neq \varepsilon_i \ \forall\, i \in \partial J\} \\
&= \{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_J = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_J\} \setminus \bigcup_{i\in\partial J} \big\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}} = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_{J\cup\{i\}}\big\} \\
&= \big\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon} \text{ belong to the same } \mathcal{C}_J\text{-class but lie in different } \mathcal{C}_{J\cup\{i\}}\text{-classes} \\
&\quad \text{for all } i \in \partial J\big\}.
\end{aligned}
$$

特别是，如上所述， $J = I$ 是祖先的，且 $\partial I = \varnothing$，因此 $O_I = \{(\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\delta}) \mid \boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P}\}$，即对角轨道。此外，对于每个祖先子集 $J \subseteq I$，由 (16) 中O_J的表达式可知， O_J是自配对的，也就是说，$(\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\varepsilon}) \in O_J$当且仅当 $(\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\delta}) \in O_J$。因此，$F$在不同点的无序对上的轨道为以下集合

$$
Q_J := \{\ \{\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\}\ \mid (\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\varepsilon}) \in O_J\} \text{对于真祖先子集 } J \subset I, \text{ 且 } |Q_J| = |O_J|/2 \qquad .
$$

最后，当 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{P}$ 均为有限时，我们确定每个真祖先子集 J对应的轨道 O_J 的基数，并注意到 $|O_I| = |\mathcal{P}|$。

命题 2.3. 设 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$ 是一个有限偏序集，每个 $e_i = |\Delta_i| \geq 2$ 都是有限的，并令$v := |\mathcal{P}| = \prod_{i\in I} e_i$. 令 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) \setminus \{I\}$ （可能为 $J = \varnothing$），并令 O_J 如(16)所示。那么

$$
(17)\qquad |O_J| = v\left(\prod_{i\in\partial J}(e_i - 1)\right)\left(\prod_{i\in(J\cup\partial J)^{\mathrm{c}}} e_i\right) = v\sum_{S\subseteq\partial J}\Big((-1)^{|S|}\cdot\prod_{i\in(J\cup S)^{\mathrm{c}}} e_i\Big).
$$

证明。 由 (16) 中的第一个表达式可得

$$
|O_J| = \left(\prod_{i\in J} e_i\right)\left(\prod_{i\in\partial J} e_i(e_i-1)\right)\left(\prod_{i\in(J\cup\partial J)^{\mathrm{c}}} e_i^2\right) = v\left(\prod_{i\in\partial J}(e_i-1)\right)\left(\prod_{i\in(J\cup\partial J)^{\mathrm{c}}} e_i\right)
$$

按约定， $\prod_{i\in\varnothing} e_i = \prod_{i\in\varnothing}(e_i - 1) = 1$。此外，我们可以利用 (16) 的第二行，得到 $|O_J|$ 的第二个表达式。由容斥原理[1, 第四章 2B 筛法公式] 可得

$$
\begin{aligned}
\Big|\bigcup_{i\in\partial J}\big\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}} = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_{J\cup\{i\}}\big\}\Big| &= \sum_{\varnothing\neq S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|-1}\Big|\bigcap_{i\in S}\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}} = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_{J\cup\{i\}}\}\Big| \\
&= \sum_{\varnothing\neq S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|-1}\,|\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup S} = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_{J\cup S}\}| \\
&= \sum_{\varnothing\neq S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|-1}\cdot\Big(|\mathcal{P}|\prod_{i\in(J\cup S)^{\mathrm{c}}} e_i\Big).
\end{aligned}
$$

此外， $\{(\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_J = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_J\}$ 的基数为$|\mathcal{P}|\cdot\prod_{i\in(J\cup S)^{\mathrm{c}}} e_i$，其中 $S = \varnothing$。因此我们有

$$
\begin{aligned}
|O_J| &= |\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_J = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_J\}| - \Big|\bigcup_{i\in\partial J}\big\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}) \mid \boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}} = \boldsymbol{\varepsilon}\pi_{J\cup\{i\}}\big\}\Big| \\
&= |\mathcal{P}|\cdot\prod_{i\in(J\cup\varnothing)^{\mathrm{c}}} e_i - \sum_{\varnothing\neq S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|-1}\cdot\Big(|\mathcal{P}|\prod_{i\in(J\cup S)^{\mathrm{c}}} e_i\Big) \\
(18)\qquad &= |\mathcal{P}|\cdot\sum_{S\subseteq\partial J}\Big((-1)^{|S|}\cdot\prod_{i\in(J\cup S)^{\mathrm{c}}} e_i\Big) = v\sum_{S\subseteq\partial J}\Big((-1)^{|S|}\cdot\prod_{i\in(J\cup S)^{\mathrm{c}}} e_i\Big)
\end{aligned}
$$

由此完成证明。 □

2.5. 偏序集块结构的直积。 我们将例 2.1 和 2.2 中的观察推广到这样的情形： I 中的元素 1 和 2 分别由互不相交的非空子集 I_1 和 I_2取代。我们仍假设偏序集 $\mathcal{I} = (I, \preccurlyeq)$满足极大条件。本节假设 I 可表示为两个非空子集 $I = I_1 \dot\cup I_2$ 的不交并，且满足：

$$\text{there do not exist } i_1 \in I_1, i_2 \in I_2 \text{ with } i_1 \prec i_2 \text{ or } i_2 \prec i_1. \tag{19}$$

那么 $\mathcal{P} = \Delta_{I_1} \times \Delta_{I_2}$ ，并且如 [6, 第 74], 页所述，对于子群 $G_i \le \mathrm{Sym}(\Delta_i)$（$i \in I$），广义缠绕积 $F = \prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$ 是广义缠绕积 $F(1) = \prod_{(I_1,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$ 与 $F^{(2)} = \prod_{(I_2,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$ 的置换直积。也就是说，$F = F^{(1)} \times F(2)$。我们称偏序集块结构 $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ 为偏序集块结构 $\left(\Delta_{I_1}, \mathcal{C}^{(1)}\right)$ 与 $\left(\Delta_{I_2}, \mathcal{C}^{(2)}\right)$的直积，其中对每个 $i \in \{1, 2\}$， $\mathcal{C}^{(i)} = \{\mathcal{C}_J \mid J \in \mathcal{A}(I_i)\}$。我们将作更详细的说明，尤其会明确给出祖先集。

由 (19) 可知， I 的祖先子集集合 $\mathcal{A}(I)$ 如下（见第 2.1 小节）：

$$\mathcal{A}(I) = \{J_1 \dot\cup J_2 \mid J_1 \in \mathcal{A}(I_1), J_2 \in \mathcal{A}(I_2)\}. \tag{20}$$

特别地， I_1 和 I_2 是 I 的祖先子集。此外，对于 $j \in I_i$ ，我们有 $A(j) \subseteq I_i$，因此，按 (11) 定义的 F_j 是 F 和 $F^{(i)}$ 的同一个子群。因此，对于每个祖先子集 $J = J_1 \dot\cup J_2$，以及 (20) 中的每个 $J_i = J \cap I_i$ ，对应的 F 子群为：

$$F_J = \prod_{j\in J} F_j = \left(\prod_{j\in J_1} F_j\right) \times \left(\prod_{j\in J_2} F_j\right) = F^{(1)}_{J_1} \times F^{(2)}_{J_2}.$$

特别地，由于 $F_\varnothing = 1$ 和每个 $F_{(i)\varnothing} = 1$，取 $J = I_i$ 可得 $F_{I_i} = F^{(i)}_{I_i} \times 1 = F_{(i)}$；取 $J = I$ 则得到 $F = F_I = F^{(1)} \times F_{(2)}$。

我们还考察 $\mathcal{P}$ 的划分 $\mathcal{C}_{I_i}$。由 (3)，其类为 $C_{\boldsymbol{\nu}} = \{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P} \mid \boldsymbol{\delta}\pi_{I_i} = \boldsymbol{\nu}\}$，其中$\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{I_i}$。显然， $F^{(3-i)}$ 将每个 $C_{\boldsymbol{\nu}}$ 作为集合固定，且 $F_{(3-i)}$ 在 $C_{\boldsymbol{\nu}}$ 上的作用等价于其在 $\Delta_{I_{3-i}}$ 上的作用。此外，群 $F_{(i)}$ 置换 $\mathcal{C}_{I_i}$ 的各类，且 $F^{(i)}$ 在 $\mathcal{C}_{I_i}$ 上的作用等价于其在 Δ_{I_i} 上的作用。我们将这些观察总结为以下定理。

定理 2.4. 假设偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 满足极大条件，且 I 是两个非空子集的不交并 $I = I_1 \dot\cup I_2$ ，并满足(19) 。那么， I的祖先子集如(20)、 $F = F_{I_1} \times F_{I_2} = F^{(1)} \times F_{(2)}$所示，此外：

(a) I_1 和 I_2 是 I的祖先子集；对于 $i \in \{1, 2\}$，划分 $\mathcal{P}$的划分 $\mathcal{C}_{I_i}$ （其类如(3)所示）是 F-不变的，且 $F^{\mathcal{C}_{I_i}}$与 $F_{(i)}$在 Δ_{I_i}上的作用置换同构；***(b)*** 对于 $i \in \{1, 2\}$，其集合稳定子 F_C 在每个类$C \in \mathcal{C}_{I_i}$ 上诱导的群，与 $F^{(3-i)}$在 $\Delta_{I_{3-i}}$上的作用置换同构。

2.6. 偏序集块结构的克罗内克积。 现在假设偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 满足极大条件，并且 I 可以写成两个非空子集的 不交并 $I = I_1 \dot\cup I_2$ ，使得：

$$\text{for all } i_1 \in I_1 \text{ and } i_2 \in I_2 \quad \text{we have} \quad i_1 \prec i_2. \tag{21}$$

再次，正如 [6, 第 74], 页所述，对于 $G_i \le \mathrm{Sym}(\Delta_i)$ 的子群 $i \in I$，广义缠绕积 $F = \prod_{(I,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$ 是广义缠绕积 $F(1) = \prod_{(I_1,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$ 与 $F^{(2)} = \prod_{(I_2,\preccurlyeq)}(G_i, \Delta_i)$ 的置换缠绕积。也就是说，$F = F(1) \wr F^{(2)}$。我们称偏序集块结构 $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ 为偏序集块结构 $(\Delta_{I_1}, \mathcal{C}_{I_1})$ 与 $(\Delta_{I_2}, \mathcal{C}_{I_2})$ 的克罗内克积。我们将进一步详述，并特别明确给出祖先集。

由 (21) 可知， I 的祖先子集集合 $\mathcal{A}(I)$ 如下（见第 2.1 小节）：

$$\mathcal{A}(I) = \{J \dot\cup I_2 \mid J \in \mathcal{A}(I_1), J \neq \varnothing\} \dot\cup \mathcal{A}(I_2). \tag{22}$$

特别地， I_2 是 I的祖先子集，并且对于每个 $j \in I_1$，我们有 $I_2 \subseteq A(j)$和 $A'(j) := A(j) \cap I_1$是子偏序集（I_1，$\preccurlyeq$）中 j的所有“祖先”组成的集合。此外，$\Delta_{A(j)} = \Delta_{A'(j)} \times \Delta_{I_2}$。因此

$$F^{(1)} = \prod_{(I_1,\preccurlyeq)} (G_i, \Delta_i) = \prod_{j\in I_1} G_j^{|\Delta_{A'(j)}|}, \quad \text{and} \quad F^{(2)} = \prod_{(I_2,\preccurlyeq)} (G_i, \Delta_i) = \prod_{j\in I_2} G_j^{|\Delta_{A(j)}|} = F_{I_2} < F.$$

尽管 I_1 不是 I的祖先子集，但将 $F_{I_1} := \prod_{j\in I_1} F_j$ 写成(12)中的形式，我们有

$$F_{I_1} = \prod_{j\in I_1} F_j = \prod_{j\in I_1} G_j^{|\Delta_{A(j)}|} = \prod_{j\in I_1} G_j^{|\Delta_{A'(j)}\times\Delta_{I_2}|} = \left(\prod_{j\in I_1} G_j^{|\Delta_{A'(j)}|}\right)^{|\Delta_{I_2}|} = \left(F^{(1)}\right)^{|\Delta_{I_2}|},$$

并且作为集合， F 是笛卡尔积

$$F = \prod_{j\in I} F_j = \left(F^{(1)}\right)^{|\Delta_{I_2}|} \times \prod_{j\in I_2} F_j = \left(F^{(1)}\right)^{|\Delta_{I_2}|} \times F^{(2)}.$$

现在我们考察 $\mathcal{P}$的划分 $\mathcal{C}_{I_2}$。由(3)可知，对于$\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{I_2}$，各类为 $C_{\boldsymbol{\nu}} = \{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P} \mid \boldsymbol{\delta}\pi_{I_2} = \boldsymbol{\nu}\}$。$F$ 在$\mathcal{C}_{I_2}$ 上诱导的群作用与$F^{(2)} = F_{I_2}$在Δ_{I_2}上的作用置换同构，而这个 F-作用的核是F_{I_1}。为考察该核的作用，令 $f \in F_{I_1}$、 $C_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{C}_{I_2}$和 $\boldsymbol{\delta} = (\delta_i)_{i\in I} \in C_{\boldsymbol{\nu}}$，使得 $\delta_i = \nu_i$，并且对于所有 $i \in I_2$，有 $f_i = \iota_i$。另令$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\delta} f$。于是根据作用(13)的定义，对于每个 $i \in I_2$，

$$\varepsilon_i = \delta_i \left(\boldsymbol{\delta}\pi_{A(i)} f_i\right) = \delta_i \left(\boldsymbol{\delta}\pi_{A(i)}\iota_i\right) = \delta_i 1_{G_i} = \delta_i = \nu_i$$

因此 $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\delta} f \in C_{\boldsymbol{\nu}}$。另一方面，对于 $i \in I_1$，并利用如下事实： $A'(i) := A(i) \cap I_1$，我们有

$$\varepsilon_i = \delta_i \left(\boldsymbol{\delta}\pi_{A(i)} f_i\right) = \delta_i \left(\boldsymbol{\delta}\pi_{A'(i)} f_i'\right) \quad \text{for some } f_i' \in F^{(1)},$$

而且，群 $F^{(1)}$ 的每个元素都对应于 F_{I_1} 中 f 的不同选择。因此， F_{I_1} 在 $C_{\boldsymbol{\nu}}$ 上诱导的群与 $F^{(1)}$ 在 Δ_{I_1} 上的作用置换同构。由于 $F_{I_1} \cong (F^{(1)})^{|\Delta_{I_2}|}$，可得 $F \cong F^{(1)} \wr F^{(2)}$，其诱导群 $F^{\mathcal{C}_{I_2}}$ 与 $(F^{(2)})^{\Delta_{I_2}} = (F_{I_2})^{\Delta_{I_2}}$ 置换同构，而在 $\mathcal{C}_{I_2}$ 的每个类上诱导的群与 $(F^{(1)})^{\Delta_{I_1}}$ 置换同构。我们用这一记号将这些观察总结为定理 2.5。

定理 2.5. 假设偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 满足极大条件，且 I 是两个非空子集 $I = I_1 \dot\cup I_2$ 的不交并，使得(21) 成立。那么， I的祖先子集如(22)、 $F \cong F^{(1)} \wr F^{(2)}$所示，此外：

(a) I_2 是 I的祖先子集， $\mathcal{P}$ 的划分 $\mathcal{C}_{I_2}$ （其类如(3) 所示）在 F下不变，且 $F^{\mathcal{C}_{I_2}}$与 $F^{(2)}$在 Δ_{I_2}上的作用置换同构；***(b)*** 对于 $j \in I_1$，祖先集 $A(j) = A'(j) \cup I_2$，其中 $A'(j) = A(j) \cap I_1$ 是相对于子偏序集$(I_1, \preccurlyeq)$的 j 的祖先集，而由 F_C 的集合稳定子在每个类 $C \in \mathcal{C}_{I_2}$ 上诱导的群与 $F^{(1)}$在 Δ_{I_1}上的作用置换同构。

由定理 2.4 和 2.5 可知，图 1、2 中偏序集的群 $\prod_{(I,\preccurlyeq)} (G_i, \Delta_i)$ 如图注所示。

3. Array function of a block

设 $B \subseteq \mathcal{P}$。设 J 为祖先子集，且 $\boldsymbol{\nu} \in \Delta_J$。根据数组函数 χ_B 的定义 (1) 以及类 $C_{\boldsymbol{\nu}}$ 的定义 (3)，可得

$$(\boldsymbol{\nu})\chi_B = |B \cap C_{\boldsymbol{\nu}}| \text{ for every } C_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{C}_J. \tag{23}$$

此函数描述了 B 的点如何分布在每个划分$\mathcal{C}_J$ 的各个部分中，其中 J 是祖先的。

特别地， $J = I$ 是一个祖先子集，其中有 $\Delta_I = \mathcal{P}$，因此

$$\text{if } \boldsymbol{\delta} \in \mathcal{P} = \Delta_I \quad \text{then } (\boldsymbol{\delta})\chi_B = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{\delta} \in B \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{24}$$

另一方面，对于 $J = \varnothing$，回顾一下， $\Delta_\varnothing$ 是一个单元素集，并且 $\mathcal{C}_\varnothing = \{\mathcal{P}\}$，因此

$$\text{if } \boldsymbol{\nu} \in \Delta_\varnothing \quad \text{then } (\boldsymbol{\nu})\chi_B = |B \cap \mathcal{P}| = |B| = k. \tag{25}$$

注意，公式（2）涉及求和 $\sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{J \cup S}} ((\boldsymbol{\nu})\chi_B)^2$, ，其中对于 S 的每一种选择，集合 $J \cup S$ 本身都是祖先集。此外，各个祖先集 J 的公式可能会使用相同的求和（正如我们将在第 5 节中看到的那样）。因此，引入函数 μ_B从 $\mathcal{A}(\mathcal{I})$到 $\mathbb{Z}$是很方便的，该函数定义为

$$(J)\mu_B = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_J} ((\boldsymbol{\nu})\chi_B)^2 . \tag{26}$$

我们有如下引理。

引理3.1。 对于 $\mathcal{P} = \Delta_I$ 的任意 k-子集 B，以及如(26)中所述的 μ_B，

$$(I)\mu_B = k \quad and \quad (\varnothing)\mu_B = k^2.$$

证明。 由 (24) 和 (26) 可得 $(I)\mu_B = \sum_{\boldsymbol{\delta} \in B} 1^2 = k$，由 (25) 可得 $(\varnothing)\mu_B = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_\varnothing} k^2 = k^2$。□

4. Proof of Theorem 1.2

我们分两个阶段证明定理 1.2。首先，我们将这一结果的假设形式化。

假设 4.1。 设$(I, \preccurlyeq)$ 为一个带有 $|I| \geq 2$ 的有限偏序集；对每个 $i \in I$，设Δ_i 为一个大小为 $|\Delta_i| = e_i \geq 2$ 的有限集；再设 $G_i \leq \mathrm{Sym}(\Delta_i)$ 满足 G_i 在Δ_i上是2-传递的。设 $\mathcal{P} = \prod_{i \in I} \Delta_i$ 的大小为 $v = \prod_{i \in I} e_i$，并设 $F = \prod_{(I, \preccurlyeq)} (G_i, \Delta_i)$ 为第 *2.3* 节所述的广义缠绕积。设 B 为 $\mathcal{P}$ 的一个 k-子集，设 $\mathcal{B} := B^F$，并设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$为相应的关联结构。

接下来，我们证明定理 1.2 的一个稍弱版本。两者唯一的区别是，命题 4.2 涉及式 (26) 中的函数 μ_B，而定理 1.2 涉及数组函数χ_B；此外，命题 4.2 还包含关于 $J = \varnothing$ 的一个条件。回想一下，对于任意祖先子集 J 和任意子集 $S \subset \partial J$，它们的并集 $J \cup S$ 也是一个祖先子集。

命题 4.2. 假设假设 *4.1* 成立，并令 μ_B 如(26)所示。那么， $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$是一个2-设计，当且仅当每个真祖先子集 J *of* I 都满足以下条件：

$$\sum_{S \subseteq \partial J} (-1)^{|S|} (J \cup S)\mu_B = \frac{k(k-1)}{v-1} \left(\prod_{i \in \partial J} (e_i - 1) \right) \left(\prod_{j \in (J \cup \partial J)^{\mathrm{c}}} e_j \right), \tag{27}$$

其中 J^{c}表示 I 中 J 的补集，而 ∂J是 J_{c} 中所有极大元组成的集合。

证明。 根据 [6, 定理 C],，群 F在 $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ 上的轨道恰好是式（16）中定义的集合 O_J，其中 J 是 I 的每个祖先子集（包括集合 $J=I$）。此外，由式（16）可知，这些集合 O_J 中的每一个都是自配对的，并且（如上文所述）集合 $O_I=\{(\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\delta})\mid \boldsymbol{\delta}\in\mathcal{P}\}$是对角轨道。因此， F在 $\mathcal{P}$ 的不同点无序对上的轨道是集合$Q_J:=\{\{\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\}\mid(\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\varepsilon})\in O_J\}$，其中 J取遍真祖先子集。注意，对于每个这样的 J，都有 $|O_J|=2|Q_J|$。

因此，根据 [11, 命题 1.3]中给出的判据， $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\ \mathcal{B})$是一个 2-设计，当且仅当存在一个常数 c，使得对每个真祖先子集 J,

$$p_J:=\frac{|\{\{\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\}\mid\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\in B;\ \{\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\}\in Q_J\}|}{|Q_J|}=\frac{|\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\mid\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\in B;\ (\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\in O_J\}|}{|O_J|}\ \text{ is equal to } c.$$

假设这样的常数存在，也就是说，对所有 $J\neq I$， $p_J=c$ 都成立。通过对 $J\neq I$求和 $p_J\cdot|O_J|$，很容易验证

$$\begin{aligned}cv(v-1)&=c\sum_{J\in\mathcal{A}(\mathcal{I})\setminus\{I\}}|O_J|=\sum_{J\in\mathcal{A}(\mathcal{I})\setminus\{I\}}p_J\cdot|O_J|\\&=\sum_{J\in\mathcal{A}(\mathcal{I})\setminus\{I\}}|\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\mid\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\in B;\ (\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\in O_J\}|=k(k-1).\end{aligned}$$

因此，该常数必为 $c=k(k-1)/v(v-1)$。所以， $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\ \mathcal{B})$是一个 2-设计，当且仅当

$$|(B\times B)\cap O_J|=\frac{k(k-1)}{v(v-1)}|O_J|\quad\text{for each proper ancestral subset } J. \tag{28}$$

接下来，我们要确定每个真祖先子集 J的基数

$$|(B\times B)\cap O_J|=|\{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\mid\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}\in B;\ (\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\in O_J\}|.$$

考虑任意元素 $\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{P}$。在$(B\times B)\cap O_J$中，以$\boldsymbol{\delta}$为首项的数对数目为 $|\{\boldsymbol{\varepsilon}\in B\mid(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\in O_J\}|$，若 $\boldsymbol{\delta}\in B$；若 $\boldsymbol{\delta}\notin B$，则不存在这样的数对。为计算该子集的大小，假设 $\boldsymbol{\delta}\in B$。根据 (16)，对$(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})$属于$(B\times B)$的数对有贡献的元素 $\boldsymbol{\varepsilon}\in O_J$ 是满足以下条件的元素：(i) $\boldsymbol{\varepsilon}\pi_J=\boldsymbol{\delta}\pi_J$；(ii) 对每个 $i\in\partial J$（因此 $J\cup\{i\}$ 是祖先的）， $\boldsymbol{\varepsilon}\pi_{J\cup\{i\}}\neq\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}}$。 回顾 (3) 中划分 $\mathcal{C}_J$ 的定义，条件 (i) 等价于要求 $\boldsymbol{\varepsilon}$和 $\boldsymbol{\delta}$ 属于 (3) 中定义的 $\mathcal{C}_J$ 的同一个部分 $C_{\boldsymbol{\nu}}$，其中 $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\delta}\pi_J\in\Delta_J$。此外，根据 (1) 中数组函数的定义， $|B\cap C_{\boldsymbol{\nu}}|=(\boldsymbol{\nu})\chi_B$。 类似地，条件 (ii) 要求我们排除 $\mathcal{C}_{J\cup\{i\}}$中满足 $i\in\partial J$的各部分$C_{\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}}}$ 对应的集合 $B\cap C_{\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}}}$ 的并集，并且根据 (1)， $|B\cap C_{\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}}}|=(\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}})\chi_B$。 因此，注意到对每个 $S\subseteq\partial J$，$J\cup S$ 都是一个祖先子集，

$$\begin{aligned}|(B\times B)\cap O_J|&=\sum_{\boldsymbol{\delta}\in B}|\{\boldsymbol{\varepsilon}\in B\mid\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon})\in O_J\}|\\&=\sum_{\boldsymbol{\delta}\in B}\Big|\{\boldsymbol{\varepsilon}\in B\mid\boldsymbol{\varepsilon}\pi_J=\boldsymbol{\delta}\pi_J\}\setminus\bigcup_{i\in\partial J}\{\boldsymbol{\varepsilon}\in B\mid\boldsymbol{\varepsilon}\pi_{J\cup\{i\}}=\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup\{i\}}\}\Big|\\&=\sum_{\boldsymbol{\delta}\in B}\Big(\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}(\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup S})\chi_B\Big)\\&=\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}\Big(\sum_{\boldsymbol{\delta}\in B}(\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup S})\chi_B\Big)\\&=\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}\Big(\sum_{\boldsymbol{\delta}\in B}|B\cap C_{\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup S}}|\Big)\end{aligned}$$

其中，对于第三个等号，我们使用与上文证明（18）时类似的论证。

考虑 $\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{J\cup S}$. 若 $\boldsymbol{\nu} \notin B\pi_{J\cup S}$，则 $(\boldsymbol{\nu})\chi_B = |B \cap C_{\boldsymbol{\nu}}| = 0$。若 $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup S} \in B\pi_{J\cup S}$，则 $(\boldsymbol{\nu})\chi_B = |B \cap C_{\boldsymbol{\nu}}| = |B \cap C_{\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup S}}|$，并且存在 $(\boldsymbol{\nu})\chi_B$ 个不同的 $\boldsymbol{\delta}' \in B$，使得 $\boldsymbol{\delta}'\pi_{J\cup S} = \boldsymbol{\nu}$。因此

$$\sum_{\boldsymbol{\delta}\in B} |B \cap C_{\boldsymbol{\delta}\pi_{J\cup S}}| = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Delta_{J\cup S}} ((\boldsymbol{\nu})\chi_B)^2 = (J \cup S)\mu_B. \tag{29}$$

由此可得

$$|(B \times B) \cap O_J| = \sum_{S\subseteq\partial J} (-1)^{|S|}(J \cup S)\mu_B.$$

因此，由 (28) 可知，$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 2-设计，当且仅当

$$\sum_{S\subseteq\partial J} (-1)^{|S|}(J \cup S)\mu_B = \frac{k(k-1)}{v(v-1)}|O_J| \quad \text{for each proper ancestral subset } J.$$

回顾命题 2.3 中 $|O_J|$ 的表达式，以及对每个 i 和 $v = |\mathcal{P}| = \prod_{i\in I} |\Delta_i|$，$|\Delta_i| = e_i$ 这一事实，关于 J 的条件可写为

$$\sum_{S\subseteq\partial J} (-1)^{|S|}(J \cup S)\mu_B = \frac{k(k-1)}{(v-1)} \left(\prod_{i\in\partial J} (e_i - 1)\right) \left(\prod_{i\in(J\cup\partial J)^c} e_i\right)$$

命题 4.2 的证明至此完成。 □

现在我们推导定理 1.2。

推论 4.3。 假设假设 *4.1* 成立。那么 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个2-设计，当且仅当条件(2) 对每个真非空祖先子集 J *of* I成立。因此，定理 *1.2* 的断言得证。

证明。 根据命题 4.2，如果 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 2-设计，那么 (27) 对每个真祖先子集 J成立；等价地，(2) 对每个真祖先子集 J 成立（利用 (26)）。

反过来，假设 (2) 对每个真非空祖先子集 J成立。在命题 4.2 的证明中，已经证明 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 2-设计，当且仅当 (28) 中的方程对 I的每个真祖先子集 J 成立；由 (26) 可知，对于这样的子集J，该方程等价于 J的条件 (2)。因此，根据我们的假设，(28) 中的方程对所有真非空祖先子集 J都成立，接下来只需证明它对该子集$J = \varnothing$成立。

根据 [6, 定理 C],，所有 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) \setminus \{I\}$（真祖先子集）上的 O_J 的并，等于来自 $\mathcal{P}$ 的所有不同点的有序对所构成的集合，其大小为 $v(v-1)$。因此，将式 (28) 中的量 $|(B \times B) \cap O_J|$ 对所有子集 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) \setminus \{I\}$ 求和，结果等于 $k(k-1)$。由此得到下面的第一个等式；再利用式 (28) 中对所有 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) \setminus \{I, \varnothing\}$ 的方程，我们得到

$$\begin{aligned}
|(B \times B) \cap O_\varnothing| &= k(k-1) - \sum_{J\in\mathcal{A}(\mathcal{I}), J\neq I,\varnothing} |(B \times B) \cap O_J| \\
&= k(k-1) - \frac{k(k-1)}{v(v-1)} \sum_{J\in\mathcal{A}(\mathcal{I}), J\neq I,\varnothing} |O_J| \\
&= k(k-1) - \frac{k(k-1)}{v(v-1)} \left(v(v-1) - |O_\varnothing|\right) \\
&= \frac{k(k-1)}{v(v-1)}|O_\varnothing|.
\end{aligned}$$

因此，式 (28) 对 $J = \varnothing$ 也成立，进而式 (28) 对所有 $J \in \mathcal{A}(\mathcal{I}) \setminus \{I\}$ 均成立，所以 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 2- 设计。证明至此完成。□

4.1. 关于链和反链的应用。 这里我们说明，对于 $\mathcal{I}$ 是链（即 $\mathcal{I}$ 是全序集）和反链（即关系 $\prec$ 为空）这两种特殊情形，我们的主要结果定理 1.2 可化为文献中的早期结果。关于这些特殊情形，参见 [4, 定理 1.3] 和 [3,定理 1.3]。

引理 4.4。 若 $(I, \preccurlyeq)$ 是某个 $s \geq 2$ 对应的 s-反链，则定理 *1.2* 等价于 [3,定理 1.3]。

证明。只需证明：对 I 的所有非空真祖先子集 J，条件 (2) 的集合等价于 I 的所有非空真祖先子集 J 所对应的 [3, 定理 1.3]，中条件 (6) 的集合。在 [3] 中，集合 $\Delta_{J\cup S}$ 记作 $\mathcal{E}_{J\cup S}$，因此使用我们当前的记法，[3, 定理 1.3 中的条件 (6)] 可写为

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Delta_J} \big((\boldsymbol{\nu})\chi_B\big)^2 = k + \frac{k(k-1)}{v-1}\left(\left(\prod_{i\in J^{\mathrm{c}}} e_i\right) - 1\right) \quad \text{for all } J \subsetneq I \text{ with } J \neq \varnothing. \tag{30}$$

由于 $(I, \preccurlyeq)$ 是一个反链，因此 I 的任意子集 J 都是祖先的，其边界为 $\partial J = J^{\mathrm{c}}$。于是，对于 I 的任意子集 J，我们有 $(J \cup \partial J)^{\mathrm{c}} = (J \cup J^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = I^{\mathrm{c}} = \varnothing$，并且可以将 (2) 写成

$$\sum_{S\subseteq J^{\mathrm{c}}} (-1)^{|S|}\left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Delta_{J\cup S}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B\right)^2 = \frac{k(k-1)}{v-1}\left(\prod_{i\in J^{\mathrm{c}}} (e_i - 1)\right). \tag{31}$$

由定理 1.2 和命题 4.2 可知，对于所有真非空子集 J，条件 (31) 的集合等价于对于 J 的所有真子集（包括 $\varnothing$）的条件 (31) 的集合。因此，对于 J 的所有真子集，条件 (31) 的集合等价于 [3] 中的条件 (21)。在 [3, 定理 1.3] 的证明中已说明，[3, 条件 (21)] 等价于[3, 条件 (6)]。这证明了，如果 $(I, \preccurlyeq)$ 是一个反链，那么定理 1.2 等价于 [3,定理 1.3]。□

引理 4.5。 如果$(I, \preccurlyeq)$ 是一个 s-链，其中 $s \geq 2$，那么定理 *1.2* 等价于 [4, 定理 1。3]。

证明。如引理 4.4 中所述，我们将证明，对于所有非空真祖先子集 J of I，条件 (2) 的集合等价于 [4, 定理 1.3] 中条件 (2) 和 (3) 的集合。

假设 $I = \{1, \ldots, s\}$ 且 $1 \prec 2 \prec \ldots \prec s$。则 I 的真祖先子集 J 为 $\varnothing$，而集合 $A[i]$ 对应于 $2 \leq i \leq s$。我们先回顾 [4,定理 1.3] 中的条件 (2) 和 (3)。对于任意 $i \in \{1, \ldots, s-1\}$，[4] 中的划分 $\mathcal{C}_i$，用我们当前的记号表示，就是划分 $\mathcal{C}_{A[i+1]}$。因此，任意类 $C \in \mathcal{C}_i$ 都对应于某个 $\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{A[i+1]}$ 的类 $C_{\boldsymbol{\nu}}$，而 [4] 中的参数 x_C 等于 $(\boldsymbol{\nu})\chi_B$。当类 C 遍历划分 $\mathcal{C}_i$ 时，元组 $\boldsymbol{\nu}$ 遍历 $\Delta_{A[i+1]}$。因此，当 $i = 1$ 时，[4, 定理 1.3] 的条件 (2) 用我们当前的记号可写为

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Delta_{A[2]}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B\left((\boldsymbol{\nu})\chi_B - 1\right) = \frac{k(k-1)}{v-1}(e_1 - 1) \tag{32}$$

C^+ 中的 [4] 类是包含 C的唯一 $\mathcal{C}_{i-1}$类，因此 $C^+ = C_{\boldsymbol{\nu}\pi_{A[i]}}$是包含 C的唯一$\mathcal{C}_{A[i]}$类。所以，[4,定理 1.3] 的条件 (3) 可以写成

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Delta_{A[i]}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B\left((\boldsymbol{\nu}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\nu})\chi_B\right) = \frac{k(k-1)}{v-1}(e_i - 1)\prod_{j\leq i-1} e_j \quad \text{for } i \in \{2, \ldots, s\}. \tag{33}$$

现在我们证明，对于所有真非空祖先子集 J，条件 (2) 的集合等价于条件 (32) 和 (33)。注意，对于每个真祖先子集 J，边界∂J 是一个单元素集，特别地，

$$\partial J = \begin{cases} \{i-1\} & \text{if } J = A[i],\ 2 \le i \le s \\ \{s\} & \text{if } J = \varnothing \end{cases} \tag{34}$$

为方便起见，令

$$J^* := J \cup \partial J.$$

由定理 1.2 和命题 4.2 可知，对于所有真非空祖先子集 J of I，条件 (2) 的集合等价于对于所有真祖先子集 J of I （即包括 $J = \varnothing$）的条件 (2) 的集合。因此，(2) 的左侧（它等价于 (27)）为 $(J)\mu_B - (J^*)\mu_B$。利用 (29)，可将其写为

$$(J)\mu_B - (J^*)\mu_B = \sum_{\boldsymbol{\delta} \in B} \left((\boldsymbol{\delta}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\delta}\pi_{J^*})\chi_B \right). \tag{35}$$

若 $J = A[2]$ then $J^* = A[1] = I$，则 (35) 可写为

$$(A[2])\mu_B - (I)\mu_B = \sum_{\boldsymbol{\delta} \in B} \left((\boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]})\chi_B - (\boldsymbol{\delta})\chi_B \right) = \sum_{\boldsymbol{\delta} \in B} \left((\boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]})\chi_B - 1 \right).$$

项 $(\boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]})\chi_B - 1$ 在右侧求和中出现的次数，等于满足 $\boldsymbol{\delta}'\pi_{A[2]} = \boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]}$的点 $\boldsymbol{\delta}' \in B$ 的个数。也就是说，该项出现的次数等于$|B \cap C_{(\boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]})}| = (\boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]})\chi_B$。由于 $\boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]}$ 随着 $\boldsymbol{\delta}$ 遍历 $\mathcal{P}$而遍历 $\Delta_{A[2]}$，

$$\sum_{\boldsymbol{\delta} \in B} \left((\boldsymbol{\delta}\pi_{A[2]})\chi_B - 1 \right) = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{A[2]}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B \left((\boldsymbol{\nu})\chi_B - 1 \right).$$

因此，$J = A[2]$ 的条件 (2) 等价于条件 (32)。

现在假设 $J = A[i]$、$3 \le i \le s$ 或 $J = \varnothing$。注意，项 $(\boldsymbol{\delta}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\delta}\pi_{J^*})\chi_B$ 在 (35) 右侧的求和中出现的次数，等于满足 $\boldsymbol{\delta}'\pi_{J^*} = \boldsymbol{\delta}\pi_{J^*}$ 的点$\boldsymbol{\delta}' \in B$ 的数量。也就是说，该项出现的次数等于 $B \cap C_{\boldsymbol{\delta}\pi_{J^*}}$ 中点的数量，而这等于 $(\boldsymbol{\delta}\pi_{J^*})\chi_B$。另请注意，由于 $J \subseteq J^*$，根据 (6)，有$\pi_J = \pi_{J^*}\pi_J$。当 $\boldsymbol{\delta}$ 遍历 $\mathcal{P}$ 时，投影 $\boldsymbol{\delta}\pi_{J^*}$ 遍历 Δ_{J^*}，因此 (35) 可写为

$$(J)\mu_B - (J^*)\mu_B = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{J^*}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B \left((\boldsymbol{\nu}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\nu})\chi_B \right).$$

若 $J = A[i], 3 \le i \le s$，则 $J^* = A[i] \cup \{i-1\} = A[i-1]$；若 $J = \varnothing$，则 $J^* = \{s\} = A[s]$。因此

$$\begin{aligned} (J)\mu_B - (J^*)\mu_B &= \begin{cases} \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{A[i-1]}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B \left((\boldsymbol{\nu}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\nu})\chi_B \right) & \text{if } J = A[i],\ 3 \le i \le s \\ \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{A[s]}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B \left((\boldsymbol{\nu}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\nu})\chi_B \right) & \text{if } J = \varnothing \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{A[i]}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B \left((\boldsymbol{\nu}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\nu})\chi_B \right) & \text{if } J = A[i],\ 2 \le i \le s-1 \\ \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \Delta_{A[s]}} (\boldsymbol{\nu})\chi_B \left((\boldsymbol{\nu}\pi_J)\chi_B - (\boldsymbol{\nu})\chi_B \right) & \text{if } J = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

将这些表达式分别代入（2）的左侧可知，对于$J = A[i], 3 \le i \le s$，条件（2）等价于对于 $i \in \{2, \ldots, s-1\}$的条件（33）；对于$J = \varnothing$，条件（2）等价于对于 $i = s$的条件（33）。

这表明，对于所有真祖先子集 J，条件 (2) 的集合等价于 [4, 定理 1.3] 中的条件 (2) 和 (3) 的集合。

□

5. Families of examples for posets of small order

我们用一些小偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 来说明第 2 节中的概念。例 2.1 和例 2.2 分别对应于 [16, 结构 (2) 和 (3)] 以及 [18, 图 1，示意图 (3) 和 (4)]。图 3 列于 [18, 图 3，示意图 (7)]，并在 [6, 例 1 和图 3]中加以描述。

小偏序集（I, $\preccurlyeq$）对应的划分 $\mathcal{C}^*$ 以及具有 $|I| \le 3$ 的一个例子，分别展示在图 1、2 和图 3 中。下面重新列出这些例子，并为那些不是链或反链的例子提供更多细节。我们针对每个 $i \in I$标记不变划分 $\mathcal{C}_{A[i]}$；如第2.2节所述，其他所有不变划分均可通过取两个或多个划分的类的交集得到。例如，在图2b中，划分 $\mathcal{C}_{\{1,2\}}$ 中的每个类都是一个 $\mathcal{C}_{\{1\}}$-类与一个 $\mathcal{C}_{\{2\}}$-类的交集；由于每个 $\mathcal{C}_{\{1\}}$-类和 $\mathcal{C}_{\{2\}}$-类都是一个竖直平面，因此每个 $\mathcal{C}_{\{1,2\}}$-类都是一条竖直直线。图 1 和 2 中的群$\prod_{(I,\ \preccurlyeq)}(G_i,\ \Delta_i)$ 是根据具体情况应用定理 2.4 和 2.5 得到的。

点集具有图 1、2a 和 2b 所示分划偏序集的 2-设计示例，可见于 [4]（对应图 1a 和 2a）以及 [3]（对应图 1b 和 2b），具体如第 1.1 节所述。因此，本节将给出图 2 中其余偏序集（即所有既非链也非反链的此类偏序集）以及图 3 中偏序集的示例。

5.1. 偏序集 $(I,\ \preccurlyeq)$ 满足 $|I| = 3$。 这里考虑的偏序集是图 2(c–e) 中的那些。在下面的构造中，$p \ge 2$ 是一个整数，且

$$e_1 = p^2 + p + 1,\ e_2 = p^2 - p + 1,\ e_3 = p^4 - p^2 + 1. \tag{36}$$

现在 $|\Delta_i| = e_i$，取 $\Delta_i = \{0, 1, 2, \ldots, e_i - 1\} \subset \mathbb{Z}$ 会更方便。注意 $e_2 < e_1 < e_3$，并且作为整数子集，我们有 $\Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta_3$。因此 $\mathcal{P} = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3$，于是

$$v = |\mathcal{P}| = e_1 e_2 e_3 = q^2 + q + 1, \quad \text{where } q = p^4.$$

此外，每个块的大小均为 $k = q + 1$，因此

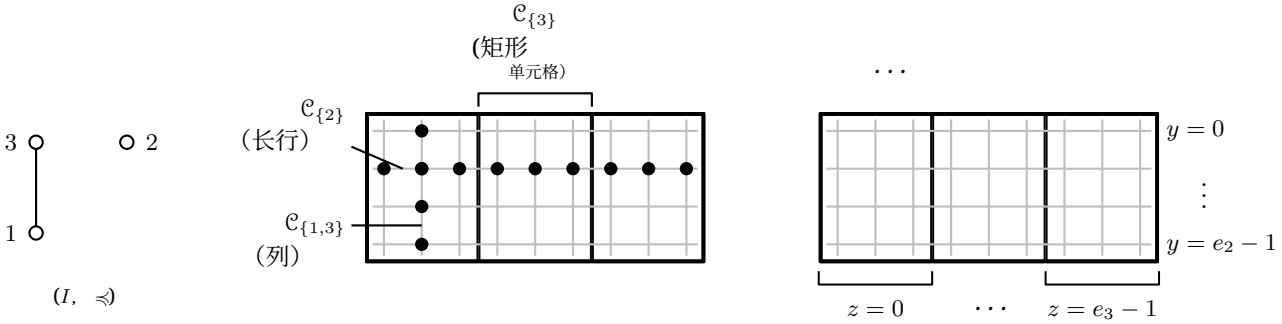
$$\frac{k(k-1)}{v-1} = \frac{(q+1)q}{q^2+q} = 1$$

对于适当的非空祖先子集 J，条件 (27) 变为

$$\sum_{S \subseteq \partial J} (-1)^{|S|} (J \cup S)\mu_B = \left(\prod_{i \in \partial J} (e_i - 1)\right)\left(\prod_{j \in (J \cup \partial J)^c} e_j\right) = \frac{|O_J|}{v} \tag{37}$$

其中，最后一个等式由 (17) 得出。在每个构造中，块 B 将被描述为子集 B_1、B_2 和 B_3 的不交并。请注意，在此记法中，子集 B_1、B_2 和 B_3 与偏序集 $(I, \preccurlyeq)$ 的节点 1、2 和 3 没有任何关联。

5.1.1. 图*2c* 的示例。 假设点集 $\mathcal{P}$ 具有一个划分偏序集，它对应于非连通偏序集 (I, $\preccurlyeq$)，其节点为 1、2 和 3，如图2c所示，我们在下方再次展示。



设 $G = (G_1 \wr G_3) \times G_2$，其中对于每个 i， G_i 都是 S_{e_i} 的 2-传递子群。由定理 2.4 和 2.5 可知， G是保留此分划偏序集的广义花环积群。特别地，这些结果表明，I的非空真祖先子集为 $\{2\}$、 $\{3\}$、 $\{1,3\}$ 和 $\{2,3\}$，因此由 G 保留的 $\mathcal{P}$ 的非平凡点划分为：

- $\mathcal{C}_{\{2\}}$具有类 $C_y = \{(x,\ y,\ z) \mid x \in \Delta_1,\ \ z \in \Delta_3\}$，对于 $y \in \Delta_2$； $\mathcal{C}_{\{2\}}$-类对应于图2c中的长行；
- $\mathcal{C}_{\{3\}}$具有类 $C_z = \{(x,\ y,\ z) \mid x \in \Delta_1,\ \ y \in \Delta_3\}$，对于 $z \in \Delta_3$； $\mathcal{C}_{\{3\}}$-类对应于图2c中的矩形单元；
- $\mathcal{C}_{\{1,3\}}$具有类 $C_{(x,\ z)} = \{(x,\ y,\ z) \mid y \in \Delta_2\}$对于 $(x,\ z) \in \Delta_{\{1,3\}} = \Delta_1 \times \Delta_3$； $\mathcal{C}_{\{1,3\}}$-类 $C_{(x,\ z)}$ 对应于图2c中矩形单元内的小型 x-列 $C_z \in \mathcal{C}_{\{3\}}$；
- $\mathcal{C}_{\{2,3\}}$类 $C_{(y,z)} = \{(x,y,z) \mid x \in \Delta_1\}$对应于 $(y,z) \in \Delta_{\{2,3\}} = \Delta_2 \times \Delta_3$的部分； $\mathcal{C}_{\{2,3\}}$-类 $C_{(y,z)}$ 对应于图2c中矩形单元 C_z里的长行 C_y 部分。

因此，对于点 $\boldsymbol{\delta} = (x,y,z) \in \mathcal{P}$，第三个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的矩形单元 $C_z \in \mathcal{C}_{\{3\}}$，第二个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的长行 $C_y \in \mathcal{C}_{\{2\}}$，第一个坐标表示其中包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的小列 $C_{(x,z)} \cap C_z$。

注意，第 2.1 小节中定义的特殊祖先子集 $A[j]$ 如下： $A[1] = \{1,3\}, A[2] = \{2\}$, $A[3] = \{3\}$，因此，(10) 中的子偏序集 $\mathcal{C}^* = \{\mathcal{C}_{A[i]} \mid i \in I\}$ 包含对应于四个非空真祖先集中的三个的划分。剩下的祖先集 $\{2,3\}$ 具有这样的性质：每个 $\mathcal{C}_{\{2,3\}}$-类都是一个 $\mathcal{C}_{\{2\}}$-类与一个 $\mathcal{C}_{\{3\}}$-类的交集，正如第2.2节中所解释的那样。

例5.1。取 $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 其中 $B_2 = B_{2,\ 1} \cup B_{2,\ 2}$ 并回想一下， $\Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta_3 \subset \mathbb{Z}$，且 $e_1 = p^2 + p + 1$， $e_2 = p^2 - p + 1$， $e_3 = p^4 - p^2 + 1$ 其中 $q = p^4$：

$$
\begin{aligned}
B_1 &:= \{(x,0,0) \mid \ 0 \le x \le p\},\\
B_{2,1} &:= \{(p+1,\ y,\ 0) \mid 1 \le y \le p\},\\
B_{2,2} &:= \{(x,\ x-1,\ 0) \mid p+2 \le x \le e_2\},\\
B_3 &:= \{(0,y,z) \mid 1 \le y \le e_2 - 1,\ (y-1)(p^2+p) + 1 \le z \le y(p^2+p)\}.
\end{aligned}
$$

注意，在 B_3， z取遍从 $(1-1)\ \ (p^2+p)\ \ +1 = 1$ 到 $(e_2-1)\ \ (p^2+p)\ \ = p^4 - p^2 = e_3 - 1$，也就是说，取遍 $\Delta_3 \setminus \{0\}$中的所有值，并且每个这样的 z 都对应于 y的唯一一个值。在 $B_{2,\ 2}$，第一个坐标 $x \le e_2 < e_1$ 因此 $x \in \Delta_1$，而第二个坐标 $x - 1 \le e_2 - 1$因此 $x - 1 \in \Delta_2$。

因此 $|B_1| = p + 1$， $|B_2| = p + (e_2 - p - 1) = e_2 - 1 = p^2 - p$，且 $|B_3| = (e_2 - 1)(p^2 + p) = (p^2 - p)(p^2 + p) = p^4 - p^2$。由此可得

$$|B| = (p+1) + (p^2 - p) + (p^4 - p^2) = p^4 + 1 = q + 1.$$

B 中各点在不同划分类中的分布如图4所示，其中各类按照从左至右、从上至下的顺序编号。例如，长行 $C_0 \in \mathcal{C}_{\{2\}}$ 是顶行，矩形单元 $C_0 \in \mathcal{C}_{\{3\}}$ 是最左侧的矩形。

B 的数组由参数$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$ 组成，其中每个 $\boldsymbol{\nu} \in \Delta_J$ 及每个真祖先子集 J对应一个参数。根据定理 1.2，结构 $\mathcal{D} = (\mathcal{P},\ B^G)$是一个2-设计，当且仅当对于 I的任意真非空祖先子集 J，条件（37）成立。如上所述， I 的真非空祖先子集 J 为 $\{2\}$、 $\{3\}$、 $\{2,3\}$ 和 $\{1,3\}$。

表1列出了对于每个 J，($\boldsymbol{\nu} \in \Delta_J$ 的)可能的非零取值 $(\boldsymbol{\nu})\chi_B$，以及 $\mathcal{C}_J$ 中使每个此类取值成立的类的数量 $\#C_{\boldsymbol{\nu}}$ （$\boldsymbol{\nu}$） χ_B。随后，将这些取值对应的 $\#C_{\boldsymbol{\nu}}$ 与 $\big($ 的乘积相加，计算出 $(J)\mu_B$ 的值（$\boldsymbol{\nu}$） $\chi_B\big)^2$。结果列在表1的最后一行。

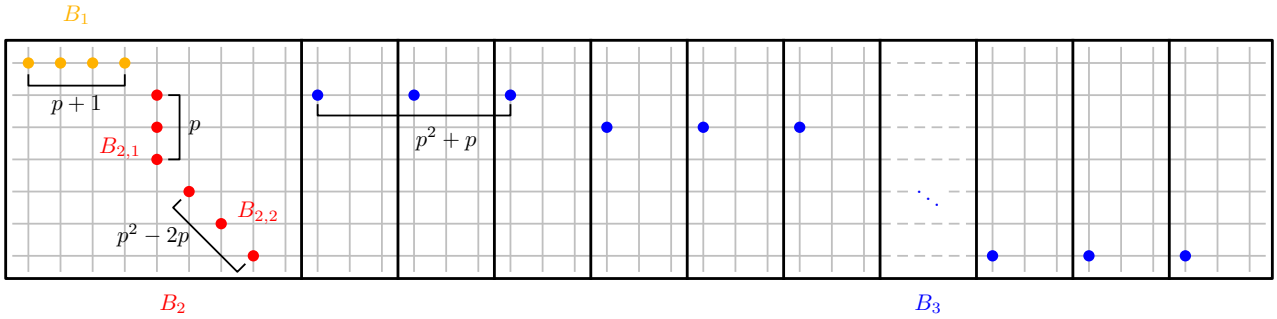


FIGURE 4. 例5.1中 B 点的分布

例如，对于 $J=\{2\}$，类 $C_0 \in \mathcal{C}_{\{2\}}$ 包含 B_1 中的所有 $p+1$ 个点，因此 $(0)\chi_B = p+1$；而 $\mathcal{C}_{\{2\}}$ 中其余每个 p^2-p 类都包含 B_2 中的一个点和 B_3 中的p^2+p个点，因此对于每个 $\boldsymbol{\nu} \in \{1,\dots,p^2-p\}$，$(\boldsymbol{\nu})\chi_B = p^2+p+1$。由此得到表1中列 $\{2\}$ 的前两行所列的值，因此

$$(\{2\})\mu_B = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\Delta_2} \big((\boldsymbol{\nu})\chi_B\big)^2 = 1\cdot(p+1)^2 + (p^2-p)(p^2+p+1)^2$$

这等于第$J\mu_B$行、第 $\{2\}$列中的项。这验证了表1中第 $\{2\}$ 列的所有项均正确。表1中的其他项也以类似方式计算。

J 使得 $\boldsymbol{\nu}\in\Delta_J$	$\{2\}$		$\{3\}$		$\{2,3\}$		$\{1,3\}$	
	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$
	1 p^2-p	$p+1$ p^2+p+1	1 p^4-p^2	p^2+1 1	1 p^4-p	$p+1$ 1	1 p^4-p+1	p 1
$(J)\mu_B$	$p^6+p^5+p^4-p^3$ $+p+1$		$2p^4+p^2+1$		p^4+p^2+p+1		p^4+p^2-p+1	

TABLE 1. $(J)\mu_B$ 在 $J=\{2\},\{3\},\{2,3\},\{1,3\}$处的取值

注意，(37)的右端为 $|O_J|/v$ ，该值连同边界 ∂J 对每个 J均在表2中给出。回想一下，$|O_J|$是 G在不同点的有序对上的轨道长度，见第2.4节。

J	∂J	$\lvert O_J\rvert/v$
$\{2\}$	$\{3\}$	$(e_3-1)e_1 = (p^4-p^2)(p^2+p+1)$
$\{3\}$	$\{1,2\}$	$(e_1-1)(e_2-1) = p^4-p^2$
$\{2,3\}$	$\{1\}$	$(e_1-1) = p^2+p$
$\{1,3\}$	$\{2\}$	$(e_2-1) = p^2-p$

TABLE 2. $G=(G_1 \wr G_3)\times G_2$ 在不同点的有序对上的轨道大小

对于每个非空真祖先子集 J，现在我们计算 (37) 的左侧，并通过查阅表2证明 (37) 对每个非空真祖先集 J 都成立。回忆引理3.1，$(I)\mu_B = k = p^4+1$。

若 $J=\{2\}$，则 $\partial J=\{3\}$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}(J\cup S)\mu_B &= (\{2\})\mu_B-(\{2,3\})\mu_B\\ &= p^6+p^5+p^4-p^3+p+1-\left(p^4+p^2+p+1\right)\\ &= p^6+p^5-p^3-p^2\\ &= \left(p^4-p^2\right)\left(p^2+p+1\right)\end{aligned}$$

若 $J=\{3\}$，则 $\partial J=\{1,2\}$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}(J\cup S)\mu_B &= (\{3\})\mu_B-(\{2,3\})\mu_B-(\{1,3\})\mu_B+(I)\mu_B\\ &= \left(2p^4+p^2+1\right)-\left(p^4+p^2+p+1\right)-\left(p^4+p^2-p+1\right)+p^4+1\\ &= p^4-p^2\end{aligned}$$

若 $J=\{2,3\}$，$\partial J=\{1\}$，因此

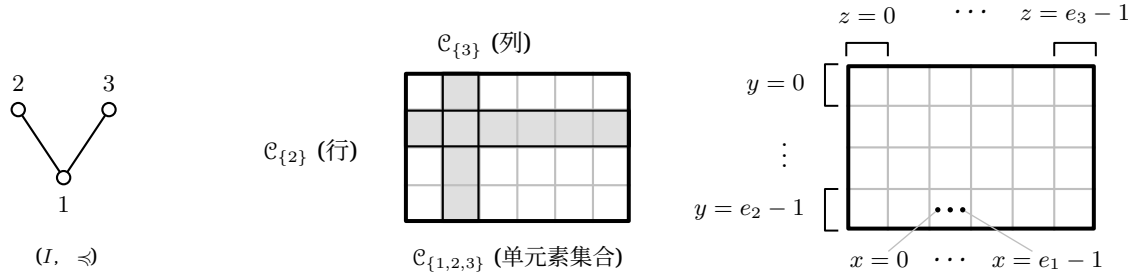
$$\begin{aligned}\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}(J\cup S)\mu_B &= (\{2,3\})\mu_B-(I)\mu_B\\ &= \left(p^4+p^2+p+1\right)-\left(p^4+1\right)=p^2+p\end{aligned}$$

若 $J=\{1,3\}$，$\partial J=\{2\}$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}(J\cup S)\mu_B &= (\{1,3\})\mu_B-(I)\mu_B\\ &= \left(p^4+p^2-p+1\right)-\left(p^4+1\right)=p^2-p\end{aligned}$$

因此，对于 I 的每个非空真祖先子集 J，式 (37) 均成立；于是根据定理 1.2，$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\ B^G)$ 是一个 2- 设计。

5.1.2. 图 *2d* 的示例。假设点集 $\mathcal{P}$ 具有一个与 V 形偏序集 $(I,\ \preccurlyeq)$ 相对应的分划偏序集，该偏序集的节点为 1、2 和 3，如图 2d 所示。为方便起见，我们在下方再次展示该图。



设 $G=G_1\wr(G_2\times G_3)$，其中每个 G_i 都是 S_{e_i}的一个 2-传递子群。由定理 2.4 和 2.5 可知，G 是保留此分划偏序集的广义花环积群。特别地，这些结果表明，I的非空真祖先子集为 $\{2\}$、$\{3\}$和 $\{2,3\}$，因此 G 保留的 $\mathcal{P}$ 的非平凡点分划为：

- $\mathcal{C}_{\{2\}}$的类为 $C_y=\{(x,\ y,\ z)\mid x\in\Delta_1,\ \ z\in\Delta_3\}$，其中 $y\in\Delta_2$；$\mathcal{C}_{\{2\}}$-类对应于图 2d 中的行；
- $\mathcal{C}_{\{3\}}$的类为 $C_z=\{(x,\ y,\ z)\mid x\in\Delta_1,\ \ y\in\Delta_2\}$，其中 $z\in\Delta_3$；$\mathcal{C}_{\{3\}}$-类对应于图 2d 中的列；
- $\mathcal{C}_{\{2,3\}}$具有类 $C_{(y,\ z)}=\{(x,\ y,\ z)\mid x\in\Delta_1\}$对于 $(y,\ z)\in\Delta_{\{2,3\}}=\Delta_2\times\Delta_3$；图 2d 中的$\mathcal{C}_{\{2,3\}}$-类 $C_{(y,\ z)}$ 是行 C_y 与列 C_z 的交集。

因此，对于点 $\boldsymbol{\delta} = (x,\ y,\ z) \in \mathcal{P}$，第二个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的行 $C_y \in \mathcal{C}_{\{2\}}$，第三个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的列 $C_z \in \mathcal{C}_{\{3\}}$，而第一个坐标则标识 $C_{(y,z)} = C_y \cap C_z$ 中与 $\boldsymbol{\delta}$ 相等的点。

注意 $\mathcal{C}^* = \{\mathcal{C}_{A[i]} \mid i \in I\}$ 其中 $A[1] = \{1,2,3\} = I$、$A[2] = \{2\}$、$A[3] = \{3\}$。在这种情况下，$\mathcal{C}_{A[1]} = \mathcal{C}_I$ 由单元素集合组成。

例5.2。取 $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 其中

$$B_1 := \{(x,0,0) \mid 0 \le x \le p\},$$
$$B_2 := \{(0,y,0) \mid 1 \le y \le e_2 - 1\},\ \text{and}$$
$$B_3 := \{(0,y,z) \mid 1 \le y \le e_2 - 1,\ (y-1)(p^2+p) + 1 \le z \le y(p^2+p)\}$$

注意，在 B_3中，z 取遍从$(1-1)(p^2+p)+1 = 1$ 到$(e_2-1)(p^2+p) = p^4-p^2 = e_3-1$的所有值，也就是说，取遍 $\Delta_3 \setminus \{0\}$中的所有值，并且每个这样的 z 都对应于 y的唯一一个值。

那么 $|B_1| = p+1$，$|B_2| = e_2-1$，以及 $|B_3| = (e_2-1)(e_1-1) = (p^2-p)(p^2+p) = p^4-p^2 = e_3-1$。因此

$$|B| = p + 1 + (e_2 - 1) + (e_3 - 1) = (p+1) + (p^2 - p) + (p^4 - p^2) = p^4 + 1 = q + 1.$$

点在 B 各 $\mathcal{C}_{\{2,3\}}$-类中的分布，以及构成子集 B_1、B_2和 B_3的点，如图5所示，其中各类按从左到右、从上到下的顺序编号。

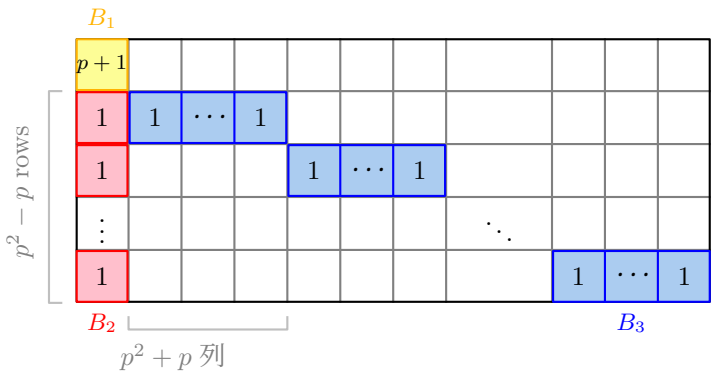


FIGURE 5. 例5.2中 B 的点分布

为了验证结构 $\mathcal{D} = (\mathcal{P},\ B^G)$ 是一个 2-设计，我们将采用与例5.1类似的方法：需要验证条件 (37) 对 I 的任意真非空祖先子集 J 都成立。如上所述，I 的真非空祖先子集 J 为 $\{1,3\}$、$\{2,3\}$ 和 $\{3\}$。表6列出了计算每个此类 J 的 $(J)\mu_B$ 所需的相关信息。

例如，对于 $J = \{2\}$，类 $C_0 \in \mathcal{C}_{\{2\}}$ 包含 B_1 中的全部 $p+1$ 个点，因此 $(0)\chi_B = p+1$；而 $\mathcal{C}_{\{2\}}$ 中其余每个 p^2-p 类都包含 B_2 中的一个点和 B_3 中的 p^2+p 个点，因此对每个 $\boldsymbol{\nu} \in \{1,\dots,p^2-p\}$，$(\boldsymbol{\nu})\chi_B = p^2+p+1$。这给出了表3的 $\{2\}$ 列前两行中的数值，因此

$$\begin{aligned}(\{2\})\mu_B &= 1 \cdot (p+1)^2 + (p^2-p)(p^2+p+1)^2 \\ &= p + (p^4 - p + 1)(p^2+p+1)\end{aligned}$$

注意，(37) 的右侧为 $|O_J|/v$。这个值以及边界 ∂J，针对每个 J 都列于表4中。

对于每个非空真祖先子集 J，我们计算式 (37) 的左侧（回顾式 (26)），并将结果记录在表5中。可以看到，在每种情况下，式 (37) 的左侧都等于

J s.t. $\boldsymbol{\nu} \in \Delta_J$	$\{2,3\}$		$\{2\}$		$\{3\}$	
	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$
	1	$p+1$	1	$p+1$	1	p^2+1
	p^4-p	1	p^2-p	p^2+p+1	p^4-p^2	1
$(J)\mu_B$	p^4+p^2+p+1		$p+(p^4-p+1)(p^2+p+1)$		$2p^4+p^2+1$	

TABLE 3. $(J)\mu_B$的取值，对应于 $J=\{2,3\}$，$\{2\}$，$\{3\}$

J	∂J	O_J中的配对	$\lvert O_J\rvert/v$
$\{2,3\}$	$\{1\}$	同 $\mathcal{C}_1$类	$(e_1-1)=p^2+p$
$\{2\}$	$\{3\}$	同行、不同列	$(e_3-1)\ e_1=\ (p^4-p^2)\quad(p^2+p+1)$
$\{3\}$	$\{2\}$	同列、不同行	$(e_2-1)\ e_1=\ (p^2-p)\quad(p^2+p+1)$

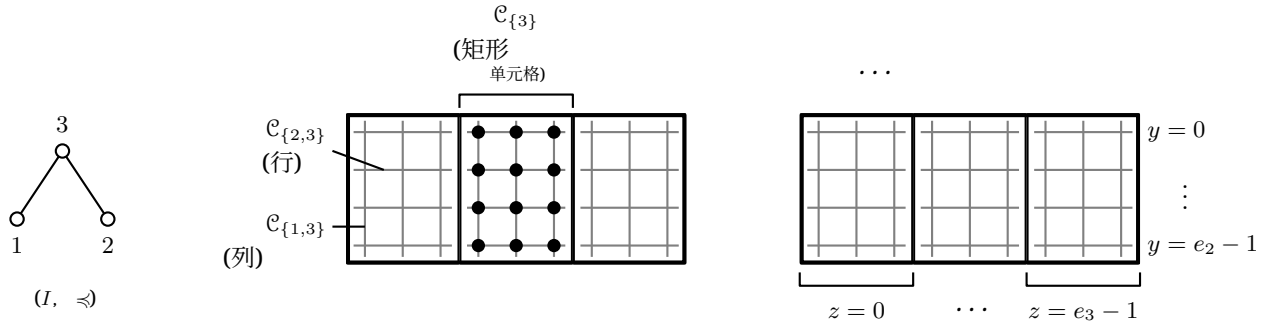
TABLE 4. $G=G_1\wr(G_2\times G_3)$在不同点的有序对上的轨道

右侧，其值列于表4的最后一列。由定理 1.2，这就完成了对 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\ B^G)$ 是一个 2-设计的证明。

J	∂J	$\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{\lvert S\rvert}(J\cup S)\ \mu_B$	(37) 的左侧
$\{2,3\}$	$\{1\}$	$(\{2,3\})\ \mu_B-\ (I)\ \mu_B$	p^2+p
$\{2\}$	$\{3\}$	$(\{2\})\mu_B-(\{2,3\})\mu_B$	$(p^4-p^2)\ (p^2+p+1)$
$\{3\}$	$\{2\}$	$(\{3\})\mu_B-(\{2,3\})\mu_B$	$(p^2-p)(p^2+p+1)$

TABLE 5. $\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{\lvert S\rvert}(J\cup S)\ \mu_B$的取值

5.1.3. 图*2e*示例。 假设点集 $\mathcal{P}$ 具有一个与倒V形偏序集（$I,\ \preccurlyeq$）相对应的分划偏序集，该偏序集有 1、2 和 3 三个节点，如图 2e 所示，下面我们再展示一次。



设 $G=(G_1\times G_2)\wr G_3$，其中每个 G_i 都是 S_{e_i} 的一个 2-传递子群。由定理 2.4 和 2.5 可知，G 是保持该分划偏序集的广义花环积群。特别地，这些结果表明，I的适当非空祖先子集为 $\{3\}$、$\{1,3\}$ 和 $\{2,3\}$，因此 G 保持的 $\mathcal{P}$ 的非平凡点划分为：

- $\mathcal{C}_{\{3\}}$ 的类为 $C_z=\{(x,\ y,\ z)\mid x\in\Delta_1,\quad y\in\Delta_2\}$，其中 $z\in\Delta_3$；$\mathcal{C}_{\{3\}}$-类对应于图 2e 中的矩形单元；
- $\mathcal{C}_{\{1,3\}}$ 的类为 $C_{(x,\ z)}=\{(x,\ y,\ z)\mid y\in\Delta_2\}$，其中 $(x,\ z)\in\Delta_{\{1,3\}}=\Delta_1\times\Delta_3$；$\mathcal{C}_{\{1,3\}}$-类 $C_{(x,\ z)}$ 表示图 2e 中矩形单元 C_z 的一列。
- $\mathcal{C}_{\{2,3\}}$ 具有类 $C_{(y,z)}=\{(x,y,z)\mid x\in\Delta_1\}$ 对应于 $(y,z)\in\Delta_{\{2,3\}}=\Delta_2\times\Delta_3$；其中，$\mathcal{C}_{\{2,3\}}$-类 $C_{(y,z)}$ 表示图 2e 中的矩形单元 C_z 中的一行。

因此，对于点 $\boldsymbol{\delta} = (x, y, z) \in \mathcal{P}$，第三个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的矩形单元$C_z \in \mathcal{C}_{\{3\}}$，第二个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的 C_z 内的行 $C_{(y,z)} \in \mathcal{C}_{\{2,3\}}$，第一个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的 C_z 内的列 $C_{(x,z)}$。

注意 $\mathcal{C}^* = \{\mathcal{C}_{A[i]} \mid i \in I\}$ 其中 $A[1] = \{1,3\} = I$、$A[2] = \{2,3\}$、$A[3] = \{3\}$。

例 5.3。取 $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 其中 $B_2 = B_{2,\,1} \cup B_{2,\,2}$ 和

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{(x,0,0) \mid 0 \le x \le p\},\\ B_{2,1} &:= \{(p+1,\, y,\, 0) \mid 1 \le y \le p\},\\ B_{2,2} &:= \{(x,\, x-1,\, 0) \mid p+2 \le x \le e_2\}, \text{ and}\\ B_3 &:= \{(0,0,z) \mid 1 \le z \le e_3 - 1\}. \end{aligned}$$

于是 $|B_1| = p+1$，$|B_2| = p + (p^2 - 2p) = e_2 - 1$，以及 $|B_3| = e_3 - 1$，因此

$$|B| = (p+1) + (e_2 - 1) + (e_3 - 1) = p^4 + 1 = q + 1.$$

构成块 B 的点如图 6 所示，子集 B_1，$B_{2,\,1}$，$B_{2,\,2}$，以及 B_3。请注意，类按从左到右、从上到下的顺序编号。

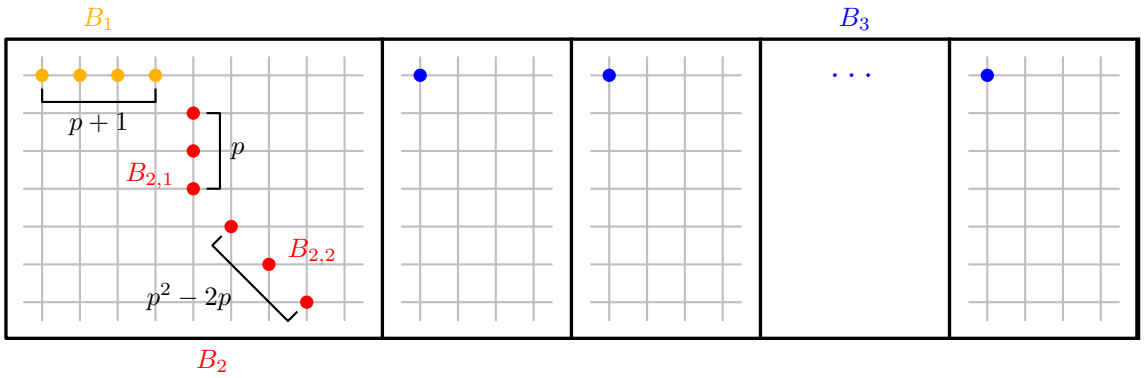


FIGURE 6. 例 5.3 中 B 点的分布

为了验证结构 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, B^G)$ 是一个 2-设计，我们将采用与例5.1类似的方法：需要验证对于 I 的任意非空真祖先子集 J，条件 (37) 均成立。如上所述，I 的非空真祖先子集 J 为 $\{1,3\}$、$\{2,3\}$ 和 $\{3\}$。表6列出了计算每个此类 J 的 $(J)\mu_B$ 所需的相关信息。

例如，对于 $J = \{3\}$，类 $C_0 \in \mathcal{C}_{\{3\}}$ 包含 $B_1 \cup B_2$中的所有点，因此 $(\mathbf{0})\chi_B = |B_1 \cup B_2| = (p+1) + (p^2 - p) = p^2 + 1$，而其余每个 $p^4 - p^2$ 类$\mathcal{C}_{\{3\}}$ 在 B_3中包含一个点，因此 $(\boldsymbol{\nu})\chi_B = 1$ 对每个 $\boldsymbol{\nu} \in \{1, \ldots, p^4 - p^2\}$都成立。这给出了表6中列 $\{3\}$ 下前两行的数值，因此

$$(\{3\})\mu_B = 1 \cdot \big((p+1) + (p^2 - p)\big)^2 + (p^4 - p^2) \cdot 1^2 = 2p^4 + p^2 + 1$$

J 使得 $\boldsymbol{\nu} \in \Delta_J$	$\{1,3\}$		$\{2,3\}$		$\{3\}$	
	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$
	$p^4 - p + 1$	1	1	$p+1$	1	p^2+1
	1	p	$p^4 - p$	1	$p^4 - p^2$	1
$(J)\mu_B$	$p^4 + p^2 - p + 1$		$p^4 + p^2 + p + 1$		$2p^4 + p^2 + 1$	

TABLE 6. $J\mu_B$的取值，适用于 $J = \{1,3\}, \{2,3\}, \{3\}$

注意，(37) 的右侧为 $|O_J|/v$ ，并且该值与边界 ∂J 一起，针对每个 J，列于表7中。

J	∂J	O_J中的点对	$\lvert O_J\rvert/v$
$\{1,3\}$	$\{2\}$	同一 $\mathcal{C}_3$类、同一列、不同行	$e_2-1=p^2-p$
$\{2,3\}$	$\{1\}$	同一 $\mathcal{C}_3$类、同行、不同列	$e_1-1=p^2+p$
$\{3\}$	$\{1,2\}$	同一 $\mathcal{C}_3$类、不同行且不同列	$(e_1-1)\quad(e_2-1)\quad=p^4-p^2$

TABLE 7. $G=(G_1\times G_2)\wr G_3$ 在不同点的有序对上的轨道

对于每个非空真祖先子集 J，我们计算 (37) 的左边（回顾 (26)），并将结果记录在表 8 中。可以看到，在每种情况下，(37) 的左边都等于表7最后一列所列的右边。由此，根据定理 1.2，完成了 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\ B^G)$ 是一个 2-设计的证明。

J	∂J	$\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{\lvert S\rvert}(J\cup S)\mu_B$	(37) 的左边
$\{1,3\}$	$\{2\}$	$(\{1,3\})\mu_B-(I)\mu_B$	p^2-p
$\{2,3\}$	$\{1\}$	$(\{2,3\})\mu_B-(I)\mu_B$	p^2+p
$\{3\}$	$\{1,2\}$	$(\{3\})\mu_B-(\{1,3\})\mu_B-(\{2,3\})\mu_B+(I)\mu_B$	p^4-p^2

TABLE 8. $\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{\lvert S\rvert}J\cup S(\mu_B)$的取值

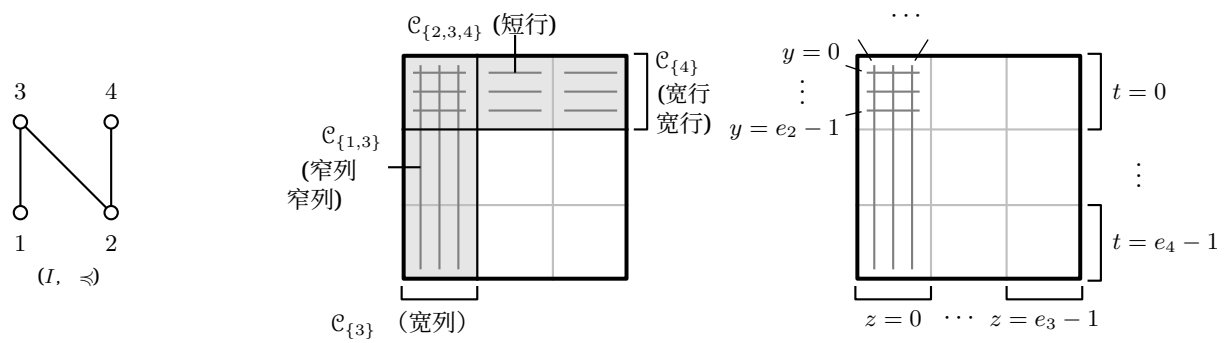
5.2. N-偏序集。 本节中，我们为一个偏序集$\mathcal{I}=(I,\ \preccurlyeq)$给出一个无限族的例子，其中 $|I|=4$, 具体而言，就是图 3 中的 *N*- 偏序集 。因此，点集 $\mathcal{P}$ 具有一个与 $\mathcal{I}$ 相对应的分划偏序集，其节点为 1、2、3 和 4，如图 3 所示，我们在下方再次展示该图。我们有 $\mathcal{P}=\prod_{i=1}^4\Delta_i$ ，其中每个 $|\Delta_i|=e_i\geq 2$，并且我们按如下方式取 e_i ，其中整数 $p\geq 2$:

$$e_1=p^2+p+1,\ e_2=p^2-p+1,\ e_3=p^4-p^2+1,\ e_4=p^8-p^4+1.$$

对于 $\mathcal{I}$-非本原群，我们取与 $\mathcal{I}$ 对应的广义缠绕积 $G=\prod_{(I,\ \preccurlyeq)}(G_i,\ \Delta_i)$，其中每个 G_i 都是 S_{e_i} 的一个 2-传递子群。注意，无法像处理具有 $|I|=3$ 的示例那样，仅用直积和缠绕积来描述 G ，因为定理 2.4 和定理 2.5 的假设对 $\mathcal{I}$ 均不成立。

我们取 $\Delta_i=\{0,1,2,\ldots,e_i-1\}\subset\mathbb{Z}$，并注意到 $e_2<e_1<e_3<e_4$，且

$$v=e_1e_2e_3e_4=q^2+q+1,\quad \text{where } q=p^8. \tag{38}$$



与前面的例子一样，每个块的大小为 $k=q+1$，因此

$$\frac{k(k-1)}{v-1}=\frac{(q+1)q}{q^2+q}=1$$

对于每个祖先子集 J，条件 (27) 就变为条件 (37)。

I的非空真祖先子集为 $\{3\}$、$\{4\}$、$\{3,4\}$、$\{1,3\}$、$\{1,3,4\}$ 和 $\{2,3,4\}$。这些子集与 $\varnothing$ 和 I 一起，对应于$(\mathcal{C},\preccurlyeq)$中的划分。另一方面，

$$A[1]=\{1,3\},\ A[2]=\{2,3,4\},\ A[3]=\{3\},\ A[4]=\{4\},$$

因此，分划偏序集 $\mathcal{C}^*=\{\mathcal{C}_{A[i]}\mid i\in I\}$。与其余祖先集 $\{3,4\}$ 和 $\{1,3,4\}$ 对应的划分中的类，是 $\mathcal{C}^*$中两个不同划分的类的交集，正如第2.2节所述。现在我们描述$(\mathcal{C},\preccurlyeq)$中各个划分的类，并注意到这些划分中的每一个都在 G作用下保持不变。

- $\mathcal{C}_{\{3\}}$的类为 $C_z=\{(x,\ y,\ z,\ t)\mid x\in\Delta_1,\ \ y\in\Delta_2,\ \ t\in\Delta_4\}$，其中 $z\in\Delta_3$；$\mathcal{C}_{\{3\}}$-类对应于图 3 中的宽列。
- $\mathcal{C}_{\{4\}}$具有类 $C_t=\{(x,\ y,\ z,\ t)\mid x\in\Delta_1,\ \ y\in\Delta_2,\ \ z\in\Delta_3\}$，对于 $t\in\Delta_4$；$\mathcal{C}_{\{4\}}$-类对应于图 3 中的宽行。
- $\mathcal{C}_{\{3,4\}}$具有类 $C_{(z,\ t)}=\{(x,\ y,\ z,\ t)\mid x\in\Delta_1,\ \ y\in\Delta_2\}$，对于 $(z,\ t)\in\Delta_3\times\Delta_4$；$\mathcal{C}_{\{3,4\}}$-类对应于图 3 中宽行与宽列的交集单元格。
- $\mathcal{C}_{\{1,3\}}$具有类 $C_{(x,\ z)}=\{(x,\ y,\ z,\ t)\mid y\in\Delta_2,\ \ t\in\Delta_4\}$对于 $(x,\ z)\in\Delta_1\times\Delta_3$；$\mathcal{C}_{\{1,3\}}$-类 $C_{(x,\ z)}$表示图 3 中宽列 C_z 内的窄列。
- $\mathcal{C}_{\{1,3,4\}}$具有类 $C_{(x,\ z,\ t)}=\{(x,\ y,\ z,\ t)\mid y\in\Delta_2\}$对于 $(x,\ z,\ t)\in\Delta_1\times\Delta_3\times\Delta_4$；图 3 中的$\mathcal{C}_{\{1,3,4\}}$-类对应于 $\mathcal{C}_{\{1,3\}}$-类（窄列）与 $\mathcal{C}_{\{4\}}$-类（宽行）的交集。
- $\mathcal{C}_{\{2,3,4\}}$具有类 $C_{(y,\ z,\ t)}=\{(x,\ y,\ z,\ t)\mid x\in\Delta_1\}$对于 $(y,\ z,\ t)\in\Delta_2\times\Delta_3\times\Delta_4$；图 3 中的$\mathcal{C}_{\{2,3,4\}}$-类 $C_{(y,\ z,\ t)}$对应于类 $C_{(z,\ t)}\in\mathcal{C}_{\{3,4\}}$中的一条短行。

因此，对于一个点 $\boldsymbol{\delta}=(x,\ y,\ z,\ t)\in\mathcal{P}$，第四个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的宽行 $C_t\in\mathcal{C}_{\{4\}}$，第三个坐标表示包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的宽列 $C_z\in\mathcal{C}_{\{3\}}$，第一个坐标表示宽列 C_z 内包含$\boldsymbol{\delta}$的窄列 $C_{(x,z)}\in\mathcal{C}_{\{1,3\}}$，第二个坐标表示单元格 $C_{(z,t)}$ 内包含 $\boldsymbol{\delta}$ 的短行 $C_{(y,z,t)}$。现在我们参照图 7 定义基块 B。

例 5.4。取 $B=\bigcup_{i=1}^{4}B_i$，其中 $B_2=B_{2,\ 1}\cup B_{2,\ 2}$，$B_4=B_{4,\ 1}\cup B_{4,\ 2}$ 并且

$$\begin{aligned}
B_1 &:= \{(x,0,0,0)\mid 0\le x\le p\},\\
B_{2,1} &:= \{(p+1,y,0,0)\mid 1\le y\le p\},\\
B_{2,2} &:= \{(x,x-1,0,0)\mid p+2\le x\le e_2\},\\
B_3 &:= \{(0,0,z,0)\mid 1\le z\le e_3-1\},\\
B_{4,1} &:= \{(x,0,z,(z-1)(p^4+p^2)+t)\mid 0\le x\le 2p-1,\ 1\le z\le e_3-1,\\
&\qquad xp^2+1\le t\le (x+1)p^2\},\ \text{and}\\
B_{4,2} &:= \{(x,0,z,(z-1)(p^4+p^2)+t)\mid 2p\le x\le p^2+p-1,\ 1\le z\le e_3-1,\\
&\qquad 2p^3+(x-2p)(p^2-p)+1\le t\le 2p^3+(x-2p+1)(p^2-p)\}.
\end{aligned}$$

构成块 B 的点如图 7 所示，同时还展示了子集 B_1，$B_{2,\ 1}$，$B_{2,\ 2}$，B_3 和 B_4。注意，类按从左到右、从上到下的顺序编号。观察可知，B_1，B_2，B_3 都包含在 $C_0\in\mathcal{C}_{\{4\}}$（图 3 顶部的宽行）中，并且与例 5.3 中的子集相同。图 7 右侧的“放大图”表示 B_4 与每个宽列 C_z 的交集，下面我们将对此作更详细的说明。

为了理解 B_4，我们考虑 $z\in\Delta_3\setminus\{0\}$ 的一个固定值，也就是说，考虑一个固定的宽列C_z。第三个坐标为 z 的 B_4 中各点的第四个坐标均为 $(z-1)(p^4+p^2)+t$ 的形式；对于 t 从 1 到 $2p^3$ 的每个值，在 $B_{4,\ 1}$ 中都有一个点；并且有一个

点，在 $B_{4,\ 2}$ 中，对于 t 从 $2p^3+1$ 到 p^4+p^2 的每个值都有一个点。请回想，不同的第四个坐标对应不同的宽行。所有这些点的第二个坐标均为 0，这表明这些点都位于其所在单元格的顶部短行；而这些点的第一个坐标则表明它们属于 C_z 中的哪一窄列。

因此，从上到下，从宽行 $C_{(z-1)(p^4+p^2)+1}$ 开始，在前 p^2 个宽行的窄列 $C_{(0,z)}$ 中各有一个点；接着在随后 p^2 个宽行的窄列 $C_{(1,z)}$ 中各有一个点，依此类推，直到 p^2 个宽行的窄列 $C_{(2p-1,\,z)}$ 中各有一个点，并在第 $2p^3$ 个宽行结束。接下来，对于窄列 $C_{(2p,z)}$，在后续 p^2-p 个宽行中各取一个点；如此继续，直到最后一列 $C_{(p^2+p-1,\,z)}$，在后续 p^2-p 个宽行中各有一个点，并在第 (p^4+p^2) 个宽行结束。包含 B_4 中某个点的最后一个宽行对应于 $z=e_3-1=p^4-p^2$，且为 $C_u\in\mathcal{C}_{\{4\}}$，其中 $u=(z-1)(p^4+p^2)+p^4+p^2=(p^4-p^2-1)(p^4+p^2)+p^4+p^2=p^8-p^4=e_4-1$，也就是说，$C_u$ 实际上就是最后一个宽行。

现在 $|B_1|=p+1$，$|B_2|=p+(e_2-(p+1))=e_2-1=p^2-p$，$|B_3|=e_3-1=p^4-p^2$，以及

$$\begin{aligned}|B_4| &= (e_3-1)\left[2p\cdot p^2+(p^2-p)^2\right]\\ &= (p^4-p^2)(p^4+p^2)\\ &= p^8-p^4=e_4-1,\end{aligned}$$

使得

$$|B|=(p+1)+(p^2-p)+(p^4-p^2)+(p^8-p^4)=p^8+1=q+1.$$

为了检验关联结构 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},B^G)$ 是否为一个2-设计，我们采用与例5.1类似的方法：需要检验条件 (37) 对每个非空真祖先子集 $J$of I 均成立；这些子集回顾起来是 $\{3\}$，$\{4\}$，$\{3,4\}$，$\{1,3\}$，$\{1,3,4\}$ 和 $\{2,3,4\}$。根据式 (26)，表9列出了计算这些子集 J各自的 $(J)\mu_B$ 所需的相关信息。

J 使得	$\{1,3,4\}$		$\{2,3,4\}$		$\{1,3\}$	
$\boldsymbol{\nu}\in\Delta_J$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$
	1	p	1	$p+1$	1	p
	p^8-p+1	1	p^8-p	1	p^2-p+1	1
					p^4-p^2	p^2+1
					$(2p-1)(p^4-p^2)$	p^2
					$(p^2-p)(p^4-p^2)$	p^2-p
$(J)\mu_B$	p^8+p^2-p+1		p^8+p^2+p+1		$e_4(e_2+1)+p^4-1$	
J 使得	$\{3,4\}$		$\{3\}$		$\{4\}$	
$\boldsymbol{\nu}\in\Delta_J$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$	$\#C_{\boldsymbol{\nu}}$	$(\boldsymbol{\nu})\chi_B$
	1	p^2+1	1	p^2+1	1	p^4+1
	p^8-p^2	1	p^4-p^2	p^4+p^2+1	p^8-p^4	1
$(J)\mu_B$	$p^8+p^4+p^2+1$		$e_1e_2(e_4-1)+p^8+p^4+p^2+1$		$2p^8+p^4+1$	

TABLE 9. $(J)\mu_B$ 对于祖先的 J的值

我们详细讨论 $J=\{1,3\}$这一情形，这是最复杂的情形。回顾一下，$\mathcal{C}_{\{1,3\}}$类是宽列中的窄列。在宽列 C_0 中，我们有一个$\mathcal{C}_{\{1,3\}}$类 $C_{(p+1,\,0)}$，其中包含 p 个点，来自 B，构成集合$B_{2,\,1}$；此外还有 p^2-p+1个点，来自两两不同的 $\mathcal{C}_{\{1,3\}}$类 $C_{(x,0)}$，即 $p+1$ 来自满足 $0\le x\le p$ 的类中的点，构成 B_1；以及 p^2-2p 来自满足 $p+2\le x\le e_2$ 的类中的点，构成

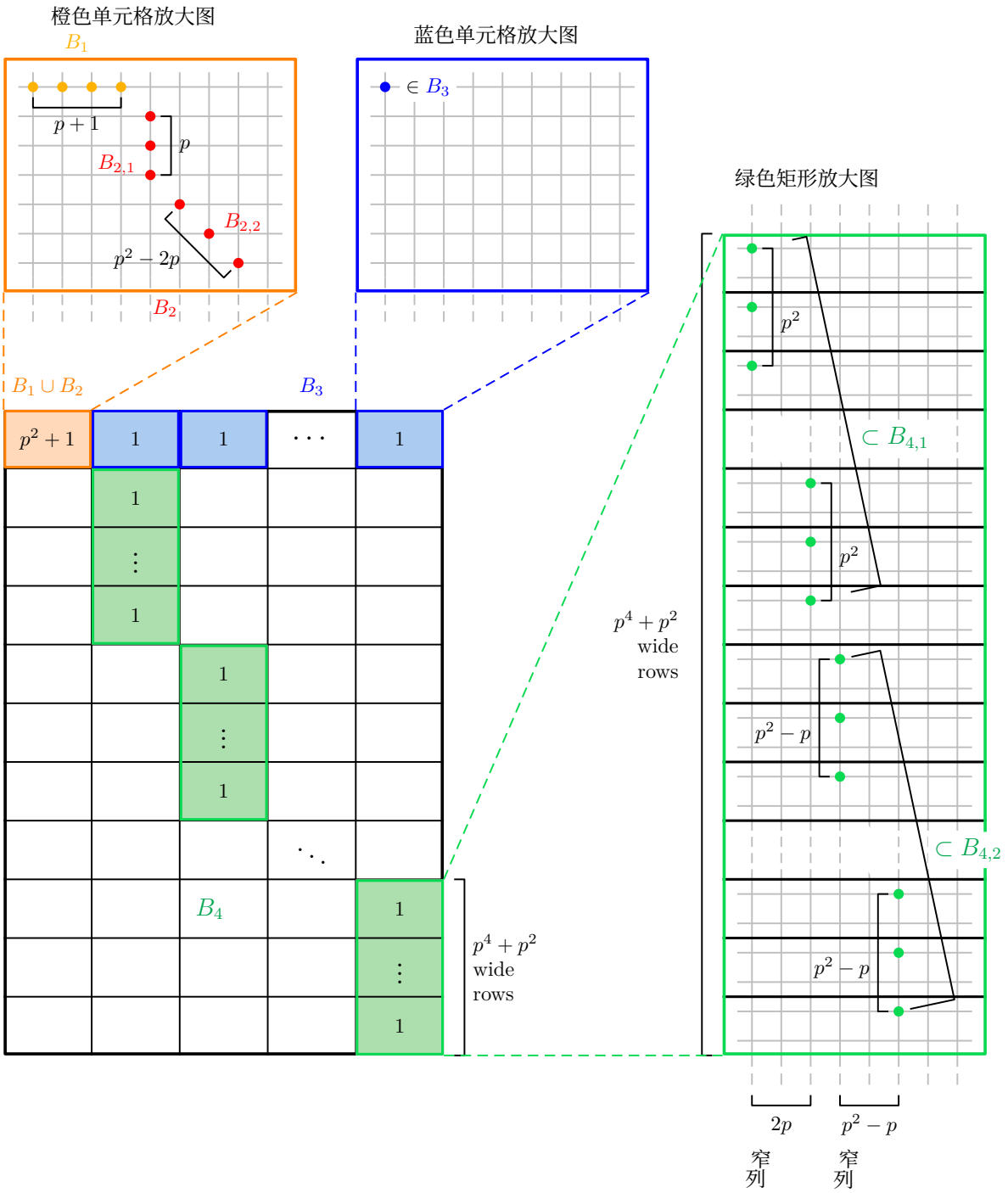


FIGURE 7. 例 5.4 的图

B_2,2。这解释了表9中情形 $J=\{1,3\}$ 的前两行。现在考虑任意一个满足 $z\neq 0$的宽列 C_z。（这样的宽列共有 $e_3-1=p^4-p^2$ 个。） C_z 中的窄列 $C_{(0,z)}$在 B_3 中包含一个点，在B_4中包含 p^2 个点，对应于表9中情形$J=\{1,3\}$ 的第三行。在满足 $x\neq 0$的 C_z 中的窄列 $C_{(x,z)}$ 中：当 $1\leq x\leq 2p-1$时，$C_{(x,z)}$ 包含 p^2 个来自B_4的点，1，对应于表9中情形 $J=\{1,3\}$ 的第四行。最后，当 $2p\leq x\leq p^2+p-1$时， $C_{(x,z)}$ 包含 p^2-p 个来自B_4的点，2，对应于表9中情形 $J=\{1,3\}$ 的第五行。为利用目前从表9获得的信息，根据（26）计算（$\{1,3\}$）μ_B，我们按如下方式进行（并得到表9中（$\{1,3\}$）μ_B 的表项）：

$$
\begin{aligned}
(\{1,3\})\mu_B &= 1\cdot p^2 + (p^2-p+1)\cdot 1^2 + (p^4-p^2)\big((p^2+1)^2 + (2p-1)(p^2)^2 + (p^2-p)(p^2-p)^2\big)\\
&= p^2 + e_2 + (p^4-p^2)\big(p^4+2p^2+1+2p^5-p^4+p^6-3p^5+3p^4-p^3\big)\\
&= p^2 + e_2 + (p^4-p^2)\big(p^6-p^5+3p^4-p^3+2p^2+1\big)\\
&= p^2 + e_2 + (p^4-p^2)\big((p^4+p^2)(p^2-p+2)+1\big)\\
&= p^2 + e_2 + (p^8-p^4)(p^2-p+2) + (p^4-p^2)\\
&= e_2 + (e_4-1)(e_2+1) + p^4\\
&= e_4(e_2+1) + p^4 - 1
\end{aligned}
$$

注意，(37) 的右侧为 $|O_J|/v$，对于每个非空祖先子集 J，该值与边界 ∂J 一并列于表10中。

J	∂J	$\lvert O_J\rvert/v$
$\{1,3,4\}$	$\{2\}$	$e_2 - 1 = p^2 - p$
$\{2,3,4\}$	$\{1\}$	$e_1 - 1 = p^2 + p$
$\{1,3\}$	$\{4\}$	$(e_4-1)e_2 = (p^8-p^4)(p^2-p+1)$
$\{3,4\}$	$\{1,2\}$	$(e_1-1)(e_2-1) = p^4-p^2$
$\{3\}$	$\{1,4\}$	$(e_1-1)(e_4-1)e_2 = (p^2+p)(p^8-p^4)(p^2-p+1)$
$\{4\}$	$\{3\}$	$(e_3-1)e_1e_2 = p^8-p^2$

TABLE 10. 在不同点的有序对上 G 的轨道大小

对于每个非空真祖先子集 J，我们计算（37）的左侧，并将结果记录在表11中。注意，这里用到了（I）$\mu_B = k = p^8+1$（见引理3.1）。可以看到，在每种情况下，（37）的左侧都等于右侧，其值列于表10的最后一列。注意，对于 $J=\{3,4\}$ 和 $J=\{3\}$，我们可以利用其他情形的结果来简化计算。因此，（37）对每个非空真祖先子集 J 都成立，故根据定理 1.2，$\mathcal{D} = (\mathcal{P},\ B^G)$ 是一个2-设计。

J	∂J	$\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{\lvert S\rvert}(J\cup S)\mu_B$	（37）的左侧
$\{1,3,4\}$	$\{2\}$	$(\{1,3,4\})\mu_B - (I)\mu_B$	p^2-p
$\{2,3,4\}$	$\{1\}$	$(\{2,3,4\})\mu_B - (I)\mu_B$	p^2+p
$\{1,3\}$	$\{4\}$	$(\{1,3\})\mu_B - (\{1,3,4\})\mu_B$	$(e_4-1)e_2$
$\{3,4\}$	$\{1,2\}$	$(\{3,4\})\mu_B - (\{1,3,4\})\mu_B - (\{2,3,4\})\mu_B + (I)\mu_B$	p^4-p^2
$\{3\}$	$\{1,2\}$	$(\{3\})\mu_B - (\{1,3\})\mu_B - (\{3,4\})\mu_B + (\{1,3,4\})\mu_B$	$(e_1-1)(e_4-1)e_2$
$\{4\}$	$\{3\}$	$(\{4\})\mu_B - (\{3,4\})\mu_B$	p^8-p^2

TABLE 11. $\sum_{S\subseteq\partial J}(-1)^{|S|}(J\cup S)\mu_B$的值

6. 声明

三位作者共同撰写并审阅了稿件正文，C.A. 制作了所有图。**利益冲突：**作者声明，与本文内容相关的竞争性利益均不存在。

References

[1]M. S. Aigner，《组合理论》，数学科学基础丛书，第234卷，施普林格，柏林—纽约，1979年。[2] S.H. Alavi, A. Daneshkhah, A. Devillers and C.E. Praeger，基于网格的区块传递二设计。《伦敦数学会通报》55 (2023)，592–610。https://doi.org/10.1112/blms.12744。[3] S.H. Alavi, C. Amarra, A. Daneshkhah, A. Devillers, and C.E. Praeger，高维网格不纯区块传递2-设计。《设计、密码学与密码分析》93 (2024)，4683—4719。https://doi.org/10.1007/s10623-025- 01700-1[4] C. Amarra, A. Devillers, and C.E. Praeger，具有非本原划分链的区块传递2-设计。《组合理论杂志A辑》205 (2024)，105866。https://doi.org/10.1016/j.jcta.2024.105866[5] C. Amarra, A. Devillers and C.E. Praeger，链不纯旗传递2-设计。《设计、密码学与密码分析》92 (2024)，2491–2510。https://doi.org/10.1007/s10623-024-01400-2[6] R. A. Bailey, Cheryl E. Praeger, C. A. Rowley, and T. P. Speed，置换群的广义花环积。《伦敦数学会会刊》(3) 47 (1983)，第1期，69–82。[7] A. Betten, G. Cresp, and C. E. Praeger，直线传递、点不纯线性空间：网格情形。《关联几何创新》8 (2009)，117–135。[8] R.E. Block，共线变换群的轨道。《数学杂志》96 (1967)，33–49。[9] S. Brai´c, J. Mandi´c, and T. Vu˘ci˘ci´c，具有自同构群 $S_n \, wr \, S_2$ 的旗传递区组设计。《离散数学》341 (2018)，2220–2230。[10] S. Brai´c, J. Mandi´c, A. ˘Suba˘si´c, T. Vojkovi´c and T. Vu˘ci˘ci´c，群 $S_n \times S_m$ 在旗传递区组设计构造中的应用。《数学学报》56 (76) (2021)，225–240。[11] P.J. Cameron and C.E. Praeger，区组传递 t-设计 I：点不纯设计。《离散数学》118 (1993)，33–43。[12] A. Delandtsheer and J. Doyen，大多数区组传递 t-设计都是点本原的。《几何与演绎》29 (1989)，307–310。[13] A. Devillers and C.E. Praeger，关于旗传递不纯2-设计。《组合设计杂志》29 (8) (2021)，552–574。[14] W. C. Holland，广义花环积的刻画。《代数杂志》13 (1969)，152–172。[15] M. Law, C. E. Praeger, S. Reichard，旗传递对称2-(96, 20, 4)设计。《组合理论杂志A辑》5 (2009)，1009–1022。[16] J. A. Nelder，具有正交区组结构的随机实验分析。《伦敦皇家学会会刊A辑》283 (1965)，147–178。[17] H. L. Silcock，广义花环积与群的正规子群格。《代数大学》7 (1977)，361–372。[18] T. N. Throckmorton，分类数据的结构，博士论文，爱荷华州立大学，1961年。[19] C. Wells，花环积构造的一些应用。《美国数学月刊》83 (1976)，317–338。[20] X. Zhan, S. Zhou and G. Chen，乘积型旗传递2-(v, 4, λ)设计。《组合设计杂志》26 (2018)，455–462。[21] Y. Zhao and S. Zhou，容许自同构群 $S_c \wr S_d$ 的区组传递 $2-(v, 5, \lambda)$设计。《图与组合》41 (2025)，文章编号21。

[a]Centre for the Mathematics of Symmetry and Computation, The University of Western Australia, 35 Stirling Highway, Crawley, Western Australia 6009, Australia电子邮箱：alice.devillers@uwa.edu.au, cheryl.praeger@uwa.edu.au

[b] Institute of Mathematics, University of the Philippines Diliman, C.P. Garcia Avenue,Quezon City 1101, Philippines电子邮箱：mcamarra@math.upd.edu.ph

*Corresponding author