arXiv:2512.16306v1 [math.AP] 18 Dec 2025

雅可比热核尖锐界及其迹与乘法常数估计的统一证明

ADAM NOWAK、PAWE-L PLEWA 和 TOMASZ Z. SZAREK

Abstract. 我们给出了雅可比热核尖锐界的统一且优化后的证明。这些界是在近年来的多篇论文中逐步得到的。我们特别着重于追踪并估计整个推理过程中出现的所有常数。由此，我们能够根据相关参数对雅可比热核界中的乘法常数进行定量控制。因此，这种类似的控制也适用于若干相互关联的热核。特别是，对于球面热核以及所有紧致秩一对称空间上的其他热核，我们都能根据相应的维数进行定量控制。

第二位作者获得了波兰科学基金会（START 057.2023）的资助。第三位作者获得了西蒙斯基金会项目（SFI-MPS-TSM-00013714）以及波兰国家科学中心项目 Sonata Bis 2022/46/E/ST1/00036 的资助。

2020 Mathematics Subject Classification: 主要分类号 35K08；次要分类号 42C05、58J35、58J65、60J65。

Key words and phrases: 雅可比热核、球面热核、紧致秩一对称空间热核、尖锐估计、雅可比扩散过程、球面布朗运动、紧致秩一对称空间布朗运动。

Contents

1. 引言 3
2. 技术预备知识 10
2.1. 一般记号 10
2.2. 与雅可比热核相关的事实与公式 10
2.3. 与密度 $\Pi_\alpha(u)$ 相关的估计 13
2.4. 与函数 $F(u, v)$ 相关的估计 15
2.5. 各类积分的估计 16
2.6. 与伽马函数相关的事实与估计 20
2.7. 与贝塞尔函数相关的估计 K_ν 20
3. 奇数维球面的估计 22
3.1. $(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 的下界 23
3.2. $(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 的上界及 $t \lesssim 1/N$ 23
3.3. 当 $t \lesssim 1/N^2$ 时 $(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 的改进上界 32
3.4. $\vartheta_t(\varphi)$ 和 $-D\vartheta_t(\varphi)$ 的上界 36
3.5. $(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 的界的总结 37
4. 统一证明 39
4.1. 步骤 A 39
4.2. 步骤 B 40
4.3. 步骤 C 41
4.4. 步骤 D 42
4.5. 步骤 E 44
4.6. 步骤 F 46
4.7. 特殊情形下的改进 53
5. 大时间与中等时间的界 55
6. 应用：完全显式的锐热核界 62
6.1. 球面热核 62
6.2. 紧致秩一对称空间上的热核 64
6.3. 雅可比热核 69
6.4. 关于其他相关热核的评述 77
附录：常数与辅助函数列表 79
参考文献 80

1. Introduction

令 $\alpha,\ \beta > -1$。与参数 α 和 β 相关的雅可比热核由[1]给出

$$G_t^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-tn(n+\alpha+\beta+1)}\ \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y)}{h_n^{\alpha,\beta}}, \qquad x,y\in[-1,1],\quad t>0.$$

这里，$P^{\alpha,\ n\ \beta}$是经典的雅可比 多项式（参见 [38]），而 $h^{\alpha,\ n\ \beta}:= \|P^{\alpha,\ n\ \beta}\|^2_{L^2(d\varrho_{\alpha,\ \beta})}$是在 $[-1,1]$ 上关于 Jacobi正交测度的

$$\mathrm{d}\varrho_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,\mathrm{d}x.$$

归一化常数的显式形式为

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)},$$

其中，对于 $n=0$ 和 $\alpha+\beta=-1$，乘积 $(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)$ 解释为 1。注意，$h^{\alpha,\ 0\ \beta} = \varrho_{\alpha,\ \beta}([-1,1])$。

雅可比热核是分析、概率、物理学及其他领域中的一个重要对象。核 $G^{\alpha,\ t\ \beta}(x,\ y)$ 为基于 *Jacobi*拉普拉斯算子的热方程提供解

$$J^{\alpha,\beta} = -\big(1-x^2\big)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \big[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\big]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

从概率的角度来看，$G^{\alpha,\ t\ \beta}(x,\ y)$ 是*Jacobi*扩散过程的转移概率密度。该过程因其在物理学、神经科学、遗传学、环境科学、经济学等领域的随机建模应用而受到广泛关注；参见互联网。对雅可比热核行为的研究具有深刻的理论和实践动机。特别是，从某种意义上说，它支配着许多其他更基本且重要的热核。其中最突出的例子之一是球面热核。

对于 $\theta,\ \varphi\in[0,\pi]$ 和 $t>0$，定义

$$Z^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi) := \big[t+\theta\varphi\big]^{-\alpha-1/2}\big[t+(\pi-\theta)(\pi-\varphi)\big]^{-\beta-1/2}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(\theta-\varphi)^2}{4t}\right).$$

以下尖锐估计由 Nowak、Sj¨ogren 和 Szarek 在一系列论文中证明。

定理 1 ([27, 28, 29])。设 α、$\beta>-1$ 和 $T>0$ 为固定值。存在一个常数 $C=C(\alpha,\beta,T)>1$，使得

$$C^{-1}\cdot Z^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi) \le G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) \le C\cdot Z^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi)$$

对于 θ、$\varphi\in[0,\pi]$ 和 $0<t\le T$。

由上述结果可直接推出（例如参见 [25, 第 233] 页或下文第 5 节），可得尖锐的大时间估计

$$C^{-1}\le G_t^{\alpha,\beta}(x,y)\le C, \qquad x,y\in[-1,1],\quad t\ge T,$$

对于任意 $\alpha,\ \beta>-1$ 和 $T>0$，存在某个常数 $C=C(\alpha,\ \beta,\ T)>1$，它与 $x,\ y,\ t$无关。

上述估计的一个主要缺陷是，完全没有提供有关这些常数大小的信息。本文的主要目标是弥补这一空白，这对各种

[1]指数因子中出现的数值 $n(n+\alpha+\beta+1)$ 是 Jacobi拉普拉斯算子的特征值 .

应用至关重要。我们的次要目标是优化并统一现有的尖锐界证明，而这些证明分散在 [27, 28, 29] 中。

需要强调的是，定义雅可比热核的振荡级数无法显式求出。不过，已知在四种简单情形下 α, $\beta = \pm 1/2$ 该核可以用非振荡级数表示如下。[2] 令

$$\vartheta_t(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(- \frac{(z+2\pi n)^2}{4t}\Big), \qquad t>0,$$

为周期化高斯–魏尔斯特拉斯核。[3] 此外，记

$$\mathbb{G}_t^{\alpha,\beta}(\theta,\varphi) := 2^{\alpha+\beta+1} e^{-t(\frac{\alpha+\beta+1}{2})^2} \Big(\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)^{\alpha+1/2} \Big(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)^{\beta+1/2} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi);$$

这是与 Jacobi 函数展开相关联的热核，参见例如 [25, 第 2]节。于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_t^{-1/2,-1/2}(\theta,\varphi) &= \vartheta_t(\theta-\varphi)+\vartheta_t(\theta+\varphi),\\
\mathbb{G}_t^{1/2,1/2}(\theta,\varphi) &= \vartheta_t(\theta-\varphi)-\vartheta_t(\theta+\varphi),\\
\mathbb{G}_t^{-1/2,1/2}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{2}\Big[\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2}\Big)+\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\varphi}{2}\Big)-\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2}+\pi\Big)-\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\varphi}{2}+\pi\Big)\Big],\\
\mathbb{G}_t^{1/2,-1/2}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{2}\Big[\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2}\Big)-\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\varphi}{2}\Big)-\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi}{2}+\pi\Big)+\vartheta_{t/4}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\varphi}{2}+\pi\Big)\Big].
\end{aligned}$$

相应地，可以得到 $G^{\pm 1/2}{}_{,t}{}^{\pm 1/2}(\cos\theta,\cos\varphi)$ 的类似公式，在某些情形下需作极限解释。这些公式能够以直接但技术上较为复杂的方式描述其行为。不过，本文采用了不同的方法，着眼于一般的 α 和 β。

历史背景。 雅可比热核的特殊情形至少从 19 世纪起便已（至少是隐含地）出现在文献中，而如何描述其行为这一问题长期以来一直悬而未决。Karlin 和 McGregor[17] 于 1960 年证明了 $G^{\alpha}{}_{,t}{}^{\beta}(x,y)$ 的严格正性。稍早些时候，Bochner [2] 证明，当 $\alpha \geq -1/2$ 时，超球面热核 $G^{\alpha}{}_{,t}{}^{\alpha}(x,y)$ 非负。20 世纪 70 年代关于正性的一些后续结果见 Gasper [13] 和 Bochner [3]。

除了正性之外，直到最近，人们才开始有效地研究雅可比热核的行为。Coulhon、Kerkyacharian 和 Petrushev [7], 利用狄利克雷型理论及其他抽象工具，得到了 $G^{\alpha}{}_{,t}{}^{\beta}(x,y)$ 的定性尖锐界。独立地，Nowak 和 Sj¨ogren [25], 采用完全不同的分析方法，在限制条件 α, $\beta \geq -1/2$下证明了定性尖锐估计。

（真正）尖锐估计与定性尖锐估计的区别在于，后者的下界和上界中指数因子里的常数（即定理 1 中的$1/4$ ）彼此不同，也不同于最优常数。这个指数差距会吸收各种多项式因子，因此会显著影响界的精确度。

[2]论证基于区间上带纽曼/狄利克雷边界条件的经典热方程的简单初值问题。此外，$\mathbb{G}^{-1/2}{}_{,t}{}^{-1/2}(\theta,\varphi)$ 和 $\mathbb{G}^{1/2}{}_{,t}{}^{1/2}(\theta,\varphi)$ 的公式原则上是众所周知的 Jacobi 型恒等式，参见 [12, 第 1.8 节。4].[3]该函数 ϑ_t 本质上是 Jacobi theta 函数之一，它与椭圆函数和数论有着深刻联系。按照 Bateman 手稿计划 [1, 第 2 卷第 13 节的记法，19], 有 $\vartheta_t(z) = \frac{1}{2\pi}\theta_3\big(\frac{z}{2\pi}\big|\frac{it}{\pi}\big)$（相关恒等式参见例如 [12, 第 1.7 节。5]）。

关于 $G^{\alpha}{}_{,t}{}^{\beta}(x,y)$ 的尖锐估计（见定理 1），是在 [27, 28, 29] 中逐步推导出来的。更确切地说，[27]，得到了当 $\alpha=\beta=d/2-1$、$d\geq 1$ 时的结果，并涵盖了 $y=1$ 端点。随后，[28] 纳入了所有参数 $\alpha,\beta\geq -1/2$，并取消了对 y 的限制。最后，最近在 [29]中解决了最困难的情形，即 α 或 β 小于 $-1/2$。

本文结果概述。 我们为定理 1 中陈述的尖锐界给出了统一且优化后的证明。与已知推理相比，[27, 28, 29], 在统一证明中，我们避免了许多中间估计，这些估计处理的是热核的两个自变量分别位于 $[-1,1]$两端点这一最棘手的情形。此外，我们绕过了某些中间步骤的多次迭代，从而得到更优的乘法常数。

遵循本文的主要目标，我们在推理中明确给出所有相关常数，使得雅可比热核界中的乘法常数可以在整个证明过程中直接追溯，进而根据参数和时间阈值对其进行明确控制。为此，我们必须克服诸多概念和技术上的困难。

统一证明采用有意设计的分块结构，由步骤 A 至 F 组成，详见第 4 节。这些步骤构成相互独立的模块，可以分别进行分析，并且未来或可单独加以改进。整个证明综合了许多与 Jacobi 框架相关的事实、工具和结果，也涉及其他辅助技术结果。支撑本文所述分析的最关键工具，或许是 Dijksma 和 Koornwinder [11]提出的 Jacobi 多项式乘积公式。值得注意的是，推理中还涉及特殊函数理论和组合学的相关内容。

令 $\alpha,\ \beta>-1$。对于 $\theta,\ \varphi\in[0,\pi]$、$t>0$，以及常数 $\kappa>0$，定义

$$\Xi_{\kappa}^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi):=\big[\mathbb{D}_{\alpha}t\vee\kappa\theta\varphi\big]^{-\alpha-1/2}\big[\mathbb{D}_{\beta}t\vee\kappa(\pi-\theta)(\pi-\varphi)\big]^{-\beta-1/2}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(\theta-\varphi)^2}{4t}\right),$$

其中 $\mathbb{D}_{\alpha}=\Gamma(\alpha+3/2)^{1/(\alpha+1/2)}$，当 $\alpha=-1/2$ 时按极限理解（见第 2.5 节），而 $\vee$ 表示两个量中的最大值。常数 $\mathbb{D}_{\alpha}$ 大致线性依赖于 α，见注 2.12。固定 $\kappa>0$和 α后，量 $\Xi^{\alpha}{}_{,\kappa}{}^{\beta}(t;\,\theta,\varphi)$ 与 $Z^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi)$ 显式可比，且这种可比关系关于 $\theta,\varphi\in[0,\pi]$ 和 $t>0$一致成立。事实证明，$\Xi^{\alpha}{}_{,\kappa}{}^{\beta}(t;\theta,\varphi)$ 更适合我们的方法，用于描述雅可比热核的行为。特别是，相比于基于 $Z^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi)$ 的类似结果，它使我们能够给出更精确的估计。

现在陈述一个由统一证明得出的主要结果。参见第 4 节中的引理 F，以及第 6.3 节中的命题 6.2（连同式 (6.13)）和命题 6.3、6.4 和 6.5。

定理 2. 设 α、$\beta>-1$ 和 $T>0$ 为固定值。存在正常数 $C_{\alpha,\,\beta,\,T}$ 和 $c_{\alpha,\,\beta,\,T}$，使得

$$c_{\alpha,\beta,T}\cdot\Xi_{1/2}^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi)\leq G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi)\leq C_{\alpha,\beta,T}\cdot\Xi_{2/\pi^2}^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi)$$

对于 θ、$\varphi\in[0,\pi]$ 和 $0<t\leq T$。此外，在给定相应时间阈值的情况下，这些乘法常数满足以下界。

(i) 对于满足 $\alpha+\beta+1\in\mathbb{N}$ 的 α、$\beta\geq -1/2$，

$$c_{\alpha,\beta,T}\geq\frac{1}{11\cdot(18/5)^{\alpha+\beta+1}}\qquad for\quad T>0,$$

$$C_{\alpha,\beta,T}\leq\begin{cases}(11/3)\cdot(17/5)^{\alpha+\beta+1} & if\quad T=2/(\alpha+\beta+3/2)\\ 16\cdot(8/5)^{\alpha+\beta+1} & if\quad T=1/(\alpha+\beta+3/2)^2\end{cases}.$$

(ii) 对于满足 $\alpha+\beta+1/2\in\mathbb{N}$ 的 α、$\beta\geq -1/2$，

$$c_{\alpha,\beta,T}\geq \frac{1}{14\cdot 31^{\alpha+\beta+1}} \qquad \textit{if} \quad T=4/(\alpha+\beta+5/4),$$
$$C_{\alpha,\beta,T}\leq \begin{cases} 11\cdot 23^{\alpha+\beta+1} & \textit{if} \quad T=4/(\alpha+\beta+5/4) \\ 45\cdot 5^{\alpha+\beta+1} & \textit{if} \quad T=1/(\alpha+\beta+5/4)^2 \end{cases}.$$

(iii) 对于 α、$\beta\geq -1/2$，满足 $\alpha+\beta>-1/2$ 和 $2\alpha+2\beta+1\notin\mathbb{N}$,

$$c_{\alpha,\beta,T}\geq \frac{1}{318\cdot 31^{\alpha+\beta+1}} \qquad \textit{if} \quad T=4/(\alpha+\beta+7/4),$$
$$C_{\alpha,\beta,T}\leq \begin{cases} 28\cdot 23^{\alpha+\beta+1} & \textit{if} \quad T=4/(\alpha+\beta+7/4) \\ 124\cdot 5^{\alpha+\beta+1} & \textit{if} \quad T=1/(\alpha+\beta+7/4)^2 \end{cases}.$$

(iv) 对于 α、$\beta\geq -1/2$，满足 $-1<\alpha+\beta<-1/2$,

$$c_{\alpha,\beta,T}\geq \frac{1}{8\cdot 10^{6}} \qquad \textit{if} \quad T=16/11,$$
$$C_{\alpha,\beta,T}\leq \begin{cases} 20107 & \textit{if} \quad T=16/11 \\ 1189 & \textit{if} \quad T=16/121 \end{cases}.$$

定理 2 的 (i)–(iv) 项涵盖了所有参数 $\alpha,\beta\geq -1/2$。通过统一证明，可以对其余参数取值获得类似的估计。这需要更多工作，但只是冗长的技术性展开。由于某个参数小于 $-1/2$ 的情形对应用并非关键，我们将细节留给感兴趣的读者。

我们认为，定理 2 中乘法上界常数与下界常数的比值，其增长速度至少应随 α 和 β 指数增长。这是因为界的结构与核的实际行为之间存在某种不相容性。对于情形 $\alpha,\beta\geq -1/2$，比值的估计可见第 6.3 节中的命题 6.2、6.3、6.4 和 6.5。这些界随 α 和 β 指数增长。另一方面，我们本意是将损失控制在不超过指数级；事实上，与例如伽马函数所给出的数量级损失相比，得到这一结果需要付出相当多的努力。毫无疑问，选择描述核行为的表达式的结构和形式是个棘手问题，超出了本文的范围。

定理 2 本质上讨论短时间情形。但通过一种众所周知的直接方法，它也涵盖中等和较长时间的情形，见第 5 节。事实上，如果在某个 $t=t_0>0$，$G^{\alpha,\beta}_t(x,y)$ 有两个正常数作为下界和上界，且与 $x,y\in[-1,1]$ 无关，那么对所有 $t\geq t_0$，它都仍被相同的常数所界定。

另一方面，众所周知，参见例如 [25, 定理 A],

$$G^{\alpha,\beta}_t(x,y)\longrightarrow \frac{1}{h_0^{\alpha,\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}, \qquad t\to\infty,$$

且该收敛关于 x，$y\in[-1,1]$ 一致。因此，当 t 较大时，即使对核的尖锐估计也不尽如人意，因为它们既不能检测收敛，也无法量化收敛。因此，我们给出一个额外的结果，见定理 5.2，它通过适当的估计对收敛进行量化。在下述陈述中，$\wedge$ 表示两个量中的较小者。

定理 3。 设 $\alpha, \beta > -1$。则对于 $x, y \in [-1, 1]$ 和 $t \geq 2 \log 2$

$$\left| G_t^{\alpha,\beta}(x,y) - \frac{1}{h_0^{\alpha,\beta}} \right| \leq \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)\Gamma(\alpha\vee\beta+1)} e^{-(t-1)(\alpha+\beta+2)} \qquad when \quad \alpha\vee\beta \geq -1/2$$

and

$$\left| G_t^{\alpha,\beta}(x,y) - \frac{1}{h_0^{\alpha,\beta}} \right| \leq \frac{27\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}{5\cdot 2^{\alpha+\beta+2}\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)} e^{-(t-1)(\alpha+\beta+2)} \qquad when \quad \alpha\vee\beta < -1/2.$$

应用。 雅可比热核与许多受到关注且具有重要意义的其他热核密切相关。其中最重要的包括球面热核，以及更一般地，所有紧致秩一对称空间上的热核。此外，它还涵盖了与傅里叶–贝塞尔展开和傅里叶–迪尼展开相对应的热核，以及与多维球、单纯形、锥体、圆锥曲面和其他旋转体和旋转曲面相关的热核；更多详情请见第 6.4 节。

在这方面，我们关于雅可比热核的结果可以用来推导上述其他热核的类似结果。作为关键例子，我们为所有紧致秩一对称空间上的热核，即布朗运动[4] 转移概率密度，获得了带有显式乘性常数的尖锐界。下面陈述的结果聚焦于短时间，因为这才是问题的实质所在。随后，可以按照第 6 节中的讨论，以直接明了的方式导出完全显式且尖锐的中长时间界。

球面热核的尖锐全局估计直到最近才在 [27], 中得到，而即便对于维数为 2 的普通球面，这一结果也是新的。现在我们可以显著改进这一结果。令 S^d 为维数 $d \geq 2$的欧几里得单位球面，并配备标准的、未归一化的表面积测度。相应的热核仅通过其参数之间的球面测地距离（记作 ϕ）依赖于这些参数，因此可将其视为一维函数 $[0,\pi] \ni \phi \mapsto K_t^d(\phi)$。参见第 3 节开头及第 6.1 节。

我们首先区分普通二维球面的情形，见第 6.1 节中的 (6.3)，因为从现实应用的角度来看，这种情形似乎具有基础性。

定理 4。令 $0 < T \leq 2\pi^2$。则

$$\frac{2\pi^{-1/2}e^{-\pi/4}}{\sqrt{\frac{1}{2}t\vee(\pi-\phi)}}\,\frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right) \leq K_t^2(\phi) \leq \frac{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}e^{T/4}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{8}t\vee(\pi-\phi)}}\,\frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right)$$

对于 $\phi \in [0,\pi]$ 和 $0 < t \leq T$。

接下来，我们将给出高维球面上热核的显式尖锐界，参见第 6.1 节。

定理 5。 设 $d \geq 3$ 和 $\phi \in [0,\pi]$。则

$$K_t^d(\phi) \geq \frac{(11/10)\cdot(3/4)^{d-1}}{\left[\mathbb{D}_{d/2-1}t \,\vee\, \pi(\pi-\phi)/2\right]^{(d-1)/2}}\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right),$$

$$K_t^d(\phi) \leq \frac{(8/5)\cdot(24/5)^{d-1}}{\left[\mathbb{D}_{d/2-1}t \,\vee\, 2(\pi-\phi)/\pi\right]^{(d-1)/2}}\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right)$$

[4]我们所考虑的热核对应于经过时间缩放的布朗运动 B_{2t}。

对于 $0 < t \le 2/(d-1/2)$，其中 $\mathbb{D}_{d/2-1} = \Gamma(d/2+1/2)^{2/(d-1)}$。此外，

$$K_t^d(\phi) \le \frac{7 \cdot (9/4)^{d-1}}{\left[\mathbb{D}_{d/2-1} t \vee 2(\pi-\phi)/\pi\right]^{(d-1)/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right)$$

对于 $0 < t \le 1/(d-1/2)^2$。

简单的缩放论证可得出适用于任意半径球面的类似结果。在上述陈述中，我们略去了一维球面，即环面，因为这种情形已是经典结果；参见第 6.1 节。

设 $\mathbb{M}$ 为一个紧致秩一对称空间。这类空间已得到完整分类，包括欧几里得球面、实数、复数和四元数上的射影空间，以及八元数上的射影平面；参见第6.2节。每个 $\mathbb{M}$ 都是一个黎曼流形。因此，我们考虑赋有黎曼测地距离和黎曼体积测度的 $\mathbb{M}$。为简单起见，假设 $\mathbb{M}$ 的直径为 π；通过简单的缩放，这并不影响一般性。与 $\mathbb{M}$对应的热核仅通过其参数间的测地距离（记作 ϕ）而依赖于这些参数，因此可将其视为一维函数 $[0,\pi] \ni \phi \mapsto K_t^{\mathbb{M}}(\phi)$。参见第6.2节。最近，$K_t^{\mathbb{M}}(\phi)$的尖锐估计（其中乘法常数未明确给出）已在 [28]中建立。

以下陈述中，排除了可能的最低维数，因为在这些情况下，相关空间可与某些维数的球面等同。定理6–9中的结果见第6.2节。

定理6. 令 $\mathbb{M}$ 为维数 $d \ge 2$、直径为 π的实射影空间。令 $\phi \in [0,\pi]$。

(i) 假设 d 为奇数。那么

$$K_t^{\mathbb{M}}(\phi) \le \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{17}{5}\right)^{(d-1)/2} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right), \qquad 0 < t \le \frac{4}{d},$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(\phi) \le 7 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(d-1)/2} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right), \qquad 0 < t \le \frac{4}{d^2}.$$

此外，对于 $d = 3$ 以及任意 $0 < T \le 2\pi^2$

$$K_t^{\mathbb{M}}(\phi) \le \pi e^{T/4} \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right), \qquad 0 < t \le T.$$

(ii) 假设 d 为偶数。若 $d \ge 4$，则

$$K_t^{\mathbb{M}}(\phi) \le \frac{16}{5} \cdot 23^{(d-1)/2} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right), \qquad 0 < t \le \frac{8}{d-1/2},$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(\phi) \le 14 \cdot 5^{(d-1)/2} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right), \qquad 0 < t \le \frac{4}{(d-1/2)^2}.$$

若 $d = 2$，则

$$K_t^{\mathbb{M}}(\phi) \le 4\pi e^{T/16} \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right), \qquad 0 < t \le T,$$

对任意 $0 < T \le 8\pi^2$。

我们指出，在定理6的假设下，下界

$$K_t^{\mathbb{M}}(\phi) \ge \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4t}\right), \qquad t > 0,$$

由一般理论成立，详情请参见第6.2节。

定理7. 设 $\mathbb{M}$ 为实维数为 $d \geq 4$ 、直径为 π的复射影空间。设$\phi \in [0, \pi]$。则

$$
\begin{aligned}
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\geq \frac{3/5}{\sqrt{\pi t/4 \vee \pi(\pi-\phi)/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad t > 0, \\
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\leq \frac{(16/5)\cdot(17/5)^{d/2}}{\sqrt{\pi t/4 \vee 2(\pi-\phi)/\pi}} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad 0 < t \leq \frac{4}{d+1}, \\
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\leq \frac{14\cdot(\pi/2)^{d/2}}{\sqrt{\pi t/4 \vee 2(\pi-\phi)/\pi}} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad 0 < t \leq \frac{4}{(d+1)^2}.
\end{aligned}
$$

定理8. 设 $\mathbb{M}$ 为实维数为 $d \geq 8$ 、直径为 π的四元数射影空间。设 $\phi \in [0, \pi]$。则

$$
\begin{aligned}
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\geq \frac{1/2}{\big[\mathbb{D}_1 t \vee \pi(\pi-\phi)/2\big]^{3/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad t > 0, \\
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\leq \frac{(23/5)\cdot(17/5)^{d/2+1}}{\big[\mathbb{D}_1 t \vee 2(\pi-\phi)/\pi\big]^{3/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad 0 < t \leq \frac{4}{d+3}, \\
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\leq \frac{20\cdot(\pi/2)^{d/2+1}}{\big[\mathbb{D}_1 t \vee 2(\pi-\phi)/\pi\big]^{3/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad 0 < t \leq \frac{4}{(d+3)^2},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{D}_1 = (3\sqrt{\pi}/4)^{2/3}$。

回顾一下，八元数上的凯莱射影平面实维数为16 .

定理 9. 设 $\mathbb{M}$ 为直径为 π 的凯莱射影平面。设 $\phi \in [0, \pi]$。则

$$
\begin{aligned}
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\geq \frac{1/4}{\big[\mathbb{D}_3 t \vee \pi(\pi-\phi)/2\big]^{7/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{8}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad t > 0, \\
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\leq \frac{19\cdot(17/5)^{11}}{\big[\mathbb{D}_3 t \vee 2(\pi-\phi)/\pi\big]^{7/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{8}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad 0 < t \leq \frac{4}{23}, \\
K_t^{\mathbb{M}}(\phi) &\leq \frac{80\cdot(\pi/2)^{11}}{\big[\mathbb{D}_3 t \vee 2(\pi-\phi)/\pi\big]^{7/2}} \frac{1}{(4\pi t)^{8}} \exp\Big(-\frac{\phi^2}{4t}\Big), \qquad 0 < t \leq \frac{4}{529},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{D}_3 = (105\sqrt{\pi}/16)^{2/7}$。

通过统一证明以及与导出定理4–9的论证平行的推理（见第6.1节和第6.2节），还可以证明：对于所有紧致秩一对称空间上的热核，将其视为测地距离的函数时，其（负）导数具有带显式乘性常数的尖锐界。这基于引理 2.1 中的求导法则。此前， [27, Cor. 2] 和 [28, Cor.4.2] 已给出了乘性常数未明确的此类界。

我们注意到，除去平凡情形，在文献中，带有乘法常数显式数值的尖锐热核估计似乎极为罕见。事实上，我们想不出任何合理的具体例子。

本文结构。 第 2 节介绍技术预备知识。首先概述本文使用的一般记号，随后汇集与 Jacobi 设定相关的各种事实、公式和结果，以及其他工具和辅助结果。第 3 节给出与奇数维球面有关的估计，这些估计构成雅可比热核界统一证明的基础。第 4 节阐述统一证明的核心，并将其划分为步骤 A–F，分别由引理 A–F 总结。本节还在引理 G 和 H 中给出若干改进，适用于应用中出现的某些特殊情形。第 5 节讨论中、大时间估计。最后，在第 6 节中，我们运用前述结果，求出雅可比热核界以及紧致秩一对称空间上热核估计中的显式乘性常数。此外，还对其他相关热核作了评论。

全文所用常数及部分辅助函数的列表见附录。

2. Technical preliminaries

我们将使用 [25, 26, 27, 28, 29] 中的各种工具，并对其中一些加以改进，使其给出的乘法常数明确。我们还需要新的工具和辅助结果。所有这些内容均汇集于本节。

2.1. 一般记号。

自然数集 $\{0,1,2,\dots\}$ 记作 $\mathbb{N}$。我们用 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示对两个量取最大值和最小值的运算。$\vee$ 和 $\wedge$ 的运算优先级始终低于乘法/除法，但高于加法/减法。

对于非负量 X、Y 以及正量 c、C

$$X \simeq \left\{ \begin{matrix} C \\ c \end{matrix} \right\} Y \qquad \equiv \qquad cY \le X \le CY.$$

下界中的乘法常数始终用小写字母表示，上界中的乘法常数则用大写字母表示。与任何参数无关的正数值常数用哥特字体字母表示，但 π、e 和 γ 等经典常数除外。数值表达式和常数的近似值（少数情况除外）均保留小数点后六位，并四舍五入到最接近的此类有理数。

在雅可比热核及相关对象的记号中，若同时出现参数 α、β，我们将“α、α”（两个参数相等时的 Jacobi-超球情形）简写为“α”，例如 $G^{\lambda,\,t}{}^{\lambda}(x,\ y) \equiv G_t^{\lambda}(x,\ y)$、$h^{\lambda,\,n}{}^{\lambda} \equiv h_n^{\lambda}$ 等。

2.2. 与雅可比热核相关的事实与公式。

令 $\alpha,\beta > -1$。核 $G^{\alpha,\,t}{}^{\beta}(x,y)$ 是关于 (t,x,y) 的严格正光滑函数 $\in (0,\infty) \times [-1,1]^2$。对于每个固定的 $y \in [-1,1]$，它关于变量 (t,x) 满足基于 Jacobi算子 $J^{\alpha,\beta}$ 的热方程，

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + J_x^{\alpha,\beta}\Big) G_t^{\alpha,\beta}(x,y) = 0, \qquad x \in [-1,1], \quad t > 0. \tag{2.1}$$

此外，我们有以下结论。

引理 2.1 ([28, 引理 3。3])。设 $\alpha,\ \beta > -1$。则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_t^{\alpha,\beta}(x,1) = 2(\alpha+1) e^{-t(\alpha+\beta+2)} G_t^{\alpha+1,\beta+1}(x,1), \qquad x \in [-1,1], \quad t > 0.$$

特别地，函数 $x \mapsto G^{\alpha,\ \beta}_{\ t}(x,\ 1)$ 在 $[-1,1]$ 上严格递增。

按照 [29, 第 4], 节，对于 $-3/2 < \lambda \le -1$，我们考虑一个辅助函数

$$H_t^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+2)} + \frac{1}{2^{2\lambda+1}\Gamma(\lambda+2)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t2n(2n+2\lambda+1)} \frac{(4n+2\lambda+1)\Gamma(2n+2\lambda+1)}{\Gamma(2n+\lambda+1)} P_{2n}^\lambda(x),$$

它对 $x \in [-1,1]$ 和 $t > 0$ 定义良好。对于 $-3/2 < \lambda \le -1$，该函数可视为雅可比—超球面核 $G_t^\lambda(x,1)$ 在 x 中偶部的（乘以一个常数后的）延拓。注意， $H_t^\lambda(x)$ 是关于 $(t,x) \in (0,\infty) \times [-1,1]$ 的光滑函数，它满足基于 Jacobi-超球算子 J^λ 的热方程，

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + J_x^\lambda\Big) H_t^\lambda(x) = 0, \qquad x \in [-1,1], \quad t > 0. \tag{2.2}$$

此外，我们有以下结论。

引理 2.2 ([29, 引理 4。2])。设 $-3/2 < \lambda \le -1$。则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_t^\lambda(x) = 2e^{-t(2\lambda+2)} \Big[G_t^{\lambda+1}(x,1)\Big]_{\mathrm{odd}}, \qquad x \in [-1,1], \quad t > 0,$$

其中，下标 *'odd'* 表示 x 中函数的奇部。类似地，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} H_t^\lambda(x) = 4(\lambda+2)e^{-t(4\lambda+6)} \Big[G_t^{\lambda+2}(x,1)\Big]_{\mathrm{even}}, \qquad x \in [-1,1], \quad t > 0,$$

其中，下标 *'even'* 表示 x 中函数的偶部。

对于 $-1 < \alpha \ne -1/2$，记

$$\Pi_\alpha(u) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^u \big(1-w^2\big)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}w.$$

注意， Π_α 是关于 $-1 < u < 1$ 的奇函数；当 $\alpha > -1/2$ 时递增，当 $\alpha < -1/2$ 时递减。对于 $\alpha > -1/2$，测度 $\mathrm{d}\Pi_\alpha$ 是区间 $[-1,1]$ 上的概率测度。$\mathrm{d}\Pi_\alpha$ 在 $\alpha \searrow -1/2$ 时的弱极限为

$$\mathrm{d}\Pi_{-1/2} := \frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2},$$

其中， $\delta_{\pm1}$ 是位于 ±1 处的单位点质量。对于 $-1 < \alpha < -1/2$，分布导数 $\mathrm{d}\Pi_\alpha$ 是 $(-1,1)$ 上的局部测度，其密度为负、偶且在 $(-1,1)$ 上不可积。

下一个结果是一个 约化公式。该公式最初是在限制条件 $\alpha, \beta \ge -1/2$ 属于 [25], 下得到的，最近则在 [29] 中以其完整的一般形式得到了证明。

引理 2.3 ([29, 定理 4.3])**.** 设 $t > 0$ 和 $\theta, \varphi \in [0,\pi]$。则以下恒等式成立，所有积分均在 $[-1,1]^2$上进行。

(i) 若 $\alpha, \beta \ge -1/2$, 则

$$\begin{aligned} &\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}\, G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta, \cos\varphi) \\ &\quad = \iint G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, 1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v). \end{aligned}$$

(ii) 若 $-1 < \beta < -1/2 \le \alpha$, 则

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}\, G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta, \cos\varphi)$$

$$= \iint \Big\{ -2(\alpha+\beta+3/2)e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \times G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v + G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v)\Big\}.$$

(iii) 若 $-1<\alpha<-1/2\le\beta$, 则

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}\,G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) = \iint \Big\{ -2(\alpha+\beta+3/2)e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \times G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v) + G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)\Big\}.$$

(iv) 若 $-1<\alpha$、$\beta<-1/2$ 和 $\alpha+\beta>-3/2$, 则

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}\,G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) = \iint \Big\{(\alpha+\beta+3/2)(\alpha+\beta+5/2)e^{-t(\alpha+\beta+2)}\sin\theta\sin\varphi \times G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v - 2(\alpha+\beta+3/2)e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \times G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v) - 2(\alpha+\beta+3/2)e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \times G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v + G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v)\Big\}.$$

(v) 若 $-1<\alpha$、$\beta<-1/2$ 和 $\alpha+\beta\le-3/2$, 则

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+5/2)}G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) = \iint \Big\{(\alpha+\beta+5/2)e^{-t(\alpha+\beta+2)}\sin\theta\sin\varphi \times G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v - 2e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \times G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v) - 2e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\times G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v$$
$$+H_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v)\Big\}.$$

下面的结果本质上是 [25, 定理 3.5] 中得到的比较原理 。这里我们陈述一个稍强的版本，该版本隐含在 [25] 的证明中。

引理 2.4. 设 $\alpha,\beta>-1$。给定 $\epsilon,\delta\geq 0$ 和 $\alpha\geq-\epsilon/2$, $\beta\geq-\delta/2$,

$$\big[(1-x)(1-y)\big]^{\epsilon/2}\big[(1+x)(1+y)\big]^{\delta/2}G_t^{\alpha+\epsilon,\beta+\delta}(x,y)\leq e^{\frac{\epsilon+\delta}{2}(\alpha+\beta+1+\frac{\epsilon+\delta}{2})t}G_t^{\alpha,\beta}(x,y)$$

对所有 $x,y\in[-1,1]$ 和 $t>0$，约定 $(1\pm x)^0=1$ 对于 $x=\mp1$。此外，若 $\epsilon=0$，则可以删除假设 $\alpha\geq-\epsilon/2$ ；类似地，在$\delta=0$的情况下，也可以删除假设 $\beta\geq-\delta/2$ 。

2.3. 与密度 $\Pi_\alpha(u)$ 相关的估计。

以下结果是对 [26, 引理 2.2] 的细化。

引理 2.5. 设 $\alpha\in(-1,-1/2)$ 为固定值。则密度 $|\Pi_\alpha(u)|$ 定义了一个关于$[-1,1]$ 的有限测度，并且

$$|\Pi_\alpha(u)|\simeq\left\{\begin{matrix}K_\alpha\\ k_\alpha\end{matrix}\right\}|u|(1-|u|)^{\alpha+1/2},\qquad u\in(-1,1),$$

其中

$$k_\alpha:=\frac{2^{\alpha-1/2}|\alpha+1/2|\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+3/2)},\qquad K_\alpha:=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+3/2)}.$$

证明。 固定 $\alpha\in(-1,-1/2)$。由于相关表达式都是偶函数，我们只需考察 $u\in(0,1)$。注意到

$$\begin{aligned}|\Pi_\alpha(u)|&=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,|\Gamma(\alpha+1/2)|}\int_0^u(1-w^2)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}w\\&\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,|\Gamma(\alpha+1/2)|}\int_0^u(1-w)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}w=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+3/2)}\big[(1-u)^{\alpha+1/2}-1\big]\end{aligned}$$

类似地

$$|\Pi_\alpha(u)|\geq\frac{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+3/2)}\big[(1-u)^{\alpha+1/2}-1\big].$$

现在令

$$f(u)=\frac{(1-u)^{\alpha+1/2}-1}{u(1-u)^{\alpha+1/2}},\qquad u\in(0,1).$$

注意， f是递增的（因为 $f'>0$，这可通过初等分析验证），且 $f(0^+)=-(\alpha+1/2)$， $f(1^-)=1$。由此可得

$$|\alpha+1/2|u(1-u)^{\alpha+1/2}\leq(1-u)^{\alpha+1/2}-1\leq u(1-u)^{\alpha+1/2}.$$

结合前面的估计，即可完成证明。 □

引理 2.6。 设 $\alpha\in(-1,-1/2)$ 为固定值。于是

$$\int_{u'}^1|\Pi_\alpha(u)|\,\mathrm{d}u\simeq\left\{\begin{matrix}K_\alpha\\ k_\alpha\end{matrix}\right\}\frac{1}{\alpha+3/2}(1-u')^{\alpha+3/2},\qquad u'\in[0,1].$$

证明。 记 由 I 得到所讨论的积分。为证明上界，我们使用引理 2.5，得到

$$I \le K_\alpha \int_{u'}^1 u(1-u)^{\alpha+1/2}\,\mathrm{d}u \le K_\alpha \int_{u'}^1 (1-u)^{\alpha+1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{K_\alpha}{\alpha+3/2}(1-u')^{\alpha+3/2}.$$

对于下界，我们不使用引理 2.5，而是利用 $\Pi_\alpha(u)$ 的定义和富比尼定理，写成

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}\,|\Gamma(\alpha+1/2)|}{\Gamma(\alpha+1)}\,I &= \int_{u'}^1\int_0^u \big(1-w^2\big)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u = \int_0^1 (1-w^2)^{\alpha-1/2}\int_{u'\vee w}^1 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\\ &= \int_0^{u'}\big(1-w^2\big)^{\alpha-1/2}\int_{u'}^1 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}w + \int_{u'}^1\big(1-w^2\big)^{\alpha-1/2}\int_w^1 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\\ &= (1-u')\int_0^{u'}\big(1-w^2\big)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}w + \int_{u'}^1\big(1-w^2\big)^{\alpha-1/2}(1-w)\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

忽略最后一个求和中的第一项，并估计第二项，可得

$$\frac{\sqrt{\pi}\,|\Gamma(\alpha+1/2)|}{\Gamma(\alpha+1)}\,I \ge 2^{\alpha-1/2}\int_{u'}^1 (1-w)^{\alpha+1/2}\,\mathrm{d}w = \frac{2^{\alpha-1/2}}{\alpha+3/2}(1-u')^{\alpha+3/2}.$$

结论由此得出。 □

引理 2.7。 设 $\alpha \in (-1,-1/2)$ 为固定值。则

$$\int_{u'}^1 |\Pi_\alpha(u)|\,\mathrm{d}u \simeq \left\{\begin{matrix} L_\alpha \\ l_\alpha \end{matrix}\right\} \frac{\mathrm{d}\Pi_{\alpha+2}(u')}{\mathrm{d}u'}, \qquad u' \in [0,1],$$

其中

$$l_\alpha := \frac{|\alpha+1/2|}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}, \qquad L_\alpha := \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

证明。 令 $u' \in [0,1]$。我们有

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_{\alpha+2}(u')}{\mathrm{d}u'} = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+5/2)}\big[(1-u')(1+u')\big]^{\alpha+3/2},$$

因此

$$(1-u')^{\alpha+3/2} \simeq \left\{\begin{matrix} 1 \\ 2^{-\alpha-3/2} \end{matrix}\right\} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+5/2)}{\Gamma(\alpha+3)}\frac{\mathrm{d}\Pi_{\alpha+2}(u')}{\mathrm{d}u'}.$$

将此结果与引理 2.6 结合，便得到所需的界。 □

最后，为便于后续参考，我们给出一个简单的观察。固定 $\alpha > -1/2$。 n

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}\big(1-u^2\big)^{\alpha-1/2} \simeq \left\{\begin{matrix} 1\vee 2^{\alpha-1/2} \\ 1\wedge 2^{\alpha-1/2} \end{matrix}\right\} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}(1-u)^{\alpha-1/2}$$

对于 $u \in [0,1)$ 。因此，

$$(1-u)^{\alpha-1/2} \simeq \left\{\begin{matrix} N_\alpha \\ n_\alpha \end{matrix}\right\} \frac{\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)}{\mathrm{d}u}, \qquad u \in [0,1), \tag{2.3}$$

with

$$n_\alpha := \big(1\wedge 2^{1/2-\alpha}\big)\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad N_\alpha := \big(1\vee 2^{1/2-\alpha}\big)\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

2.4. **与函数 $F(u,v)$相关的估计**。

令 $0\le\theta,\ \varphi\le\pi$。对于 $0\le u,\ v\le 1$ 表示

$$F(u,v)=F_{\theta,\varphi}(u,v):=\left[\arccos\left(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2. \tag{2.4}$$

那么 $0\le F(1,\ 1)=(\theta-\varphi)^2/4\le F(u,\ v)\le\pi^2/4=F(0,\ 0)$。

以下结果是对 [29, 引理 5.4] 的改进。

引理 2.8. 上界

$$F(u,v)-F(1,1)\simeq\left\{\begin{matrix}\mathfrak{B}\\ \mathfrak{b}\end{matrix}\right\}\big[\theta\varphi(1-u)+(\pi-\theta)(\pi-\varphi)(1-v)\big] \tag{2.5}$$

对于 θ、$\varphi\in[0,\pi]$ 和 u、$v\in[0,1]$，以下结论成立：$\mathfrak{b}:=2/\pi^2$ 且 $\mathfrak{B}:=1/2$。常数 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是最优的。

证明。我们首先证明下界。由连续性，不妨设 $\theta\ne\varphi$。特别地，$F(u,\ v)>0$。注意，对 u 和 v 求导后，方程

$$\cos\sqrt{F(u,v)}=u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

给出

$$\partial_uF(u,v)=-2\frac{\sqrt{F(u,v)}}{\sin\sqrt{F(u,v)}}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$\partial_vF(u,v)=-2\frac{\sqrt{F(u,v)}}{\sin\sqrt{F(u,v)}}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

固定 $u,\ v\in[0,1]$。由中值定理，存在 $c=(c_1,\ c_2)\in[0,1]^2$，它依赖于 u和 v，使得

$$\begin{aligned}F(u,v)-F(1,1)&=\partial_uF(c)(u-1)+\partial_vF(c)(v-1)\\&=2\frac{\sqrt{F(c)}}{\sin\sqrt{F(c)}}\Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}(1-u)+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(1-v)\Big].\end{aligned}$$

由于我们有 $\sqrt{F(c)}\in(0,\ \pi/2]$，结合简单的估计

$$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{\pi}{2},\qquad\frac{2x}{\pi}\le\sin x\le x,\qquad\frac{\pi-2x}{\pi}\le\cos x\le\frac{\pi-2x}{2}\qquad x\in(0,\pi/2],$$

我们得到 (2.5) 中的下界。[5]

接下来，我们证明上界。注意，这等价于证明 $G(u,\ v)\ge 0$,$u,\ v\in[0,1]^2$，其中

$$G(u,v)=G_{\theta,\varphi}(u,v):=\frac{1}{2}\big[(1-u)\theta\varphi+(1-v)(\pi-\theta)(\pi-\varphi)\big]+(\theta-\varphi)^2/4-F_{\theta,\varphi}(u,v).$$

通过初等计算可得

$$\begin{aligned}\partial_u^2G(u,v)=-\partial_u^2F(u,v)=&\frac{-2\big(\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\big)^2}{1-(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2})^2}\\&\times\left[1-\arccos\left(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\frac{u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-(u\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+v\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2})^2}}\right].\end{aligned}$$

[5] 过程 以类似方式进行推导，我们也可以得到上界，但常数 $\pi/4$ 非最优。

由于 $x\arccos x \le \sqrt{1-x^2}$, $\overline{x \in (0,1)}$，这一点很容易验证，因为函数 $(0,1) \ni x \mapsto \arccos x - \sqrt{1-x^2}/x$ 是递增的，因此我们看到 $\partial_u^2 G(u,v) \le 0$。因此，对于任意固定的 $v \in [0,1]$，函数 $[0,1] \ni u \mapsto G(u,v)$ 是凹函数，其最小值在某个端点处取得。由对称性 $G_{\theta,\varphi}(u,v) = G_{\pi-\theta,\pi-\varphi}(v,u)$，可得 $G(u,v) \ge \inf_{\theta,\varphi\in[0,\pi]} G_{\theta,\varphi}(0,0) \wedge G_{\theta,\varphi}(0,1) \wedge G_{\theta,\varphi}(1,1)$。由于 $G(1,1) = 0$ 且 $G(0,0) = (\theta+\varphi-\pi)^2/4$，只需验证 $G(0,1) \ge 0$。

注意，证明 $G(0,1) \ge 0$ 等价于论证

$$\frac{\sqrt{\theta^2+\varphi^2}}{2} - \arccos\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) \ge 0, \qquad \theta,\varphi \in [0,\pi].$$

Let

$$X(\theta) = X_\varphi(\theta) := \frac{\sqrt{\theta^2+\varphi^2}}{2} - \arccos\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

由于 $X(0) = 0$，只需证明 $X'(\theta) \ge 0$。注意到

$$X'(\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+\varphi^2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2})^2}}\right].$$

由于 $1-(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2})^2 = \sin^2\frac{\varphi}{2} + (\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2})^2$,，不难看出，证明 $X'(\theta) \ge 0$ 等价于证明

$$\theta \sin\frac{\varphi}{2} \ge \varphi \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \theta,\varphi \in [0,\pi].$$

然而，很容易看出后一个不等式成立。

最后，我们来看 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{b}$的最优性。令 $u = v, \theta = \varphi = 0$，再令 $u \to 1^-$，可知 $\mathfrak{b}$ 是最优的。另一方面，取 $u = v = 0, \varphi = 0$，再令 $\theta \to \pi^-$，可得 $\mathfrak{B}$的最优性。

引理 2.8 的证明结束。 □

2.5. **各种积分的估计**。

引理 2.9. 设 $\omega \in [1/2, 2]$。则

$$\int_\xi^\infty u^{\omega-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \simeq \left\{\begin{matrix} M_\omega \\ m_\omega \end{matrix}\right\} (1+\xi)^{\omega-1}e^{-\xi}, \qquad \xi \ge 0,$$

其中常数为

$$m_\omega := \frac{1-2^{-\omega}}{e\,\omega}, \qquad M_\omega := \frac{2}{(1-1/e)^2\,\omega}.$$

为证明上述结论，我们需要以下辅助结果。

引理 2.10. 设 $\omega \in [1/2, 2]$。则

$$\int_a^b u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u \simeq \left\{\begin{matrix} 2/\omega \\ (1-2^{-\omega})/\omega \end{matrix}\right\} b^{\omega-1}(b-a), \qquad 0 \le a < b < \infty.$$

证明。 **情形 1：** $b \ge 2a$。这里我们有

$$\int_a^b u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u \le \int_0^b u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u = b^\omega/\omega \le \frac{2}{\omega}(b-a)b^{\omega-1}.$$

另一方面,

$$\int_a^b u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u \geq \int_{b/2}^b u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1-2^{-\omega}}{\omega} b^\omega \geq \frac{1-2^{-\omega}}{\omega}(b-a)b^{\omega-1}.$$

情况 2： $a \leq b < 2a$。我们有

$$\int_a^b u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u \leq (b-a)\begin{cases} b^{\omega-1} & \text{if} \quad \omega \geq 1 \\ (b/2)^{\omega-1} & \text{if} \quad \omega < 1 \end{cases},$$

and

$$\int_a^b u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u \geq (b-a)\begin{cases} (b/2)^{\omega-1} & \text{if} \quad \omega \geq 1 \\ b^{\omega-1} & \text{if} \quad \omega < 1 \end{cases}.$$

这就得到了引理 2.10，因为对于 $\omega \in [1,2]$，我们有 $\frac{1-2^{-\omega}}{\omega} \wedge 2^{1-\omega} = \frac{1-2^{-\omega}}{\omega}$ 和 $\frac{2}{\omega} \vee 1 = \frac{2}{\omega}$；而对于 $\omega \in [1/2,1]$，我们有 $\frac{1-2^{-\omega}}{\omega} \wedge 1 = \frac{1-2^{-\omega}}{\omega}$ 和 $\frac{2}{\omega} \vee 2^{1-\omega} = \frac{2}{\omega}$。□

引理 *2.9* 的证明。利用引理 2.10，我们得到

$$\int_\xi^\infty u^{\omega-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \geq \int_\xi^{\xi+1} u^{\omega-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \geq e^{-\xi-1}\int_\xi^{\xi+1} u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u \geq \frac{1-2^{-\omega}}{e\,\omega}(\xi+1)^{\omega-1}e^{-\xi}.$$

这就是所要证明的下界。

接下来，我们证明上界。再次利用引理 2.10，我们得到

$$\int_\xi^\infty u^{\omega-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \leq \sum_{k\geq 0} e^{-\xi-k}\int_{\xi+k}^{\xi+k+1} u^{\omega-1}\,\mathrm{d}u \leq \frac{2}{\omega}e^{-\xi}\sum_{k\geq 0} e^{-k}(\xi+k+1)^{\omega-1}.$$

此外，注意到

$$(\xi+k+1)^{\omega-1} \leq (\xi+1)^{\omega-1}(1+k).$$

将此与恒等式 $\sum_{k\geq 0}(k+1)e^{-k} = (1-1/e)^{-2}$ 结合，即得所需的上界。 □

记

$$\mathbb{D}_\alpha := \Gamma(\alpha+3/2)^{1/(\alpha+1/2)}, \qquad \alpha > -3/2,$$

其中 $\alpha = -1/2$ 的取值按极限意义理解,

$$\mathbb{D}_{-1/2} = \lim_{\alpha\to -1/2}\mathbb{D}_\alpha = e^{-\gamma},$$

其中 $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0.577216$ 是欧拉–马歇罗尼常数。注意，$\mathbb{D}_\alpha$ 在 α上严格递增。[6] 此外，有 $\mathbb{D}_{-1} = 1/\pi$、$\mathbb{D}_0 = \pi/4$ 和 $\mathbb{D}_{1/2} = 1$。

下一个结果是对 [29, 引理 5.5] 的改进。

[6]关于 $\mathbb{D}_\alpha$ 在 $(-1/2,\infty)$ 上的单调性，参见例如 [33, 第 1] 节。要证明 $\mathbb{D}_\alpha$ 在 $(-3/2,-1/2)$ 上严格递增，只需验证 $(\mathbb{D}_\alpha)' = (\alpha+1/2)^{-2}\mathbb{D}_\alpha[(\alpha+1/2)\psi(\alpha+3/2) - \log\Gamma(\alpha+3/2)] > 0$ 对 $\alpha \in (-3/2,-1/2)$ 成立；这里 ψ 是 Γ（二伽马函数）的对数导数。令 H_α 为最后一个方括号中的表达式。由于 $H_{-1/2} = 0$，问题归结为验证 $(H_\alpha)' = (\alpha+1/2)\psi'(\alpha+3/2) < 0$ 对 $\alpha \in (-3/2,-1/2)$ 成立。然而，这立刻可由三伽马函数 ψ'的已知正性推出，参见例如 [30,第 5 章，§5.15，公式 5.15.1]。

引理 2.11. 设 $\alpha \geq -1/2$。那么

$$\int_{[0,1]} \exp\Big(-\xi(1-s)\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(s) \simeq \left\{ \begin{matrix} B_\alpha \\ b_\alpha \end{matrix} \right\} \big(\mathbb{D}_\alpha \vee \xi\big)^{-\alpha-1/2}, \qquad \xi \geq 0,$$

常数为

$$b_\alpha := \big(1 \wedge 2^{\alpha-1/2}\big)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} \exp\big(-\mathbb{D}_\alpha\big), \qquad B_\alpha := \big(1 \vee 2^{\alpha-1/2}\big)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}, \qquad \alpha > -1/2,$$

并且 $B_{-1/2} := 1/2 =: b_{-1/2}$。

注 2.12. 众所周知（参见 [33, 第 1] 节及其中所列参考文献），函数 $x \mapsto [\Gamma(x+1)]^{1/x}/(x+1)$ 在 $x > 0$时严格递减，并且其极限为：当 $x \to 0^+$ 时为 $e^{-\gamma}$，当$x \to \infty$时为 $1/e$。因此，我们得到以下界

$$\frac{\alpha+3/2}{e} < \mathbb{D}_\alpha < \frac{\alpha+3/2}{e^\gamma}, \qquad \alpha > -1/2, \tag{2.6}$$

这表明 $\mathbb{D}_\alpha$ 大致随参数呈线性变化。

设 $\mathbb{E}_\alpha = c_1(\alpha + c_2)$。条件 $\mathbb{D}_\alpha/\mathbb{E}_\alpha \to 1$ 当 $\alpha \to \infty$ 时等价于 $c_1 = 1/e$。例如，可以通过施加条件 $\mathbb{D}_{-1/2} = \mathbb{E}_{-1/2}$来选取 c_2，这意味着 $c_2 = e^{1-\gamma} + 1/2 \approx 2.026205$。在这种情况下，$\mathbb{E}_\alpha = (\alpha + 1/2)/e + e^{-\gamma}$，由(2.6) 可得

$$\mathbb{D}_\alpha \simeq \left\{ \begin{matrix} e^{1-\gamma} \\ e^{\gamma-1} \end{matrix} \right\} \mathbb{E}_\alpha, \qquad \alpha \geq -1/2.$$

注意到 $e^{\gamma-1} \approx 0.655220$ 和 $e^{1-\gamma} \approx 1.526205$。事实上可以证明 t

$$\mathbb{D}_\alpha \simeq \left\{ \begin{matrix} 11/10 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathbb{E}_\alpha, \qquad \alpha \geq -1/2,$$

但我们不提供证明；无论如何，只需借助任意常见的数学软件工具绘制比值$\mathbb{D}_\alpha/\mathbb{E}_\alpha$，这些界便显而易见。

引理 *2.11* 的证明。我们可以假设 $\alpha > -1/2$，因为当 $\alpha = -1/2$ 时，该积分等于 $1/2$（特别是，它与 ξ无关），引理显然成立。于是，根据 $\mathrm{d}\Pi_\alpha$ 的定义并作简单的变量代换，可得

$$\int_{[0,1]} \exp\Big(-\xi(1-s)\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(s) \simeq \left\{ \begin{matrix} 1 \vee 2^{\alpha-1/2} \\ 1 \wedge 2^{\alpha-1/2} \end{matrix} \right\} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^1 e^{-u\xi} u^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}u. \tag{2.7}$$

记 最后一个积分为 I，并令 $\mathbb{D} > 0$ 为一个稍后确定的常数 .

对于 $0 \leq \xi \leq \mathbb{D}$，我们可以通过忽略指数因子或将其替换为其最小值来估计 I，从而得到

$$\frac{1}{\alpha+1/2} e^{-\mathbb{D}} \leq I \leq \frac{1}{\alpha+1/2}, \qquad \xi \leq \mathbb{D}. \tag{2.8}$$

现在令 $\xi \geq \mathbb{D}$。为了得到一个上界，我们先作变量代换，然后将积分区间扩大到 $(0,\ \infty)$，得到

$$I = \xi^{-\alpha-1/2} \int_0^\xi e^{-v} v^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}v \leq \xi^{-\alpha-1/2}\,\Gamma(\alpha+1/2).$$

对于下界，我们写作

$$I \geq \xi^{-\alpha-1/2} \int_0^{\mathbb{D}} e^{-v} v^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}v = \xi^{-\alpha-1/2}\,\mathbb{D}^{\alpha+1/2} \int_0^1 e^{-\mathbb{D}w} w^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}w \geq \xi^{-\alpha-1/2}\,\mathbb{D}^{\alpha+1/2} e^{-\mathbb{D}} \frac{1}{\alpha+1/2}.$$

Thus

$$\frac{1}{\alpha+1/2}\mathbb{D}^{\alpha+1/2}e^{-\mathbb{D}}\xi^{-\alpha-1/2}\le I\le\frac{1}{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+3/2)\xi^{-\alpha-1/2},\qquad \xi\ge\mathbb{D}. \tag{2.9}$$

考虑到 (2.8) 和 (2.9) 的结构，我们看到 $\mathbb{D}$ 的自然选择应满足 $\mathbb{D}^{\alpha+1/2}=\Gamma(\alpha+3/2)$，即 $\mathbb{D}=\mathbb{D}_{\alpha\circ}$ 结合 (2.8) 和 (2.9) 可得

$$\Gamma(\alpha+1/2)e^{-\mathbb{D}_\alpha}\big(\mathbb{D}_\alpha\vee\xi\big)^{-\alpha-1/2}\le I\le\Gamma(\alpha+1/2)\big(\mathbb{D}_\alpha\vee\xi\big)^{-\alpha-1/2},\qquad \xi\ge0.$$

结合 (2.7) 即可证明该引理。 □

引入记号

$$\Psi_\alpha^\kappa(t,\theta,\varphi):=\big[\mathbb{D}_\alpha t\vee\kappa\theta\varphi\big]^{-\alpha-1/2}. \tag{2.10}$$

注意 对于 $\alpha>-1$ 和 $\kappa>0$，有（参见定理 1 以及表达式 $Z^{\alpha,\beta}(t;\theta,\varphi)$ ）

$$\Psi_\alpha^\kappa(t,\theta,\varphi)\simeq\left\{\begin{array}{l}\big[1/(\mathbb{D}_\alpha\vee\kappa)\big]^{\alpha+1/2}\vee\big[2/(\mathbb{D}_\alpha\wedge\kappa)\big]^{\alpha+1/2}\\ \big[1/(\mathbb{D}_\alpha\vee\kappa)\big]^{\alpha+1/2}\wedge\big[2/(\mathbb{D}_\alpha\wedge\kappa)\big]^{\alpha+1/2}\end{array}\right\}\frac{1}{(t+\theta\varphi)^{\alpha+1/2}},\qquad \theta,\varphi\in[0,\pi],\quad t>0.$$

引理 2.13. 设 $\alpha,\beta\ge-1/2$。则

$$\iint_{[0,1]^2}e^{-F_{\theta,\varphi}(u,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)\simeq\left\{\begin{array}{l}B_\alpha B_\beta\Psi_\alpha^{\mathfrak{b}}(t,\theta,\varphi)\Psi_\beta^{\mathfrak{b}}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\\ b_\alpha b_\beta\Psi_\alpha^{\mathfrak{B}}(t,\theta,\varphi)\Psi_\beta^{\mathfrak{B}}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\end{array}\right\}t^{\alpha+\beta+1}e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}$$

对于 θ、$\varphi\in[0,\pi]$ 和 $t>0$。

证明。我们证明上界，下界的证明类似。注意到

$$\iint_{[0,1]^2}e^{-F_{\theta,\varphi}(u,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)=e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}\iint_{[0,1]^2}e^{-[F_{\theta,\varphi}(u,v)-F_{\theta,\varphi}(1,1)]/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v).$$

只需对最后一个二重积分给出适当的上界，我们将其记为 I .

利用引理 2.8，再利用引理 2.11，可得

$$\begin{aligned}I&\le\int_{[0,1]}e^{-\mathfrak{b}\theta\varphi(1-u)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\int_{[0,1]}e^{-\mathfrak{b}(\pi-\theta)(\pi-\varphi)(1-v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)\\&\le t^{\alpha+\beta+1}\frac{B_\alpha}{[\mathbb{D}_\alpha t\vee\mathfrak{b}\theta\varphi]^{\alpha+1/2}}\frac{B_\beta}{[\mathbb{D}_\beta t\vee\mathfrak{b}(\pi-\theta)(\pi-\varphi)]^{\beta+1/2}},\end{aligned}$$

这正是所需的。 □

假设 α，$\beta\ge-1/2$，对于情形 $\varphi=0$，注意到

$$\iint_{[0,1]^2}e^{-F_{\theta,0}(u,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)=\frac12\int_{[0,1]}e^{-F_{\theta,0}(1,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v).$$

于是我们得到如下结论。

引理 2.14。设 $\beta\ge-1/2$。则

$$\int_{[0,1]}e^{-F_{\theta,0}(1,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)\simeq\left\{\begin{array}{l}B_\beta\Psi_\beta^{\mathfrak{b}}(t,\pi-\theta,\pi)\\ b_\beta\Psi_\beta^{\mathfrak{B}}(t,\pi-\theta,\pi)\end{array}\right\}t^{\beta+1/2}e^{-\theta^2/(4t)},\qquad \theta\in[0,\pi],\quad t>0.$$

证明。推理与引理 2.13 的证明相同。细节留给读者。□

2.6. **与伽马函数相关的事实和估计**。

倍增公式（例如参见 [30, 第 5 章， §5.5，第 5.5.5], 式）

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2), \qquad x \notin -\mathbb{N}/2,$$

在本文中均隐含使用，无需另行说明。

接下来我们将使用以下界以及一个事实：

$$\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x} < \Gamma(x) < \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}e^{1/(12x)}, \qquad x > 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)} < x^{x-y}, \qquad 0 < y < x, \tag{2.12}$$

$$\binom{x+y}{y} = \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} \quad \text{is strictly increasing in } y > 0 \text{ for each } x > 0 \text{ fixed.} \tag{2.13}$$

关于不等式 (2.11)，例如参见 [30, 第 5 章， §5.6，第 5.6.1] 式。估计 (2.12) 可由 Wendel 不等式推出，参见 [41, 式 (4)] ，且这是 Γ对数凸性的推论。事实 (2.13) 可通过观察到 $\binom{x+y}{y} = {}_{xB}{}^{1}{}_{(,}$ $_{y+1)}$ 和 $z \mapsto B(x,z)$ 关于 $z > 0$严格递减来验证；这里 B 是贝塔函数。

我们还需要以下结果。

引理 2.15. 对于每个整数 $j \geq 1$,

$$\Gamma(j+1/2) > \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1/12}}\, j^j e^{-j}.$$

证明. 注意到

$$\Gamma(j+1/2) = (j-1/2)\cdot\ldots\cdot(1/2)\,\Gamma(1/2) = \frac{(2j-1)!!}{2^j}\sqrt{\pi} = \frac{(2j-1)!!}{2^j}\frac{(2j)!!}{2^j j!}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^j}\frac{(2j)!}{j!}.$$

我们将使用斯特林型不等式。众所周知，见 [34], ，对于任意整数 $n \geq 1$

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}e^{r_n},$$

其中 r_n 满足 $1/(12n+1) < r_n < 1/(12n)$。特别地，我们有

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}e^{1/12}, \qquad n \geq 1. \tag{2.14}$$

因此,

$$\frac{(2j)!}{j!} \geq \frac{\sqrt{2}}{e^{1/12}}4^j j^j e^{-j}, \qquad j \geq 1.$$

结合初步观察，证明得以完成。 □

2.7. **与贝塞尔函数 K_ν 相关的估计**。

我们用 K_ν 表示第二类修正贝塞尔函数（麦克唐纳函数），其阶数为 ν；关于定义和基本性质，参见例如 [40] 。对于 $\nu > -1/2$ 及正参数 K_ν，可表示为（参见 [30, 第 10 章、 §10.32(i)、公式 10.32.8]）。

$$K_\nu(y) = \frac{\sqrt{\pi}y^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1/2)}\int_1^\infty e^{-yu}\big(u^2-1\big)^{\nu-1/2}\,\mathrm{d}u, \qquad y > 0.$$

以下结果是 [31, 定理 2] 的一部分。[7]

[7]截至目前，似乎还没有关于 $K_\nu(x)$、对 x 和 ν 一致的更优上界 .

引理 2.16 ([31])。 令 $\beta > 1/2$、 $\nu \geq 0$ 和 $y > 0$。则

$$\sqrt{\frac{2y}{\pi}} e^y K_\nu(y) \leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{y^2}{y^2+\nu^2} \right)^{1/4} \left(\frac{\nu + \sqrt{y^2+\nu^2}}{y} \right)^\nu \exp\left(-\sqrt{y^2+\nu^2} + y + \frac{\beta}{\sqrt{y^2+\nu^2}} \right)$$

前提是 $\sqrt{y^2+\nu^2} \geq 2\beta/(2\beta-1)$。

现在我们从上述结果中提取出一个形式稍微简单一些、但精确性和一般性有所降低的上界，这将便于我们的论证。

引理 2.17。 设 $\nu \geq 5/2$ 和 $0 < \epsilon \leq 2/3$。则

$$\sqrt{\frac{2y}{\pi}} e^y K_\nu(y) \leq \frac{2}{\pi} e^{1/(\sqrt{2}\nu)} (1+\epsilon)^\nu, \qquad y \geq \frac{2\nu}{3\epsilon}.$$

证明。 我们使用带有 $\beta = 1$的引理 2.16。注意到，根据假设 $\nu \geq 5/2$ ，条件$\sqrt{y^2+\nu^2} \geq 2\beta/(2\beta-1)$ 对所有 $y > 0$ 均满足。于是有

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2y}{\pi}} e^y K_\nu(y) &\leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{y^2}{y^2+\nu^2} \right)^{1/4} \left(\frac{\nu + \sqrt{y^2+\nu^2}}{y} \right)^\nu \exp\left(-\sqrt{y^2+\nu^2} + y + \frac{1}{\sqrt{y^2+\nu^2}} \right) \\ &< \frac{2}{\pi} \left(\frac{\nu + \sqrt{y^2+\nu^2}}{y} \right)^\nu \exp\left(-\sqrt{y^2+\nu^2} + y + \frac{1}{\sqrt{y^2+\nu^2}} \right).\end{aligned}$$

注意到，假设 $0 < \epsilon \leq 2/3$ 和 $y \geq 2\nu/(3\epsilon)$ 蕴含 $y \geq \nu$，因此

$$\begin{aligned}\exp\left(-\sqrt{y^2+\nu^2} + y + \frac{1}{\sqrt{y^2+\nu^2}} \right) &= \exp\left(\frac{-\nu^2}{y+\sqrt{y^2+\nu^2}} \right) \exp\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+\nu^2}} \right) \\ &\leq \exp\left(\frac{-\nu^2}{y+\sqrt{y^2+\nu^2}} \right) \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}\nu} \right).\end{aligned}$$

由此可得，对于 $\nu \geq 5/2$ 和 $y \geq 2\nu/(3\epsilon)$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2y}{\pi}} e^y K_\nu(y) &< \frac{2}{\pi} e^{1/(\sqrt{2}\nu)} \left[\frac{\nu + \sqrt{y^2+\nu^2}}{y} \exp\left(\frac{-\nu}{y+\sqrt{y^2+\nu^2}} \right) \right]^\nu \\ &= \frac{2}{\pi} e^{1/(\sqrt{2}\nu)} \left[\left(\nu/y + \sqrt{1+(\nu/y)^2} \right) \exp\left(\frac{-\nu/y}{1+\sqrt{1+(\nu/y)^2}} \right) \right]^\nu.\end{aligned}$$

容易验证

$$\left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \exp\left(-\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right) \leq 1 + \frac{2}{3}x, \qquad x \in [0,1].$$

因此,

$$\sqrt{\frac{2y}{\pi}} e^y K_\nu(y) < \frac{2}{\pi} e^{1/(\sqrt{2}\nu)} \left(1 + \frac{2\nu}{3y} \right)^\nu \leq \frac{2}{\pi} e^{1/(\sqrt{2}\nu)} (1+\epsilon)^\nu,$$

这就是所需的上界。 □

推论 2.18. 设 $\nu \in \mathbb{N} + 1/2$ 且 $0 < \epsilon \leq 2/3$。则

$$\sqrt{\frac{2y}{\pi}} e^y K_\nu(y) \leq (1+\epsilon)^{\nu - 1/2}, \qquad y \geq \frac{2\nu}{3\epsilon}.$$

证明。 对于 $\nu \geq 9/2$ ，由引理 2.17 可得，因为此时

$$(1+\epsilon)^{-1/2} \geq (1+2/3)^{-1/2} > (2/\pi)e^{1/(9\sqrt{2}/2)} \geq (2/\pi)e^{1/(\sqrt{2}\nu)}, \qquad \epsilon \in (0, 2/3].$$

另一方面，对于 $\nu = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$，我们可以利用 K_ν 的显式表达式直接验证该上界，参见 [40, 第三章，第 3·71 节，公式 (12)]，

$$\sqrt{2y/\pi}\, e^y K_{1/2}(y) = 1, \qquad \sqrt{2y/\pi}\, e^y K_{3/2}(y) = 1 + 1/y,$$
$$\sqrt{2y/\pi}\, e^y K_{5/2}(y) = 1 + 3/y + 3/y^2, \qquad \sqrt{2y/\pi}\, e^y K_{7/2}(y) = 1 + 6/y + 15/y^2 + 15/y^3.$$

这里相关的事实是 $1/y \leq 3\epsilon/(2\nu)$，以及 ϵ^n 关于 n 单调递减。初等细节留给读者。□

3. 与奇数维球面相关的估计

令 $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 为维数 $d \geq 1$ 的欧几里得单位球面，并配备标准的非归一化面积测度 σ_d。令 $\mathcal{K}_t^d(\xi, \eta)$ 为 (S^d, σ_d) 上的热核。由旋转不变性，$\mathcal{K}_t^d(\xi, \eta)$ 仅通过 ξ 和 η 之间的测地距离 $\operatorname{dist}(\xi, \eta) = \arccos\langle \xi, \eta \rangle$ 依赖于二者。因此，它可以用定义在 $[0, \pi]$ 上的一元函数 K_t^d 表示，

$$\mathcal{K}_t^d(\xi, \eta) = K_t^d\big(\operatorname{dist}(\xi, \eta)\big), \qquad \xi, \eta \in S^d, \quad t > 0.$$

记 W_t 为一维高斯-魏尔斯特拉斯核，并注意到 ϑ_t 是其 2π 周期化，

$$W_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \qquad \vartheta_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} W_t(x + 2\pi n).$$

已知（例如参见 [27, 第 2], 节）：

$$K_t^{2N+1}(\varphi) = \frac{e^{tN^2}}{(2\pi)^N}(-D)^N \vartheta_t(\varphi), \qquad N \geq 0, \tag{3.1}$$

其中

$$D = D_\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{3.2}$$

另一方面，我们有如下关系（参见 [27, 公式（4）]）：

$$K_t^d(\varphi) = \frac{1}{\sigma_{d-1}(S^{d-1})} G_t^{d/2-1}(\cos\varphi, 1) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} G_t^{d/2-1}(\cos\varphi, 1), \qquad d \geq 1; \tag{3.3}$$

此处，当 $d = 1$ 时， $\sigma_0\,(S^0) = 2$。因此

$$G_t^{N-1/2}(\cos\varphi, 1) = \frac{\sqrt{4\pi}}{2^N \Gamma(N + 1/2)} e^{tN^2} (-D)^N \vartheta_t(\varphi), \qquad N \geq 0. \tag{3.4}$$

第 3 节的目的是在受限范围内估计 $(-D)^N \vartheta_t(\varphi)$，其中 $\varphi \in [0, \pi/2]$ 且 $t > 0$足够小。鉴于 (3.4)，这将立即推出当$\lambda \in \mathbb{N} - 1/2$ 且 $x \in [0, 1]$时， $G_t^\lambda(x,$ 1) 的类似界。

3.1. $-D$**的下界**$(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$。

为了给 $(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 求得一个下界，我们将借助一般理论。由于 S^d 是一个具有正里奇曲率的完备黎曼流形，[9, 定理 5.6.1][8] 可得

$$K_t^d(\varphi) \geq \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{4t}\right), \qquad \varphi \in [0,\pi], \quad t>0.$$

请注意，这一估计是尖锐的（参见 [9, 定理 5.6.1] 的证明）。

$$\lim_{t\to 0^+} (4\pi t)^{d/2} K_t^d(0) = 1. \tag{3.5}$$

因此，由 (3.1) 可得以下结果。

命题 3.1。设 $N \geq 0$。则有

$$(-D)^N\vartheta_t(\varphi) \geq \frac{1}{2^N} e^{-tN^2} t^{-N} W_t(\varphi), \qquad \varphi \in [0,\pi], \quad t>0.$$

对于比如说 $\varphi \in [0,\pi/2]$，命题 3.1 的上界相当合理，而且根据 (3.5)，乘法常数是尖锐的。另一方面，当 φ 接近 π 时，这个上界远非最优。我们注意到，下面为 $(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 推导上界所用的方法，也可以调整后用于给出下界，但通常会导致更差的乘法常数和更小的 t 取值范围。

3.2. $-D\ (-D)^N\vartheta_t\ (\varphi)$ **及** $t \lesssim 1/N$ **的上界**。

我们考虑 $N \geq 1$，并大致沿用 [27], 中的策略，但作了简化（因为这里只关注上界，且 $\varphi \in [0,\pi/2]$ 的取值范围受限），同时进行了大量改进。

设 F 为偶整函数（例如高斯函数或双曲余弦）。由初等方法可证明，见 [27, 引理 3.1], ，有

$$D_\varphi^N\big[F(v\varphi)\big] = \sum_{j=1}^{N} v^{2j} L^j F(v\varphi)\Phi_{N,j}(\varphi), \qquad \varphi \in [0,\pi/2], \quad v>0, \quad N \geq 1, \tag{3.6}$$

其中

$$L = \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$$

且 $\Phi_{N,\,j}$ 是定义在 $[0,\pi/2]$ 上的有界函数。在 (3.6) 以及下文其他位置，$D_\varphi^N[F(v\varphi)]$ 表示将算子 D^N 作用于函数 $\varphi \mapsto F(v\varphi)$，而 $L^jF(v\varphi)$ 表示在 $v\varphi$ 处取值的 L^jF。

为了使 (3.6) 适用于我们的目的，我们需要估计 $\Phi_{N,\,j}$。为此，我们现在将这些因子写得更明确。记

$$\Psi(\varphi) := \frac{\varphi}{\sin\varphi} \tag{3.7}$$

因此 $\Phi_{1,\,1} = \Psi$。与证明 [27, 引理 3.1], 类似，对 (3.6) 中的第 j 项应用 D_φ，并利用莱布尼茨法则计算 $D_\varphi[L^jF(v\varphi)]$，可得

$$D_\varphi\big[v^{2j}L^jF(v\varphi)\Phi_{N,j}(\varphi)\big] = v^{2j+2}L^{j+1}F(v\varphi)\frac{\varphi}{\sin\varphi}\Phi_{N,j}(\varphi) + v^{2j}L^jF(v\varphi)\frac{1}{\sin\varphi}\Phi'_{N,j}(\varphi).$$

由此可推得

$$\Phi_{N,j} = \Psi\big[\Phi_{N-1,j-1} + L\Phi_{N-1,j}\big], \qquad N \geq 2, \quad 1 \leq j \leq N, \tag{3.8}$$

[8]该结果最初由 Cheeger 和 Yau [4], 在 Debiard、Gaveau 和 Mazet[10]较早工作的基础上证明；事实上，他们给出了一个更一般的版本，适用于里奇曲率有下界的流形。

与 约定 $\Phi_{N,\,j}=0$ 当 $j\notin\{1,\dots,N\}$ 时。注意 $\Phi_{N,\,N}=\Psi^N$.

递推关系 (3.8) 与 [5] 中研究的 Comtet A-多项式所满足的递推关系相同。准确地说，Comtet 使用通常微分算子，而非 L；不过，这与当前的讨论无关，因为这两个算子都遵循莱布尼茨法则。因此，$\Phi_{N,\,j}$ 被认定为 [5] 中的多项式 $\mathbf{A}_{N,\,j}$。更准确地说，$\Phi_{N,\,j}$ 具有以下形式

$$\Phi_{N,j}(\varphi)=\mathbf{A}_{N,j}\big(\Psi(\varphi),L\Psi(\varphi),\dots,L^{N-j}\Psi(\varphi)\big),$$

其中

$$\mathbf{A}_{N,j}(\lambda_0,\dots,\lambda_{N-j})=\sum_{\substack{k_0+k_1+\ldots+k_{N-j}=N\\ k_1+2k_2+\ldots+(N-j)k_{N-j}=N-j}} a_{N,j}(k_0,\dots,k_{N-j})\;\lambda_0^{k_0}\cdot\ldots\cdot\lambda_{N-j}^{k_{N-j}}. \tag{3.9}$$

这里的求和 [9] 遍及所有满足所示条件的整数 $k_0,\dots,k_{N-j}\geq 0$。式 (3.9) 中出现的所有系数 $a_{N,\,j}$ 都是严格正的自然数。每个 $\mathbf{A}_{N,\,j}$ 都是次数为 N、权为 $N-j$ 的齐次多项式 [10]，即

$$\mathbf{A}_{N,j}(\dots,ab^i\lambda_i,\dots)=a^Nb^{N-j}\mathbf{A}_{N,j}(\dots,\lambda_i,\dots). \tag{3.10}$$

现在我们为系数 $a_{N,\,j}(k_0,\dots,k_{N-j})$ 建立一个递推关系，这一结果本身或许也有一定意义。[11] 引入一些辅助记号会更方便。对于 $N\geq 1$ 和 $1\leq j\leq N$，记

$$\mathcal{I}(N,j):=\left\{k=(k_0,\dots,k_{N-j})\in\mathbb{N}^{N-j+1}\;:\;\sum_{i=0}^{N-j}k_i=N\;\text{ and }\;\sum_{i=0}^{N-j}ik_i=N-j\right\},$$

因此，(3.9) 中的求和范围为 $k\in\mathcal{I}(N,\,j)$。注意，对于 $k\in\mathcal{I}(N,\,j)$，有 $k_0\geq j$。此外，我们采用关于多重指标和乘法的标准约定，例如，对于 $k=(k_0,\,\ldots\ldots,\,k_{N-j})$ 和 $\lambda=(\lambda_0,\,\ldots\ldots,\,\lambda_{N-j})$，表达式 λ^k 理解为 $\lambda_0^{k_0}\cdot\ldots\cdot\lambda_{N-j}^{k_{N-j}}$。因此，(3.9) 可写为

$$\mathbf{A}_{N,j}(\lambda)=\sum_{k\in\mathcal{I}(N,j)}a_{N,j}(k)\,\lambda^k.$$

最后，我们用 e_0、e_1、.....表示依次排列的坐标向量，并将仅末尾项中零的个数不同的多重指标视为相同，例如 $(k_0,\dots,k_{N-j})\equiv(k_0,\dots,k_{N-j},0,\dots,0)$。

[9] (3.9) 中的项数为 $p(N-j)$，即 $N-j$ 的整数分拆数，参见例如 [6, 第 II 章] 和[36, A000041]。目前尚无分拆函数 p 的显式公式。哈代和李特尔伍德的一个经典结果给出了渐近公式 $p(n)\sim\frac{1}{4\sqrt{3}n}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$。关于 $p(n)$ 的估计，参见例如 [22] 及其中所列参考文献。[10] 多项式 A_N 的列表$_j$，截至次数 7，见 [5, 第 5]节。按照 N、j 以及 k_0、.....、k_{N-j} 排列的系数序列$a_{N,\,j}(k_0,\,\ldots\ldots,\,k_{N-j})$，可见于 [36, A139605]（迭代导数展开的权）。[11]文献中似乎没有 $a_{N,\,j}$ 的闭式公式。不过，某些特殊情形可以明确计算。例如，除显然的情形 $\Phi_{N,\,N}=\Psi^N$ 外，对于 $N\geq 2$、$\Phi_{N,\,N-2}=\binom{N}{3}\Psi^{N-1}L^2\Psi+\frac{3N-5}{4}\binom{N}{3}\Psi^{N-2}(L\Psi)$ 有 $\Phi_{N,\,N-1}=\binom{N}{2}\Psi^{N-1}L\Psi$；对于 $N\geq 3$、$\Phi_{N,\,N-3}=\binom{N}{4}\Psi^{N-1}L^3\Psi+2(N-2)\binom{N}{4}\Psi^{N-2}(L\Psi)(L^2\Psi)+(N-3)(N-2\binom{N}{4}\Psi^{N-3})(L\Psi)$，有 [2]；此外，对于 $N\geq 4$，有 [3]；对于 $N\geq 5$，还有 $\Phi_{N,\,N-4}=\binom{N}{5}\Psi^{N-1}L^4\Psi+\frac{5N-13}{2}\binom{N}{5}\Psi^{N-2}(L\Psi)(L^3\Psi)+\frac{15N^2-85N+116}{6}\binom{N}{5}\Psi^{N-3}(L\Psi)^2(L^2\Psi)+\frac{15N^3-150N^2+485N-502}{48}\binom{N}{5}\Psi^{N-4}(L\Psi)^4$。

引理 3.2. 令 $N \geq 1$。然后 $a_{N,\,N}(Ne_0) = 1$，对于 $1 \leq j \leq N+1$, $k \in \mathcal{I}(N+1, j)$，有

$$\begin{aligned} a_{N+1,j}(k) &= \chi_{\{j\neq 1\}}\, a_{N,j-1}(k-e_0) \\ &\quad + \chi_{\{j\neq N+1\}} \sum_{i=0}^{N-j} \chi_{\{k_{i+1}\neq 0\}}(k_i + \chi_{\{i\neq 0\}})\, a_{N,j}(k - e_0 + e_i - e_{i+1}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

证明。令 $N \geq 1$。首先，我们注意到 $a_{N,\,N}(Ne_0) = 1$（注意 $\mathcal{I}(N,\ N) = \{Ne_0\}$）。事实上，由 (3.8) 可得

$$a_{N+1,N+1}\big((N+1)e_0\big)\lambda_0^{N+1} = \mathbf{A}_{N+1,N+1}(\lambda) = \lambda_0 \mathbf{A}_{N,N}(\lambda) = a_{N,N}(Ne_0)\lambda_0^{N+1}$$

因此 $a_{N,\,N}(Ne_0) = a_{1,\,1}(e_0) = 1$。

现在固定 $j \in \{1, \dots, N\}$。由莱布尼茨法则可得

$$\Psi L\big((\mathcal{L}\Psi)^k\big) = \sum_{i=0}^{N-j} k_i (\mathcal{L}\Psi)^{k+e_0-e_i+e_{i+1}},$$

其中，对于 $k = (k_0,\ \dots,\ k_{N-j})$，我们使用了记号 $(\mathcal{L}\Psi)^k = \prod_{i=0}^{N-j} (L^i\Psi)^{k_i}$。

因此，由 (3.8) 和 (3.9) 可得

$$\mathbf{A}_{N+1,j}(\lambda) = \chi_{\{j\neq 1\}} \sum_{k\in\mathcal{I}(N,j-1)} a_{N,j-1}(k)\lambda^{k+e_0} + \sum_{k\in\mathcal{I}(N,j)} a_{N,j}(k) \sum_{i=0}^{N-j} k_i \lambda^{k+e_0-e_i+e_{i+1}}. \tag{3.12}$$

现在，关键的观察是

$$\big\{k + e_0 : k \in \mathcal{I}(N, j-1)\big\} = \mathcal{I}(N+1, j),$$

并且对于 $0 \leq i \leq N-j$

$$\big\{k + e_0 - e_i + e_{i+1} : k \in \mathcal{I}(N,j), k_i \neq 0\big\} = \mathcal{I}(N+1, j) \cap \{k_{i+1} \neq 0\},$$

这很容易验证。因此，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{N+1,j}(\lambda) &= \chi_{\{j\neq 1\}} \sum_{k\in\mathcal{I}(N+1,j)} a_{N,j-1}(k-e_0)\lambda^k \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-j} \sum_{k\in\mathcal{I}(N+1,j)} \chi_{\{k_{i+1}\neq 0\}}(k_i + \chi_{\{i\neq 0\}}) a_{N,j}(k - e_0 + e_i - e_{i+1})\lambda^k. \end{aligned}$$

这就证明了 (3.11)。 □

接下来，我们在某个特定点处计算 $\mathbf{A}_{N,j}$。[12]

引理 3.3. 设 $N \geq 1$ 和 $1 \leq j \leq N$。则

$$\mathbf{A}_{N,j}\big(0!, 1!, \dots, (N-j)!\big) = \frac{(2N-j-1)!}{2^{N-j}(N-j)!(j-1)!}. \tag{3.13}$$

[12] 其他一些 $\mathbf{A}_{N,j}$ 的取值已为人所知，参见 [5]。特别地，$\mathbf{A}_{N,j}(1, \dots, 1) = \left[{N \atop j}\right]$（第一类无符号斯特林数）以及 $\mathbf{A}_{N,j}(1, 1, 0, \dots, 0) = \left\{{N \atop j}\right\}$（第二类斯特林数）。(3.13) 右端出现的数是次数为 $N-1$ 的贝塞尔多项式的系数，它们乘以次数为 $N-j$ 的单项式，参见 [36, A001498]。

证明。 对于 $j = N$，特别是当 $N = 1$ 时，该引理成立，因为 $\mathbf{A}_{N,\,N}(\lambda) = \lambda_0^N$。否则，我们对 N 使用归纳法。在归纳步骤中，假设 $1 \le j \le N$，并注意到由 (3.12) 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{N+1,j}(\lambda_0,\dots,\lambda_{N+1-j}) &= \chi_{\{j\neq 1\}}\lambda_0\mathbf{A}_{N,j-1}(\lambda_0,\dots,\lambda_{N+1-j}) \\ &\quad + \sum_{k\in\mathcal{I}(N,j)} a_{N,j}(k)\left(\prod_{l=0}^{N-j}\lambda_l^{k_l}\right)\sum_{i=0}^{N-j}\frac{k_i\lambda_0\lambda_{i+1}}{\lambda_i}.\end{aligned}$$

因此，根据归纳假设及恒等式

$$\sum_{i=0}^{N-j}(i+1)k_i = 2N-j, \qquad k\in\mathcal{I}(N,j),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{N+1,j}\big(0!,\dots,(N+1-j)!\big) &= \frac{\chi_{\{j\neq 1\}}(2N-j)!}{2^{N+1-j}(N+1-j)!(j-2)!} + (2N-j)\frac{(2N-j-1)!}{2^{N-j}(N-j)!(j-1)!} \\ &= \frac{(2N-j)!\big[\chi_{\{j\neq 1\}}(j-1)+2(N-j+1)\big]}{2^{N+1-j}(N+1-j)!(j-1)!} \\ &= \frac{(2(N+1)-j-1)!}{2^{N+1-j}(N+1-j)!(j-1)!}.\end{aligned}$$

最后一个表达式就是将 N 替换为 $N+1$ 后的 (3.13) 右端。至此证明完成。□

为了从上方估计 $\Phi_{N,\,j}(\varphi)$，我们需要 $L^i\Psi(\varphi)$ 的上界，下面将给出这些上界。这里的关键观察是级数展开式（它可由余割函数的众所周知的展开式推出，参见例如 [6, pp.88–89]）

$$\Psi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2^{2n-1}-1)\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}\varphi^{2n}, \qquad \varphi\in[0,\pi). \tag{3.14}$$

这里 B_{2n} 是伯努利数，ζ 是黎曼ζ函数；注意 $\zeta(0) = -1/2$。(3.14) 中的展开式具有严格正的系数，而且显然 $L^i\Psi$ 具有相同形式，且系数也严格为正。因此，$L^i\Psi$、$i = 0,\ \dots,\ N-1$在 $[0,\pi)$ 上递增。利用正项级数，可以相当精确地估计 $[0,\pi/2]$ 上的最大值 $(L^i\Psi)(\pi/2)$。[13]

引理 3.4。设 $i\in\mathbb{N}$。则

$$0 < L^i\Psi(\varphi) \le L^i\Psi\Big(\frac{\pi}{2}\Big) < \frac{8^{i+1}i!}{3^{i+1}\pi^{2i}}, \qquad \varphi\in[0,\pi/2].$$

证明。 我们只需证明最后一个不等式。对于 $i = 0$，该不等式显然成立，因此假设$i \ge 1$。由 (3.14) 及 zeta 函数的级数表示可得

$$L^i\Psi\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \sum_{n=i}^{\infty}\frac{4(2^{2n-1}-1)\zeta(2n)2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot(2n-2i+2)}{(2\pi)^{2n}}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2n-2i}$$

[13]引理 3.4 的主要上界非常精确，但有几个初始的 i 除外（精度会随着 i 的增大而提高）。不过，对于这些 i，直接计算 $L^i\Psi(\pi/2)$ 的精确值是很容易的。有 $\Psi(\pi/2) = \pi/2 \approx 1.570796$ [≈ 2.666667]、$(L\Psi)(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.636620$ [≈ 0.720506]、$(L^2\Psi)(\pi/2) = 2/\pi - 8/\pi^3 \approx 0.378607$ [≈ 0.389347]以及 $(L^3\Psi)(\pi/2) = 96/\pi^5 \approx 0.313705$ [≈ 0.315593]，其中方括号内给出了引理 3.4 中相应的上界近似值。

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(2^{2n+2i-1}-1)\zeta(2n+2i)}{4^{2n}} \, \frac{(2n+2i)!!}{(2n)!!} \\
&= \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2}{2^{2n+2i}} - \frac{4}{4^{2n+2i}}\Big) \frac{\zeta(2n+2i)(2n+2i)!!}{(2n)!!} \\
&= \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2i} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k)^{2n+2i}} - \frac{4}{(4k)^{2n+2i}}\right) \frac{(2n+2i)!!}{(2n)!!} \\
&= 2\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2i} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2i)!!}{(2n)!!(2k)^{2n+2i}},
\end{aligned}
$$

其中在最后一个等式中，我们用到了如下事实：对于绝对收敛级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ，有 $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - 2b_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k$。利用归纳法，很容易验证

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2i)!!}{(2n)!!} x^{2n} = \frac{2^i i!}{(1-x^2)^{i+1}}, \qquad x \in (-1,1).
$$

由此得到恒等式

$$
L^i \Psi\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 8i! \Big(\frac{8}{\pi^2}\Big)^i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{(4k^2-1)^{i+1}}.
$$

现在，只需注意到上述交错级数严格小于首项，而首项等于 $3^{-(i+1)}$，即可完成证明。□

现在可以估计 $\Phi_{N,\,j}(\varphi)$。

引理 3.5。 设 $N \geq 1$ 和 $1 \leq j \leq N$。则

$$
0 < \Phi_{N,j}(\varphi) < \Big(\frac{8}{3}\Big)^N \Big(\frac{4}{3\pi^2}\Big)^{N-j} \Big(\frac{3\pi}{16}\Big)^j \frac{(2N-j-1)!}{(N-j)!(j-1)!}, \qquad \varphi \in [0, \pi/2].
$$

证明。由于 $a_{N,j}(k)$，$k \in \mathcal{I}(N,j)$ 严格为正，多项式 $\mathbf{A}_{N,j}(\lambda)$ 关于每个变量 $\lambda_i \geq 0$, $i = 0,\ldots, N-j$ 都严格递增。由于 $(L^i\Psi)(\varphi)$，$i = 0,1,2,\ldots$, 对于$\varphi \in [0,\pi/2]$都严格为正，因此 $\Phi_{N,j} > 0$ 在 $[0,\pi/2]$上成立。此外，我们可以通过估计 $\mathbf{A}_{N,j}(\lambda)$，直接得到 $\Phi_{N,j}$ 在 $[0,\pi/2]$ 上的上界；其中，对于 λ_i ，我们代入引理 3.4 中已得到的 $L^i\Psi$ 在 $[0,\pi/2]$上的上界（对于 $i=0$ ，我们使用更好的上界 $\Psi(\varphi) \leq \Psi(\pi/2) = \pi/2$）。由此得到

$$
\begin{aligned}
\Phi_{N,j}(\varphi) &\leq \mathbf{A}_{N,j}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{8^{1+1}\cdot 1!}{3^{1+1}\pi^{2\cdot 1}}, \ldots, \frac{8^{N-j+1}(N-j)!}{3^{N-j+1}\pi^{2(N-j)}}\right) \\
&\leq \Big(\frac{3\pi}{16}\Big)^j \mathbf{A}_{N,j}\left(\frac{8^{0+1}\cdot 0!}{3^{0+1}\pi^{2\cdot 0}}, \ldots, \frac{8^{N-j+1}(N-j)!}{3^{N-j+1}\pi^{2(N-j)}}\right) \\
&= \Big(\frac{8}{3}\Big)^N \Big(\frac{8}{3\pi^2}\Big)^{N-j} \Big(\frac{3\pi}{16}\Big)^j \mathbf{A}_{N,j}\big(0!, \ldots, (N-j)!\big);
\end{aligned}
$$

这里最后一个不等式由$\mathbf{A}_{N,j}$的结构推出，见 (3.9)；并且注意到，(3.9) 中的求和约束强制 $k_0 \geq j$ 成立，而接下来的恒等式则由 (3.10) 得出。

现在应用引理 3.3 即可完成证明。 □

我们继续给出辅助估计，以便控制（3.6）式的右端。接下来的目标是对由引理 3.5 的估计所产生的各项之和给出上界。我们不选择先对和式中的每一项分别进行估计，而是采用另一种策略，从而得到

更精确的最终上界。下面的引理本质上是 [40, 第三章，第 3·71 节，式（12）]；另见例如 [32, 第 4.1.7 节，式（19）]。

引理 3.6. 设 $N \geq 1$。则

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{(2N-j-1)!}{(N-j)!(j-1)!}\, x^j = x^N \left[\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{x/2} K_{N-1/2}(x/2)\right], \qquad x > 0,$$

其中 K_ν 是 阶数为 ν 的第二类修正贝塞尔函数（麦克唐纳函数） .

K_ν的标准渐近公式（参见 [40, 第 VII 章，第 7·23 节，公式 (1)]）给出

$$K_\nu(x/2) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-x/2}\Big(1 + \mathcal{O}\big(x^{-1}\big)\Big), \qquad x \to \infty,$$

这表明，引理 3.6 方括号中的表达式在 $x \to \infty$ 时趋于 1。为了估计该表达式，我们将使用推论 2.18 中关于 K_ν 的界。

在推论 2.18 中令 $\nu = N - 1/2$, $N \geq 1$，即可得到 $0 < \epsilon \leq 2/3$

$$\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{x/2} K_{N-1/2}(x/2) \leq (1+\epsilon)^{N-1}, \qquad x \geq \frac{4(N-1/2)}{3\epsilon}. \tag{3.15}$$

经过上述准备，现在我们回到上界估计

$$(-D)^N \vartheta_t(\varphi) = (-D)^N W_t(\varphi) + (-D)^N \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} W_t(\varphi + 2\pi n). \tag{3.16}$$

这里，$(-D)^N W_t$ 可视为主项，而右侧剩余部分则是误差项。我们先处理主项。

引理 3.7. 令 $N \geq 1$。那么对每个 $0 < \epsilon \leq 2/3$

$$\big|(-D)^N W_t(\varphi)\big| < \frac{1}{1+\epsilon}\left[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\right]^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad \varphi \in [0, \pi/2], \quad 0 < t \leq \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}.$$

证明。 考虑 $\varphi \in [0, \pi/2]$。令 $F = W_{1/4}$和 $v = (4t)^{-1/2}$，使得 $W_t(\varphi) = vF(v\varphi)$。利用 (3.6)，并注意到 $L^j F = (-2)^j F$，得到

$$\big|(-D)^N W_t(\varphi)\big| = W_t(\varphi)\left|\sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{-1}{2t}\Big)^j \Phi_{N,j}(\varphi)\right| \leq W_t(\varphi) \sum_{j=1}^{N} (2t)^{-j} \Phi_{N,j}(\varphi).$$

将最后一个和记为 $\mathcal{S}$，并令 $x = 9\pi^3/(128t)$。应用引理 3.5，再应用引理 3.6，得到

$$\mathcal{S} < \Big(\frac{32}{9\pi^2}\Big)^N \sum_{j=1}^{N} x^j \frac{(2N-j-1)!}{(N-j)!(j-1)!} = t^{-N}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N \left[\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{x/2} K_{N-1/2}(x/2)\right].$$

上 述方括号中的表达式可利用（3.15）进行上界估计。这给出 s

$$\mathcal{S} < t^{-N}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N (1+\epsilon)^{N-1}, \qquad x \geq \frac{4(N-1/2)}{3\epsilon}, \quad 0 < \epsilon \leq 2/3.$$

结论由此得出。 □

估 计（3.16）中的误差项，我们还需要两个辅助技术结果 s.

引理 3.8. 设 $j \geq 0$。那么

$$L^j \cosh z \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2^j \Gamma(j+1/2)} e^z, \qquad z \geq 0.$$

证明. 我们有

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

应用 L^j 并重新排列级数，我们得到

$$L^j \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2j-1)\cdot \ldots \cdot (2n+1)} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad j \geq 1.$$

由此可得

$$L^j \cosh z \leq \frac{1}{(2j-1)!!} \cosh z, \qquad z \geq 0, \quad j \geq 1.$$

由于，参见。 $[30, \S 5.4,$ 公式 $5.4.2], (2j-1)!! = 2^j \Gamma(j+1/2)/\sqrt{\pi}$，这就证明了该引理。 □

引理 3.9。上界

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/t} e^{\pi n \varphi/t} n^{2j} \leq e^{-\pi^2/(2t)} + \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2j+1} \Gamma(j+1/2) t^{j+1/2} e^{-2\pi^2/t}$$

对 $\varphi \in [0, \pi/2]$、$0 < t \leq \pi^2/(4N)$ 和 $1 \leq j \leq N$ 成立。

证明。设 φ, t 和 j 如陈述所述。注意，项 $n = 1$ 的上界为 $e^{-\pi^2/(2t)}$。另一方面，我们有

$$e^{-\pi^2 n^2/t} e^{\pi n \varphi/t} \leq e^{-2\pi^2/t} e^{-\pi^2 n^2/(4t)}, \qquad n \geq 2.$$

函数 $f_{j,t}\colon x \mapsto e^{-\pi^2 x^2/(4t)} x^{2j}$ 在区间 $(0, 2\sqrt{tj}/\pi)$ 上递增，在 $(2\sqrt{tj}/\pi, \infty)$ 上递减。对 j 和 t 的约束意味着 $f_{j,t}$ 在 $(1, \infty)$ 上递减。这意味着，对于所有 $n \geq 2$，$f_{j,t}(n) \leq \int_{n-1}^{n} f_{j,t}$。因此，我们得到

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/(4t)} n^{2j} \leq \int_0^{\infty} e^{-\pi^2 x^2/(4t)} x^{2j} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2j+1} t^{j+1/2} \Gamma(j+1/2),$$

其中，为了得到最后一个恒等式，我们作变量代换 $\pi^2 x^2/(4t) \mapsto y$。

综上，以上结果给出了所需结论。 □

现在我们可以估计式（3.16）中的误差项了。

引理 3.10。设 $N \geq 2$。那么对于每个 $0 < \epsilon \leq 1/3$，上界

$$\Big| (-D)^N \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} W_t(\varphi + 2\pi n) \Big| \leq \frac{21}{500} \frac{1}{1+\epsilon} \Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^N t^{-N} W_t(\varphi)$$

对于 $\varphi \in [0, \pi/2]$ 和 $0 < t \leq 27\pi^3 \epsilon/[512（N - 1/2）]$成立。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
(-D)^N \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} W_t(\varphi + 2\pi n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-D)^N \big[W_t(\varphi - 2\pi n) + W_t(\varphi + 2\pi n) \big] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-D)^N \Big[2 e^{-\pi^2 n^2/t} W_t(\varphi) \cosh \frac{\pi n \varphi}{t} \Big] \\
&= (-1)^N 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/t} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} D^{N-k} W_t(\varphi) D_{\varphi}^{k} \Big[\cosh \frac{\pi n \varphi}{t} \Big],
\end{aligned}$$

其中最后一步我们对 D 应用了莱布尼茨法则。只需适当地估计表达式

$$\mathsf{S} := 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/t} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \big|D^{N-k} W_t(\varphi)\big| \left| D_\varphi^k \Big[\cosh \frac{\pi n \varphi}{t} \Big] \right|.$$

接下来，我们将 S 中对应于 $k = 0$ 的部分单独取出，记为 S_0。在整个证明过程中，我们假设 $0 < \epsilon \le 1/3$、$\varphi \in [0, \pi/2]$ 和 $0 < t \le 27\pi^3\epsilon/[512(N - 1/2)]$。

考虑 S_0, ，利用上界 $\cosh z \le e^z$、$z \ge 0$，可得

$$\mathsf{S}_0 \le 2\big|D^N W_t(\varphi)\big| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n(n-1/2)/t}. \tag{3.17}$$

由于关于 t 的约束蕴含 $t \le \pi/8$，我们可以将上述级数估计为

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n(n-1/2)/t} \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-8\pi n(n-1/2)} < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[4]{2}+1}{\Gamma(3/4)} \sqrt[4]{\frac{\pi}{32}} - 1 \right) \approx 3.487342 \cdot 10^{-6};$$

这里唯一的等式来自对 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi n^2}$ 的求值，例如可参见 [44, 第 5] 节。另一方面，为了给出 $|D^N W_t(\varphi)|$ 的上界，我们使用引理 3.7。由此可得

$$\mathsf{S}_0 < 7 \cdot 10^{-6} \, \frac{1}{1+\epsilon} \Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon) \Big]^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad t \le \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}. \tag{3.18}$$

We 接下来估计 $\mathsf{S} - \mathsf{S}_0$。在 (3.6) 中取 $F = \cosh$ 和 $v = \pi n/t$，得到

$$D_\varphi^k \Big[\cosh \frac{\pi n \varphi}{t} \Big] = \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{\pi n}{t} \Big)^{2j} L^j(\cosh)\Big(\frac{\pi n \varphi}{t} \Big) \Phi_{k,j}(\varphi).$$

接下来，利用引理 3.5 和引理 3.8，我们得到

$$\left| D_\varphi^k \Big[\cosh \frac{\pi n \varphi}{t} \Big] \right| \le \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{\pi n}{t} \Big)^{2j} \frac{\sqrt{\pi}}{2^j \Gamma(j+1/2)} e^{\pi n \varphi/t} \Big(\frac{8}{3} \Big)^k \Big(\frac{4}{3\pi^2} \Big)^{k-j} \Big(\frac{3\pi}{16} \Big)^j \frac{(2k-j-1)!}{(k-j)!(j-1)!}.$$

Co将其与 S 的表达式结合，再应用引理 3.9，我们看到 at

$$\begin{aligned} \mathsf{S} - \mathsf{S}_0 &\le 2\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \big|D^{N-k} W_t(\varphi)\big| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/t} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{\pi n}{t} \Big)^{2j} \frac{\sqrt{\pi} e^{\pi n \varphi/t}}{2^j \Gamma(j+1/2)} \Big(\frac{8}{3} \Big)^k \Big(\frac{4}{3\pi^2} \Big)^{k-j} \Big(\frac{3\pi}{16} \Big)^j \frac{(2k-j-1)!}{(k-j)!(j-1)!} \\ &\le I_1 + I_2, \end{aligned}$$

其中

$$I_1 := 2\sqrt{\pi} e^{-\pi^2/(2t)} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \big|D^{N-k} W_t(\varphi)\big| \Big(\frac{32}{9\pi^2} \Big)^k \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{9\pi^5}{128 t^2} \right)^j \frac{1}{\Gamma(j+1/2)} \frac{(2k-j-1)!}{(k-j)!(j-1)!},$$

$$I_2 := \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2\pi^2/t} \sqrt{t} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \big|D^{N-k} W_t(\varphi)\big| \Big(\frac{32}{9\pi^2} \Big)^k \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{9\pi^3}{32 t} \right)^j \frac{(2k-j-1)!}{(k-j)!(j-1)!}.$$

我们将分别对 I_1 和 I_2 求上界，并首先考虑 I_1。

由于 $x^j e^{-x} \le j^j e^{-j}$、 $x>0$、 $j\ge 1$，我们有 $e^{-\pi^2/(4t)} \le j^j e^{-j}(4t/\pi^2)^j$。结合引理 2.15 可得

$$e^{-\pi^2/(4t)} \le \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{4t}{\pi^2}\Big)^j \Gamma(j+1/2), \qquad j\ge 1.$$

因此，

$$I_1 \le \sqrt{2}\, e^{1/12} e^{-\pi^2/(4t)} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \big|D^{N-k} W_t(\varphi)\big| \Big(\frac{32}{9\pi^2}\Big)^k \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{9\pi^3}{32t}\Big)^j \frac{(2k-j-1)!}{(k-j)!(j-1)!}. \tag{3.19}$$

由引理 3.6 和 (3.15)，可得 $1\le k\le N$

$$\Big(\frac{32}{9\pi^2}\Big)^k \sum_{j=1}^{k} \Big(\frac{9\pi^3}{32t}\Big)^j \frac{(2k-j-1)!}{(k-j)!(j-1)!} \le \Big(\frac{\pi}{t}\Big)^k (1+\epsilon)^{k-1}, \qquad t\le \frac{27\pi^3\epsilon}{128(k-1/2)}, \tag{3.20}$$

并且由引理 3.7 可知，对于 $1\le k\le N-1$

$$\big|D^{N-k} W_t(\varphi)\big| < \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{N-k} (1+\epsilon)^{N-k-1} t^{-(N-k)} W_t(\varphi), \qquad t\le \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-k-1/2)}.$$

因此，将对应于 $k=N$ 的项也包括在内，

$$\begin{aligned} I_1 &\le \sqrt{2}\, e^{1/12} e^{-\pi^2/(4t)} \frac{1}{1+\epsilon}\Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^N t^{-N} W_t(\varphi) \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 4^k \\ &= \Big(\sqrt{2}\, e^{1/12} e^{-\pi^2/(4t)} (5^N-1)\Big) \frac{1}{1+\epsilon}\Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad t\le \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}. \end{aligned}$$

这里我们可以对括号中的因子给出上界

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\, e^{1/12} e^{-\pi^2/(4t)} (5^N-1) &\le \sqrt{2}\, e^{1/12} e^{-128(N-1/2)/(27\pi\epsilon)} (5^N-1) \\ &\le \sqrt{2}\, e^{1/12} e^{-128(N-1/2)/(9\pi)} (5^N-1), \end{aligned}$$

最后一个表达式在 $N\ge 2$ 上、 $N=2$ 取值时达到最大值，即 $24\sqrt{2}\, e^{1/12-64/(3\pi)} \approx 0.041476$。因此

$$I_1 < \frac{415}{10000}\, \frac{1}{1+\epsilon}\Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad t\le \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}. \tag{3.21}$$

还需要估计 I_2。按照处理 I_1 的方法，我们得到

$$I_2 \le \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2\pi^2/t} \sqrt{t}\big(5^N-1\big)\right) \frac{1}{1+\epsilon}\Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad t\le \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}.$$

这里的因子 括号中的项可以通过代入 t 的最大允许值来估计 ，

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2\pi^2/t} \sqrt{t}\big(5^N-1\big) \le \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1024(N-1/2)/(27\pi\epsilon)} \sqrt{\frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}}\big(5^N-1\big).$$

上面的右端表达式在 $0<\epsilon\le 1/3$ 和 $N\ge 2$ 上、 $\epsilon=1/3$ 和 $N=2$ 取值时达到最大值，即 $3\sqrt{3\pi} e^{-512/(3\pi)} \approx 4.167091\cdot 10^{-23}$。因此

$$I_2 < 10^{-22}\, \frac{1}{1+\epsilon}\Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad t\le \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}. \tag{3.22}$$

汇总 由界 (3.18)、(3.21) 和 (3.22)，我们得出引理中所述的估计 ma. □

总结 总结第 3.2 节的主要结果，引理 3.7 和引理 3.10 可推出以下结论 .

定理 3.11。设 $N \geq 2$。那么对于每个 $0 < \epsilon \leq 1/3$

$$(-D)^N \vartheta_t(\varphi) < \Big(1 + \frac{21}{500}\Big) \frac{1}{1+\epsilon} \Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad \varphi \in [0, \pi/2], \quad 0 < t \leq \frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}.$$

注意到 $27\pi^3/512 \approx 1.635097$。

3.3. $-D(-D)^N \vartheta_t(\varphi)$ $t \lesssim 1/N^2$**时的改进的上界**。

本节介绍另一种估计 $(-D)^N W_t(\varphi)$ 的方法，由此可在 $(-D)^N \vartheta_t(\varphi)$ 的上界中得到更好的乘法常数（就其对 N 的依赖而言）。不过，这一改进需要限制允许的 t 范围。

我们从若干预备技术结果开始。定义

$$h_1(\varphi) = \varphi, \qquad h_{j+1}(\varphi) = h_j'(\varphi)\sin\varphi - (2j-1)h_j(\varphi)\cos\varphi, \qquad j \geq 1. \tag{3.23}$$

此外，对于 $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$，令

$$g_j(\varphi) = \frac{h_j(\varphi)}{(\sin\varphi)^{2j-1}}, \qquad j \geq 1.$$

注意到 $g_{j+1}(\varphi) = Dg_j(\varphi)$, $j \geq 1$，其中 D 在 (3.2) 中定义。因此 $g_j = D^{j-1}\Psi$, $j \geq 1$，其中Ψ在 (3.7) 中定义。我们还引入函数

$$w_j(\varphi) = \frac{h_j(\varphi)(\pi-\varphi)^{j-1}}{j!\varphi^j(\sin\varphi)^{j-1}}, \qquad j \geq 1.$$

引理 3.12. 函数 $h_j(\varphi)$、 $j \geq 1$ 均为非负函数，且关于 $\varphi \in [0, \pi]$递增。此外，对于 $j \geq 1$

$$h_{j+1}'(\varphi) = j^2 h_j(\varphi)\sin\varphi. \tag{3.24}$$

证明. 由于 $h_j(0) = 0$, $j \geq 1$，且 $h_1 \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上，只需证明 (3.24)。下面用归纳法证明。

直接验证可知，(3.24) 对 $j = 1$成立。现在假设 (3.24) 对某个 $j \geq 1$成立。由 (3.23) 及归纳假设

$$\begin{aligned}
h_{j+2}'(\varphi) &= \big[j^2 h_j(\varphi)\sin^2\varphi - (2j+1)h_{j+1}(\varphi)\cos\varphi\big]' \\
&= 2j^2 h_j(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + j^2 h_j'(\varphi)\sin^2\varphi - (2j+1)h_{j+1}'(\varphi)\cos\varphi + (2j+1)h_{j+1}(\varphi)\sin\varphi \\
&= 2j^2 h_j(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + j^2 h_j'(\varphi)\sin^2\varphi - (2j+1)j^2 h_j(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi \\
&\quad + (2j+1)h_j'(\varphi)\sin^2\varphi - (4j^2-1)h_j(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi \\
&= -(j+1)^2(2j-1)h_j(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + (j+1)^2 h_j'(\varphi)\sin^2\varphi \\
&= (j+1)^2 h_{j+1}(\varphi)\sin\varphi.
\end{aligned}$$

引理得证。 □

注 3.13. 令 $j \geq 1$。以下二步递推关系成立：

$$\begin{aligned}
h_{j+2}(\varphi) &= -(2j+1)\cos\varphi\, h_{j+1}(\varphi) + j^2\sin^2\varphi\, h_j(\varphi), \\
g_{j+2}(\varphi) &= \frac{1}{\sin^2\varphi}\Big[-(2j+1)\cos\varphi\, g_{j+1}(\varphi) + j^2 g_j(\varphi)\Big], \\
w_{j+2}(\varphi) &= -\frac{2j+1}{j+2}\cot\varphi\,\frac{\pi-\varphi}{\varphi}\,w_{j+1}(\varphi) + \frac{j^2}{(j+1)(j+2)}\left(\frac{\pi-\varphi}{\varphi}\right)^2 w_j(\varphi).
\end{aligned}$$

h_j 的关系可通过结合(3.23) （将 j 替换为 $j+1$）与(3.24)来验证。其余关系均可由关于 h_j 的关系推出。

引理 3.1 **4.** 函数$g_j(\varphi)$、 $j \geq 1$在$(0,\pi)$上均为正且单调递增。此外，

$$g_j(\varphi) \leq g_j\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{cases} \big[(j-2)!!\big]^2 & if\ j \geq 2\ is\ even \\ \pi\big[(j-2)!!\big]^2/2 & if\ j \geq 2\ is\ odd \\ \pi/2 & if\ j = 1 \end{cases}, \qquad \varphi \in (0, \pi/2]. \tag{3.25}$$

证明。 由引理 3.12 可知，g_j 为正。此外，利用 (3.23) 可得

$$g_j'(\varphi) = \frac{h_j'(\varphi)(\sin\varphi)^{2j-1} - (2j-1)h_j(\varphi)(\sin\varphi)^{2j-2}\cos\varphi}{(\sin\varphi)^{4j-2}} = \frac{h_{j+1}(\varphi)}{(\sin\varphi)^{2j}}.$$

由此结合引理 3.12 可知，g_j 是递增的。

接下来只需证明 (3.25)。注意到 $g_j(\varphi) \leq g_j(\pi/2) = h_j(\pi/2)$。利用 (3.23) 和 (3.24) 可得递推关系

$$h_{j+1}(\pi/2) = h_j'(\pi/2) = (j-1)^2 h_{j-1}(\pi/2), \qquad j \geq 2.$$

结合 $h_1(\pi/2) = \pi/2$ 和 $h_2(\pi/2) = 1$，可得以下公式

$$h_{2j}(\pi/2) = \big[(2j-2)!!\big]^2, \qquad h_{2j+1}(\pi/2) = \frac{\pi}{2}\big[(2j-1)!!\big]^2, \qquad j \geq 1.$$

证明完毕。 □

现在我们可以估计 $w_j(\varphi)$，但得到的上界并非最优。[14]

推论 3.15。对于每个 $j \geq 1$,

$$w_j(\varphi) \leq \pi^{j-1}, \qquad \varphi \in (0, \pi/2].$$

证明。 利用引理 3.14，我们推得 $w_1(\varphi) = 1$ 且对于 $j \geq 2$ 和 $\varphi \in (0, \pi/2]$

$$w_j(\varphi) = \frac{g_j(\varphi)(\pi-\varphi)^{j-1}(\sin\varphi)^j}{j!\varphi^j} \leq \frac{\big[(j-2)!!\big]^2\pi^j}{2j!} \leq \frac{(j-1)!\pi^j}{2j!} \leq \frac{\pi^j}{4} \leq \pi^{j-1},$$

如所求。 □

下一个结果基本上已为人所知。它可由部分 Bell 多项式的精确表达式 $\mathbf{B}_{N,\,n}$（见 [6, 定理 A，第 134] 页）与已知的特定取值 $\mathbf{B}_{N,\,n}(1!,\ 2!,\ 3!\ldots)$ 直接结合得到，见 [6, 公式 [3h], 第 135] 页。[15]

引理 3.16。 令 $N \geq 1$ 和 $s > 0$。那么

$$\sum_{k_1+\ldots+Nk_N=N} \frac{N!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_N!} s^{k_1+\ldots+k_N} = \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} \frac{(N-1)!}{(n-1)!} s^n,$$

其中，第一重求和遍历所有满足所示条件的 k_1、…、 $k_N \geq 0$。

完成上述准备后，我们现在可以证明以下结果。

引理 3.17。 设 $N \geq 1$。那么对于每个 $\delta > 0$

$$\big|(-D)^N W_t(\varphi)\big| \leq e^{\delta}\Big(\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad \varphi \in [0, \pi/2], \quad 0 < t \leq \frac{\delta}{4N^2}.$$

[14]我们相信，更强的估计 $w_j(\varphi) \leq (\pi/2)^{j-1},\ \varphi \in (0, \pi/2]$ 成立，但证明起来似乎要复杂得多。在这方面，注 3.13 中的关系可能会有帮助。引理 3.16 中恒等式右侧出现的数作为系数，正是（无符号）拉赫数，参见 [6, 第 156] 页。

证明。 在整个证明过程中，我们假设 N， δ， t， φ 如陈述中所述。根据 Fa`a di Bruno 公式，参见 [6, 第三章，第 3 节。4], [16]

$$(-D)^N W_t(\varphi) = W_t(\varphi) \sum_{k_1+\ldots+Nk_N=N} \frac{N!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_N!}(2t)^{-(k_1+\ldots+k_N)} \prod_{j=1}^{N} \Big(\frac{(-1)^{j+1}g_j(\varphi)}{j!}\Big)^{k_j}.$$

然后利用函数 h_j 和 w_j ，我们可得

$$\begin{aligned}(-D)^N W_t(\varphi) &= \Big(\frac{\varphi}{2t\sin\varphi}\Big)^N W_t(\varphi)\\ &\quad\times \sum_{k_1+\ldots+Nk_N=N} \frac{N!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_N!}\Big(\frac{2t}{\pi-\varphi}\Big)^{N-(k_1+\ldots+k_N)} \prod_{j=1}^{N}\big[(-1)^{j+1}w_j(\varphi)\big]^{k_j}.\end{aligned}$$

这可以写成

$$(-D)^N W_t(\varphi) = \Big(\frac{\varphi}{2t\sin\varphi}\Big)^N W_t(\varphi)\big[1+E_{t,N}(\varphi)\big],$$

其中

$$E_{t,N}(\varphi) := \sum_{\substack{k_1+\ldots+Nk_N=N\\ k_1\neq N}} \frac{N!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_N!}\Big(\frac{2t}{\pi-\varphi}\Big)^{N-(k_1+\ldots+k_N)} \prod_{j=1}^{N}\big[(-1)^{j+1}w_j(\varphi)\big]^{k_j}.$$

只需证明 $|E_{t,N}(\varphi)| \le e^{\delta}-1$ ，为此我们可以假设 $N\ge 2$。根据推论 3.15，我们有

$$\begin{aligned}|E_{t,N}(\varphi)| &\le \sum_{\substack{k_1+\ldots+Nk_N=N\\ k_1\neq N}} \frac{N!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_N!}\Big(\frac{2t}{\pi/2}\Big)^{N-(k_1+\ldots+k_N)} \prod_{j=1}^{N}\pi^{jk_j-k_j}\\ &= \sum_{\substack{k_1+\ldots+Nk_N=N\\ k_1\neq N}} \frac{N!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_N!}(4t)^{N-(k_1+\ldots+k_N)}\\ &\le \sum_{\substack{k_1+\ldots+Nk_N=N\\ k_1\neq N}} \frac{N!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_N!}\Big(\frac{\delta}{N^2}\Big)^{N-(k_1+\ldots+k_N)}.\end{aligned}$$

现在应用引理 3.16，其中 $s=N^2/\delta$ ，可得

$$|E_{t,N}(\varphi)| \le \sum_{n=1}^{N-1}\binom{N}{n}\frac{(N-1)!}{(n-1)!}\Big(\frac{\delta}{N^2}\Big)^{N-n}.$$

将求和顺序反过来，我们得到

$$|E_{t,N}(\varphi)| \le \sum_{n=1}^{N-1}\binom{N}{n}\frac{(N-1)!}{(N-n-1)!}\Big(\frac{\delta}{N^2}\Big)^{n} = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{N!}{N^n(N-n)!}\frac{(N-1)!}{N^n(N-n-1)!}\frac{\delta^n}{n!}.$$

[16]经典的 Fa`a di Bruno 公式涉及两个函数复合后的逐次导数，详情及历史背景参见 [16, 8] 。该公式具有组合性质，并可像 [6, 第 3 节4]那样置于一个抽象框架中。这里我们采用经典公式的一个变体，将标准求导替换为 $-D$；使这一替换成立的关键事实是， $-D$ 满足莱布尼茨法则。

No注意到最后一个求和式下的前两个因子均不超过 1。因此 s

$$|E_{t,N}(\varphi)| \le \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\delta^n}{n!} \le e^{\delta} - 1,$$

至此，证明完成。 □

推论 3.18. 设 $N \ge 1$。则对每个 $\delta > 0$

$$\big|(-D)^N W_t(\varphi)\big| \le e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad \varphi \in [0,\pi/2], \quad 0 < t \le \frac{\delta}{4N^2}.$$

接下来，我们估计 (3.16) 中的误差项。

引理 3.19. 设 $N \ge 1$。则对每个 $0 < \delta \le N$

$$\left|(-D)^N \sum_{0\ne n\in\mathbb{Z}} W_t(\varphi + 2\pi n)\right| \le \frac{1}{1000} e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad \varphi \in [0,\pi/2], \quad 0 < t \le \frac{\delta}{4N^2}.$$

证明. 推理过程与引理 3.10 的证明类似，主要区别在于现在我们使用推论 3.18，而不是引理 3.7。沿用引理 3.10 证明中的记号，我们需要对 S 给出上界，并将此任务分解为分别估计 S_0、 I_1 和 I_2（这些表达式现在与之前相同）。在整个证明过程中，我们假设 $\varphi \in [0,\pi/2]$, $\delta \le N$和 $t \le \delta/(4N^2)$。那么所考虑的 t 不大于 $1/(4N)$。此外，我们指定 $\epsilon = 128/(27\pi^3)$，使得$1/(4N) < 27\pi^3\epsilon/[512(N-1/2)]$。

由于对 t 的约束蕴含 $t \le 1/4 < \pi/10$，我们有（见 (3.17)）

$$\mathsf{S}_0 \le 2\big|D^N W_t(\varphi)\big| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n(n-1/2)/t} \le \big|D^N W_t(\varphi)\big| \sum_{0\ne n\in\mathbb{Z}} e^{-5\pi n^2}.$$

利用 [44, 定理 5.5(v) 对最后一个级数 [17] 求值，我们得到]

$$\sum_{0\ne n\in\mathbb{Z}} e^{-5\pi n^2} = \frac{\pi^{1/4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\Gamma(3/4)5^{3/4}} - 1 \approx 3.014035\cdot 10^{-7}.$$

由此结合推论 3.18，得到

$$\mathsf{S}_0 \le \frac{1}{3}10^{-6} e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad t \le \frac{\delta}{4N^2}.$$

考虑 I_1，将 (3.19) 与 (3.20) 及推论 3.18 结合，得到

$$\begin{aligned} I_1 &\le \frac{\sqrt{2}\,e^{1/12}}{1+\epsilon} e^{-\pi^2/(4t)} e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi) \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \Big[\frac{64}{3\pi}(1+\epsilon)\Big]^k \\ &\le \left\{\frac{\sqrt{2}\,e^{1/12}}{1+\epsilon}\left(\Big[\frac{64}{3\pi}(1+\epsilon)+1\Big]^N - 1\right) e^{-\pi^2 N}\right\} e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi). \end{aligned}$$

回想一下， $\epsilon = 128/(27\pi^3)$。上面的花括号内的表达式在 $N = 1, 2, \ldots$ 上取最大值（ $N = 1$），且最大值为 ≈ 0.000540。因此

$$I_1 \le 6\cdot 10^{-4} e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad t \le \frac{\delta}{4N^2}.$$

[17]我们可以使用更精确的上界 $1/4 < \pi/12$，并借助 [44,定理 5.5(vi)], 计算级数 $\sum_{0\ne n\in\mathbb{Z}} e^{-6\pi n^2}$，但这样得到的公式会复杂得多。

对 I_2 的估计也非常类似，我们得到

$$I_2 \le \frac{2}{\sqrt{\pi}(1+\epsilon)}\sqrt{t}e^{-2\pi^2/t}e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N}W_t(\varphi)\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\Big[\frac{64}{3\pi}(1+\epsilon)\Big]^k$$
$$\le \left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}(1+\epsilon)}\sqrt{\frac{1}{4N}}\left(\Big[\frac{64}{3\pi}(1+\epsilon)+1\Big]^N-1\right)e^{-8\pi^2N}\right\}e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N}W_t(\varphi).$$

同样，花括号中的表达式在 $N=1$ 时取最大值，其值为 $\approx 1.962529\cdot 10^{-34}$。因此，

$$I_2 \le 2\cdot 10^{-34}e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N}W_t(\varphi), \qquad t\le\frac{\delta}{4N^2}.$$

由上述关于 S_0、I_1 和 I_2 的界可直接得到该引理。 □

总结第 3.3 节的主要结果，推论 3.18 和引理 3.19 可推出以下结论。

定理 3.20。设 $N\ge 1$。则对每个 $0<\delta\le N$

$$(-D)^N\vartheta_t(\varphi) < \Big(1+\frac{1}{1000}\Big)e^{\delta}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N}W_t(\varphi), \qquad \varphi\in[0,\pi/2],\quad 0<t\le\frac{\delta}{4N^2}.$$

注意，$e\pi/4\approx 2.134934$（当取 $\delta=N$ 时，该常数作为幂底数出现）。

3.4. **ϑ_t 的上界(φ)和 $-D\vartheta_t(\varphi)$ 的上界**。

我们将对定义 $\vartheta_t(\varphi)$ 的级数进行简单直接的分析，以建立当 $N=0,1$ 时 $(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 的上界。对于 $N=1$，这将是对先前所得估计的改进。

命题 3.21。有

$$\vartheta_t(\varphi) < \Big[1+2e^{-\pi^2/(2t)}\Big]W_t(\varphi), \qquad \varphi\in[0,\pi/2],\quad 0<t\le\pi^2/2.$$

证明。注意到

$$\vartheta_t(\varphi) = W_t(\varphi)\left(1+\sum_{0\ne n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n(\varphi+\pi n)/t}\right).$$

将上述级数记为 $S_t(\varphi)$。假设 $\varphi\in[0,\pi/2]$，我们可以写成

$$S_t(\varphi) = e^{-\pi(\pi-\varphi)/t}+\sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\ne 0,-1}e^{-\pi n(\varphi+\pi n)/t} \le e^{-\pi^2/(2t)}+\sum_{n\ge 1}e^{-\pi^2n^2/t}+\sum_{n\le -2}e^{-\pi^2n(2n+1)/(2t)}$$
$$< e^{-\pi^2/(2t)}+2\sum_{n\ge 1}e^{-\pi^2n^2/t} < e^{-\pi^2/(2t)}+2\sum_{n\ge 1}e^{-\pi^2n/t} = e^{-\pi^2/(2t)}+\frac{2e^{-\pi^2/t}}{1-e^{-\pi^2/t}}.$$

Thus

$$\vartheta_t(\varphi) < W_t(\varphi)\left[1+e^{-\pi^2/(2t)}+\frac{2e^{-\pi^2/t}}{1-e^{-\pi^2/t}}\right], \qquad \varphi\in[0,\pi/2],\quad t>0.$$

容易验证，当 $t\le\pi^2/2$ 时，上述方括号中的第二项大于第三项。结论由此得出。□

注意，命题 3.21 中方括号内的表达式关于 t递增。在$t=1$ 处，其值为 ≈ 1.014384；在 $t=\pi/2$ 处，其值为 ≈ 1.086428。

命题 3.22. 有

$$-D\vartheta_t(\varphi) < \frac{\pi}{4}t^{-1}W_t(\varphi), \qquad \varphi\in[0,\pi/2],\quad 0<t\le\pi^2/2.$$

证明。 通过直接计算可得

$$-D\vartheta_t(\varphi)=t^{-1}W_t(\varphi)\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\bigg(1+\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\varphi}(\varphi+2\pi n)e^{-\pi n(\varphi+\pi n)/t}\bigg).$$

我们需要估计上述级数，将其记为 $\mathcal{S}_t(\varphi)$。为了控制相关的抵消项，我们将对应于 $\pm n$的项配对。由此得到

$$\mathcal{S}_t(\varphi)=\sum_{n\geq1}e^{-\pi^2n^2/t}\Big[2\cosh\frac{\pi n\varphi}{t}-\frac{4\pi n}{\varphi}\sinh\frac{\pi n\varphi}{t}\Big],$$

每一项在 $\varphi=0$ 处的值均按极限意义理解。

将上面方括号中的表达式记为$f_{n,\,t}(\varphi)$。我们断言，对于每个固定的 $n\geq1$ 和 $0<t\leq\pi^2n^2/2$, $\varphi\mapsto f_{n,\,t}(\varphi)$在 $[0,\pi/2]$ 上是递减的。为证明这一断言，我们计算

$$f'_{n,t}(\varphi)=\frac{2\pi n}{\varphi t}\Big[\Big(\varphi+\frac{2t}{\varphi}\Big)\sinh\frac{\pi n\varphi}{t}-2\pi n\cosh\frac{\pi n\varphi}{t}\Big]$$

并注意到，只需证明

$$\frac{\varphi}{2\pi n}\leq\coth\frac{\pi n\varphi}{t}-\frac{t}{\pi n\varphi},\qquad\varphi\in[0,\pi/2],\quad t\leq\frac{\pi^2n^2}{2},\quad n\geq1. \tag{3.26}$$

设 $x=\pi n\varphi/t$。容易验证

$$\frac{\varphi}{2\pi n}\leq\frac{1\wedge x}{4},\qquad\varphi\in[0,\pi/2],\quad t\leq\frac{\pi^2n^2}{2},\quad n\geq1.$$

于是，由上界 $(1\wedge x)/4\leq$ 双曲余切 $x-1/x$, $x>0$（可直接验证）可得 (3.26)。命题得证。

由该命题可推得

$$f_{n,t}(\varphi)\leq f_{n,t}(0)=2-\frac{4\pi^2n^2}{t}<0,\qquad\varphi\in[0,\pi/2],\quad t\leq\frac{\pi^2n^2}{2},\quad n\geq1.$$

由此得到

$$\mathcal{S}_t(\varphi)\leq\sum_{n\geq1}e^{-\pi^2n^2/t}\bigg[2-\frac{4\pi^2n^2}{t}\bigg]<0,\qquad\varphi\in[0,\pi/2],\quad t\leq\frac{\pi^2}{2}.$$

因此，

$$-D\vartheta_t(\varphi)<t^{-1}W_t(\varphi)\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\leq\frac{\pi}{4}t^{-1}W_t(\varphi),\qquad\varphi\in[0,\pi/2],\quad t\leq\frac{\pi^2}{2},$$

如引理所述。 □

3.5. **关于**$(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$**的界的总结**。

下面的结果汇总了命题 3.1 中限定于 $\varphi\in[0,\pi/2]$ 的下界，以及定理 3.11、定理 3.20 和命题 3.21 和命题 3.22。

定理 3.23. 对于 $\varphi\in[0,\pi/2]$，以下关于$(-D)^N\vartheta_t(\varphi)$ 的界成立。

(a) 对于 $N\geq0$,

$$(-D)^N\vartheta_t(\varphi)\geq\frac{1}{2^N}e^{-tN^2}t^{-N}W_t(\varphi),\qquad t>0.$$

(b) 对于 $N\geq1$ 和 $\epsilon\in(0,1/3]$,

$$(-D)^N\vartheta_t(\varphi)<\Big(1+\frac{21}{500}\Big)\frac{1}{1+\epsilon}\Big[\frac{\pi}{4}(1+\epsilon)\Big]^Nt^{-N}W_t(\varphi),\qquad0<t\leq\frac{27\pi^3\epsilon}{512(N-1/2)}.$$

(c) 对于 $N \geq 1$ 和 $\delta \in (0, N]$,

$$(-D)^N \vartheta_t(\varphi) < \Big(1 + \frac{1}{1000}\Big) e^{\delta} \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^N t^{-N} W_t(\varphi), \qquad 0 < t \leq \frac{\delta}{4N^2}.$$

(d) 对于 $N = 0$ 和 $N = 1$,

$$\vartheta_t(\varphi) < \Big[1 + 2e^{-\pi^2/(2t)}\Big] W_t(\varphi), \qquad -D\vartheta_t(\varphi) < \frac{\pi}{4} t^{-1} W_t(\varphi), \qquad 0 < t \leq \frac{\pi^2}{2}.$$

定理 3.23 的 (b)–(d) 项，分别在 (b) 和 (c) 中选取特定的 $\epsilon = 256/(27\pi^3) \approx 0.305792$ 和 $\delta = 1$，推出以下结论。

推论 3.24. 设 $N \geq 0$。则

$$(-D)^N \vartheta_t(\varphi) < t^{-N} W_t(\varphi) \times \begin{cases} \mathfrak{w}_0\, \mathfrak{w}_1^N, & \text{if } 0 < t \leq \frac{1}{2N+1} \text{ and } N \geq 1 \\ \mathfrak{w}_0' \, (\pi/4)^N, & \text{if } 0 < t \leq \frac{1}{(2N+1)^2} \end{cases}, \qquad \varphi \in [0, \pi/2],$$

其中 $\mathfrak{w}_0$、$\mathfrak{w}_1$ 和 $\mathfrak{w}_0'$ 是由[18]给出的数值常数

$$\mathfrak{w}_0 := \Big(1 + \frac{21}{500}\Big) \frac{1}{1 + 256/(27\pi^3)}, \qquad \mathfrak{w}_0' := \Big(1 + \frac{1}{1000}\Big) e, \qquad \mathfrak{w}_1 := \frac{\pi}{4}\Big(1 + \frac{256}{27\pi^3}\Big).$$

结合定理 3.23(a)、推论 3.24 和 (3.4)，我们得到 $G_t^\lambda(x, 1)$ 在$\lambda \in \mathbb{N} - 1/2$ 和 $x \in [0, 1]$时的界。

推论 3.25. 设 $\lambda \in \mathbb{N} - 1/2$。对于 $\varphi \in [0, \pi/2]$，以下 G_t^λ(余弦 φ,1) 的界成立。

(a)

$$G_t^\lambda(\cos\varphi, 1) \geq \frac{1}{4^{\lambda+1/2}\Gamma(\lambda+1)} \frac{1}{t^{\lambda+1}} e^{-\varphi^2/(4t)}, \qquad t > 0.$$

(b)

$$\begin{aligned} G_t^\lambda(\cos\varphi, 1) &< \frac{\mathfrak{w}_0 (\mathfrak{w}_1/2)^{\lambda+1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} e^{t(\lambda+1/2)^2} \frac{1}{t^{\lambda+1}} e^{-\varphi^2/(4t)} \\ &\leq \frac{\mathfrak{w}_0 (\sqrt{e}\, \mathfrak{w}_1/2)^{\lambda+1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{1}{t^{\lambda+1}} e^{-\varphi^2/(4t)}, \qquad 0 < t \leq \frac{1}{2\lambda+2}, \quad \lambda \neq -1/2. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} G_t^\lambda(\cos\varphi, 1) &< \frac{\mathfrak{w}_0' (\pi/8)^{\lambda+1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} e^{t(\lambda+1/2)^2} \frac{1}{t^{\lambda+1}} e^{-\varphi^2/(4t)} \\ &\leq \frac{\sqrt[4]{e}\, \mathfrak{w}_0' (\pi/8)^{\lambda+1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{1}{t^{\lambda+1}} e^{-\varphi^2/(4t)}, \qquad 0 < t \leq \frac{1}{(2\lambda+2)^2}. \end{aligned}$$

推论 3.25 中上界与下界之间的差异比，在 $t \leq 1/(2\lambda+2)$ 情况下等于$\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\, \mathfrak{w}_1)^{\lambda+1/2}$，在 $t \leq 1/(2\lambda+2)$ 情况下等于 $\sqrt[4]{e}\, \mathfrak{w}_0' (\pi/2)^{\lambda+1/2}$。[19]

最后，我们给出特殊情形 $\lambda = \pm 1/2$ 下更精确的上界，参见定理 3.23(d)。推论 3.26 中的下界只是推论 3.25(a) 中上界针对 $\lambda = \pm 1/2$ 的具体化。

[18]注意，$\mathfrak{w}_0 \approx 0.797983$、$\mathfrak{w}_0' \approx 2.721$、$\mathfrak{w}_1 \approx 1.025567$ 和 $\pi/4 \approx 0.785398$。

[19]注意，$2\sqrt{e}\, \mathfrak{w}_1 \approx 3.381748$、$\sqrt[4]{e}\, \mathfrak{w}_0' \approx 3.493833$和 $\pi/2 \approx 1.570796$。

推论 3.26. 对于 $\varphi \in [0,\pi/2]$，以下关于 $G_t^{\pm 1/2}(\cos\varphi,1)$ 的界成立：

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{1/2}}e^{-\varphi^2/(4t)} \le G_t^{-1/2}(\cos\varphi,1) < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[1+2e^{-\pi^2/(2t)}\Big]\frac{1}{t^{1/2}}e^{-\varphi^2/(4t)}, \qquad 0<t\le\frac{\pi^2}{2},$$
$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\varphi^2/(4t)} \le G_t^{1/2}(\cos\varphi,1) < \frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{t}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\varphi^2/(4t)}, \qquad 0<t\le\frac{\pi^2}{2}.$$

此外，$G_t^{\pm 1/2}(\cos\varphi,1)$ 的下界对 $t>\pi^2/2$ 也成立。

4. The unified proof

在下文中，在步骤 A–F 的每一步，我们都将乘法常数表示为前一个“父”步骤中的乘法常数（步骤 A 的父步骤是第 3 节）的形式，以便之后能够将所有依赖关系追溯至起点。这样，每一步也都可以独立分析，或许将来也可以独立改进。从这个意义上说，步骤 A–F 与第 3 节共同构成了统一证明中的独立模块。

4.1. 步骤 A。

$G_t^{\lambda}(x,1)$ 关于 $x\in[0,1]$、$t\le T_A$ 和 $\lambda\in\mathbb{N}-1/2$ 的估计。

此步骤基于第 3 节的结果。

引理 A. 设 $\lambda\in\mathbb{N}-1/2$ 和 $T_A>0$。则

$$G_t^{\lambda}(\cos\theta,1)\simeq\left\{\begin{matrix}C^A_{\lambda,T_A}\\ c^A_{\lambda,T_A}\end{matrix}\right\}\frac{1}{t^{\lambda+1}}\exp\Big(-\frac{\theta^2}{4t}\Big)$$

对于 $0\le\theta\le\pi/2$ 和 $0<t\le T_A$，常数为

$$c^A_{\lambda,T_A}\equiv c^A_{\lambda,\infty}:=\frac{1}{4^{\lambda+1/2}\Gamma(\lambda+1)}$$

以及某个上乘法常数 $C^A_{\lambda,\,T_A}$，它可以根据对 λ 和T_A 的选择指定如下：

$$C^A_{\lambda,T_A}:=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\times\begin{cases}\mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^{\lambda+1/2} & \text{if } \lambda\neq\pm1/2 \text{ and } T_A=1/(2\lambda+2)\\ \sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^{\lambda+1/2} & \text{if } \lambda\neq\pm1/2 \text{ and } T_A=1/(2\lambda+2)^2\\ 1+2\exp(-\pi^2/(2T_A)) & \text{if } \lambda=-1/2 \text{ and } T_A\le\pi^2/2\\ \pi\exp(T_A)/8 & \text{if } \lambda=1/2 \text{ and } T_A\le\pi^2/2\end{cases}.$$

上述公式的第一行给出了正确的 $C^A_{\lambda,\,T_A}$，在 $\lambda=1/2$的情况下也成立；第二行则在两种情况下 $\lambda=\pm1/2$都给出了正确的 $C^A_{\lambda,\,T_A}$，但最后两行对这些 λ给出了更强的结果。

证明。 下界即为推论 3.25(a)。带有指定乘法常数的上界由推论 3.25 的 (b) 和 (c) 项以及推论 3.26 得出。乘法常数未指定且对 T_A 没有限制的上界[20] 由定理 1 得出。□

[20]后验地说，不对 T_A 施加约束的上界也可由对T_A施加约束的统一证明得到，参见第 5 节开头的讨论。

注 4.1。为继续统一证明的其余步骤，在步骤 *A* 中，只需估计核的偶部 $[G_t^\lambda(x,1)]_{even} = [G_t^\lambda(x,1) + G_t^\lambda(-x,1)]/2$；它可能具有更好的上界，但下界可能较差。注意，对于 $x \in [0,1]$，有 $G_t^\lambda(x,1)/2 \le [G_t^\lambda(x,1)]_{even} \le G_t^\lambda(x,1)$，第二个不等式是因为 $x \mapsto G_t^\lambda(x,1)$ 在 $[-1,1]$ 上递增，见引理 *2.1*。

4.2. **步骤 B.**

Est关于 $G^{\alpha,\beta}_{\cdot,t}(x,1)$ 的估计，其中 $x \in [0,1]$、$t \le T_B$ 和 $\alpha,\beta \ge -1/2$ 满足 $\alpha+\beta \in \mathbb{N}$.

此步骤基　　于步骤 A。相关的技术工具是引理 2.3(i) 和引理 2.1　　4.

引理 B. 设 α、$\beta \ge -1/2$ 满足 $\alpha+\beta \in \mathbb{N}$，且令 $T_B > 0$。则

$$G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1) \simeq \left\{ \begin{matrix} C^B_{\alpha,\beta,T_B} \\ c^B_{\alpha,\beta,T_B} \end{matrix} \right\} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \exp\Big(-\frac{\theta^2}{4t}\Big)$$

对于 $0 \le \theta \le \pi/2$ 和 $0 < t \le T_B$，其常数为

$$c^B_{\alpha,\beta,T_B} := c^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4} \times \frac{4^{\alpha+\beta+3/2} b_\beta}{\big[\mathbb{D}_\beta T_B \vee \mathfrak{B}\pi^2\big]^{\beta+1/2}} \times \frac{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}},$$

$$C^B_{\alpha,\beta,T_B} := C^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4} \times \frac{4^{\alpha+\beta+2} B_\beta}{(\mathfrak{b}\pi^2/2)^{\beta+1/2}} \times \frac{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

当在超球情形 $\lambda = \alpha = \beta$中引用引理 B 时，所得常数 $c^B_{\lambda,\lambda,T_B}$, $C^B_{\lambda,\lambda,T_B}$的记号将分别简写为 c^B_{λ,T_B}, C^B_{λ,T_B}。

引理 *B* 的证明。固定 $T_B > 0$。在证明过程中，我们考虑 $\theta \in [0,\pi/2]$ 和 $0 < t \le T_B$。由引理 2.3(i)

$$\begin{aligned} \frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1) &= \int G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(v\cos\frac{\theta}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v) \\ &\simeq \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \int_{[0,1]} G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(v\cos\frac{\theta}{2},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v), \end{aligned}$$

最后一个关系由核关于第一个变量的单调性（见引理 2.1）以及测度的对称性得出。

现在注意到 $v\cos\frac{\theta}{2} = \cos\sqrt{F_{\theta,0}(1,v)}$，其中 F在 (2.4) 中定义；再利用引理 A，得到

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1) \simeq \left\{ \begin{matrix} 2C^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4} \\ c^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4} \end{matrix} \right\} \Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+\beta+3/2} \int_{[0,1]} \exp\Big(-\frac{F_{\theta,0}(1,v)}{t}\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v).$$

为了估计最后一个积分，我们使用引理 2.14，得到

$$\int_{[0,1]} \exp\Big(-\frac{F_{\theta,0}(1,v)}{t}\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v) \simeq \left\{ \begin{matrix} B_\beta \Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi) \\ b_\beta \Psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi) \end{matrix} \right\} t^{\beta+1/2} \exp\Big(-\frac{\theta^2}{4t}\Big);$$

回顾（见式 (2.10)），$\Psi^{\kappa}_\beta(t,\theta,\varphi) = [\mathbb{D}_\beta t \vee \kappa\theta\varphi]^{-\beta-1/2}$。由于

$$\begin{aligned} \Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi) &\le \Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t,\pi/2,\pi) = [\mathbb{D}_\beta t \vee \mathfrak{b}\pi^2/2]^{-\beta-1/2} \le (\mathfrak{b}\pi^2/2)^{-\beta-1/2}, \\ \Psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi) &\ge \Psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t,\pi,\pi) = [\mathbb{D}_\beta t \vee \mathfrak{B}\pi^2]^{-\beta-1/2} \ge [\mathbb{D}_\beta T_B \vee \mathfrak{B}\pi^2]^{-\beta-1/2}, \end{aligned}$$

我们得到如下界

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1)\simeq\left\{\begin{array}{c}2C^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4}B_\beta(\mathfrak{b}\pi^2/2)^{-\beta-1/2}\\ c^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4}b_\beta[\mathbb{D}_\beta T_B\vee\mathfrak{B}\pi^2]^{-\beta-1/2}\end{array}\right\}\frac{4^{\alpha+\beta+3/2}}{t^{\alpha+1}}\exp\Big(-\frac{\theta^2}{4t}\Big).$$

引理得证。 □

注 4.2。引理 B 的证明表明，通过保留而不是估计因子 $\Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t、\ \pi/2、\ \pi)$ 和 $\psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t、\ \pi、\ \pi)$，可以加强该结果。于是，上界将具有如下形式

$$G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1)\simeq\left\{\begin{array}{c}\widetilde{C}^B_{\alpha,\beta,T_B}\Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t,\pi/2,\pi)\\ \widetilde{c}^B_{\alpha,\beta,T_B}\Psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t,\pi,\pi)\end{array}\right\}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\exp\Big(-\frac{\theta^2}{4t}\Big),$$

其中的常数为

$$\widetilde{c}^B_{\alpha,\beta,T_B}:=c^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4}\times4^{\alpha+\beta+3/2}b_\beta\times\frac{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}},$$

$$\widetilde{C}^B_{\alpha,\beta,T_B}:=C^A_{\alpha+\beta+1/2,T_B/4}\times4^{\alpha+\beta+2}B_\beta\times\frac{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

4.3。**步骤 C**。

$G_t^\lambda(x,\ 1)$ 的估计，其中 $x\in[0,1]$、$t\le T_C$ 和 $\lambda\in(0,\ \infty)$。

此步骤基于步骤 B 和引理 2.4。注意，$\lambda\in\mathbb{N}+1/2$ 已由引理 A 覆盖，而 $\lambda\in\mathbb{N}$ 已由引理 B 覆盖。

记

$$\omega_\lambda(t):=2^{\lceil2\lambda\rceil/2-\lambda}e^{(\lambda-\lceil2\lambda\rceil/2)(\lambda+\lceil2\lambda\rceil/2+1)t},$$

$$\Omega_\lambda(t):=2^{\lceil2\lambda\rceil/2-\lambda-1/2}e^{(\lambda-\lceil2\lambda\rceil/2+1/2)(\lambda+\lceil2\lambda\rceil/2+1/2)t}.$$

注意，对于 $\lambda>0$，函数 $\omega_\lambda(t)$ 关于 t 单调不增，而 $\Omega_\lambda(t)$ 单调递增。此外，

$$e^{-(\lambda+3/4)t}\le\omega_\lambda(t),\qquad\Omega_\lambda(t)\le e^{(\lambda+1/2)t},\qquad\lambda,t>0,\tag{4.1}$$

注意，关系 $\omega_\lambda(t)\le\Omega_\lambda(t)$ 通常并不成立。

引理 C. 设 $\lambda>0$ 且设 $T_C>0$。则

$$G_t^\lambda(\cos\theta,1)\simeq\left\{\begin{array}{c}C^C_{\lambda,T_C}\\ c^C_{\lambda,T_C}\end{array}\right\}\frac{1}{t^{\lambda+1}}\exp\Big(-\frac{\theta^2}{4t}\Big)$$

对于 $0\le\theta\le\pi/2$ 和 $0<t\le T_C$，其中常数为

$$c^C_{\lambda,T_C}:=c^B_{\lambda,\lceil2\lambda\rceil-\lambda,T_C}\times\omega_\lambda(T_C),\qquad C^C_{\lambda,T_C}:=C^B_{\lambda,\lceil2\lambda\rceil-\lambda-1,T_C}\times\Omega_\lambda(T_C).$$

证明。首先，我们注意到，对 $\epsilon=0$ 指定的引理 2.4 蕴含上界

$$G_t^{\alpha,\beta+\delta}(\cos\theta,1)\le2^{-\delta/2}e^{\frac{\delta}{2}(\alpha+\beta+1+\frac{\delta}{2})t}G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1),\qquad\theta\in[0,\pi/2],\quad t>0,\tag{4.2}$$

其中 $\alpha,\ \beta>-1$、$\delta\ge0$ 以及 $\beta\ge-\delta/2$（最后一个假设仅当 $\delta>0$ 时成立）。

在整个证明过程中，$\lambda>0$，并考虑满足以下条件的 $N\in\mathbb{N}$：

$$N<2\lambda\le N+1,$$

也就是 $N=\lceil2\lambda\rceil-1$。

取 $\alpha=\beta=\lambda$ 和 $\delta=N+1-2\lambda$。显然， $\delta\geq 0$ 和 $\beta>-\delta/2$。由于所选参数满足 (4.2) 的假设，我们得到上界（注意 $\delta/2=\lceil 2\lambda\rceil/2-\lambda$）

$$G_t^{\lambda,N+1-\lambda}(\cos\theta,1)\leq\frac{1}{\omega_\lambda(t)}G_t^{\lambda,\lambda}(\cos\theta,1),\qquad \theta\in[0,\pi/2],\quad t>0.$$

注意到 $\lambda+(N+1-\lambda)=N+1\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，并利用引理 B 中的下界，可得估计

$$G_t^{\lambda,\lambda}(\cos\theta,1)\geq\omega_\lambda(T_C)c^B_{\lambda,\lceil 2\lambda\rceil-\lambda,T_C}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right)$$

t适用于 $\theta\in[0,\pi/2]$ 和 $t\in(0,\ T_C]$。这是该引理的下界 a.

接下来，取 $\alpha=\lambda$ 和 $\beta=\lambda-\delta$，其中 $\delta=2\lambda-N$。显然， $\delta>0$。此外， $\beta\geq-1/2$ （这等价于 $\lambda\leq N+1/2$，而这成立是因为 $2\lambda\leq N+1$；注意，只有当$\lambda=1/2$时， $\beta=-1/2$ 才成立，这种情况实际上已由引理 A 涵盖），并且 $\beta\geq-\delta/2$ ，这很容易验证。因此，我们可以利用 (4.2) 写出（注意 $\delta/2=\lambda-\lceil 2\lambda\rceil/2+1/2$）

$$G_t^{\lambda,\lambda}(\cos\theta,1)\leq\Omega_\lambda(t)G_t^{\lambda,N-\lambda}(\cos\theta,1),\qquad \theta\in[0,\pi/2],\quad t>0.$$

注意到 λ $+(N-\lambda)=N\in\mathbb{N}$ 并利用引理 B 中的上界，得到 t o

$$G_t^{\lambda,\lambda}(\cos\theta,1)\leq\Omega_\lambda(T_C)C^B_{\lambda,\lceil 2\lambda\rceil-\lambda-1,T_C}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right)$$

对于 $\theta\in[0,\pi/2]$ 和 $t\in(0,T_C]$。这就是该引理的上界。 □

注释 4.3。 引理 *C* 可以表述为一个更简单但较弱的形式，将 $\omega_\lambda(T_C)$ 和 $\Omega_\lambda(T_C)$替换为 *(4.1)* 中的界。另一方面，保留 t 中的因子可以加强这一结果。将引理 *C* 的证明与注 *4.2* 结合，还可以进一步加强，从而得到以下界

$$G_t^\lambda(\cos\theta,1)\simeq\left\{\begin{array}{c}\widetilde{C}^B_{\lambda,\lceil 2\lambda\rceil-\lambda-1,T_C}\,\Psi^{\mathfrak{b}}_{\lceil 2\lambda\rceil-\lambda-1}(t,\pi/2,\pi)\,\Omega_\lambda(t)\\ \widetilde{c}^B_{\lambda,\lceil 2\lambda\rceil-\lambda,T_C}\,\Psi^{\mathfrak{B}}_{\lceil 2\lambda\rceil-\lambda}(t,\pi,\pi)\,\omega_\lambda(t)\end{array}\right\}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right)$$

对于 $0\leq\theta\leq\pi/2$ 和 $0<t\leq T_C$；此处 $\lambda>0$。

4.4. **步骤 D**。

G_t^λ（x，1）的估计，其中 $x\in[0,1]$、 $t\leq T_D$ 以及 $\lambda\in$（-1，0）。

这一步基于步骤 C、引理 2.1、热方程 (2.1) 以及引理 2.9。参见 [29, 引理 5.1] 的证明。注意，在下文的引理 D 中，对于 $\lambda=-1/2$ 的情形，我们本可以在证明中引用引理 A 而非引理 C，从而得到更好的常数；但我们暂且不作此改进，因为引理 D 不会用于这个特定的 λ 值。

引理 D。 设 $-1<\lambda<0$ 且 $T_D>0$。则

$$G_t^\lambda(\cos\theta,1)\simeq\left\{\begin{array}{c}C^D_{\lambda,T_D}\\ c^D_{\lambda,T_D}\end{array}\right\}\,\frac{1}{t^{\lambda+1}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right)$$

对于 $0\leq\theta\leq\pi/2$ 和 $0<t\leq T_D$，其常数

$$c^D_{\lambda,T_D}:=\frac{8(\lambda+1)}{\pi}e^{-(2\lambda+2)T_D}\left[c^C_{\lambda+1,T_D}\wedge\left(c^C_{\lambda+2,T_D}\times m_{\lambda+2}\times\frac{8(\lambda+2)}{\pi}e^{-(2\lambda+4)T_D}\right)\right],$$

$$C^D_{\lambda,T_D}:=4(\lambda+1)\left[C^C_{\lambda+1,T_D}\vee\left(C^C_{\lambda+2,T_D}\times M_{\lambda+2}\times\frac{16(\lambda+2)}{\pi^2}\times\left(\frac{16T_D}{\pi^2}+1\right)^{\lambda+1}\right)\right].$$

证明。我们首先估计 $G_t^\lambda(0,1)$。回忆一下，$G_t^\lambda(x,1)$ 满足基于 Jacobi-超球算子 J^λ 的热方程 (2.1)，并两次应用引理 2.1，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_t^\lambda(0,1) = -J_x^\lambda G_t^\lambda(x,1)\big|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G_t^\lambda(x,1)\big|_{x=0} = 4(\lambda+1)(\lambda+2)e^{-t(4\lambda+6)}G_t^{\lambda+2}(0,1).$$

借助引理 C 对最后一个表达式进行估计，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_t^\lambda(0,1) \simeq \left\{\begin{array}{c} C^C_{\lambda+2,T_D} \\ c^C_{\lambda+2,T_D}e^{-(4\lambda+6)T_D}\end{array}\right\} 4(\lambda+1)(\lambda+2)t^{-\lambda-3}e^{-\pi^2/(16t)}, \qquad t\le T_D.$$

于是，由于 $G_t^\lambda(0,\ 1)\to 0$ as $t\to 0^+$（这可由上述结果结合引理 5 的证明中给出的论证推出；也可视为引理 5 的推论），我们有

$$G_t^\lambda(0,1) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G_\tau^\lambda(0,1)\,\mathrm{d}\tau \simeq \left\{\begin{array}{c} C^C_{\lambda+2,T_D} \\ c^C_{\lambda+2,T_D}e^{-(4\lambda+6)T_D}\end{array}\right\} 4(\lambda+1)(\lambda+2)\int_0^t \tau^{-\lambda-3}e^{-\pi^2/(16\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

在这里，我们对最后一个积分作变量代换，然后应用引理 2.9，得到

$$\begin{aligned}\int_0^t \tau^{-\lambda-3}e^{-\pi^2/(16\tau)}\,\mathrm{d}\tau &= \Big(\frac{16}{\pi^2}\Big)^{\lambda+2}\int_{\frac{\pi^2}{16t}}^\infty u^{(\lambda+2)-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &\simeq \left\{\begin{array}{c} M_{\lambda+2} \\ m_{\lambda+2}\end{array}\right\}\frac{16}{\pi^2}\Big(\frac{16}{\pi^2}t+1\Big)^{\lambda+1}t^{-\lambda-1}e^{-\pi^2/(16t)}\end{aligned} \tag{4.3}$$

对于 $t\le T_D$。因此

$$\begin{aligned}G_t^\lambda(0,1) \simeq{}& \left\{\begin{array}{c} C^C_{\lambda+2,T_D}M_{\lambda+2}(16T_D/\pi^2+1)^{\lambda+1} \\ c^C_{\lambda+2,T_D}m_{\lambda+2}e^{-(4\lambda+6)T_D}\end{array}\right\} \\ &\times \frac{64(\lambda+1)(\lambda+2)}{\pi^2}\,e^{-[(\pi/2)^2-\theta^2]/(4t)}\,t^{-\lambda-1}e^{-\theta^2/(4t)}, \qquad t\le T_D\end{aligned} \tag{4.4}$$

（这里，为了在后续使用这些界时更加清晰，我们人为地插入了含有 θ 的因子。）

接下来，我们估计 $G_t^\lambda(x,\ 1)$，其中 $x\in[0,1]$ 和 $t\le T_D$。利用引理 2.1，我们写出

$$G_t^\lambda(x,1) = G_t^\lambda(0,1) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}G_t^\lambda(y,1)\,\mathrm{d}y = G_t^\lambda(0,1) + 2(\lambda+1)e^{-t(2\lambda+2)}\int_0^x G_t^{\lambda+1}(y,1)\,\mathrm{d}y. \tag{4.5}$$

为继续推导，我们着眼于最后一个积分。对于 $x=\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi/2]$，有

$$\int_0^x G_t^{\lambda+1}(y,1)\,\mathrm{d}y = \int_\theta^{\pi/2} G_t^{\lambda+1}(\cos\varphi,1)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \simeq \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2/\pi\end{array}\right\}\int_\theta^{\pi/2} G_t^{\lambda+1}(\cos\varphi,1)\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

现在用到引理 C，得到

$$\int_0^x G_t^{\lambda+1}(y,1)\,\mathrm{d}y \simeq \left\{\begin{array}{c} C^C_{\lambda+1,T_D} \\ c^C_{\lambda+1,T_D}2/\pi\end{array}\right\} t^{-\lambda-2}\int_\theta^{\pi/2} e^{-\varphi^2/(4t)}\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \qquad t\le T_D.$$

计算最后一个积分后，我们得到

$$\int_0^x G_t^{\lambda+1}(y,1)\,\mathrm{d}y \simeq \left\{\begin{array}{c} C^C_{\lambda+1,T_D} \\ c^C_{\lambda+1,T_D}2/\pi\end{array}\right\} 2\Big(1-e^{-[(\pi/2)^2-\theta^2]/4t}\Big)\,t^{-\lambda-1}e^{-\theta^2/(4t)}, \qquad t\le T_D. \tag{4.6}$$

将 (4.5) 与 (4.4) 和 (4.6) 结合可得

$$\begin{aligned}&\left[\Big(c^C_{\lambda+2,T_D}m_{\lambda+2}\frac{64(\lambda+1)(\lambda+2)}{\pi^2}e^{-(4\lambda+6)T_D}\Big)\wedge\Big(\frac{8(\lambda+1)}{\pi}c^C_{\lambda+1,T_D}e^{-(2\lambda+2)T_D}\Big)\right]t^{-\lambda-1}e^{-\theta^2/(4t)} \\ &\le G_t^\lambda(\cos\theta,1)\end{aligned}$$

$$\leq \left[\left(C^C_{\lambda+2,T_D} M_{\lambda+2} \frac{64(\lambda+1)(\lambda+2)}{\pi^2}\Big[\frac{16T_D}{\pi^2}+1\Big]^{\lambda+1}\right) \vee \Big(4(\lambda+1)C^C_{\lambda+1,T_D}\Big)\right] t^{-\lambda-1} e^{-\theta^2/(4t)}$$

对于 $\theta \in [0,\pi/2]$ 和 $t \leq T_D$。引理得证。 □

4.5. **步骤 E**。

$H_t^\lambda(x)$ 的估计，其中 $x \in [0,1]$、$t \leq T_E$ 和 $\lambda \in (-3/2,\ -1]$。

此步骤主要基于步骤 C（步骤 B 仅用于在某种情况下获得更好的乘法常数）、引理 2.1、引理 2.2 、热方程 (2.2) 以及引理 2.9。步骤 D 也有一定关联。参见 [29, 引理 5.3] 的证明。

在下述陈述及其证明中，我们使用记号 $c^\blacklozenge_{\lambda,\,T}$, $C^\blacklozenge_{\lambda,\,T}$，其中 $\blacklozenge = B$ 若 $\lambda = 1$，且 $\blacklozenge = C$ 若 $\lambda \neq 1$。

引理 E。设 $-3/2 < \lambda \leq -1$，并设 $T_E > 0$。则

$$H_t^\lambda(\cos\theta) \simeq \left\{ \begin{matrix} C^E_{\lambda,T_E} \\ c^E_{\lambda,T_E} \end{matrix} \right\} \frac{1}{t^{\lambda+1}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right)$$

对于 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 和 $0 < t \leq T_E$，其中常数

$$c^E_{\lambda,T_E} := \frac{32(1-1/e)}{\pi^2}(\lambda+2)e^{-(4\lambda+6)T_E}\, c^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} \times \left[2m_{\lambda+2}\Big(\frac{16T_E}{\pi^2}+1\Big)^{\lambda+1} \wedge 1\right],$$

$$C^E_{\lambda,T_E} := 16(\lambda+2)\, C^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} \times \left[\frac{4}{\pi^2} M_{\lambda+2} \vee 1\right].$$

证明。我们首先用与引理 D 的证明中估计 $G_t^\lambda(0,1)$ 类似的方法估计 $H_t^\lambda(0)$。利用 H_t^λ 满足基于 Jacobi-超球算子 J^λ 的热方程这一事实（见 (2.2)），再应用引理 2.2，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_t^\lambda(0) = -J^\lambda H_t^\lambda(x)\big|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} H_t^\lambda(x)\big|_{x=0} = 4(\lambda+2)e^{-t(4\lambda+6)} G_t^{\lambda+2}(0,1).$$

借助引理 B 和 C 估计最后一个表达式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_t^\lambda(0) \simeq \left\{ \begin{matrix} C^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} \\ c^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} \end{matrix} \right\} 4(\lambda+2)e^{-t(4\lambda+6)} t^{-\lambda-3} e^{-\pi^2/(16t)}, \qquad t \leq T_E.$$

考虑到当 $t \to 0^+$ 时，$H_t^\lambda(0) \to 0$ （由引理 2.3(v)、引理 2.1、引理 D 以及引理 [29, Lem.5.3] 证明中的一个论证可得；这也可由 [29,Lem. 5.3] 推出），我们推得

$$H_t^\lambda(0) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} H_\tau^\lambda(0)\,\mathrm{d}\tau \simeq \left\{ \begin{matrix} C^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} \\ c^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} e^{-(4\lambda+6)T_E} \end{matrix} \right\} 4(\lambda+2) \int_0^t \tau^{-\lambda-3} e^{-\pi^2/(16\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

然后，借助引理 2.9 按照 (4.3) 中的方法进行估计，可得

$$H_t^\lambda(0) \simeq \left\{ \begin{matrix} C^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} M_{\lambda+2} \\ c^\blacklozenge_{\lambda+2,T_E} m_{\lambda+2} (16T_E/\pi^2+1)^{\lambda+1} e^{-(4\lambda+6)T_E} \end{matrix} \right\} \times \frac{64(\lambda+2)}{\pi^2} e^{-[(\pi/2)^2-\theta^2]/(4t)}\, t^{-\lambda-1} e^{-\theta^2/(4t)}, \qquad t \leq T_E \tag{4.7}$$

（为了在后文使用这些界时更清晰，我们在此人为地写出含有 θ 的因子）。

现在我们估计 $H_t^\lambda(x)$ 对于 $x\in[0,1]$ 和 $t\le T_E$。利用引理 2.2，再利用引理 2.1，我们得

$$\begin{aligned}H_t^\lambda(x)&=H_t^\lambda(0)+\int_0^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}H_t^\lambda(y)\,\mathrm{d}y=H_t^\lambda(0)+2e^{-t(2\lambda+2)}\int_0^x\Big[G_t^{\lambda+1}(y,1)\Big]_{\mathrm{odd}}\,\mathrm{d}y\\&=H_t^\lambda(0)+e^{-t(2\lambda+2)}\int_0^x\int_{-y}^y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G_t^{\lambda+1}(z,1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\\&=H_t^\lambda(0)+2(\lambda+2)e^{-t(4\lambda+6)}\int_0^x\int_{-y}^y G_t^{\lambda+2}(z,1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\\&\simeq H_t^\lambda(0)+\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}2(\lambda+2)e^{-t(4\lambda+6)}\int_0^x\int_0^y G_t^{\lambda+2}(z,1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{4.8}$$

利用 $z\mapsto G_t^{\lambda+2}(z,1)$ 的单调性，可得最后一个关系，见引理 2.1。

接下来，我们关注最后一个二重积分。令 $x=\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi/2]$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^y G_t^{\lambda+2}(z,1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y&=\int_\theta^{\pi/2}\int_\varphi^{\pi/2}G_t^{\lambda+2}(\cos\kappa,1)\sin\kappa\,\mathrm{d}\kappa\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&\simeq\left\{\begin{matrix}1\\(2/\pi)^2\end{matrix}\right\}\int_\theta^{\pi/2}\int_\varphi^{\pi/2}G_t^{\lambda+2}(\cos\kappa,1)\,\kappa\,\mathrm{d}\kappa\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

于是，由引理 B 和 C，

$$\int_0^x\int_0^y G_t^{\lambda+2}(z,1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\simeq\left\{\begin{matrix}C^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}\\c^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}(2/\pi)^2\end{matrix}\right\}t^{-\lambda-3}\int_\theta^{\pi/2}\int_\varphi^{\pi/2}e^{-\kappa^2/(4t)}\,\kappa\,\mathrm{d}\kappa\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

计算最后一个二重积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^y G_t^{\lambda+2}(z,1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y&\simeq\left\{\begin{matrix}C^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}\\c^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}(2/\pi)^2\end{matrix}\right\}\\&\quad\times4\bigg[1-\bigg(1+\frac{(\pi/2)^2-\theta^2}{4t}\bigg)e^{-[(\pi/2)^2-\theta^2]/(4t)}\bigg]t^{-\lambda-1}e^{-\theta^2/(4t)},\qquad t\le T_E.\end{aligned}\tag{4.9}$$

接下来只需将 (4.8) 与 (4.7)、(4.9) 结合起来，并注意到函数 $[0,\infty)\ni\eta\mapsto e^{-\eta}+1-(1+\eta)e^{-\eta}=1-\eta e^{-\eta}$ 的值域是 $[1-1/e,1]$ (想一想 $\eta=[(\pi/2)^2-\theta^2]/(4t)$)。我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{32(1-1/e)}{\pi^2}(\lambda+2)e^{-(4\lambda+6)T_E}\,c^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}\times\bigg[2m_{\lambda+2}\Big(\frac{16T_E}{\pi^2}+1\Big)^{\lambda+1}\wedge1\bigg]t^{-\lambda-1}e^{-\theta^2/(4t)}\\&\le H_t^\lambda(\cos\theta)\le16(\lambda+2)\,C^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}\times\bigg[\frac{4}{\pi^2}M_{\lambda+2}\vee1\bigg]t^{-\lambda-1}e^{-\theta^2/(4t)}\end{aligned}$$

对于 $\theta\in[0,\pi/2]$ 和 $t\le T_E$。结论得证。 □

注 4.4. 设 $-3/2<\lambda\le-1$，并设 $T_E>0$。则

$$2m_{\lambda+2}\Big(\frac{16T_E}{\pi^2}+1\Big)^{\lambda+1}\wedge1=2m_{\lambda+2}\Big(\frac{16T_E}{\pi^2}+1\Big)^{\lambda+1},$$
$$\frac{4}{\pi^2}M_{\lambda+2}\vee1=\frac{4}{\pi^2}M_{\lambda+2},$$

因此

$$\begin{aligned}c^E_{\lambda,T_E}&=\frac{64(1-1/e)}{\pi^2}(\lambda+2)e^{-(4\lambda+6)T_E}\,c^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}m_{\lambda+2}\Big(\frac{16T_E}{\pi^2}+1\Big)^{\lambda+1},\\C^E_{\lambda,T_E}&=\frac{64(\lambda+2)}{\pi^2}\,C^{\blacklozenge}_{\lambda+2,T_E}M_{\lambda+2}.\end{aligned}$$

为证明这一点，注意到 $2m_{\lambda+2} \le 2m_{1/2} < 1$，因为 m_λ 是递减的。另一方面，利用上界 $\pi(1-1/e) \le 2$，我们得到 $4\pi^{-2}M_{\lambda+2} \ge 1$ 处于所讨论的 λ 范围内。

我们不在引理 E 中列出简化后的常数，以保留其更抽象的形式，这种形式便于今后可能进行改进。更确切地说，注 4.4 基于引理 2.9 给出的特定常数（这些常数或许并非最优），一旦这些常数得到改进，该注可能便不再成立。

4.6. **步骤 F**。

对 $G^{\alpha}_{\cdot,t}{}^{\beta}(x,y)$ 在 $x,y \in [-1,1], t \le T$ 和 $\alpha,\beta > -1$ 下的估计。

这最后一步主要基于步骤 C–E，见 [29, 第 6], 节；不过，为了在某些情况下获得更好的乘法常数，也会用到步骤 A 和 B。步骤 F 所需的技术工具包括关键的引理 2.3，以及引理 2.1、2.2、2.7 和 2.13。

在下文的陈述及其证明中，我们使用记号 $c^{\bigstar}_{\lambda\,,\,T}$, $C^{\bigstar}_{\lambda\,T,}$，其中 $\bigstar = A$ if$\lambda \in \mathbb{N} - 1/2$, $\bigstar = B$if $\lambda \in \mathbb{N}$, $\bigstar = C$if $\lambda \in (0,\ \infty)$ and $\lambda \notin \mathbb{N}/2$, $\bigstar = D$if $-1/2 \ne \lambda \in (-1,\ 0)$, and $\bigstar = E$ if $\lambda \in (-3/2,\ -1]$。我们还将使用两个辅助函数，

$$q_\lambda(t) := 2(\lambda+1)(\lambda+2)e^{-t(\lambda+3/2)}, \qquad \widetilde{q}_\lambda(t) := 2(\lambda+2)e^{-t(\lambda+3/2)},$$

以及记号 $\Lambda = \Lambda_{\alpha,\ \beta} := \alpha+\beta+1/2$.

引理 F。设 $\alpha,\beta > -1$ 且令 $T > 0$。则

$$G^{\alpha,\beta}_t(\cos\theta,\cos\varphi) \simeq \left\{ \begin{matrix} C_{\alpha,\beta,T}\Psi^{\mathfrak{b}}_\alpha(t,\theta,\varphi)\Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \\ c_{\alpha,\beta,T}\Psi^{\mathfrak{B}}_\alpha(t,\theta,\varphi)\Psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(\theta-\varphi)^2}{4t}\right)$$

对于 $0 \le \theta,\varphi \le \pi$ 和 $0 < t \le T$，常数如下给出。

► 在 $\alpha,\beta \ge -1/2$ 的情况下，

$$c_{\alpha,\beta,T} := c^{\bigstar}_{\Lambda,T/4} \times 4^{\Lambda+1} b_\alpha b_\beta \times \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}, \qquad C_{\alpha,\beta,T} := C^{\bigstar}_{\Lambda,T/4} \times 4^{\Lambda+2} B_\alpha B_\beta \times \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

► 在 $-1 < \beta < -1/2 \le \alpha$ 的情况下，

$$c_{\alpha,\beta,T} := 4^{\Lambda+1/2} b_\alpha \left[c^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4} q_\Lambda(T) \Big(\frac{4\mathbb{D}_\beta}{\pi^2 \mathbb{D}_{\beta+2}}\Big)^2 \frac{4}{\mathfrak{B}^2} l_\beta b_{\beta+2} \wedge c^{\bigstar}_{\Lambda,T/4} \mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} \right] \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}},$$

$$C_{\alpha,\beta,T} := 4^{\Lambda+3/2} B_\alpha \left[C^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4} q_\Lambda(0) \frac{4}{\mathfrak{b}^2} L_\beta B_{\beta+2} + C^{\bigstar}_{\Lambda,T/4} \mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} \right] \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

► 在 $-1 < \alpha < -1/2 \le \beta$ 的情况下，

$$c_{\alpha,\beta,T} := 4^{\Lambda+1/2} b_\beta \left[c^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4} q_\Lambda(T) \Big(\frac{4\mathbb{D}_\alpha}{\pi^2 \mathbb{D}_{\alpha+2}}\Big)^2 \frac{4}{\mathfrak{B}^2} l_\alpha b_{\alpha+2} \wedge c^{\bigstar}_{\Lambda,T/4} \mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2} \right] \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}},$$

$$C_{\alpha,\beta,T} := 4^{\Lambda+3/2} B_\beta \left[C^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4} q_\Lambda(0) \frac{4}{\mathfrak{b}^2} L_\alpha B_{\alpha+2} + C^{\bigstar}_{\Lambda,T/4} \mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2} \right] \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

► 在 $-1 < \alpha, \beta < -1/2$ 和 $\Lambda_{\alpha,\ \beta} > -1$ 的情况下，

$$c_{\alpha,\beta,T} := 4^{\Lambda+1} \Bigg[c^{\bigstar}_{\Lambda+4,T/4} q_{\Lambda+2}(T) q_\Lambda(T) \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^8 l_\alpha l_\beta b_{\alpha+2} b_{\beta+2} \Big(\frac{2\mathbb{D}_\alpha \mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\alpha+2}\mathbb{D}_{\beta+2}\mathfrak{B}^2}\Big)^2$$
$$\wedge c^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4} q_\Lambda(T) \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^4 \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \Bigg\{ \Big(\frac{\mathbb{D}_\alpha}{\mathbb{D}_{\alpha+2}}\Big)^2 \mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} l_\alpha b_{\alpha+2}$$

$$\wedge\Big(\frac{\mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\beta+2}}\Big)^2\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}l_\beta b_{\beta+2}\Big\}\wedge c^{\bigstar}_{\Lambda,T/4}\frac{1}{4}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}\Big]\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}},$$

$$\begin{aligned}C_{\alpha,\beta,T}:=4^{\Lambda+2}\Big[&C^{\bigstar}_{\Lambda+4,T/4}q_{\Lambda+2}(0)q_\Lambda(0)\frac{4}{\mathfrak{b}^4}L_\alpha L_\beta B_{\alpha+2}B_{\beta+2}\\&+C^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4}q_\Lambda(0)\frac{1}{\mathfrak{b}^2}\Big(L_\alpha B_{\alpha+2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}+L_\beta B_{\beta+2}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\Big)\\&+C^{\bigstar}_{\Lambda,T/4}\frac{1}{4}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}\Big]\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}.\end{aligned}$$

▶ 在 $-1<\alpha$、$\beta<-1/2$ 和 $\Lambda_{\alpha,\,\beta}\le-1$ 的情况下，

$$\begin{aligned}c_{\alpha,\beta,T}:=4^{\Lambda+1}\Big[&c^{\bigstar}_{\Lambda+4,T/4}q_{\Lambda+2}(T)\widetilde{q}_\Lambda(T)\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^8 l_\alpha l_\beta b_{\alpha+2}b_{\beta+2}\Big(\frac{2\mathbb{D}_\alpha\mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\alpha+2}\mathbb{D}_{\beta+2}\mathfrak{B}^2}\Big)^2\\&\wedge c^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4}\widetilde{q}_\Lambda(T)\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^4\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\Big\{\Big(\frac{\mathbb{D}_\alpha}{\mathbb{D}_{\alpha+2}}\Big)^2\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}l_\alpha b_{\alpha+2}\\&\wedge\Big(\frac{\mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\beta+2}}\Big)^2\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}l_\beta b_{\beta+2}\Big\}\wedge c^{\bigstar}_{\Lambda,T/4}\frac{1}{2}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}\Big]\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\Lambda+2)}{h_0^{\alpha,\beta}\Gamma(\Lambda+3/2)},\\C_{\alpha,\beta,T}:=4^{\Lambda+2}\Big[&C^{\bigstar}_{\Lambda+4,T/4}q_{\Lambda+2}(0)\widetilde{q}_\Lambda(0)\frac{4}{\mathfrak{b}^4}L_\alpha L_\beta B_{\alpha+2}B_{\beta+2}\\&+C^{\bigstar}_{\Lambda+2,T/4}\widetilde{q}_\Lambda(0)\frac{1}{\mathfrak{b}^2}\Big(L_\alpha B_{\alpha+2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}+L_\beta B_{\beta+2}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\Big)\\&+C^{\bigstar}_{\Lambda,T/4}\frac{1}{4}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}\Big]\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\Lambda+2)}{h_0^{\alpha,\beta}\Gamma(\Lambda+3/2)}.\end{aligned}$$

引理 F 的证明，情形 $\alpha,\beta\ge-1/2$。由引理 2.3(i)

$$I:=\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi)=\iint G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v).$$

鉴于 $z\mapsto G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}(z,1)$ 的单调性（见引理 2.1）以及相关测度的对称性，这意味着

$$I\simeq\begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}\iint_{[0,1]^2}G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v).$$

那么，在最后一个二重积分下，$\sqrt{F_{\theta,\,\varphi}(u,\,v)}\in[0,\pi/2]$ 并且我们可以利用引理 A、B、C 和 D，得到

$$I\simeq\begin{Bmatrix}4C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}\\c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}\end{Bmatrix}\Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+\beta+3/2}\iint_{[0,1]^2}e^{-F_{\theta,\varphi}(u,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)$$

对于 $\theta,\ \varphi\in[0,\pi]$ 和 $0<t\le T$。现在应用引理 2.13 可得

$$I\simeq\begin{Bmatrix}C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}4^{\alpha+\beta+5/2}B_\alpha B_\beta\Psi_\alpha^{\mathfrak{b}}(t,\theta,\varphi)\Psi_\beta^{\mathfrak{b}}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\\c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}4^{\alpha+\beta+3/2}b_\alpha b_\beta\Psi_\alpha^{\mathfrak{B}}(t,\theta,\varphi)\Psi_\beta^{\mathfrak{B}}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\end{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}$$

对于 $\theta,\ \varphi\in[0,\pi]$ 和 $0<t\le T$。由此可得，引理中所述的估计对于所考虑的 α 和 β 成立。□

注 4.5. 考虑 α、$\beta \geq -1/2$ 和 $-1/2 < \alpha+\beta \notin \mathbb{N}$ 的情形，在证明中采用注 *4.2* 和注 *4.3* 中的估计，而非引理 *B* 和 *C* 中的界，可以加强引理 *F* 的界。细节显而易见，留给感兴趣的读者。

引理 *F* 的证明：当 $-1 < \beta < -1/2 \leq \alpha$ 或 $-1 < \alpha < -1/2 \leq \beta$ 时。出于对称性，只需证明第一种情形。另一种情形则分别交换 α 与 β 和 θ，φ 与 $\pi-\theta$，$\pi-\varphi$ 即可得出结果；注意，$G^{\beta,\alpha}_{t}(-x,-y) = G^{\alpha,\beta}_{t}(x,y)$。因此，以下假设 $-1 < \beta < -1/2 \leq \alpha$。本证明中的所有估计均针对 θ，$\varphi \in [0,\pi]$ 和 $0 < t \leq T$。

根据引理 2.3(ii)

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) = 2(\alpha+\beta+3/2)e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2} I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 := -\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \iint G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v, \tag{4.10}$$

$$I_2 := \iint G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v).$$

我们将分别估计 I_1 和 I_2。注意，这两个量均为正；对于 I_1，这是因为 $z \mapsto G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}(z,1)$ 单调递增（见引理 2.1），且 Π_β 为奇函数并且单调递减。

关于 I_2，由 $z \mapsto G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}(z,1)$ 的单调性以及所涉及测度的对称性可知，

$$I_2 \simeq \left\{\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\} \iint_{[0,1]^2} G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v).$$

利用引理 A、B、C 和 D 对此处的被积函数进行估计，得到

$$I_2 \simeq \left\{\begin{matrix}4C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}\\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}\end{matrix}\right\} \Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+\beta+3/2} \iint_{[0,1]^2} e^{-F_{\theta,\varphi}(u,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v).$$

现在应用引理 2.13，得到

$$I_2 \simeq \left\{\begin{matrix}C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+2} B_\alpha \Psi_\alpha^{\mathfrak{b}}(t,\theta,\varphi)\\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+1} b_\alpha \Psi_\alpha^{\mathfrak{B}}(t,\theta,\varphi)\end{matrix}\right\} \frac{1}{t^{\beta+1}} e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}. \tag{4.11}$$

转到 I_1，注意到 $\Pi_\beta(v)$ 是一个奇函数，且当 $v > 0$ 时为负。因此

$$I_1 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \int_{[-1,1]}\int_{[0,1]} \Big[G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)},1\Big) - G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,-v)},1\Big)\Big]\,|\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u).$$

在这里，我们可以将差写成从 $-v$ 到 v 的导数积分，然后应用引理 2.1。由此得到

$$I_1 = 2(\alpha+\beta+5/2)e^{-t(\alpha+\beta+5/2)/2}\Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2 \times \int_{[-1,1]}\int_{[0,1]}\int_{-v}^{v} G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v')},1\Big)\,\mathrm{d}v'\,|\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u).$$

~将上述三重积分记为 I_1。注意，其中的被积函数关于 u和 v'均递增，见引理 2.1。因此，考虑到测度 $\mathrm{d}\Pi_\alpha$ 和 $\mathrm{d}v'$的对称性，我们可以分别将这两个变量的积分范围限制为 $[0,1]$ 和 $[0,v]$，从而得到

$$\widetilde{I}_1 \simeq \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \int_0^v G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v')},1\Big)\,\mathrm{d}v'\,|\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u).$$

现在我们使用富比尼定理，先对 v积分，这会产生一个因子，可借助引理 2.7 对其进行估计，

$$\int_{v'}^1 |\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v \simeq \begin{Bmatrix} L_\beta \\ l_\beta \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Pi_{\beta+2}(v')}{\mathrm{d}v'}, \qquad v' \in [0,1].$$

因此，

$$\widetilde{I}_1 \simeq \begin{Bmatrix} 4L_\beta \\ l_\beta \end{Bmatrix} \iint_{[0,1]^2} G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v')},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_{\beta+2}(v').$$

由此，利用引理 A、B 和 C，我们得到

$$\widetilde{I}_1 \simeq \begin{Bmatrix} C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4L_\beta \\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}l_\beta \end{Bmatrix} \Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+\beta+7/2} \iint_{[0,1]^2} e^{-F_{\theta,\varphi}(u,v')/t}\,\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}\Pi_{\beta+2}(v').$$

最后，应用引理 2.13，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_1 \simeq{}& \begin{Bmatrix} C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4^{\alpha+\beta+9/2}L_\beta B_\alpha B_{\beta+2}\Psi^{\mathfrak{b}}_\alpha(t,\theta,\varphi)\Psi^{\mathfrak{b}}_{\beta+2}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4^{\alpha+\beta+7/2}l_\beta b_\alpha b_{\beta+2}\Psi^{\mathfrak{B}}_\alpha(t,\theta,\varphi)\Psi^{\mathfrak{B}}_{\beta+2}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \end{Bmatrix} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

接下来，我们希望将 I_2 和 I_1 的界 (4.11) 与 (4.12) 结合起来，并使用公式

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) = 2q_{\alpha+\beta+1/2}(t)\Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2\widetilde{I}_1 + I_2. \tag{4.13}$$

为此，我们需要适当地界定两个辅助表达式。对于 $\kappa > 0$, $\lambda \in (-1, -1/2)$,θ, $\varphi \in [0,\pi]$ 和 $t>0$，考虑

$$\begin{aligned} O_1^{\kappa,\lambda} = O_1^{\kappa,\lambda}(t,\theta,\varphi) &:= \Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2 \times \frac{\Psi^\kappa_{\lambda+2}(t,\theta,\varphi)}{\Psi^\kappa_\lambda(t,\theta,\varphi)} \\ &= \frac{[\sin(\theta/2)\sin(\varphi/2)]^2}{[\mathbb{D}_{\lambda+2}t \vee \kappa\theta\varphi]^{\lambda+5/2}[\mathbb{D}_\lambda t \vee \kappa\theta\varphi]^{-\lambda-1/2}}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$O_2^{\kappa,\lambda} = O_2^{\kappa,\lambda}(t,\theta,\varphi) := \frac{1}{\Psi^\kappa_\lambda(t,\theta,\varphi)t^{\lambda+1/2}} = \frac{1}{[\mathbb{D}_\lambda t \vee \kappa\theta\varphi]^{-\lambda-1/2}t^{\lambda+1/2}}. \tag{4.15}$$

利用 $\theta/\pi \le \sin(\theta/2) \le \theta/2$ 关于 $\theta \in [0,\pi]$ 的界，以及 $\mathbb{D}_\lambda$ 随参数递增这一事实，我们得到

$$\frac{1}{\pi^4}\frac{[\theta\varphi]^2}{[\mathbb{D}_{\lambda+2}t \vee \kappa\theta\varphi]^2} \le O_1^{\kappa,\lambda} \le \frac{1}{16}\frac{[\theta\varphi]^2}{[\mathbb{D}_\lambda t \vee \kappa\theta\varphi]^2}.$$

注意到 $O^{\kappa,\lambda}_{,1} \le 1/(16\kappa^2)$ 和 $O^{\kappa,\lambda}_{,2} \le \mathbb{D}_\lambda^{\lambda+1/2}$。此外，若 $\mathbb{D}_\lambda t \ge \kappa\theta\varphi$，则 $O^{\kappa,\lambda}_{,2} = \mathbb{D}_\lambda^{\lambda+1/2}$；若 $\mathbb{D}_\lambda t < \kappa\theta\varphi$，则 $O^{\kappa,\lambda}_{,1} \ge (\kappa\mathbb{D}_{\lambda+2}/\mathbb{D}_\lambda)^{-2}/\pi^4$。因此，对于任意 $c_1, c_2 > 0$,

$$\frac{c_1}{\pi^4}\Big(\frac{\mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\beta+2}\kappa}\Big)^2 \wedge c_2\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} \le c_1O_1^{\kappa,\beta}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) + c_2O_2^{\kappa,\beta}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \le \frac{c_1}{16\kappa^2} + c_2\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}. \tag{4.16}$$

将 (4.13) 与 (4.11) 和 (4.12) 结合，并利用 $\kappa = \mathfrak{b}$ 和 $\kappa = \mathfrak{B}$ 的 (4.16)，我们得出

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta, \cos\varphi) \simeq \left\{ \begin{matrix} \check{C}_{\alpha,\beta,T} \Psi_\alpha^{\mathfrak{b}}(t,\theta,\varphi) \Psi_\beta^{\mathfrak{b}}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \\ \check{c}_{\alpha,\beta,T} \Psi_\alpha^{\mathfrak{B}}(t,\theta,\varphi) \Psi_\beta^{\mathfrak{B}}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)},$$

其中

$$\check{c}_{\alpha,\beta,T} = \frac{q_{\alpha+\beta+1/2}(T)}{\pi^4} \Big(\frac{\mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\beta+2}\mathfrak{B}} \Big)^2 c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+4} l_\beta b_\alpha b_{\beta+2} \wedge \mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+1} b_\alpha,$$

$$\check{C}_{\alpha,\beta,T} = \frac{q_{\alpha+\beta+1/2}(0)}{\mathfrak{b}^2} C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+3} L_\beta B_\alpha B_{\beta+2} + \mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+2} B_\alpha.$$

这意味着，引理中针对所考虑的 α 和 β 所陈述的估计成立 . □

引理 F 的证明，情形 $-1 < \alpha,\ \beta < -1/2$。本部分证明中给出的所有估计均针对 $\theta,\ \varphi \in [0,\pi]$ 和 $0 < t \le T$，且始终假设 $\alpha,\ \beta \in (-1,\ -1/2)$。我们首先估计三个量，它们出现在引理 2.3 的第 (iv) 和 (v) 项中对 $G^{\alpha,\ \beta}_{\cdot,\ t}(\cos\theta,\ \cos\varphi)$ 的表示式里。令

$$\begin{aligned} J_1 &:= \sin\theta \sin\varphi \iint G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)}, 1 \Big) \,\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v, \\ J_2 &:= -\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \iint G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)}, 1 \Big) \,\Pi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v), \\ J_3 &:= -\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \iint G_{t/4}^{\alpha+\beta+3/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)}, 1 \Big) \,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\Pi_\beta(v)\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

从下文的估计可以看出，J_1、J_2 和 J_3 均为正数 .

为处理 J_1，回忆一下，$\Pi_\alpha(u)$和 $\Pi_\beta(v)$是关于 u 和 v的奇函数，且分别在$u > 0$ 和 $v > 0$时为负。因此

$$J_1 = \sin\theta\sin\varphi \iint_{[0,1]^2} \Delta(u,v)\,|\Pi_\alpha(u)|\,\mathrm{d}u\,|\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v,$$

其中 $\Delta(u,\ v)$ 是如下所给的二阶差分

$$\begin{aligned} \Delta(u,v) := {} & G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)}, 1 \Big) - G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(-u,v)}, 1 \Big) \\ & - G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,-v)}, 1 \Big) + G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(-u,-v)}, 1 \Big). \end{aligned}$$

现在，关键的观察是

$$\Delta(u,v) = \iint_{|u'|<u,\,|v'|<v} \partial_{u'}\partial_{v'} \Big[G_{t/4}^{\alpha+\beta+5/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u',v')}, 1 \Big) \Big]\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v'.$$

两次应用引理 2.1 可知，此处二重积分下的函数等于

$$\frac{1}{2} q_{\alpha+\beta+5/2}(t) \sin\theta\sin\varphi\; G_{t/4}^{\alpha+\beta+9/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u',v')}, 1 \Big).$$

我们得出结论：

$$\begin{aligned} J_1 = {} & \frac{1}{2} q_{\alpha+\beta+5/2}(t) \big(\sin\theta\sin\varphi \big)^2 \\ & \times \iint_{[0,1]^2} \iint_{|u'|<u,\,|v'|<v} G_{t/4}^{\alpha+\beta+9/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u',v')}, 1 \Big)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v'\,|\Pi_\alpha(u)|\,\mathrm{d}u\,|\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

~为继续推导，将最后一个四重积分记为 J_1，于是

$$J_1 = 8q_{\alpha+\beta+5/2}(t)\Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2\Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2\widetilde{J}_1. \tag{4.17}$$

~ J_1 中的被积函数关于 u' 和 v' 均递增（见引理 2.1），因此我们可以将内层积分限制在 $0<u'<u,\ \ 0<v'<v$ 从而得到

$$\widetilde{J}_1 \simeq \begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}\iint_{[0,1]^2}\int_0^u\int_0^v G_{t/4}^{\alpha+\beta+9/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u',v')},1\Big)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v'\,|\Pi_\alpha(u)|\,\mathrm{d}u\,|\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v.$$

现在先对 u 和 v 积分，应用富比尼定理可得

$$\widetilde{J}_1 \simeq \begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}\iint_{[0,1]^2}\int_{u'}^1|\Pi_\alpha(u)|\,\mathrm{d}u\int_{v'}^1|\Pi_\beta(v)|\,\mathrm{d}v\;G_{t/4}^{\alpha+\beta+9/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u',v')},1\Big)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v'.$$

然后两次应用引理 2.7，得到

$$\widetilde{J}_1 \simeq \begin{Bmatrix}4L_\alpha L_\beta\\ l_\alpha l_\beta\end{Bmatrix}\iint_{[0,1]^2}G_{t/4}^{\alpha+\beta+9/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u',v')},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{\alpha+2}(u')\,\mathrm{d}\Pi_{\beta+2}(v').$$

此外，利用引理 B 和 C（注意 $5/2<\alpha+\beta+9/2<7/2$）可得

$$\widetilde{J}_1 \simeq \begin{Bmatrix}C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+9/2,T/4}4L_\alpha L_\beta\\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+9/2,T/4}l_\alpha l_\beta\end{Bmatrix}\Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+\beta+11/2}\iint_{[0,1]^2}e^{-F_{\theta,\varphi}(u',v')/t}\,\mathrm{d}\Pi_{\alpha+2}(u')\,\mathrm{d}\Pi_{\beta+2}(v').$$

最后，应用引理 2.13，得到

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_1 \simeq{}&\begin{Bmatrix}C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+9/2,T/4}4^{\alpha+\beta+13/2}L_\alpha L_\beta B_{\alpha+2}B_{\beta+2}\Psi^{\mathfrak{b}}_{\alpha+2}(t,\theta,\varphi)\Psi^{\mathfrak{b}}_{\beta+2}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+9/2,T/4}4^{\alpha+\beta+11/2}l_\alpha l_\beta b_{\alpha+2}b_{\beta+2}\Psi^{\mathfrak{B}}_{\alpha+2}(t,\theta,\varphi)\Psi^{\mathfrak{B}}_{\beta+2}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\end{Bmatrix}\\ &\times\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

接下来，我们关注 J_3。这个量类似于 (4.10) 中的 I_1。唯一的区别在于，在 J_3 中我们有 $\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)$，而不是 $\mathrm{d}\Pi_\alpha(u)$（带有某个 $\alpha\ge-1/2$），但分析完全相同。因此

$$J_3 = 2(\alpha+\beta+5/2)e^{-t(\alpha+\beta+5/2)/2}\Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2\widetilde{J}_3, \tag{4.19}$$

其中

$$\widetilde{J}_3 \simeq \begin{Bmatrix}C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4L_\beta\\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}l_\beta\end{Bmatrix}\Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+\beta+7/2}\iint_{[0,1]^2}e^{-F_{\theta,\varphi}(u,v')/t}\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\mathrm{d}\Pi_{\beta+2}(v').$$

然后，由引理 2.13，

$$\widetilde{J}_3 \simeq \begin{Bmatrix}C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4^{\alpha+\beta+4}L_\beta B_{\beta+2}\Psi^{\mathfrak{b}}_{\beta+2}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4^{\alpha+\beta+3}l_\beta b_{\beta+2}\Psi^{\mathfrak{B}}_{\beta+2}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi)\end{Bmatrix}\frac{1}{t^{\alpha+1/2}}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}. \tag{4.20}$$

最后，通过分别将 α 与 β、θ，φ 与 $\pi-\theta$，$\pi-\varphi$ 互换，即可由 J_3 的界得到 J_2 的界。我们得到

$$J_2 = 2(\alpha+\beta+5/2)e^{-t(\alpha+\beta+5/2)/2}\Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2\widetilde{J}_2, \tag{4.21}$$

其中

$$\widetilde{J}_2 \simeq \left\{ \begin{array}{c} C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+4} L_\alpha B_{\alpha+2} \Psi^{\mathfrak{b}}_{\alpha+2}(t,\theta,\varphi) \\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+3} l_\alpha b_{\alpha+2} \Psi^{\mathfrak{B}}_{\alpha+2}(t,\theta,\varphi) \end{array} \right\} \frac{1}{t^{\beta+1/2}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}. \tag{4.22}$$

现在考虑两种情形较为方便。

情形 1: $\alpha+\beta+1/2>-1$. 这里我们还需要给出该量的上界

$$J_4 := \iint G^{\alpha+\beta+1/2}_{t/4}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v)$$

它出现在引理 2.3(iv) 中。由 $z\mapsto G^{\alpha+\beta+1/2}_{t/4}(z,1)$ 的单调性（见引理 2.1），可得

$$J_4 \simeq \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1/4 \end{array} \right\} G^{\alpha+\beta+1/2}_{t/4}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(1,1)},1\Big).$$

于是，引理 D 推出

$$J_4 \simeq \left\{ \begin{array}{c} C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+3/2} \\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+1/2} \end{array} \right\} \frac{1}{t^{\alpha+1/2}} \frac{1}{t^{\beta+1/2}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}. \tag{4.23}$$

鉴于引理 2.3(iv)，另见 (4.17)、(4.19) 和 (4.21)，

$$\begin{aligned} \frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G^{\alpha,\beta}_t(\cos\theta,\cos\varphi) &= \frac{1}{2} q_{\alpha+\beta+1/2}(t) J_1 + 2(\alpha+\beta+3/2) e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}(J_2+J_3) + J_4 \\ &= 4 q_{\alpha+\beta+1/2}(t) q_{\alpha+\beta+5/2}(t) \Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2 \Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2 \widetilde{J}_1 \\ &\quad + 2 q_{\alpha+\beta+1/2}(t)\bigg(\Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2 \widetilde{J}_2 + \Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2 \widetilde{J}_3\bigg) + J_4. \end{aligned} \tag{4.24}$$

考虑到上述内容以及 (4.18)、(4.20)、(4.22) 和 (4.23)，我们发现，要得出雅可比热核所需的界，必须对某个辅助表达式作适当估计

$$\begin{aligned} \Upsilon := {} & c_{1,1} O_1^{\kappa,\alpha}(t,\theta,\varphi) O_1^{\kappa,\beta}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) + c_{1,2} O_1^{\kappa,\alpha}(t,\theta,\varphi) O_2^{\kappa,\beta}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) \\ & + c_{2,1} O_2^{\kappa,\alpha}(t,\theta,\varphi) O_1^{\kappa,\beta}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi) + c_{2,2} O_2^{\kappa,\alpha}(t,\theta,\varphi) O_2^{\kappa,\beta}(t,\pi-\theta,\pi-\varphi), \end{aligned}$$

其中 $c_{1,1}$,$c_{1,2}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$和 κ 是某些正常数，而 $O^{\kappa,\alpha}_1$、$O^{\kappa,\alpha}_2$ 定义于 (4.14) 和 (4.15) 中。导出 (4.16) 的观察现在意味着以下界

$$\Upsilon \geq \frac{c_{1,1}}{\pi^8\kappa^4}\Big(\frac{\mathbb{D}_\alpha}{\mathbb{D}_{\alpha+2}}\Big)^2\Big(\frac{\mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\beta+2}}\Big)^2 \wedge \frac{c_{1,2}}{\pi^4\kappa^2}\Big(\frac{\mathbb{D}_\alpha}{\mathbb{D}_{\alpha+2}}\Big)^2 \mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} \wedge \frac{c_{2,1}}{\pi^4\kappa^2}\Big(\frac{\mathbb{D}_\beta}{\mathbb{D}_{\beta+2}}\Big)^2 \mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2} \wedge c_{2,2}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2},$$

$$\Upsilon \leq \frac{c_{1,1}}{256\kappa^4} + \frac{c_{1,2}}{16\kappa^2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2} + \frac{c_{2,1}}{16\kappa^2}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2} + c_{2,2}\mathbb{D}_\alpha^{\alpha+1/2}\mathbb{D}_\beta^{\beta+1/2}.$$

现在只需注意，见（4.24）以及（4.18）、（4.20）、（4.22）、（4.23），引理的下界可通过取

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= 4 q_{\alpha+\beta+1/2}(T) q_{\alpha+\beta+5/2}(T) c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+9/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+11/2} l_\alpha l_\beta b_{\alpha+2} b_{\beta+2}, \\ c_{1,2} &= 2 q_{\alpha+\beta+1/2}(T) c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+3} l_\alpha b_{\alpha+2}, \\ c_{2,1} &= 2 q_{\alpha+\beta+1/2}(T) c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+3} l_\beta b_{\beta+2}, \\ c_{2,2} &= c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} 4^{\alpha+\beta+1/2}, \end{aligned}$$

而要得到上界，则取

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= 4q_{\alpha+\beta+1/2}(0)q_{\alpha+\beta+5/2}(0)C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+9/2,T/4}4^{\alpha+\beta+13/2}L_\alpha L_\beta B_{\alpha+2}B_{\beta+2},\\
c_{1,2} &= 2q_{\alpha+\beta+1/2}(0)C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4^{\alpha+\beta+4}L_\alpha B_{\alpha+2},\\
c_{2,1} &= 2q_{\alpha+\beta+1/2}(0)C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+5/2,T/4}4^{\alpha+\beta+4}L_\beta B_{\beta+2},\\
c_{2,2} &= C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}4^{\alpha+\beta+3/2}.
\end{aligned}$$

结论得证。

情形 2： $\alpha+\beta+1/2\le -1$。这里我们需要对额外的量取上界

$$J_5 := \iint H_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,\varphi}(u,v)}\Big)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(u)\,\mathrm{d}\Pi_{-1/2}(v)$$

它出现在引理 2.3(v) 中。由于 $z\mapsto H_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}(z)$ 是偶函数，且关于 $[0,1]$ 单调递增（见引理 2.2），我们有

$$J_5 = \frac{1}{2}\Big[H_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\Big)+H_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\Big)\Big]\simeq\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}\frac{1}{2}H_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\Big).$$

于是由引理 E

$$J_5 \simeq \left\{\begin{matrix} C^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}4^{\alpha+\beta+3/2}\\ c^{\bigstar}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}4^{\alpha+\beta+1}\end{matrix}\right\}\frac{1}{t^{\alpha+1/2}}\frac{1}{t^{\beta+1/2}}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}. \tag{4.25}$$

鉴于引理 2.3(v),

$$\begin{aligned}
\frac{h_0^{\alpha,\beta}\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+5/2)}G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi) &= \frac{1}{2}\widetilde{q}_{\alpha+\beta+1/2}(t)J_1+2e^{-t(\alpha+\beta+3/2)/2}(J_2+J_3)+J_5\\
&= 4\widetilde{q}_{\alpha+\beta+1/2}(t)q_{\alpha+\beta+5/2}(t)\Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2\Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2\widetilde{J}_1\\
&\quad+2\widetilde{q}_{\alpha+\beta+1/2}(t)\bigg(\Big[\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big]^2\widetilde{J}_2+\Big[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big]^2\widetilde{J}_3\bigg)+J_5.
\end{aligned}$$

按照情形 1 的做法，但现在使用 (4.25) 代替 (4.23)，我们便得出：对于所考虑的 α 和 β，$G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi)$ 满足引理 F 中所述的估计。

引理 F 的证明完毕。 □

4.7. **特殊情形下的改进**。

本节针对 $\varphi=0$ 在 $\alpha,\ \beta\ge -1/2$ 且 $\alpha+\beta\in\mathbb{N}-1$ 或 $\alpha\in\mathbb{N}$ 且 $\beta=-1/2$ 的情形，对引理 F 中的上界作出改进。这些特殊情形值得关注，因为它们与球面热核的估计以及更一般地，紧致秩一对称空间上的热核估计密切相关。

引理 G。 设 $\alpha,\beta\ge -1/2$ 满足 $\alpha+\beta\in\mathbb{N}-1$，且令 $T>0$。*Then*

$$G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1)\simeq\left\{\begin{matrix}C^{ref}_{\alpha,\beta,T}\Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi)\\ c^{ref}_{\alpha,\beta,T}\Psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi)\end{matrix}\right\}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right)$$

对于 $0\le\theta\le\pi$ 和 $0<t\le T$，其中常数

$$c^{ref}_{\alpha,\beta,T} := c^{A}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}\times 4^{\alpha+\beta+3/2}b_\beta\times\frac{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}},$$

$$C^{ref}_{\alpha,\beta,T} := C^{A}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} \times 4^{\alpha+\beta+2} B_\beta \times \frac{h_0^{\alpha+\beta+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

证明。与引理 B 的证明中一样，由引理 2.3(i) 可得

$$\begin{aligned}\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1) &= \int G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,0}(1,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v)\\ &\simeq \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}\int_{[0,1]} G_{t/4}^{\alpha+\beta+1/2}\Big(\cos\sqrt{F_{\theta,0}(1,v)},1\Big)\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v).\end{aligned}$$

应用引理 A 是合理的，因为关于 α 和 β的假设成立，我们可知 t

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1) \simeq \left\{\begin{matrix}2C^{A}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}\\ c^{A}_{\alpha+\beta+1/2,T/4}\end{matrix}\right\}\Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+\beta+3/2}\int_{[0,1]} e^{-F_{\theta,0}(1,v)/t}\,\mathrm{d}\Pi_\beta(v).$$

最后一个积分可利用引理 2.14 进行估计。由此得到

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+\beta+1/2}} G_t^{\alpha,\beta}(\cos\theta,1) \simeq \left\{\begin{matrix}2C^{A}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} B_\beta \Psi^{\mathfrak{b}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi)\\ c^{A}_{\alpha+\beta+1/2,T/4} b_\beta \Psi^{\mathfrak{B}}_\beta(t,\pi-\theta,\pi)\end{matrix}\right\}\frac{4^{\alpha+\beta+3/2}}{t^{\alpha+1}}\,e^{-\theta^2/(4t)}$$

对于 $\theta\in[0,\pi]$ 和 $0<t\le T$。引理得证。 □

引理 H. 设 $\alpha\in\mathbb{N}$ 且令 $T>0$。则

$$G_t^{\alpha,-1/2}(\cos\theta,1) \simeq \left\{\begin{matrix}C^{ref}_{\alpha,T}\\ c^{ref}_{\alpha,T}\end{matrix}\right\}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{4t}\right)$$

对于 $0\le\theta\le\pi$ 和 $0<t\le T$，常数为

$$c^{ref}_{\alpha,T} := c^{A}_{2\alpha+1/2,T/16}\times 2\Big(\frac{32}{\mathbb{D}_\alpha T/4\vee\mathfrak{B}\pi^2}\Big)^{\alpha+1/2} b_\alpha \times \frac{h_0^{2\alpha+1/2}}{h_0^{\alpha}},$$

$$C^{ref}_{\alpha,T} := C^{A}_{2\alpha+1/2,T/16}\times 8\Big(\frac{64}{\mathfrak{b}\pi^2}\Big)^{\alpha+1/2} B_\alpha \times \frac{h_0^{2\alpha+1/2}}{h_0^{\alpha}}.$$

证明。 由 [28, 引理 3.4] 可知，对于 $x,\ y\in[-1,1]$ 和 $t>0$

$$G_t^{\alpha,-1/2}\big(2x^2-1,2y^2-1\big) = 2^{-\alpha-3/2}\big[G^{\alpha}_{t/4}(x,y)+G^{\alpha}_{t/4}(-x,y)\big].$$

这意味着

$$G_t^{\alpha,-1/2}(\cos\theta,1) = \frac{1}{2^{\alpha+3/2}}\Big[G^{\alpha}_{t/4}\Big(\cos\frac{\theta}{2},1\Big)+G^{\alpha}_{t/4}\Big(-\cos\frac{\theta}{2},1\Big)\Big],\qquad \theta\in[0,\pi].$$

利用 $z\mapsto G^{\alpha}_{t/4}(z,1)$ 的单调性，参见引理 2.1，可推得

$$G_t^{\alpha,-1/2}(\cos\theta,1) \simeq \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}\frac{1}{2^{\alpha+3/2}} G^{\alpha}_{t/4}\Big(\cos\frac{\theta}{2},1\Big).$$

现在可以应用引理 G，得到

$$G_t^{\alpha,-1/2}(\cos\theta,1) \simeq \left\{\begin{matrix}2C^{\mathrm{ref}}_{\alpha,\alpha,T/4}\Psi^{\mathfrak{b}}_\alpha(t/4,\pi-\theta/2,\pi)\\ c^{\mathrm{ref}}_{\alpha,\alpha,T/4}\Psi^{\mathfrak{B}}_\alpha(t/4,\pi-\theta/2,\pi)\end{matrix}\right\}\frac{1}{2^{\alpha+3/2}}\Big(\frac{4}{t}\Big)^{\alpha+1}e^{-\theta^2/(4t)}$$

对于 $\theta\in[0,\pi]$ 和 $0<t\le T$。估计

$$\Psi^{\mathfrak{b}}_\alpha(t/4,\pi-\theta/2,\pi)\le\big(\mathfrak{b}\pi^2/2\big)^{-\alpha-1/2},\qquad \Psi^{\mathfrak{B}}_\alpha(t/4,\pi-\theta/2,\pi)\ge\big[\mathbb{D}_\alpha T/4\vee\mathfrak{B}\pi^2\big]^{-\alpha-1/2},$$

an将 $C^{\mathrm{ref}}_{\alpha,\alpha,T/4}$ 和 $c^{\mathrm{ref}}_{\alpha,\alpha,T/4}$ 的公式代入，即可得出所需结论 . □

5. Large and medium time bounds

第 4 节的统一证明给出了 Jacobi 热核的小时间精确估计，并完整追踪了乘法常数。本节将通过讨论中长时间界来补充这一结果。

设 $\alpha,\beta>-1$，并假设对于某个固定的 $t=t_0=T>0$，引理 F 中的尖锐小时间界成立。那么显然

$$G_{t_0}^{\alpha,\beta}(x,y)\simeq\left\{\begin{matrix}\mathsf{C}_{\alpha,\beta,t_0}\\ \mathsf{c}_{\alpha,\beta,t_0}\end{matrix}\right\},\qquad x,y\in[-1,1], \tag{5.1}$$

其中正常数 $\mathsf{C}_{\alpha,\beta,t_0}$ 和 $\mathsf{c}_{\alpha,\beta,t_0}$ 可由引理 F 的界中出现的常数和其他量显式表示。

另一方面，若 (5.1) 对某个固定的 $t_0>0$ (t_0 大概依赖于 α 和 β) 成立，则还有

$$G_{t}^{\alpha,\beta}(x,y)\simeq\left\{\begin{matrix}\mathsf{C}_{\alpha,\beta,t_0}\\ \mathsf{c}_{\alpha,\beta,t_0}\end{matrix}\right\},\qquad x,y\in[-1,1],\quad \text{all } t\ge t_0,$$

且常数相同。下面用一种众所周知的方法来证明这一点。

令 $t>t_0$。根据半群性质

$$G_{t}^{\alpha,\beta}(x,y)=\int_{-1}^{1}G_{t-t_0}^{\alpha,\beta}(x,z)\,G_{t_0}^{\alpha,\beta}(z,y)\,\mathrm{d}\varrho_{\alpha,\beta}(z).$$

因此，由于 (5.1)，

$$G_{t}^{\alpha,\beta}(x,y)\simeq\left\{\begin{matrix}\mathsf{C}_{\alpha,\beta,t_0}\\ \mathsf{c}_{\alpha,\beta,t_0}\end{matrix}\right\}\int_{-1}^{1}G_{t-t_0}^{\alpha,\beta}(x,z)\,\mathrm{d}\varrho_{\alpha,\beta}(z).$$

现在只需注意到，最后一个积分等于 1，因为雅可比半群具有马尔可夫性，尤其是保守的。

因此，按上述意义，$G^{\alpha,\beta}_t(x,y)$ 的中长时间锐界可由小时间锐界推出。以下结论可由上述讨论立即得到。

命题 5.1。设 $\alpha,\beta>-1$。假设引理 *F* 的界对某个 $t_0=T>0$ 成立，即

$$G_{t_0}^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\varphi)\simeq\left\{\begin{matrix}C_{\alpha,\beta,t_0}\Psi_\alpha^{\mathfrak{b}}(t_0,\theta,\varphi)\Psi_\beta^{\mathfrak{b}}(t_0,\pi-\theta,\pi-\varphi)\\ c_{\alpha,\beta,t_0}\Psi_\alpha^{\mathfrak{B}}(t_0,\theta,\varphi)\Psi_\beta^{\mathfrak{B}}(t_0,\pi-\theta,\pi-\varphi)\end{matrix}\right\}\frac{1}{\sqrt{t_0}}\exp\left(-\frac{(\theta-\varphi)^2}{4t_0}\right)$$

对 $\theta,\varphi\in[0,\pi]$ 成立。那么，取相同的常数 C_{α,β,t_0} 和 c_{α,β,t_0}，

$$G_{t}^{\alpha,\beta}(x,y)\simeq\left\{\begin{matrix}C_{\alpha,\beta,t_0}\big(1\vee[1\vee 2/(\mathbb{D}_\alpha t_0)]^{-\alpha-1/2}\big)\big(1\vee[1\vee 2/(\mathbb{D}_\beta t_0)]^{-\beta-1/2}\big)\\ c_{\alpha,\beta,t_0}\big(1\wedge[1\vee \pi^2/(2\mathbb{D}_\alpha t_0)]^{-\alpha-1/2}\big)\big(1\wedge[1\vee \pi^2/(2\mathbb{D}_\beta t_0)]^{-\beta-1/2}\big)e^{-\pi^2/(4t_0)}\end{matrix}\right\}$$
$$\times\frac{1}{t_0^{\alpha+\beta+3/2}\Gamma(\alpha+3/2)\Gamma(\beta+3/2)}$$

对于 x、$y\in[-1,1]$ 以及所有 $t\ge t_0$。

通过区分 α 和/或 β 是否小于 $-1/2$，可以简化命题 5.1 中的界。随后，借助 (2.6) 得出的估计还能进一步简化。细节很直接，留给感兴趣的读者。

注意，对于 $t_0 \sim 1/(\alpha+\beta+3)$，命题 5.1 中上界与下界的比值随 α 和 β 的增长至多为指数级，前提是比值 $C_{\alpha,\,\beta,\,t_0}/c_{\alpha,\,\beta,\,t_0}$ 也满足相同性质。至于后者，情况确实如此，至少当 $\alpha,\ \beta \geq -1/2$ 时如此；见第 6.3 节。

然而，以上讨论对于较大的时间可能无法给出足够精确的估计。幸运的是，当 t 较大时，利用 $G^{\alpha,\ \beta}_{\ t}(x,\ y)$ 的（振荡）级数表示，可以显著改进由命题 5.1 得出的界。这将是第 5 节剩余部分的目标。

下文中我们始终假设 $\alpha,\ \beta > -1$ 且 $n \geq 0$；这些假设在局部范围内可以加强。回顾

$$G_t^{\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-tn(n+\alpha+\beta+1)} \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y)}{h_n^{\alpha,\beta}}, \tag{5.2}$$

其中

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)},$$

在 $n=0$ 和 $\alpha+\beta+1=0$的情况下，采用适当的约定。特别地，

$$h_0^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

将 (5.2) 与 Jacobi 多项式的标准界相结合，可以容易地得出

$$G_t^{\alpha,\beta}(x,y) \to \frac{1}{h_0^{\alpha,\beta}}, \qquad t \to \infty,$$

并且，当 $x, y \in [-1,1]$ 时，该收敛是一致的。我们的目标是通过适当的估计，将这种收敛定量化。

由（5.2）以及恒等式 $n(n+\alpha+\beta+1) - (\alpha+\beta+2) = (n-1)(n+\alpha+\beta+2)$ 可知

$$G_t^{\alpha,\beta}(x,y) = \frac{1}{h_0^{\alpha,\beta}}\Big[1 + E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\Big],$$

其中

$$E_t^{\alpha,\beta}(x,y) := e^{-t(\alpha+\beta+2)}\left(\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_1^{\alpha,\beta}} P_1^{\alpha,\beta}(x) P_1^{\alpha,\beta}(y) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-t(n-1)(n+\alpha+\beta+2)} \frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_n^{\alpha,\beta}} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y)\right).$$

现在我们给出 $|E^{\alpha,\ \beta}_{\ t}(x,y)|$ 的一个上界，该上界与 $x, y \in [-1,1]$ 无关，对 $t \geq T$ 成立（其中 $T = 2\log\ 2 \approx 1.386294$ 是预先选定的阈值），并且当 $t \to \infty$ 时呈指数衰减。当然，只要 t 足够大，这一结果就给出了雅可比热核的精确尖锐界。它还蕴含定理 3。

定理 5.2。设 $\alpha, \beta > -1$ 和 $x, y \in [-1,1]$。假设 $t \geq 2\log 2$。则

$$\big|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\big| \leq \frac{2}{\alpha \wedge \beta + 1} e^{-(t-1)(\alpha+\beta+2)} \quad when \quad \alpha \vee \beta \geq -1/2$$

and

$$\big|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\big| \leq \frac{27/10}{(\alpha+1)(\beta+1)} e^{-(t-1)(\alpha+\beta+2)} \quad when \quad \alpha \vee \beta < -1/2.$$

我们指出定理 5.2 的以下一个简单推论。

推论 5.3. 设 $\alpha,\ \beta > -1$ 且 $x,\ y \in [-1,1]$。则

$$G_t^{\alpha,\beta}(x,y) \simeq \left\{ \begin{matrix} 3/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{h_0^{\alpha,\beta}}, \qquad t \geq T_{\alpha,\beta} \vee 2\log 2, \tag{5.3}$$

其中

$$T_{\alpha,\beta} = 1 + \frac{1}{\alpha+\beta+2} \log\left(\frac{4}{\alpha \wedge \beta + 1} \right) \quad when \quad \alpha \vee \beta \geq -1/2$$

and

$$T_{\alpha,\beta} = 1 + \frac{1}{\alpha+\beta+2} \log\left(\frac{27/5}{(\alpha+1)(\beta+1)} \right) \quad when \quad \alpha \vee \beta < -1/2.$$

注意，如果 $\alpha,\ \beta \geq -1/2$ 那么 $T_{\alpha,\ \beta} \leq 1 + \log 8$，因此在这种情况下，界 (5.3) 特别适用于 $t \geq 1 + \log 8 \approx 3.079442$。

证明定理 5.2 需要做一些准备。首先请注意（参见 [38, 第 IV 章，第 4.5 节，(4.5.1)]）

$$P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

so

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_1^{\alpha,\beta}(x)| = \max\left\{ P_1^{\alpha,\beta}(1), -P_1^{\alpha,\beta}(-1) \right\} = \alpha \vee \beta + 1.$$

因此，对于 $x,\ y \in [-1,1]$,

$$\left| \frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_1^{\alpha,\beta}} P_1^{\alpha,\beta}(x) P_1^{\alpha,\beta}(y) \right| \leq \frac{(\alpha+\beta+3)(\alpha\vee\beta+1)^2}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{(\alpha+\beta+3)(\alpha\vee\beta+1)}{\alpha\wedge\beta+1}. \tag{5.4}$$

对于一般的 $n \geq 0$，我们有（参见 [38, 第 VII 章，第 7.32 节，定理 7.32.1]）

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{\alpha,\beta}(x)| = \max\left\{ P_n^{\alpha,\beta}(1), |P_n^{\alpha,\beta}(-1)| \right\} = \binom{n+\alpha\vee\beta}{n} \quad \text{when } \alpha\vee\beta \geq -1/2. \tag{5.5}$$

对于 $\alpha \vee \beta < -1/2$，似乎没有已知的最大值显式公式，但已知其数量级为 $\sim n^{-1/2}$。文献中似乎没有关于 α 和 β 的相应定量上界。由于范围 $\alpha,\ \beta < -1/2$ 对应用并非关键，我们采用非最优（就对 n 的依赖而言）但相对简单的估计，陈述如下引理。

引理 5.4. 设 $\alpha,\ \beta \in (-1,\ -1/2)$。则

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq \frac{2n+\alpha\wedge\beta+1}{\alpha\wedge\beta+1} \binom{n+\alpha\wedge\beta}{n}, \qquad n \geq 0.$$

证明。 $n = 0$ 的情形是显然的，因此假设 $n \geq 1$。利用恒等式 [21]

$$(2n+\alpha+\beta+1)P_n^{\alpha,\beta} = (n+\alpha+\beta+1)P_n^{\alpha+1,\beta} - (n+\beta)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}$$

我们可以写成

$$|P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq \frac{n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}|P_n^{\alpha+1,\beta}(x)| + \frac{n+\beta}{2n+\alpha+\beta+1}|P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x)| \leq |P_n^{\alpha+1,\beta}(x)| + |P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x)|.$$

将此结果与 (5.5) 结合可得

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq \binom{n+\alpha+1}{n} + \binom{n-1+\alpha+1}{n-1}.$$

[21] 这个恒等式可以通过结合第18章第18.9节公式18.9.5] 与著名公式 $P^{\beta,\ n\ \alpha}(-x) = (-1)^n P^{\alpha,\ n\ \beta}(x)$ 来证明，参见第18章第18.6(i)节]。

由于对称性，我们还有

$$\max_{x\in[-1,1]}|P_n^{\alpha,\beta}(x)|\le\binom{n+\beta+1}{n}+\binom{n-1+\beta+1}{n-1}.$$

现在可以选取这两个界中较紧的一个，见 (2.13)，由此得到

$$\max_{x\in[-1,1]}|P_n^{\alpha,\beta}(x)|\le\binom{n+\alpha\wedge\beta+1}{n}+\binom{n-1+\alpha\wedge\beta+1}{n-1}=\frac{2n+\alpha\wedge\beta+1}{\alpha\wedge\beta+1}\binom{n+\alpha\wedge\beta}{n}.$$

这就是引理中所述的上界。 □

接下来，我们估计 $n\ge 2$ 的量

$$K_n^{\alpha,\beta}:=\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_n^{\alpha,\beta}}\Big(\max_{x\in[-1,1]}|P_n^{\alpha,\beta}(x)|\Big)^2.$$

引理 5.5。令 $\alpha,\beta>-1$ 和 $n\ge 2$。则

$$K_n^{\alpha,\beta}\le\frac{7\sqrt{6}\,e^{1/30}\,\Gamma(\alpha\wedge\beta+1)}{3\sqrt{5}\,\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha\vee\beta+1)}(n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\vee\beta)+1}\quad when\quad \alpha\vee\beta\ge-1/2$$

and

$$K_n^{\alpha,\beta}\le\frac{18\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}\quad when\quad \alpha\vee\beta<-1/2.$$

在证明中，我们将应用 (2.11)，结合上界 $1+A\le e^A$, $A\in\mathbb{R}$，可得

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)}<e^{1/(12x)}\sqrt{\frac{y}{x}}\Big(1+\frac{x-y}{y}\Big)^y e^{-(x-y)}x^{x-y}\le e^{1/(12x)}\sqrt{\frac{y}{x}}x^{x-y},\qquad x,y>0. \tag{5.6}$$

对于 $x>y$，我们有时会改用 (2.12)。

引理 *5.5* 的证明。在整个证明过程中，我们始终假设 $n\ge 2$。

首先考虑 $\alpha\vee\beta\ge-1/2$ 的情形。由 (5.5) 可得

$$\begin{aligned}\frac{K_n^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha,\beta}}&=\frac{1}{h_n^{\alpha,\beta}}\binom{n+\alpha\vee\beta}{n}^2\\&=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\Big(\frac{\Gamma(n+\alpha\vee\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha\vee\beta+1)}\Big)^2\\&\le\frac{7\cdot 2^{-\alpha-\beta-1}}{3\Gamma(\alpha\vee\beta+1)^2}\frac{\Gamma(n+\alpha\vee\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha\wedge\beta+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+1)},\end{aligned}$$

其中，该不等式是通过将因子 $(2n+\alpha+\beta+1)$ 估计为 $7(n+\alpha+\beta+1)/3$ 得到的。利用 (2.12) 估计上式中的第二个因子，并利用 (5.6) 估计第三个因子，我们进一步得到

$$\begin{aligned}\frac{K_n^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha,\beta}}&\le\frac{7\cdot 2^{-\alpha-\beta-1}}{3\Gamma(\alpha\vee\beta+1)^2}(n+\alpha\vee\beta+1)^{|\alpha-\beta|}\,\frac{\sqrt{n+1}\,e^{1/[12(n+\alpha+\beta+2)]}}{\sqrt{n+\alpha+\beta+2}}(n+\alpha+\beta+2)^{\alpha+\beta+1}\\&\le\frac{7\sqrt{6}\,e^{1/30}\,2^{-\alpha-\beta-1}}{3\sqrt{5}\,\Gamma(\alpha\vee\beta+1)^2}(n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\vee\beta)+1},\end{aligned}$$

这里我们应用了关系 $|\alpha-\beta|=\alpha\vee\beta-\alpha\wedge\beta$, $\alpha+\beta+|\alpha-\beta|=2(\alpha\vee\beta)$ 和 $n+\alpha\vee\beta+1\le n+\alpha+\beta+2$。因此，

$$K_n^{\alpha,\beta}\le\frac{7\sqrt{6}\,e^{1/30}\,\Gamma(\alpha\wedge\beta+1)}{3\sqrt{5}\,\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha\vee\beta+1)}(n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\vee\beta)+1}.$$

接下来，我们讨论情形 $\alpha\vee\beta<-1/2$，即 $\alpha,\ \beta\in(-1,\ -1/2)$。根据引理 5.4

$$\frac{K_n^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha,\beta}} \le \frac{1}{h_n^{\alpha,\beta}} \binom{2n+\alpha\wedge\beta+1}{\alpha\wedge\beta+1}^2 \binom{n+\alpha\wedge\beta}{n}^2$$
$$= \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \binom{2n+\alpha\wedge\beta+1}{\alpha\wedge\beta+1}^2 \left(\frac{\Gamma(n+\alpha\wedge\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha\wedge\beta+1)}\right)^2.$$

这里我们使用上界 $2n+\alpha+\beta+1 \le 3(n+\alpha+\beta+1)$，得到

$$\frac{K_n^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha,\beta}} \le \frac{3\cdot 2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)^2} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha\wedge\beta+1)^2}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} (2n+\alpha\wedge\beta+1)^2$$
$$= \frac{3\cdot 2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)^2} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha\vee\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha\wedge\beta+1)}{\Gamma(n)} \frac{2n+\alpha\wedge\beta+1}{n} (2n+\alpha\wedge\beta+1).$$

在上述表达式中，我们分别将最后两个因子上界估计为 $9/4$ 和 $2(n+\alpha\wedge\beta+1)$。对于另外两个因子，我们应用（2.12）。于是得到

$$\frac{K_n^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha,\beta}} \le \frac{27\cdot 2^{-\alpha-\beta-1}}{2\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)^2} (n+\alpha+\beta+2)^{\alpha+\beta-\alpha\vee\beta+1} (n+\alpha\wedge\beta+1)^{\alpha\wedge\beta+1} (n+\alpha\wedge\beta+1)$$
$$\le \frac{27\cdot 2^{-\alpha-\beta-1}}{2\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)^2} (n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}.$$

由于对于 $\alpha,\ \beta \in (-1,\ -1/2)$，有 $\Gamma(\alpha\wedge\beta+2) > 0.88$（见 [30, 第 5 章第 5.4 节(iii)]），因此有$27/[2\Gamma(\alpha\wedge\beta+1)^2] < 18$。于是，

$$K_n^{\alpha,\beta} \le \frac{18\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} (n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\wedge\beta)+3},$$

如所要求的。 □

证明定理 5.2 所需的另一项内容是下面这个技术性结果。

引理 5.6。 设 $\delta \ge 0$、$\zeta \ge \zeta_0 \ge 0$ 和 $t \ge T > 0$ 满足 $\zeta \le 2t(\delta+1)$。则

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-tn(n+\delta)} (n+\delta)^{\zeta} \le \frac{1}{2T}\Big(\sqrt{2\pi}\sqrt{\zeta_0+1}\, e^{-\zeta_0+1/[12(\zeta_0+1)]} + 1\Big) e^{-2t(1+\delta)} 2^{\zeta} (1+\delta)^{\zeta}.$$

证明。 将上述级数记为 S，并令 δ, ζ, t 如引理陈述中所示。注意，函数 $x \mapsto e^{-2t(x+\delta)}(x+\delta)^{\zeta}$ 在 $[1,\infty)$ 上递减。事实上，其导数为

$$-2te^{-2t(x+\delta)}(x+\delta)^{\zeta}\left(1 - \frac{\zeta}{2t(x+\delta)}\right),$$

根据假设 $\zeta \le 2t(\delta+1)$，该导数为负。因此，

$$S \le \int_1^{\infty} e^{-2t(x+\delta)} (x+\delta)^{\zeta}\, \mathrm{d}x = (2t)^{-\zeta-1} \int_{2t(\delta+1)}^{\infty} e^{-x} x^{\zeta}\, \mathrm{d}x$$
$$= (2t)^{-\zeta-1} e^{-2t(\delta+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} \big(x + 2t(\delta+1)\big)^{\zeta}\, \mathrm{d}x.$$

利用上界 $(A+B)^{\zeta} \le 2^{\zeta}(A^{\zeta}+B^{\zeta})$、 $A,\ B > 0$ 和 (2.11)，我们进一步得到

$$S \le (2t)^{-\zeta-1} e^{-2t(\delta+1)} 2^{\zeta} \int_0^{\infty} e^{-x} \Big(x^{\zeta} + \big[2t(\delta+1)\big]^{\zeta}\Big)\, \mathrm{d}x$$
$$= (2t)^{-\zeta-1} e^{-2t(\delta+1)} 2^{\zeta} \Big(\Gamma(\zeta+1) + \big[2t(\delta+1)\big]^{\zeta}\Big)$$

$$\leq \frac{1}{2t}e^{-2t(\delta+1)}(\delta+1)^{\zeta}\left[\sqrt{2\pi}\left(\frac{\zeta+1}{t(\delta+1)}\right)^{\zeta}\sqrt{\zeta+1}e^{-\zeta-1+1/[12(\zeta_0+1)]}+2^{\zeta}\right].$$

现在注意到，函数 $[\zeta_0,\infty)\ni\zeta\mapsto\sqrt{\zeta+1}e^{-\zeta}$ 在 $\zeta=\zeta_0$ 处取得其最大值。因此，

$$S\leq\frac{1}{2T}e^{-2t(\delta+1)}2^{\zeta}(\delta+1)^{\zeta}\left[\sqrt{2\pi}\Big(1+\frac{1}{\zeta}\Big)^{\zeta}\sqrt{\zeta_0+1}e^{-\zeta_0-1}e^{1/[12(\zeta_0+1)]}+1\right].$$

由于 $(1+1/\zeta)^{\zeta}\leq e$，证明完成。 □

我们将在两种情况下使用引理 5.6，下面对此进行说明。

推论 5.7。令 $\alpha,\ \beta>-1$ 并令 $t\geq 2\log 2$。

(i) 如果 $\alpha\vee\beta\geq -1/2$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-tn(n+\alpha+\beta+3)}(n+\alpha+\beta+3)^{2(\alpha\vee\beta)+1}$$
$$\leq\left(1+\frac{\sqrt{2\pi}e^{1/12}+1}{128\log 2}\right)e^{-t(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\vee\beta)+1}.$$

(ii) 如果 $\alpha\vee\beta<-1/2$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-tn(n+\alpha+\beta+3)}(n+\alpha+\beta+3)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}$$
$$\leq\left(1+\frac{2\sqrt{\pi}e^{-23/24}+1}{32\log 2}\right)e^{-t(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}.$$

证明。在 $\alpha\vee\beta\geq-1/2$ 的情况下，我们将引理 5.6 应用于 $\delta=\alpha+\beta+3$, $\zeta=2(\alpha\vee\beta)+1$, $\zeta_0=0$ 和 $T=2\log 2$。注意，条件 $\zeta\leq 2T(\delta+1)$ 满足。因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-tn(n+\alpha+\beta+3)}(n+\alpha+\beta+3)^{2(\alpha\vee\beta)+1}$$
$$\leq e^{-t(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\vee\beta)+1}\left(1+\frac{1}{4\log 2}\big(\sqrt{2\pi}e^{1/12}+1\big)e^{-t(\alpha+\beta+4)}2^{2(\alpha\vee\beta)+1}\right).$$

由于 $t\geq 2\log 2$，我们有

$$e^{-t(\alpha+\beta+4)}2^{2(\alpha\vee\beta)+1}\leq 2^{-2(\alpha\wedge\beta)-7}\leq 2^{-5},$$

结合前面的上界，即可完成对 (i) 中估计的证明。

在剩余的情形 $\alpha,\beta\in(-1,-1/2)$ 下，我们将引理 5.6 应用于 $\delta=\alpha+\beta+3$,$\zeta=2(\alpha\wedge\beta)+3$, $\zeta_0=1$ 和 $T=2\log 2$。同样，$\zeta\leq 2T(\delta+1)$ 成立。因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-tn(n+\alpha+\beta+3)}(n+\alpha+\beta+3)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}$$
$$\leq e^{-t(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}\left(1+\frac{2\sqrt{\pi}e^{-23/24}+1}{4\log 2}e^{-t(\alpha+\beta+4)}2^{2(\alpha\wedge\beta)+3}\right).$$

与上文类似，由于对 t 的约束，

$$e^{-t(\alpha+\beta+4)}2^{2(\alpha\wedge\beta)+3}\leq 2^{-2(\alpha\vee\beta)-5}\leq 2^{-3}.$$

结合前面的估计，这表明 (ii) 成立，并完成证明。 □

现在我们可以证明第 5 节的主要结果了。

定理的证明 *5.2.* 首先考虑 $\alpha\vee\beta\geq -1/2$ 的情形。由 (5.4) 和引理 5.5 可得

$$\begin{aligned}\left|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\right| &\leq e^{-t(\alpha+\beta+2)}\Bigg[\frac{(\alpha+\beta+3)(\alpha\vee\beta+1)}{\alpha\wedge\beta+1}\\ &\qquad+\frac{7\sqrt{6}\,e^{1/30}\,\Gamma(\alpha\wedge\beta+1)}{3\sqrt{5}\,\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha\vee\beta+1)}\sum_{n=2}^{\infty}e^{-t(n-1)(n+\alpha+\beta+2)}(n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\vee\beta)+1}\Bigg].\end{aligned}$$

现在应用推论 5.7(i)，得到

$$\begin{aligned}\left|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\right| &\leq e^{-t(\alpha+\beta+2)}\frac{\alpha\vee\beta+1}{\alpha\wedge\beta+1}\\ &\qquad\times\left(\alpha+\beta+3+\frac{\mathfrak{C}\,\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha\vee\beta+2)}e^{-t(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\vee\beta)+1}\right),\end{aligned}\tag{5.7}$$

其中

$$\mathfrak{C}:=\frac{7\sqrt{6}\,e^{1/30}}{3\sqrt{5}}\Big(1+\frac{\sqrt{2\pi}e^{1/12}+1}{128\log 2}\Big)\approx 2.753612.$$

接下来，我们先估计式 (5.7) 中的一部分。由 (2.11) 可知，

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)\,(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\vee\beta)+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha\vee\beta+2)} &\leq \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}e^{2(\alpha\vee\beta)+2}\,\frac{(\alpha\wedge\beta+2)^{\alpha\wedge\beta+3/2}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\vee\beta)+1}}{(\alpha+\beta+2)^{\alpha+\beta+3/2}(\alpha\vee\beta+2)^{\alpha\vee\beta+3/2}}\\ &=\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}e^{2(\alpha\vee\beta)+2}\Big(1+\frac{2}{\alpha+\beta+2}\Big)^{\alpha+\beta+2}\frac{\big(1+\frac{\alpha\wedge\beta+2}{\alpha\vee\beta+2}\big)^{\alpha\vee\beta+2}}{\big(1+\frac{\alpha\vee\beta+2}{\alpha\wedge\beta+2}\big)^{\alpha\wedge\beta+2}}\frac{\sqrt{(\alpha+\beta+2)(\alpha\vee\beta+2)}}{(\alpha+\beta+4)\sqrt{\alpha\wedge\beta+2}}.\end{aligned}$$

这里的最后一个因子不超过 1。此外，注意到由于函数 $[1,\infty)\ni s\mapsto \frac{(1+1/s)^{s}}{1+s}$ 是递减的，我们有如下上界

$$\frac{\big(1+\frac{A}{B}\big)^{B}}{\big(1+\frac{B}{A}\big)^{A}}=\left(\frac{\big(1+\frac{A}{B}\big)^{B/A}}{1+\frac{B}{A}}\right)^{A}\leq 1,\qquad 0<A\leq B<\infty.$$

因此，

$$\frac{\Gamma(\alpha\wedge\beta+2)(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\vee\beta)+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha\vee\beta+2)}\leq\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{2(\alpha\vee\beta)+4}.$$

将最后一个估计与 (5.7) 结合，得到

$$\begin{aligned}\left|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\right| &\leq \frac{e^{-(t-1)(\alpha+\beta+2)}}{\alpha\wedge\beta+1}\Bigg[(\alpha+\beta+3)^2e^{-(\alpha+\beta+2)}\\ &\qquad+\frac{\mathfrak{C}e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}(\alpha\vee\beta+1)e^{-(t-1)(\alpha\vee\beta+1)}e^{-(t+1)(\alpha\wedge\beta+1)}e^{-2t+2}\Bigg].\end{aligned}$$

应用 关于 $s>0$ 的简单上界 $se^{-s}\leq e^{-1}$ 和 $s^2e^{-s}\leq 4e^{-2}$，进一步得到

$$\begin{aligned}\left|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\right| &\leq \frac{e^{-(t-1)(\alpha+\beta+2)}}{\alpha\wedge\beta+1}\left(\frac{4}{e}+\frac{\mathfrak{C}\,e^{1/12}}{e(t-1)\sqrt{2\pi}}\,e^{-2t+2}\right)\\ &\leq \frac{e^{-(t-1)(\alpha+\beta+2)}}{\alpha\wedge\beta+1}\left(\frac{4}{e}+\frac{\mathfrak{C}\,e^{13/12}}{16\sqrt{2\pi}(2\log 2-1)}\right),\end{aligned}$$

这里用到了假设 $t\geq 2\log 2$。最后一组括号中的常数约为 1.996640，小于 2。因此，定理的第一个上界得证。

现在我们转到 $\alpha,\ \beta\in(-1,\ -1/2)$ 的情形。与上述类似，由 (5.4) 和引理 5.5 可得

$$\left|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\right| \le e^{-t(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\Bigg[(\alpha+\beta+3)(\alpha\vee\beta+1)^2 + 18\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\sum_{n=2}^{\infty} e^{-t(n-1)(n+\alpha+\beta+2)}(n+\alpha+\beta+2)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}\Bigg].$$

这里涉及伽马函数的比值满足 [22]

$$\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \le \frac{\Gamma(-1/2+2)\Gamma(-1/2+2)}{\Gamma(-1/2-1/2+2)} = \frac{\pi}{4}, \qquad \alpha,\beta\in(-1,-1/2).$$

利用这一点和推论 5.7(ii)，可得

$$\left|E_t^{\alpha,\beta}(x,y)\right| \le \frac{e^{-t(\alpha+\beta+2)}}{(\alpha+1)(\beta+1)}\left[\frac{1}{2}+\frac{9\pi}{2}\Big(1+\frac{2\sqrt{\pi}\,e^{-23/24}+1}{32\log 2}\Big)\,e^{-t(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\wedge\beta)+3}\right].$$

注意到

$$e^{-t(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{2(\alpha\wedge\beta)+3} \le 2^{-2(\alpha+\beta+4)}(\alpha+\beta+4)^{\alpha+\beta+3} \le \frac{9}{64},$$

因为函数 $s\mapsto 2^{-2s}s^{s-1}$ 在 $[2,3]$ 上的最大值在 $s=3$ 处取得，且等于 $9/64$。由于

$$\frac{1}{2}+\frac{81\pi}{128}\Big(1+\frac{2\sqrt{\pi}e^{-23/24}+1}{32\log 2}\Big) \approx 2.699527 < \frac{27}{10},$$

我们得出该定理的第二个上界。

定理 5.2 的证明至此完成。 □

6. Applications: totally explicit sharp heat kernel bounds

本节应用第 4 节的结果，为雅可比热核及其他一些值得关注的相关热核推导出完全显式的精确小时间界。我们着重于界的简洁性，因此，与例如引理 F 相比，我们给出的结果略弱，但形式更为简洁。

随后，考虑到第 5 节中给出的讨论和结果，可以直接推导出类似的完全显式精确中长时间界。具体细节留给感兴趣的读者。

6.1. **球面热核**。

我们采用第 3 节开头引入的记号。回顾一下，参见 (3.3)，维数为 $d\ge 1$ 的单位球面 S^d 上的热核可直接通过函数给出

$$K_t^d(\phi) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}G_t^{d/2-1}(\cos\phi,1), \qquad \phi\in[0,\pi], \quad t>0.$$

令 $T>0$。由引理 G，对于 $0<t\le T$，我们有

$$G_t^{d/2-1}(\cos\phi,1) \simeq \left\{\begin{array}{c} C^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,T}\Psi^{\mathfrak{b}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi) \\ c^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,T}\Psi^{\mathfrak{B}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi)\end{array}\right\}\frac{1}{t^{d/2}}e^{-\phi^2/(4t)},$$

[22] 为证明此上界，令 $f_r(s)=\Gamma(s+1)/\Gamma(s+r)$，其中 $r\in(0,1)$。于是 $f_r'(s)=f_r(s)[\psi(s+1)-\psi(s+r)]>0$，最后一个不等式是因为二伽马函数 $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 对 $z>0$ 单调递增；例如参见 [30, 第 5 章, §5.15, 公式 5.15。1]。因此，$f_r(s)$ 对 $s>0$ 单调递增。先对 $r=\beta+1$，再对 $r=1/2$ 使用这一性质，即可得到所需的上界。

其中

$$c^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,T} = c^A_{d-3/2,T/4}4^{d-1/2}b_{d/2-1}\frac{h_0^{d-3/2}}{h_0^{d/2-1}}$$
$$= c^A_{d-3/2,T/4}\Big(1\wedge 2^{(d-3)/2}\Big)2^d\exp\big(-\chi_{\{d\neq 1\}}\mathbb{D}_{d/2-1}\big)\frac{\Gamma(d-1/2)}{\Gamma(d/2)},$$
$$C^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,T} = C^A_{d-3/2,T/4}4^dB_{d/2-1}\frac{h_0^{d-3/2}}{h_0^{d/2-1}} = C^A_{d-3/2,T/4}\Big(1\vee 2^{(d-3)/2}\Big)2^{d+\chi_{\{d\geq 2\}}}\frac{\Gamma(d-1/2)}{\Gamma(d/2)}.$$

这意味着

(6.1)
$$K_t^d(\phi)\simeq\left\{\begin{array}{c} C^A_{d-3/2,T/4}2^{2d-\chi_{\{d=1\}}}(1\vee 2^{(d-3)/2})\Gamma(d-1/2)\Psi^{\mathfrak{b}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi)\\ c^A_{d-3/2,T/4}4^{d-1/2}(1\wedge 2^{(d-3)/2})\exp\big(-\chi_{\{d\neq 1\}}\mathbb{D}_{d/2-1}\big)\Gamma(d-1/2)\Psi^{\mathfrak{B}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi)\end{array}\right\}$$
$$\times\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\phi^2/(4t)}.$$

关于 $K_t^d(\phi)$ 的下界，我们得到（见引理 A）：

$$K_t^d(\phi)\geq 2\Big(1\wedge 2^{(d-3)/2}\Big)\exp\big(-\chi_{\{d\neq 1\}}\mathbb{D}_{d/2-1}\big)\Psi^{\mathfrak{B}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi)\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\phi^2/(4t)}. \tag{6.2}$$

该估计对所有 $t>0$ 均成立。为了写出上界，鉴于引理 A 中上乘法常数的结构，将情况分类讨论会很方便。

当 $d=1$ 时，球面就是一维环面。函数 $K_t^1(\phi)$ 与周期化高斯-魏尔斯特拉斯核重合，

$$K_t^1(\phi)=\vartheta_t(\phi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}W_t(\phi+2\pi n),$$

从级数直接进行估计相对简单。[23] 因此，这种情况下的精确显式界早已为人所知，至少可视为众所周知的结果。不过，仅为说明起见，我们指出，在这种情况下，我们的结果（参见 (6.1) 和引理 A）意味着

$$K_t^1(\phi)\leq C^A_{-1/2,T/4}2\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\phi^2/(4t)}=2\Big(1+2e^{-2\pi^2/T}\Big)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\phi^2/(4t)},\qquad t\leq T\leq 2\pi^2.$$

将其与 (6.2) 结合，我们得到一些较粗略的估计

$$K_t^1(\phi)\simeq\left\{\begin{array}{c}2\big(1+2e^{-2\pi^2/T}\big)\\ 1\end{array}\right\}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\phi^2/(4t)},\qquad \phi\in[0,\pi],\quad 0<t\leq T\leq 2\pi^2;$$

这里的下界实际上对所有 $t>0$ 都成立。

现在令 $d=2$。由 (6.1) 和引理 A，

$$K_t^2(\phi)\leq C^A_{1/2,T/4}4^2\Gamma(3/2)\Psi^{\mathfrak{b}}_0(t,\pi-\phi,\pi)\frac{1}{4\pi t}e^{-\phi^2/(4t)}$$
$$=2\pi e^{T/4}\Psi^{\mathfrak{b}}_0(t,\pi-\phi,\pi)\frac{1}{4\pi t}e^{-\phi^2/(4t)},\qquad t\leq T\leq 2\pi^2.$$

这与 (6.2) 一起给出

$$K_t^2(\phi)\simeq\left\{\begin{array}{c}2\pi e^{T/4}\Psi^{\mathfrak{b}}_0(t,\pi-\phi,\pi)\\ \sqrt{2}e^{-\pi/4}\Psi^{\mathfrak{B}}_0(t,\pi-\phi,\pi)\end{array}\right\}\frac{1}{4\pi t}e^{-\phi^2/(4t)},\qquad \phi\in[0,\pi],\quad 0<t\leq T\leq 2\pi^2. \tag{6.3}$$

[23] 当 t 较大时，可使用振荡级数，参见第 5 节，$K_t^1(\phi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-tn^2}\cos(n\phi)$

注意，例如对于 $T=1$，比值 $2\pi e^{T/4}/(\sqrt{2}e^{-\pi/4}) \approx 12.512168$。

最后，令 $d \geq 3$。利用 (6.1) 和引理 A，我们得到

$$K_t^d(\phi) \leq \begin{cases} 2\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{2e}\,\mathfrak{w}_1)^{d-1}\Psi^{\mathfrak{b}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi)(4\pi t)^{-d/2}e^{-\phi^2/(4t)} & \text{if } 0<t\leq 2/(d-1/2) \\ 2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/\sqrt{2})^{d-1}\Psi^{\mathfrak{b}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi)(4\pi t)^{-d/2}e^{-\phi^2/(4t)} & \text{if } 0<t\leq 4/(2d-1)^2 \end{cases}.$$

结合 (6.2)，可得对于 $d \geq 3$ 和 $\theta \in [0,\pi]$

$$K_t^d(\phi) \simeq \left\{ \begin{array}{c} 2\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{2e}\,\mathfrak{w}_1)^{d-1}\Psi^{\mathfrak{b}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi) \\ 2\exp(-\mathbb{D}_{d/2-1})\Psi^{\mathfrak{B}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi) \end{array} \right\} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\phi^2/(4t)}, \qquad 0<t\leq \frac{2}{d-1/2},$$

and

$$K_t^d(\phi) \simeq \left\{ \begin{array}{c} 2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/\sqrt{2})^{d-1}\Psi^{\mathfrak{b}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi) \\ 2\exp(-\mathbb{D}_{d/2-1})\Psi^{\mathfrak{B}}_{d/2-1}(t,\pi-\phi,\pi) \end{array} \right\} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\phi^2/(4t)}, \qquad 0<t\leq \frac{1}{(d-1/2)^2}.$$

根据 (2.6)，有 $\exp(-\mathbb{D}_{d/2-1}) > \exp(-e^{-\gamma})\exp(-e^{-\gamma}/2)^{d-1}$。利用这一点，再对相关数值进行近似计算[24]，便可给出这些常数的上界

$$2\,\mathfrak{w}_0 < \frac{8}{5}, \quad 2\sqrt{2e}\,\mathfrak{w}_1 < \frac{24}{5}, \quad 2\exp(-\mathbb{D}_{d/2-1}) > \frac{11}{10}\cdot\Big(\frac{3}{4}\Big)^{d-1}, \quad 2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' < 7, \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} < \frac{9}{4},$$

对于 $d \geq 3$，并可独立地给出这些常数比值的上界，如下：

$$\frac{2\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{2e}\,\mathfrak{w}_1)^{d-1}}{2\exp(-\mathbb{D}_{d/2-1})} < \frac{7}{5}\cdot\Big(\frac{19}{3}\Big)^{d-1}, \qquad \frac{2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/\sqrt{2})^{d-1}}{2\exp(-\mathbb{D}_{d/2-1})} < \frac{31}{5}\cdot 3^{d-1}, \qquad d\geq 3.$$

我们认为，在我们的估计中，最优上界与下界乘法常数之比随 d 的增长不超过指数级，这是因为这些界的结构与热核的实际行为之间存在某种不相容性。以下第 6.2 节和第 6.3 节中讨论的其他热核也有类似情况。

6.2. **紧致秩一对称空间上的热核。**

设 $\mathbb{M}$ 为一个紧致秩一对称空间。这类空间已被完全分类（参见 [15, 39]），具体而言，它们是欧几里得球面、实射影空间、复射影空间、四元数射影空间，以及基于八元数的凯莱射影平面。因此，$\mathbb{M}$ 是一个完备、连通、无边界且截面曲率（以及里奇曲率）严格为正的黎曼流形。

我们用 $d_{\mathbb{M}}$ 表示 $\mathbb{M}$ 上的黎曼测地距离，用 $\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}$ 表示 $\mathbb{M}$ 上的黎曼体积测度。$\mathbb{M}$ 的维数 d 和与 $\mathbb{M}$ 相关的对跖维数[25] $\tilde{d}$（二者均按 $\mathbb{R}$ 实数计）将用上标表示，即 $\mathbb{M}^{d,\tilde{d}}$ 表示 $\mathbb{M}$ 的实维数为 d，且其相关对跖实维数为 $\tilde{d}$。

设 $K_t^{\mathbb{M}}(x,y)$, $x,\ y\in\mathbb{M}$, $t>0$ 为 $\mathbb{M}$ 上的热核，即关于 $\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}$ 的积分核，由 $\mathbb{M}$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子生成的半群的积分核。已知，参见 [28,

[24] 有 $2\,\mathfrak{w}_0 \approx 1.595966$, $2\sqrt{2e}\,\mathfrak{w}_1 \approx 4.782514$, $2\exp(-e^{-\gamma}) \approx 1.140752$, $\exp(-e^{-\gamma}/2) \approx 0.755232$, $2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' \approx 6.987667$, $\pi/\sqrt{2} \approx 2.221441$。[25] 给定 $\mathbb{M}$ 中的一个固定点，$\mathbb{M}$ 中与该点的测地距离等于 $\mathbb{M}$ 直径的点构成 $\mathbb{M}$ 的一个子流形，称为对跖流形。对于球面，它仅由一个点构成；而在其他情况下，对跖流形可与较低维的紧致秩一对称空间等同；这种等同与最初选定的固定点无关。与 $\mathbb{M}$ 相关的对跖维数就是对跖流形的维数。更多参考资料和详细内容，参见例如 [28, 第 4] 节。

-第 4]，节 $\mathbb{M}=\mathbb{M}^{d},\ d$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y)=\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\,G_{\kappa^2 t}^{\alpha,\beta}\Big(\cos\big[\kappa\,d_{\mathbb{M}}(x,y)\big],1\Big),\qquad x,y\in\mathbb{M},\quad t>0, \tag{6.4}$$

其中

$$\kappa=\frac{\pi}{\operatorname{diam}\mathbb{M}},\qquad \alpha=\frac{d}{2}-1,\qquad \beta=\frac{d-\tilde{d}}{2}-1.$$

单位欧几里得球面的完全显式热核界见第 6.1 节（通过简单的缩放，可得到任意半径球面的类似结果）。现在我们来讨论其余的紧致秩一对称空间。

在下文中，为了技术上的方便，我们将引理 A 的上乘法常数表示为 $C^{A}_{\lambda,T_A}=r_1\cdot r_2^{\lambda+1/2}/\Gamma($ $\lambda+1)$，其中 r_1 和 r_2 根据所讨论的情形取适当的值。

-**实射影空间**. 设 $\mathbb{M}=\mathbb{M}^{d,d}$ 为一个实射影空间。这里我们考虑维数为$d=2,3,4,\ldots$的情形，因为当 $d=1$时，实射影空间可视为维数为 1 的球面˜，即环面。对跖维数为 $d=d-1$，因此式 (6.4) 中的参数 α和 β具有如下形式

$$\alpha=\frac{d}{2}-1,\qquad \beta=-\frac{1}{2}.$$

此外，参见例如 [35, 第1],章

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})=\frac{\sqrt{\pi}(4\pi)^{d/2}}{\kappa^{d}\,\Gamma(d/2+1/2)}.$$

根据一般理论，参见 [9, 定理 5.6.1] [26] ,可得

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y)\geq\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)},\qquad t>0.$$

由于我们的方法无法给出更好的下界 [27], ，现在我们将注意力转向 $K_t^{\mathbb{M}}(x,\ y)$ 的上界估计。

先考虑 d 为奇数的情形，即 $d=3$，5、7、.....。在引理 G 的背景下，也可参见引理 A，经过化简后可得

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\,C^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,-1/2,T}=2r_1(4r_2)^{(d-1)/2}\,\frac{\kappa^d}{(4\pi)^{d/2}}.$$

于是，引理 G 结合 (6.4) 得到以下对奇数 $d\geq 3$ 和 $x,\ y\in\mathbb{M}$ 均成立的界:

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y)\leq 2\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{(d-1)/2}\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)},\qquad 0<t\leq\frac{4}{d\kappa^2},$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y)\leq 2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{(d-1)/2}\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)},\qquad 0<t\leq\frac{4}{(d\kappa)^2}.$$

Ap逼近相关数值 [28] , ，可以得到常数的上界

$$2\,\mathfrak{w}_0<\frac{8}{5},\quad 2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1<\frac{17}{5},\quad 2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'<7,$$

[26]事实上，这一结果适用于所有紧致秩一对称空间，但除非 $\mathbb{M}$ 是实射影空间（或一维环面），否则无法给出尖锐的全局下界。[27]当维数为奇数时，我们的方法给出相同的下界；但当维数为偶数时，所得下界较差。[28] 有 $2\,\mathfrak{w}_0\approx 1.595966$、 $2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1\approx 3.381748$、 $2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'\approx 6.987667$。

对于奇数 $d \geq 3$，以及上、下常数之比为

$$\frac{2\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{(d-1)/2}}{1} < \frac{8}{5}\cdot\Big(\frac{17}{5}\Big)^{(d-1)/2}, \qquad \frac{2\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{(d-1)/2}}{1} < 7\cdot\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{(d-1)/2}.$$

此外，当 $\lambda = 1/2$ 时，借助引理 A 中更精细的界，可以改进 $d = 3$ 上述关于 $K_t^{\mathbb{M}}(x,y)$ 的界。更准确地说，当 $d = 3$ 时，对于 $x, y \in \mathbb{M}$，我们得到

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \leq \pi\exp(T/4)\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\,e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \leq T/\kappa^2,$$

其中 $0 < T \leq 2\pi^2$ 是任意给定的固定值。

接下来，考虑 d 为偶数的情形，即 $d = 2,4,6,\ldots$。为继续讨论，我们增加一个假设 $d \geq 4$；维数 $d = 2$ 将在后文单独处理。在引理 H 的背景下，另见引理 A，经过简化后，我们有

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\,C^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,T} = 4r_1\big(32r_2^2\big)^{(d-1)/2}\,\frac{\kappa^d}{(4\pi)^{d/2}}.$$

于是，引理 H 结合 (6.4) 给出了以下适用于 $d \geq 4$ 为偶数且 $x, y \in \mathbb{M}$ 的界：

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \leq 4\,\mathfrak{w}_0(8e\,\mathfrak{w}_1^2)^{(d-1)/2}\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \leq \frac{8}{(d-1/2)\kappa^2},$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \leq 4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi^2/2)^{(d-1)/2}\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \leq \frac{4}{(d-1/2)^2\kappa^2}.$$

通过近似相关的数值量 [29]，，可以对这些常数给出上界

$$4\,\mathfrak{w}_0 < 16/5, \quad 8e\,\mathfrak{w}_1^2 < 23, \quad 4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' < 14, \quad \pi^2/2 < 5,$$

并且，当 $d \geq 4$ 为偶数时，常数的比值为

$$\frac{4\,\mathfrak{w}_0(8e\,\mathfrak{w}_1^2)^{(d-1)/2}}{1} < \frac{16}{5}\cdot 23^{(d-1)/2}, \qquad \frac{4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi^2/2)^{(d-1)/2}}{1} < 14\cdot 5^{(d-1)/2}.$$

最后，当 $d = 2$ 时，我们有

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\,C^{\mathrm{ref}}_{0,T} = 8r_1(4r_2)\,\frac{\kappa^2}{4\pi},$$

因此，利用引理 H 和 A（后者在 $\lambda = 1/2$ 的情形下采用更精细的上界），我们得到 $d = 2$ 和 $x, y \in \mathbb{M}$ 的如下上界：

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \leq 4\pi\exp(T/16)\frac{1}{4\pi t}\,e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \leq T/\kappa^2,$$

其中 $0 < T \leq 8\pi^2$ 是任意给定的固定值。

复射影空间。 设 $\mathbb{M} = \mathbb{M}^{d,\,d}$ 为一个复射影空间。这里我们考虑维数为 $d = 4$、6、8、... ... 的情形，因为当 $d = 2$ 时，复射影空间可视为维数为 2 的球面 ˜。对跖维数为 $d = d - 2$，因此 (6.4) 中的参数 α 和 β 取为

$$\alpha = \frac{d}{2} - 1, \qquad \beta = 0.$$

此外，参见例如 [35，第 1], 章

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M}) = \frac{(4\pi)^{d/2}}{\kappa^d\,\Gamma(d/2+1)}.$$

[29] 有 $4\,\mathfrak{w}_0 \approx 3.191932$、$8e\,\mathfrak{w}_1^2 \approx 22.872438$、$4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' \approx 13.975333$、$\pi^2/2 \approx 4.934802$。

在引理 G 的背景下，另请参见引理 A；经过化简后，我们有

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\, c^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,0,T} = \sqrt{2}e^{-\pi/4}\,\frac{\kappa^d}{(4\pi)^{d/2}},$$
$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\, C^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,0,T} = 4r_1(4r_2)^{d/2}\,\frac{\kappa^d}{(4\pi)^{d/2}}.$$

那么，引理 G 与 (6.4) 一起给出以下适用于 $x,\ y\in\mathbb{M}$ 的界：

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \ge \sqrt{2}e^{-\pi/4}\,\Psi_0^{\mathfrak{B}}\big(\kappa^2 t, \pi-\kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y),\pi\big)\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d^2_{\mathbb{M}}(x,y)/(4t)}, \qquad t>0,$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \le 4\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{d/2}$$
$$\times\,\Psi_0^{\mathfrak{b}}\big(\kappa^2 t, \pi-\kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y),\pi\big)\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d^2_{\mathbb{M}}(x,y)/(4t)}, \qquad 0<t\le\frac{4}{(d+1)\kappa^2},$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \le 4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{d/2}$$
$$\times\,\Psi_0^{\mathfrak{b}}\big(\kappa^2 t, \pi-\kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y),\pi\big)\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d^2_{\mathbb{M}}(x,y)/(4t)}, \qquad 0<t\le\frac{4}{(d+1)^2\kappa^2}.$$

对相关数值量进行近似后[30]，，可以对这些常数给出上界

$$\sqrt{2}e^{-\pi/4}>\frac{3}{5},\quad 4\,\mathfrak{w}_0<\frac{16}{5},\quad 2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1<\frac{17}{5},\quad 4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'<14,$$

以及上下界常数之比：

$$\frac{4\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{d/2}}{\sqrt{2}e^{-\pi/4}}<5\cdot\Big(\frac{17}{5}\Big)^{d/2}, \qquad \frac{4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{d/2}}{\sqrt{2}e^{-\pi/4}}<22\cdot\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{d/2}.$$

四元数射影空间。 设 $\mathbb{M}=\mathbb{M}^{d,\ d}$ 为一个四元数射影空间。这里我们考虑维数为 $d=8$、12、16、..... 的情形，因为当 $d=4$ 时，四元数射影空间可与 4 维球面等同。对跖维数为 $d=d-4$，因此 (6.4) 中的参数 α 和 β 取为

$$\alpha=\frac{d}{2}-1, \qquad \beta=1.$$

此外，参见例如 [35, 第1],章

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})=\frac{(4\pi)^{d/2}}{\kappa^d\,\Gamma(d/2+2)}.$$

在引理 G 的背景下，另请参见引理 A。经过化简后，我们得到

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\, c^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,1,T} = 2\exp(-\mathbb{D}_1)\,\frac{\kappa^d}{(4\pi)^{d/2}},$$
$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\, C^{\mathrm{ref}}_{d/2-1,1,T} = 4\sqrt{2}r_1(4r_2)^{d/2+1}\,\frac{\kappa^d}{(4\pi)^{d/2}}.$$

注意，$\mathbb{D}_1=(3\sqrt{\pi}/4)^{2/3}\approx 1.208994$。

Th引理 G 与 (6.4) 一起给出了以下界，适用于 $x,y\in\mathbb{M}$：

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \ge 2\exp(-\mathbb{D}_1)\,\Psi_1^{\mathfrak{B}}\big(\kappa^2 t, \pi-\kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y),\pi\big)\,\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\,e^{-d^2_{\mathbb{M}}(x,y)/(4t)}, \qquad t>0,$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \le 4\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{d/2+1}$$

[30] 有 $\sqrt{2e^{-\pi/4}}\approx 0.644794$、$4\,\mathfrak{w}_0\approx 3.191932$、$2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_{\bar{1}}\approx 3.381748$、$4\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'\approx 13.975333$.

$$\times\, \Psi_1^{\flat}\big(\kappa^2 t, \pi - \kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y), \pi\big)\, \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \le \frac{4}{(d+3)\kappa^2},$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \le 4\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{d/2+1}$$

$$\times\, \Psi_1^{\flat}\big(\kappa^2 t, \pi - \kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y), \pi\big)\, \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \le \frac{4}{(d+3)^2\kappa^2}.$$

通过近似相关数值量[31]，，可以给出这些常数的上界

$$2\exp(-\mathbb{D}_1) > \frac{1}{2}, \quad 4\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0 < \frac{23}{5}, \quad 2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1 < \frac{17}{5}, \quad 4\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' < 20,$$

以及上、下界常数之比为

$$\frac{4\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{d/2+1}}{2\exp(-\mathbb{D}_1)} < \frac{38}{5}\cdot\Big(\frac{17}{5}\Big)^{d/2+1}, \qquad \frac{4\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{d/2+1}}{2\exp(-\mathbb{D}_1)} < 34\cdot\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{d/2+1}.$$

八元数上的凯莱射影平面。 令 $\mathbb{M} = \mathbb{M}^{16,\ 8}$ 为凯莱射影平面。这里 $d = 16$ 且 $d = 8$，因此 (6.4) 中的参数 α 和 β 具有如下形式

$$\alpha = 7, \qquad \beta = 3.$$

此外，参见例如 [35, 第 1],章

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M}) = \frac{6(4\pi)^{16/2}}{\kappa^{16}\,\Gamma(16/2+4)}.$$

在引理 G 的背景下，也参见引理 A，化简后可得

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\, c_{7,3,T}^{\mathrm{ref}} = 2\exp(-\mathbb{D}_3)\,\frac{\kappa^{16}}{(4\pi)^8},$$

$$\frac{h_0^{\alpha,\beta}}{\mathrm{vol}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M})}\, C_{7,3,T}^{\mathrm{ref}} = 16\sqrt{2}r_1(4r_2)^{11}\,\frac{\kappa^{16}}{(4\pi)^8}.$$

注意，$\mathbb{D}_3 = (105\sqrt{\pi}/16)^{2/7} \approx 2.015904$。

然后，引理 G 结合（6.4）给出对 $x,\ y \in \mathbb{M}$ 有效的以下界：

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \ge 2\exp(-\mathbb{D}_3)\,\Psi_3^{\mathfrak{B}}\big(\kappa^2 t, \pi - \kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y), \pi\big)\,\frac{1}{(4\pi t)^{16/2}}\, e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad t > 0,$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \le 16\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{11}$$

$$\times\, \Psi_3^{\flat}\big(\kappa^2 t, \pi - \kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y), \pi\big)\, \frac{1}{(4\pi t)^{16/2}}\, e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \le \frac{4}{23\kappa^2},$$

$$K_t^{\mathbb{M}}(x,y) \le 16\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{11}$$

$$\times\, \Psi_3^{\flat}\big(\kappa^2 t, \pi - \kappa\, d_{\mathbb{M}}(x,y), \pi\big)\, \frac{1}{(4\pi t)^{16/2}}\, e^{-d_{\mathbb{M}}^2(x,y)/(4t)}, \qquad 0 < t \le \frac{4}{(23\kappa)^2}.$$

通过近似相关数值[32]，，可以将常数界定为

$$2\exp(-\mathbb{D}_3) > \frac{1}{4}, \quad 16\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0 < 19, \quad 2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1 < \frac{17}{5}, \quad 16\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' < 80,$$

以及上、下常数之比为

$$\frac{16\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0(2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1)^{11}}{2\exp(-\mathbb{D}_3)} < 68\cdot\Big(\frac{17}{5}\Big)^{11}, \qquad \frac{16\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/2)^{11}}{2\exp(-\mathbb{D}_3)} < 297\cdot\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{11}.$$

[31] 有 $2\exp(-\mathbb{D}_1) \approx 0.596995$, $4\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0 \approx 4.514073$, $2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1 \approx 3.381748$, $4\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' \approx 19.764106$.[32] 有 $2\exp(-\mathbb{D}_3) \approx 0.266400$, $16\sqrt{2}\,\mathfrak{w}_0 \approx 18.05\overline{6}293$, $2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1 \approx 3.381748$, $16\sqrt{2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' \approx 79.\overline{05}642$

6.3. **雅可比热核**。

本节将对引理 F 中 $G^{\alpha}{}_{,t}{}^{\beta}(\cos\,\theta,\cos\,\varphi)$ 的界所涉及的常数给出较为精确的估计。我们将在最重要的情形 $\alpha,\beta\geq -1/2$ 中进行这一过程。其余情形的类似分析需要多花一些功夫，但这仅仅是冗长的技术推演，留给感兴趣的读者完成。

追踪　　统一证明中通过引理 A–E 追踪常数的方案如下。

▶ 在 $\alpha,\ \beta\geq -1/2$ 的情况下，

$$\begin{aligned}
\Lambda\in\mathbb{N}-1/2 \quad &\rightsquigarrow \quad \text{Lem. A},\\
\Lambda\in\mathbb{N} \quad &\rightsquigarrow \quad \text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A},\\
\Lambda\in(0,\infty)\setminus(\mathbb{N}/2) \quad &\rightsquigarrow \quad \text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A},\\
\Lambda\in(-1/2,0) \quad &\rightsquigarrow \quad \text{Lem. D}\longrightarrow\text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}.
\end{aligned}$$

▶ 在 $-1<\beta<-1/2\leq\alpha$ 或 $-1<\alpha<-1/2\leq\beta$ 的情况下，

$$\begin{aligned}
\Lambda\in\mathbb{N}-1/2 \quad &\rightsquigarrow \quad 2\times\text{Lem. A},\\
\Lambda\in\mathbb{N} \quad &\rightsquigarrow \quad 2\times\big[\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\big],\\
\Lambda\in(0,\infty)\setminus(\mathbb{N}/2) \quad &\rightsquigarrow \quad 2\times\big[\text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\big],\\
\Lambda\in(-1,0)\setminus\{-1/2\} \quad &\rightsquigarrow \quad \left\langle\begin{matrix}\text{Lem. D}\longrightarrow\text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\\ \text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\end{matrix}\right\rangle.
\end{aligned}$$

▶ 在 $-1<\alpha,\ \beta<-1/2$ 的情况下，

$$\begin{aligned}
\Lambda\in(-1,-1/2) \quad &\rightsquigarrow \quad \left\langle\begin{matrix}\text{Lem. D}\longrightarrow\text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\\ 2\times\big[\text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\big]\end{matrix}\right\rangle,\\
\Lambda=-1 \quad &\rightsquigarrow \quad \left\langle\begin{matrix}\text{Lem. E}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\\ 2\times\big[\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\big]\end{matrix}\right\rangle,\\
\Lambda\in(-3/2,-1) \quad &\rightsquigarrow \quad \left\langle\begin{matrix}\text{Lem. E}\longrightarrow\text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\\ 2\times\big[\text{Lem. C}\longrightarrow\text{Lem. B}\longrightarrow\text{Lem. A}\big]\end{matrix}\right\rangle.
\end{aligned}$$

从现在起，我们将重点关注 $\alpha,\ \beta\geq -1/2$。

技术预备知识。 回顾一下，$\Lambda=\Lambda_{\alpha,\,\beta}=\alpha+\beta+1/2$。以下恒等式可直接由相关公式推出。

$$\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\frac{h_0^{\Lambda}}{h_0^{\alpha,\beta}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\Lambda+1/2}}\Gamma(\Lambda+1),\qquad \alpha,\beta>-1, \tag{6.5}$$

$$\frac{h_0^{\alpha+2}}{h_0^{\alpha}}=\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{(\alpha+5/2)(\alpha+3/2)},\qquad \frac{h_0^{\alpha,\beta}}{h_0^{\alpha+1,\beta+1}}=\frac{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)}{4(\alpha+1)(\beta+1)},\qquad \alpha,\beta>-1, \tag{6.6}$$

$$\frac{\omega_{\lambda+1}(T)}{\omega_{\lambda}(T)}=e^{(2\lambda-\lceil 2\lambda\rceil)T},\qquad \frac{\Omega_{\lambda+1}(T)}{\Omega_{\lambda}(T)}=e^{(2\lambda-\lceil 2\lambda\rceil+1)T},\qquad T,\lambda>0, \tag{6.7}$$

$$\frac{b_{\lambda+1}}{b_{\lambda}}=\frac{\lambda+1}{(1\wedge 2^{\lambda-1/2})}\exp(\mathbb{D}_{\lambda}-\mathbb{D}_{\lambda+1}),\qquad \frac{B_{\lambda+1}}{B_{\lambda}}=\frac{2^{\lambda+1/2}(\lambda+1)}{(1\vee 2^{\lambda-1/2})},\qquad \lambda>-1/2. \tag{6.8}$$

接下来，我们注意到，对于 $\lambda \in \mathbb{N} - 1/2$

$$\begin{aligned} &\frac{c^A_{\lambda+1,T}}{c^A_{\lambda,T}} = \frac{1}{4(\lambda+1)}, \\ &\frac{C^A_{\lambda+1,T}}{C^A_{\lambda,T}} = \frac{1}{\lambda+1} \begin{cases} \sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2 & \text{if } T = 1/(2\lambda+4) \text{ and } \lambda \neq -1/2 \\ \pi/8 & \text{if } T = 1/(2\lambda+4)^2 \end{cases} =: \frac{1}{\lambda+1}\mathcal{C}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

一般而言，此处及下文第 6.3 节中，为了表述清晰且统一处理，我们不考虑引理 A 在情形 $\lambda = \pm 1/2$ 下给出的 $C^A_{\lambda,T}$ 的更精细取值以及 t 的更宽取值范围。与这些情形相关的更精确分析并无额外困难，故留给感兴趣的读者。

现 计算引理 C 中常数的类似商。对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，记

$$\check{\lambda} := \lceil 2\lambda \rceil - \lambda$$

，并注意到 $\lambda \le \lambda < \lambda + 1$。由引理 C 和引理 B

$$\begin{aligned} c^C_{\lambda,T} &= c^A_{\lambda+\check{\lambda}+1/2,T/4} \, \frac{4^{\lambda+\check{\lambda}+3/2} b_{\check{\lambda}}}{\left(\mathbb{D}_{\check{\lambda}} T \vee \mathfrak{B}\pi^2\right)^{\check{\lambda}+1/2}} \, \frac{h_0^{\lambda+\check{\lambda}+1/2}}{h_0^{\lambda,\check{\lambda}}} \, \omega_\lambda(T), \\ C^C_{\lambda,T} &= C^A_{\lambda+\check{\lambda}-1/2,T/4} \, 4^{\lambda+\check{\lambda}+1} B_{\check{\lambda}-1} \frac{h_0^{\lambda+\check{\lambda}-1/2}}{h_0^{\lambda,\check{\lambda}-1}} \, \Omega_\lambda(T). \end{aligned} \tag{6.10}$$

显然，对于任意 $T, \lambda > 0$

$$\begin{aligned} \frac{c^C_{\lambda+1,T}}{c^C_{\lambda,T}} &= \frac{c^A_{\lambda+\check{\lambda}+5/2,\ T/4}}{c^A_{\lambda+\check{\lambda}+1/2,\ T/4}} \, 4^2 \, \frac{b_{\check{\lambda}+1}}{b_{\check{\lambda}}} \, \frac{\left(\mathbb{D}_{\check{\lambda}} T \vee \mathfrak{B}\pi^2\right)^{\check{\lambda}+1/2}}{\left(\mathbb{D}_{\check{\lambda}+1} T \vee \mathfrak{B}\pi^2\right)^{\check{\lambda}+3/2}} \, \frac{h_0^{\lambda+\check{\lambda}+5/2}}{h_0^{\lambda+\check{\lambda}+1/2}} \, \frac{h_0^{\lambda,\check{\lambda}}}{h_0^{\lambda+1,\check{\lambda}+1}} \, \frac{\omega_{\lambda+1}(T)}{\omega_\lambda(T)}, \\ \frac{C^C_{\lambda+1,T}}{C^C_{\lambda,T}} &= \frac{C^A_{\lambda+\check{\lambda}+3/2,\ T/4}}{C^A_{\lambda+\check{\lambda}-1/2,\ T/4}} \, 4^2 \, \frac{B_{\check{\lambda}}}{B_{\check{\lambda}-1}} \, \frac{h_0^{\lambda+\check{\lambda}+3/2}}{h_0^{\lambda+\check{\lambda}-1/2}} \, \frac{h_0^{\lambda,\,\check{\lambda}-1}}{h_0^{\lambda+1,\,\check{\lambda}}} \, \frac{\Omega_{\lambda+1}(T)}{\Omega_\lambda(T)}. \end{aligned}$$

然后利用（ 6.6)–(6.9)以及 $\lambda > 0$ 蕴含 $\lambda \ge 1/2$这一事实，我们得到对于 $\lambda >$ 0

$$\begin{aligned} \frac{c^C_{\lambda+1,T}}{c^C_{\lambda,T}} &= \frac{1}{4(\lambda+1)} \, \exp(\mathbb{D}_{\check{\lambda}} - \mathbb{D}_{\check{\lambda}+1}) \, \frac{\left(\mathbb{D}_{\check{\lambda}} T \vee \mathfrak{B}\pi^2\right)^{\check{\lambda}+1/2}}{\left(\mathbb{D}_{\check{\lambda}+1} T \vee \mathfrak{B}\pi^2\right)^{\check{\lambda}+3/2}} \, e^{(2\lambda - \lceil 2\lambda \rceil)T}, \\ \frac{C^C_{\lambda+1,T}}{C^C_{\lambda,T}} &= \frac{4\mathcal{C}^2}{(\lambda+1)} \, \frac{2^{\check{\lambda}-1/2}}{(1 \vee 2^{\check{\lambda}-3/2})} \, e^{(2\lambda - \lceil 2\lambda \rceil + 1)T}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

我们还需要引理 D 中常数的以下具体规定。

命题 6.1。设 $-1 < \lambda < 0$，并令 $T > 0$ 满足 $T/4 \le 1/(2\lambda + 2\lambda + 7)$。那么，按照 (6.9) 中的规定，令$c^A_{\lambda,\ T}$ 以及 $C^A_{\lambda,\ T}$，

$$\begin{aligned} c^C_{\lambda+1,T} \wedge \left(c^C_{\lambda+2,T} \, m_{\lambda+2} \, \frac{8(\lambda+2)}{\pi} e^{-(2\lambda+4)T} \right) &= c^C_{\lambda+2,T} \, m_{\lambda+2} \, \frac{8(\lambda+2)}{\pi} e^{-(2\lambda+4)T}, \\ C^C_{\lambda+1,T} \vee \left(C^C_{\lambda+2,T} \, M_{\lambda+2} \, \frac{16(\lambda+2)}{\pi^2} \left(\frac{16T}{\pi^2} + 1 \right)^{\lambda+1} \right) &= C^C_{\lambda+2,T} \, M_{\lambda+2} \, \frac{16(\lambda+2)}{\pi^2} \left(\frac{16T}{\pi^2} + 1 \right)^{\lambda+1}. \end{aligned}$$

因此，在假设条件下

$$c^D_{\lambda,T} = \frac{64(\lambda+1)(\lambda+2)}{\pi^2} \, e^{-(4\lambda+6)T} c^C_{\lambda+2,T} \, m_{\lambda+2},$$

$$C^D_{\lambda,T} = \frac{64(\lambda+1)(\lambda+2)}{\pi^2}\, C^C_{\lambda+2,T}\, M_{\lambda+2}\left(\frac{16T}{\pi^2}+1\right)^{\lambda+1}.$$

˘证明。 由 (2.6) 可知，对于 $\lambda > -1$ 和 $T/4 \le 1/(2\lambda+2\lambda+7)$

$$\mathbb{D}_{\check\lambda+1}T \le \mathbb{D}_{\check\lambda+2}T \le \mathfrak{B}\pi^2.$$

将此与 (6.11) 结合，我们得到

$$\frac{c^C_{\lambda+2,T}}{c^C_{\lambda+1,T}}\, m_{\lambda+2}\, \frac{8(\lambda+2)}{\pi} e^{-(2\lambda+4)T} = \frac{2m_{\lambda+2}}{\mathfrak{B}\pi^3}\, \exp(\mathbb{D}_{\check\lambda+1} - \mathbb{D}_{\check\lambda+2})\, e^{(-\lceil 2\lambda\rceil-4)T},$$

$$\frac{C^C_{\lambda+2,T}}{C^C_{\lambda+1,T}}\, M_{\lambda+2}\, \frac{16(\lambda+2)}{\pi^2}\left(\frac{16T}{\pi^2}+1\right)^{\lambda+1} \ge \frac{64\mathcal{C}^2 M_{\lambda+2}}{\pi^2}\, \frac{2^{\check\lambda+1/2}}{(1\vee 2^{\check\lambda-1/2})}\, e^{(2\lambda-\lceil 2\lambda\rceil+1)T}.$$

现在利用估计 $2m_{\lambda+2}/(\mathfrak{B}\pi^3) \le 1$ 和 $64\mathcal{C}^2 M_{\lambda+2}/\pi^2 \ge 1$ ，我们得到所需结论。

□

最后，请注意，在命题 6.1 的条件下，我们有（见 (6.10)） ，

$$\begin{aligned}
c^D_{\lambda,T} &= \frac{64(\lambda+1)(\lambda+2)}{\pi^2}\, e^{-(4\lambda+6)T}\, c^A_{\lambda+\check\lambda+9/2,T/4} \\
&\quad\times \frac{4^{\lambda+\check\lambda+11/2}\, b_{\check\lambda+2}}{\big(\mathbb{D}_{\check\lambda+2}T \vee \mathfrak{B}\pi^2\big)^{\check\lambda+5/2}}\, \frac{h_0^{\lambda+\check\lambda+9/2}}{h_0^{\lambda+2,\check\lambda+2}}\, \omega_{\lambda+2}(T)\, m_{\lambda+2} \\
&= \frac{2^{\lambda+\check\lambda+12}(\lambda+1)}{\pi^2}\, e^{-(4\lambda+6)T}\, c^A_{\lambda+\check\lambda+9/2,T/4} \\
&\quad\times \frac{1}{\big(\mathbb{D}_{\check\lambda+2}T \vee \mathfrak{B}\pi^2\big)^{\check\lambda+5/2}}\, \frac{\Gamma(\lambda+\check\lambda+11/2)}{\Gamma(\lambda+3)}\, \omega_{\lambda+2}(T)\, \frac{1-2^{-\lambda-2}}{e}\, \exp\big(-\mathbb{D}_{\check\lambda+2}\big), \qquad (6.12)\\
C^D_{\lambda,T} &= \frac{64(\lambda+1)(\lambda+2)}{\pi^2}\, C^A_{\lambda+\check\lambda+7/2,T/4} \\
&\quad\times 4^{\lambda+\check\lambda+5}\, B_{\check\lambda+1}\, \frac{h_0^{\lambda+\check\lambda+7/2}}{h_0^{\lambda+2,\check\lambda+1}}\, \Omega_{\lambda+2}(T)\, M_{\lambda+2}\left(\frac{16T}{\pi^2}+1\right)^{\lambda+1} \\
&= \frac{2^{\lambda+2\check\lambda+27/2}(\lambda+1)}{\pi^2}\, C^A_{\lambda+\check\lambda+7/2,T/4} \\
&\quad\times \frac{\Gamma(\lambda+\check\lambda+9/2)}{\Gamma(\lambda+3)}\, \Omega_{\lambda+2}(T)\, \frac{1}{(1-1/e)^2}\left(\frac{16T}{\pi^2}+1\right)^{\lambda+1},
\end{aligned}$$

˘证明 $T/4 \le 1/(2\lambda+2\lambda+7)$；这里我们用到了这一事实： $\lambda \ge -1/2$ 若 $\lambda > -1$. 提供

现在我们可以估计常数 $c_{\alpha,\,\beta,\,T}$ 和 $C_{\alpha,\,\beta,\,T}$ ，以及它们的商 $C_{\alpha,\,\beta,\,T}/c_{\alpha,\,\beta,\,T}$。根据第 6.3 节开头给出的方案，我们将把情形 $\alpha,\ \beta \ge -1/2$ 分为四种子情形来讨论。

当 $\Lambda \in \mathbb{N} - 1/2$ 时。 首先，我们关注简单的情形 $\Lambda = -1/2$ 。根据既定假设 $\alpha,\ \beta \ge -1/2$，这种情形只会在 $\alpha = \beta = -1/2$时出现。但此时我们有

$$G_t^{-1/2}(\theta,\varphi) = \vartheta_t(\theta-\varphi) + \vartheta_t(\theta+\varphi) \le 2\vartheta_t(\theta-\varphi), \qquad \theta,\varphi\in[0,\pi],\quad t>0,$$

鉴于第 6.1 节中得到的 $K_t^1(\phi) = \vartheta_t(\phi)$ 的上界，我们得出

$$G_t^{-1/2}(\theta,\varphi) \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\big(1+2e^{-2\pi^2/T}\big)\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(\theta-\varphi)^2/(4t)}, \qquad \theta,\varphi\in[0,\pi],\quad 0<t\le T\le 2\pi^2. \qquad (6.13)$$

因此，接下来我们可以假设 $\Lambda \neq -1/2$，即 $\Lambda \in \mathbb{N} + 1/2$。

根据引理 F，我们有

$$c_{\alpha,\beta,T} = c^A_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+1} b_\alpha b_\beta \, \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}, \qquad C_{\alpha,\beta,T} = C^A_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+2} B_\alpha B_\beta \, \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

利用 (6.5) 和 (2.6)，可得

$$\begin{aligned}
c_{\alpha,\beta,T} &= c^A_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+1} (1 \wedge 2^{\alpha-1/2})(1 \wedge 2^{\beta-1/2}) \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\pi}\, e^{-\chi_{\{\alpha\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\alpha - \chi_{\{\beta\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\beta}\, \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}} \\
&= c^A_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+1} (1 \wedge 2^{\alpha-1/2})(1 \wedge 2^{\beta-1/2}) \frac{\Gamma(\Lambda+1)}{\sqrt{\pi} 2^{\Lambda+1/2}}\, e^{-\chi_{\{\alpha\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\alpha - \chi_{\{\beta\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\beta} \\
&\geq c^A_{\Lambda,T/4}\, 2^{\Lambda-1/2}\, \frac{\Gamma(\Lambda+1)}{\sqrt{\pi}}\, \exp\Big(-\frac{\Lambda+5/2}{e^\gamma}\Big), \\
C_{\alpha,\beta,T} &= C^A_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+2} (1 \vee 2^{\alpha-1/2})(1 \vee 2^{\beta-1/2})\, 2^{-\chi_{\{\alpha=-1/2\}} - \chi_{\{\beta=-1/2\}}}\, \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\pi}\, \frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}} \\
&= C^A_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+2} (1 \vee 2^{\alpha-1/2})(1 \vee 2^{\beta-1/2})\, 2^{-\chi_{\{\alpha=-1/2\}} - \chi_{\{\beta=-1/2\}}}\, \frac{\Gamma(\Lambda+1)}{\sqrt{\pi} 2^{\Lambda+1/2}} \\
&\leq C^A_{\Lambda,T/4}\, 2^{2\Lambda+4}\, \frac{\Gamma(\Lambda+1)}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

and

$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \leq \frac{C^A_{\Lambda,T/4}}{c^A_{\Lambda,T/4}}\, 2^{\Lambda+9/2}\, \exp\Big(\frac{\Lambda+5/2}{e^\gamma}\Big).$$

综上，我们得到

$$\begin{aligned}
c_{\alpha,\beta,T} &\geq \frac{1}{2^{\Lambda+3/2}\sqrt{\pi}}\, \exp\Big(-\frac{\Lambda+5/2}{e^\gamma}\Big) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\exp(2e^{-\gamma})\,[2\exp(e^{-\gamma})]^{\Lambda+1/2}} \qquad \text{for } T>0, \\
C_{\alpha,\beta,T} &\leq \frac{2^{2\Lambda+4}}{\sqrt{\pi}} \times \begin{cases} \mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 2/(\Lambda+1) \\ \sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 1/(\Lambda+1)^2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 8\pi^{-1/2}\,\mathfrak{w}_0\,[2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 2/(\Lambda+1) \\ 8\pi^{-1/2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'\,[\pi/2]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 1/(\Lambda+1)^2 \end{cases}, \\
\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} &\leq 2^{3\Lambda+11/2}\, \exp\Big(\frac{\Lambda+5/2}{e^\gamma}\Big) \times \begin{cases} \mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 2/(\Lambda+1) \\ \sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 1/(\Lambda+1)^2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 16\,\mathfrak{w}_0 \exp(2e^{-\gamma})\,[4\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1 \exp(e^{-\gamma})]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 2/(\Lambda+1) \\ 16\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' \exp(2e^{-\gamma})\,[\pi\exp(e^{-\gamma})]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 1/(\Lambda+1)^2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

对相关表达式进行上方近似[33]，，我们得到以下明确的数值界。

[33] 有 $2\sqrt{\pi}\exp(2e^{-\gamma}) \approx 10.896385$, $2\exp(e^{-\gamma}) \approx 3.506459$, $8\pi^{-1/2}\,\mathfrak{w}_0 \approx 3.601709$, $2\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_{\overline{1}} \approx 3.381748$, $8\pi^{-1/2}\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' \approx 15.769475$, $\pi/2 \approx 1.570796$, $16\,\mathfrak{w}_0\exp(2e^{-\gamma}) \approx 39.245612$, $4\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1\exp(e^{-\gamma}) \approx 11.857960$, $16\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'\exp(2e^{-\gamma}) \approx 171.830270$, $\pi\exp(e^{-\gamma}) \approx 5.507933$。

命题 6.2。 设 α、$\beta \geq -1/2$ 满足 $\alpha+\beta+1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$。则

$$c_{\alpha,\beta,T} \geq \frac{1}{11\cdot(18/5)^{\alpha+\beta+1}} \qquad \textit{for } T>0,$$

$$C_{\alpha,\beta,T} \leq \begin{cases} (11/3)\cdot(17/5)^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=2/(\alpha+\beta+3/2) \\ 16\cdot(8/5)^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=1/(\alpha+\beta+3/2)^2 \end{cases},$$

$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \leq \begin{cases} 40\cdot 12^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=2/(\alpha+\beta+3/2) \\ 172\cdot(28/5)^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=1/(\alpha+\beta+3/2)^2 \end{cases}.$$

当 $\Lambda \in \mathbb{N}$ 时。 由引理 F 和 B 可得

$$c_{\alpha,\beta,T} = c^B_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+1} b_\alpha b_\beta \,\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}} = c^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{4^{3\Lambda+5/2}\, b_\Lambda b_\alpha b_\beta}{\big(\mathbb{D}_\Lambda\, T/4 \vee \mathfrak{B}\pi^2\big)^{\Lambda+1/2}}\,\frac{h_0^{2\Lambda+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}},$$

$$C_{\alpha,\beta,T} = C^B_{\Lambda,T/4}\, 4^{\Lambda+2} B_\alpha B_\beta \,\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}} = C^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\, 4^{3\Lambda+4}\, B_\Lambda B_\alpha B_\beta \,\frac{h_0^{2\Lambda+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

由于 $\mathbb{D}_\Lambda T/4 \leq \mathfrak{B}\pi^2$对于 $T/16 \leq 1/(4\Lambda+3)$，我们有（另见 (6.5) 和 (2.6))

$$\begin{aligned} c_{\alpha,\beta,T} &= c^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{4^{3\Lambda+5/2}\,(1\wedge 2^{\Lambda-1/2})(1\wedge 2^{\alpha-1/2})(1\wedge 2^{\beta-1/2})\Gamma(\Lambda+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\pi^{3/2}(\mathfrak{B}\pi^2)^{\Lambda+1/2}} \\ &\quad\times e^{-\mathbb{D}_\Lambda-\chi_{\{\alpha\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\alpha-\chi_{\{\beta\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\beta}\,\frac{h_0^{2\Lambda+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}} \\ &= c^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{4^{3\Lambda+5/2}\,(1\wedge 2^{\Lambda-1/2})(1\wedge 2^{\alpha-1/2})(1\wedge 2^{\beta-1/2})\Gamma(2\Lambda+3/2)2^{-3\Lambda-3/2}}{\sqrt{\pi}(\mathfrak{B}\pi^2)^{\Lambda+1/2}} \\ &\quad\times e^{-\mathbb{D}_\Lambda-\chi_{\{\alpha\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\alpha-\chi_{\{\beta\neq -1/2\}}\mathbb{D}_\beta} \\ &\geq c^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{2^{4\Lambda+3/2}\Gamma(2\Lambda+3/2)}{\pi^{2\Lambda+3/2}}\,\exp\Big(-\frac{2\Lambda+4}{e^\gamma}\Big), \\ C_{\alpha,\beta,T} &= C^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\,4^{3\Lambda+4}\,(1\vee 2^{\Lambda-1/2})(1\vee 2^{\alpha-1/2})(1\vee 2^{\beta-1/2})\,2^{-\chi_{\{\alpha=-1/2\}}-\chi_{\{\beta=-1/2\}}} \\ &\quad\times\frac{\Gamma(\Lambda+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\pi^{3/2}}\,\frac{h_0^{2\Lambda+1/2}}{h_0^{\alpha,\beta}} \\ &= C^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\,4^{3\Lambda+4}\,(1\vee 2^{\Lambda-1/2})(1\vee 2^{\alpha-1/2})(1\vee 2^{\beta-1/2})\,2^{-\chi_{\{\alpha=-1/2\}}-\chi_{\{\beta=-1/2\}}} \\ &\quad\times\Gamma(2\Lambda+3/2)\,2^{-3\Lambda-3/2}/\sqrt{\pi} \\ &\leq C^A_{2\Lambda+1/2,T/16}\,2^{5\Lambda+7}\,\Gamma(2\Lambda+3/2)/\sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

条件是 $T/16 \leq 1/(4\Lambda+3)$。此外，我们有

$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \leq \frac{C^A_{2\Lambda+1/2,T/16}}{c^A_{2\Lambda+1/2,T/16}}\,2^{\Lambda+11/2}\pi^{2\Lambda+1}\,\exp\Big(\frac{2\Lambda+4}{e^\gamma}\Big),$$

条件是 $T/16 \leq 1/(4\Lambda+3)$。

综上，我们得到

$$\begin{aligned} c_{\alpha,\beta,T} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}\pi^{2\Lambda+3/2}}\,\exp\Big(-\frac{2\Lambda+4}{e^\gamma}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\exp(3e^{-\gamma})\,[\pi^2\exp(2e^{-\gamma})]^{\Lambda+1/2}} \qquad \text{if } T=16/(4\Lambda+3), \end{aligned}$$

$$C_{\alpha,\beta,T} \le \frac{2^{5\Lambda+7}}{\sqrt{\pi}} \times \begin{cases} \mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^{2\Lambda+1} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3) \\ \sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^{2\Lambda+1} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3)^2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 16\sqrt{2}\,\pi^{-1/2}\,\mathfrak{w}_0\,[8e\,\mathfrak{w}_1^2]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3) \\ 16\sqrt{2}\,\pi^{-1/2}\,\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'\,[\pi^2/2]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3)^2 \end{cases},$$
$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \le 2^{5\Lambda+15/2}\pi^{2\Lambda+1}\,\exp\Big(\frac{2\Lambda+4}{e^\gamma}\Big) \times \begin{cases} \mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^{2\Lambda+1} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3) \\ \sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^{2\Lambda+1} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3)^2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 32\,\mathfrak{w}_0\exp(3e^{-\gamma})\,[8\pi^2\mathfrak{w}_1^2\exp(2e^{-\gamma}+1)]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3) \\ 32\,\mathfrak{w}_0'\exp(3e^{-\gamma}+1/4)\,[2^{-1}\pi^4\exp(2e^{-\gamma})]^{\Lambda+1/2} & \text{if } T = 16/(4\Lambda+3)^2 \end{cases}.$$

对相关表达式进行上述近似后[34], , 我们得到以下数值界。

命题 6.3。 设 α、$\beta \ge -1/2$ 满足 $\alpha+\beta+1/2 \in \mathbb{N}$。则

$$c_{\alpha,\beta,T} \ge \frac{1}{14\cdot 31^{\alpha+\beta+1}} \qquad \textit{if } T = 4/(\alpha+\beta+5/4),$$
$$C_{\alpha,\beta,T} \le \begin{cases} 11\cdot 23^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T = 4/(\alpha+\beta+5/4) \\ 45\cdot 5^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T = 1/(\alpha+\beta+5/4)^2 \end{cases},$$
$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \le \begin{cases} 138\cdot 694^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T = 4/(\alpha+\beta+5/4) \\ 603\cdot 150^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T = 1/(\alpha+\beta+5/4)^2 \end{cases}.$$

当 $\Lambda \in (0,\infty)\setminus(\mathbb{N}/2)$。 由引理 F、C、B 可得,

$$c_{\alpha,\beta,T} = c^C_{\Lambda,T/4}\,4^{\Lambda+1}b_\alpha b_\beta\,\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}$$
$$= c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{4^{2\Lambda+\breve\Lambda+5/2}\,b_{\breve\Lambda}\,b_\alpha b_\beta}{\big(\mathbb{D}_{\breve\Lambda}\,T/4\vee\mathfrak{B}\pi^2\big)^{\breve\Lambda+1/2}}\,\frac{h_0^{\Lambda+\breve\Lambda+1/2}\,h_0^\Lambda}{h_0^{\Lambda,\breve\Lambda}\,h_0^{\alpha,\beta}}\,\omega_\Lambda(T/4),$$
$$C_{\alpha,\beta,T} = C^C_{\Lambda,T/4}\,4^{\Lambda+2}B_\alpha B_\beta\,\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}$$
$$= C^A_{\Lambda+\breve\Lambda-1/2,T/16}\,4^{2\Lambda+\breve\Lambda+3}\,B_{\breve\Lambda-1}\,B_\alpha B_\beta\,\frac{h_0^{\Lambda+\breve\Lambda-1/2}\,h_0^\Lambda}{h_0^{\Lambda,\breve\Lambda-1}\,h_0^{\alpha,\beta}}\,\Omega_\Lambda(T/4).$$

注意到 $\breve\Lambda - 1 \ne -1/2$。考虑到 $\mathbb{D}_{\breve\Lambda}T/4 \le \mathfrak{B}\pi^2$对于 $T/16 \le 1/(2\Lambda+2\breve\Lambda+3)$成立，并利用界 $(1\wedge 2^{\alpha-1/2})(1\wedge 2^{\beta-1/2}) \ge 2^{-3/2}$、$(1\vee 2^{\alpha-1/2})(1\vee 2^{\beta-1/2}) \le 2^\Lambda$ 以及 (6.5) 和 (2.6)，我们得到

$$c_{\alpha,\beta,T} = c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{4^{2\Lambda+\breve\Lambda+5/2}\,b_{\breve\Lambda}\,b_\alpha b_\beta}{(\mathfrak{B}\pi^2)^{\breve\Lambda+1/2}}\,\frac{h_0^{\Lambda+\breve\Lambda+1/2}\,h_0^\Lambda}{h_0^{\Lambda,\breve\Lambda}\,h_0^{\alpha,\beta}}\,\omega_\Lambda(T/4)$$
$$= c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{4^{2\Lambda+\breve\Lambda+5/2}\,(1\wedge 2^{\breve\Lambda-1/2})(1\wedge 2^{\alpha-1/2})(1\wedge 2^{\beta-1/2})\Gamma(\breve\Lambda+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\pi^{3/2}(\mathfrak{B}\pi^2)^{\breve\Lambda+1/2}}$$

[34] 有 $\sqrt{2\pi}\exp(3e^{-\gamma}) \approx 13.508471$, $\pi^2\exp(2e^{-\gamma}) \approx 30.337323$, $16\sqrt{2}\,\pi^{-1/2}\,\mathfrak{w}_0 \approx 10.187172$, $8e\,\mathfrak{w}_1^2 \approx$22。872438, $16\sqrt{2}\,\pi^{-1/2}\,\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0' \approx 44.602810$, $\pi^2/2 \approx 4.934802$, $32\,\mathfrak{w}_0\exp(3e^{-\gamma}) \approx 137.613123$, $8\pi^2\mathfrak{w}_1^2\exp(2e^{-\gamma}+1) \approx$ 693。888536, $32\,\mathfrak{w}_0'\exp(3e^{-\gamma}+1/4) \approx 602.515779$, $2^{-1}\pi^4\exp(2e^{-\gamma}) \approx 149.708689$。

$$\times\, e^{-\mathbb{D}_{\breve\Lambda}-\chi_{\{\alpha\neq-1/2\}}\mathbb{D}_\alpha-\chi_{\{\beta\neq-1/2\}}\mathbb{D}_\beta}\,\frac{h_0^{\Lambda+\breve\Lambda+1/2}\,h_0^{\Lambda}}{h_0^{\Lambda,\breve\Lambda}\,h_0^{\alpha,\beta}}\,\omega_\Lambda(T/4)$$

$$= c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{2^{2\Lambda+2\breve\Lambda+4}\,(1\wedge 2^{\breve\Lambda-1/2})(1\wedge 2^{\alpha-1/2})(1\wedge 2^{\beta-1/2})}{\pi^{2\breve\Lambda+3/2}}$$

$$\times\, e^{-\mathbb{D}_{\breve\Lambda}-\chi_{\{\alpha\neq-1/2\}}\mathbb{D}_\alpha-\chi_{\{\beta\neq-1/2\}}\mathbb{D}_\beta}\,\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+3/2)\,\omega_\Lambda(T/4)$$

$$\geq c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+1/2,T/16}\,\frac{2^{2\Lambda+2\breve\Lambda+5/2}\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+3/2)}{\pi^{2\breve\Lambda+3/2}}\,\exp\Big(-\frac{\Lambda+\breve\Lambda+4}{e^\gamma}\Big)\,e^{-(\Lambda+3/4)T/4},$$

$$C_{\alpha,\beta,T} = C^A_{\Lambda+\breve\Lambda-1/2,T/16}\,4^{2\Lambda+\breve\Lambda+3}\,B_{\breve\Lambda-1}\,B_\alpha B_\beta\,\frac{h_0^{\Lambda+\breve\Lambda-1/2}\,h_0^{\Lambda}}{h_0^{\Lambda,\breve\Lambda-1}\,h_0^{\alpha,\beta}}\,\Omega_\Lambda(T/4)$$

$$= C^A_{\Lambda+\breve\Lambda-1/2,T/16}\,4^{2\Lambda+\breve\Lambda+3}\,\frac{(1\vee 2^{\breve\Lambda-3/2})(1\vee 2^{\alpha-1/2})(1\vee 2^{\beta-1/2})\,2^{-\chi_{\{\alpha=-1/2\}}-\chi_{\{\beta=-1/2\}}}}{\pi^{3/2}}$$

$$\times\,\Gamma(\breve\Lambda)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\,\frac{h_0^{\Lambda+\breve\Lambda-1/2}\,h_0^{\Lambda}}{h_0^{\Lambda,\breve\Lambda-1}\,h_0^{\alpha,\beta}}\,\Omega_\Lambda(T/4)$$

$$= C^A_{\Lambda+\breve\Lambda-1/2,T/16}\,4^{2\Lambda+\breve\Lambda+3}\,\frac{(1\vee 2^{\breve\Lambda-3/2})(1\vee 2^{\alpha-1/2})(1\vee 2^{\beta-1/2})\,2^{-\chi_{\{\alpha=-1/2\}}-\chi_{\{\beta=-1/2\}}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\times\,\frac{\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+1/2)}{2^{2\Lambda+\breve\Lambda+1/2}}\,\Omega_\Lambda(T/4)$$

$$\leq C^A_{\Lambda+\breve\Lambda-1/2,T/16}\,2^{3\Lambda+2\breve\Lambda+5}\pi^{-1/2}\,\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+1/2)\,e^{(\Lambda+1/2)T/4},$$

条件是 $T/16\leq 1/(2\Lambda+2\breve\Lambda+3)$。此外，我们有

$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}}\leq 2^{\Lambda+5/2}\pi^{2\breve\Lambda+1}\,\frac{C^A_{\Lambda+\breve\Lambda-1/2,T/16}}{c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+1/2,T/16}\,(\Lambda+\breve\Lambda+1/2)}\,e^{(2\Lambda+5/4)T/4}\,\exp\Big(\frac{\Lambda+\breve\Lambda+4}{e^\gamma}\Big),$$

前提是 $T/16\leq 1/(2\Lambda+2\breve\Lambda+3)$。

综上，由于 $\breve\Lambda\in[\Lambda,\Lambda+1)$，我们得到

$$c_{\alpha,\beta,T}\geq\frac{\sqrt{2}}{\pi^{2\Lambda+7/2}}\exp\Big(-\frac{2\Lambda+5}{e^\gamma}\Big)\,e^{-1}$$

$$=\frac{1}{2^{-1/2}\pi^{5/2}\exp(4e^{-\gamma}+1)\,[\pi^2\exp(2e^{-\gamma})]^{\Lambda+1/2}}\qquad\text{if }\ T=16/(4\Lambda+5),$$

$$C_{\alpha,\beta,T}\leq\frac{2^{5\Lambda+7}}{\sqrt{\pi}}\times\begin{cases}e\,\mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^{2\Lambda+1} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)\\ e^{1/3}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^{2\Lambda} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)^2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}16\sqrt{2}\pi^{-1/2}e\,\mathfrak{w}_0\,[8e\,\mathfrak{w}_1^2]^{\Lambda+1/2} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)\\ 128\sqrt{2}\pi^{-3/2}e^{1/3}\,\mathfrak{w}_0'\,[\pi^2/2]^{\Lambda+1/2} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)^2\end{cases},$$

$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}}\leq 2^{5\Lambda+13/2}\pi^{2\Lambda+3}\,\exp\Big(\frac{2\Lambda+5}{e^\gamma}\Big)\times\begin{cases}e^2\,\mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^{2\Lambda+1} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)\\ e^{1/5}\,\sqrt[4]{e}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^{2\Lambda} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)^2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}16\pi^2\exp(4e^{-\gamma}+2)\,\mathfrak{w}_0\,[8\pi^2\exp(2e^{-\gamma}+1)\,\mathfrak{w}_1^2]^{\Lambda+1/2} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)\\ 128\pi\,\mathfrak{w}_0'\,\exp(4e^{-\gamma}+9/20)\,[2^{-1}\pi^4\exp(2e^{-\gamma})]^{\Lambda+1/2} & \text{if }\ T=16/(4\Lambda+5)^2\end{cases}.$$

对相关表达式进行上估计[35]，，我们得到以下明确的数值界。

命题 6.4. 设 $\alpha,\beta\geq -1/2$ 满足 $\alpha+\beta+1/2>0$ 和 $2\alpha+2\beta+1\notin\mathbb{N}$。则

$$c_{\alpha,\beta,T}\geq \frac{1}{318\cdot 31^{\alpha+\beta+1}}\qquad \textit{if } T=4/(\alpha+\beta+7/4),$$
$$C_{\alpha,\beta,T}\leq \begin{cases}28\cdot 23^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=4/(\alpha+\beta+7/4)\\ 124\cdot 5^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=1/(\alpha+\beta+7/4)^2\end{cases},$$
$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}}\leq \begin{cases}8798\cdot 694^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=4/(\alpha+\beta+7/4)\\ 16214\cdot 150^{\alpha+\beta+1} & \textit{if } T=1/(\alpha+\beta+7/4)^2\end{cases}.$$

当 $\Lambda\in(-1/2,\,0)$ 时。 由引理 F 可得

$$c_{\alpha,\beta,T}=c^D_{\Lambda,T/4}\,4^{\Lambda+1}b_\alpha b_\beta\,\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}},\qquad C_{\alpha,\beta,T}=C^D_{\Lambda,T/4}\,4^{\Lambda+2}B_\alpha B_\beta\,\frac{h_0^\Lambda}{h_0^{\alpha,\beta}}.$$

利用 (6.12)、(6.5) 以及

$$\mathbb{D}_{\breve\lambda+2}T/4\leq \mathfrak{B}\pi^2\qquad\text{when}\quad \lambda>-1\quad\text{and}\quad T/16\leq 1/(2\Lambda+2\breve\Lambda+11),$$

我们得到（另见 (2.6) 和 (4.1)）

$$\begin{aligned}c_{\alpha,\beta,T}&=\frac{2^{3\Lambda+2\breve\Lambda+29/2}}{\pi^2}\,e^{-(4\Lambda+6)T/4}\,c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+9/2,T/16}\,\pi^{-2\breve\Lambda-11/2}\,\frac{\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+11/2)}{\Lambda+2}\\&\quad\times\omega_{\Lambda+2}(T/4)\,\frac{1-2^{-\Lambda-2}}{e}\,e^{-\mathbb{D}_{\breve\Lambda+2}-\chi_{\{\alpha\neq-1/2\}}\mathbb{D}_\alpha-\chi_{\{\beta\neq-1/2\}}\mathbb{D}_\beta}\\&\geq 2^{3\Lambda+2\breve\Lambda+29/2}\,\pi^{-2\breve\Lambda-15/2}\,e^{-(5\Lambda+35/4)T/4}\,c^A_{\Lambda+\breve\Lambda+9/2,T/16}\\&\quad\times\frac{\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+11/2)}{\Lambda+2}\,\frac{1-2^{-\Lambda-2}}{e}\,\exp\Big(-\frac{\Lambda+\breve\Lambda+6}{e^\gamma}\Big),\\C_{\alpha,\beta,T}&=\frac{2^{2\Lambda+2\breve\Lambda+17}}{\pi^{5/2}}\,C^A_{\Lambda+\breve\Lambda+7/2,T/16}\,\frac{\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+9/2)}{\Lambda+2}\,\Omega_{\Lambda+2}(T/4)\\&\quad\times\frac{1}{(1-1/e)^2}\Big(\frac{4T}{\pi^2}+1\Big)^{\Lambda+1}(1\vee 2^{\alpha-1/2})(1\vee 2^{\beta-1/2})\,2^{-\chi_{\{\alpha=-1/2\}}-\chi_{\{\beta=-1/2\}}}\\&\leq\frac{2^{2\Lambda+2\breve\Lambda+17}}{\pi^{5/2}}\,C^A_{\Lambda+\breve\Lambda+7/2,T/16}\,\frac{\Gamma(\Lambda+\breve\Lambda+9/2)}{\Lambda+2}\,e^{(\Lambda+5/2)T/4}\,\frac{1}{(1-1/e)^2}\Big(\frac{4T}{\pi^2}+1\Big)^{\Lambda+1},\end{aligned}$$

若 $T/16\leq 1/(2\Lambda+2\breve\Lambda+11)$ 成立。由于 $\Lambda\in(-1/2,0)$，可得 $\breve\Lambda=-\Lambda$，从而

$$c_{\alpha,\beta,T}\geq\frac{2^{13}}{\pi^{17/2}}\,e^{-35T/16}\,c^A_{9/2,T/16}\,\Gamma(11/2)\,\frac{1}{2e}\exp\Big(-\frac{6}{e^\gamma}\Big)$$

and

$$C_{\alpha,\beta,T}\leq\frac{2^{18}}{3\pi^{5/2}}\,C^A_{7/2,T/16}\,\Gamma(9/2)\,e^{5T/8}\,\frac{1}{(1-1/e)^2}\Big(\frac{4T}{\pi^2}+1\Big)^{\Lambda+1},$$

[35] 有 $2^{-1/2}\pi^{5/2}\exp(4e^{-\gamma}+1)\approx 317.694128$, $\pi^2\exp(2e^{-\gamma})\approx 30.337323$, $16\sqrt{2}\pi^{-1/2}e\,\mathfrak{w}_0\approx 27.691605$, $8e\,\mathfrak{w}_1^2\approx 22.872438$, $128\sqrt{2}\pi^{-3/2}e^{1/3}\,\mathfrak{w}_0'\approx 123.450697$, $\pi^2/2\approx 4.934802$, $16\pi^2\exp(4e^{-\gamma}+2)\,\mathfrak{w}_0\approx 8797.460403$, $8\pi^2\exp(2e^{-\gamma}+1)\,\mathfrak{w}_1^2\approx 693.888536$, $128\pi\,\mathfrak{w}_0'\exp(4e^{-\gamma}+9/20)\approx 16213.468812$, $2^{-1}\pi^4\exp(2e^{-\gamma})\approx 149.708689$。

若 $T/16 \le 1/11$ 成立。此外，再次利用上述关于 $c_{\alpha,\beta,T}$ 和 $C_{\alpha,\beta,T}$ 的恒等式，以及 (2.6)，可得

$$\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \le \frac{2^4\pi^6}{9}\,\frac{C^A_{7/2,T/16}}{c^A_{9/2,T/16}}\,e^{45T/16}\,\frac{1}{(1-1/e)^2}\left(\frac{4T}{\pi^2}+1\right)^{\Lambda+1}\frac{e}{1-2^{-\Lambda-2}}\exp\Big(\frac{6}{e^\gamma}\Big),$$

前提是 $T/16 \le 1/11$。

综上，我们得到

$$\begin{aligned}
&c_{\alpha,\beta,T} \ge 4\,\pi^{-17/2}\,e^{-46/11}\,\exp\Big(-\frac{6}{e^\gamma}\Big) \qquad \text{if } T=16/11,\\
&C_{\alpha,\beta,T} \le \frac{2^{18}}{3\pi^{5/2}}\,\frac{1}{(1-1/e)^2}\left(\frac{4T}{\pi^2}+1\right)\times\begin{cases} e^{10/11}\,\mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^4 & \text{if } T=16/11\\ e^{161/484}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^4 & \text{if } T=16/121\end{cases},\\
&\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \le 2^{13}\,\pi^6\,\frac{(1-2^{-3/2})^{-1}}{(1-1/e)^2}\left(\frac{4T}{\pi^2}+1\right)\exp\Big(\frac{6}{e^\gamma}\Big)\times\begin{cases} e^{56/11}\,\mathfrak{w}_0(\sqrt{e}\,\mathfrak{w}_1/2)^4 & \text{if } T=16/11\\ e^{785/484}\,\mathfrak{w}_0'(\pi/8)^4 & \text{if } T=16/121\end{cases}.
\end{aligned}$$

对.....进行近似 对相关表达式取上界[36]，我们得到以下明确的数值界 .

命题 6.5. 设 α、$\beta \ge -1/2$ 满足 $\alpha+\beta+1/2 \in (-1/2,0)$。则

$$\begin{aligned}
&c_{\alpha,\beta,T} \ge \frac{1}{8\cdot 10^6} \qquad \textit{if } T=16/11,\\
&C_{\alpha,\beta,T} \le \begin{cases} 20107 & \textit{if } T=16/11\\ 1189 & \textit{if } T=16/121\end{cases},\\
&\frac{C_{\alpha,\beta,T}}{c_{\alpha,\beta,T}} \le \begin{cases} (28/3)\cdot 10^{10} & \textit{if } T=16/11\\ 31\cdot 10^7 & \textit{if } T=16/121\end{cases}.
\end{aligned}$$

6.4. **其他相关热核的注释**。

第 4 节和第 5 节的结果也可用于获得更多与雅可比热核相关的热核的完全显式尖锐界。不过，我们在此不深入讨论这一问题，而是为感兴趣的读者列出一些相关热核。

傅里叶–贝塞尔热核与傅里叶–Dini 热核。 傅里叶–贝塞尔热核的尖锐界已在 [21] 中通过结合概率方法和解析方法得到证明。更早之前，[23, 24] 得到了定性意义上的尖锐估计。[24]，中确立了傅里叶–贝塞尔热核与雅可比热核[37] 之间的关系，见 [24, 注 3。3], 这给出了尖锐热核界的完全解析证明；结合本文结果，还可得到显式乘性常数。

最近，[20]中证明了某个傅里叶–迪尼热核的尖锐估计。与傅里叶–贝塞尔情形类似，该热核与雅可比热核之间存在联系，参见 [20, 命题 3.6],；结合我们目前的结果，这一联系可为傅里叶–迪尼热核界提供显式乘性常数。

[36] 有 $2^{-2}\pi^{17/2}\exp(6e^{-\gamma}+46/11) \approx 7.996262\cdot 10^6$，$\frac{2^{14}}{3\pi^{5/2}}\big(\frac{64}{11\pi^2}+1\big)\frac{e^{32/11}}{1-1/e}\,()_2\,\mathfrak{w}_0\mathfrak{w}_1^4 \approx 20106.561157$，$\frac{64\pi^{3/2}}{3}\big(\frac{64}{121\pi^2}+1\big)\frac{e^{161/484}}{(1-1/e)_2}\,\mathfrak{w}_0' \approx 1188.639581$，$2^9\pi^6\big(\frac{1}{1-2^{-3/2}}\big)\big(\frac{e}{1-1/e}\big)^2\big(\frac{64}{11\pi^2}+1\big)\exp(6e^{-\gamma}+56/11)\,\mathfrak{w}_0\mathfrak{w}_1^4 \approx 9.326602\cdot 10_{10}$，$2\pi^{10}\big(\frac{1}{1-2^{-3/2}}\big)^1{}_{(1-1/e)^2}\big(\frac{64}{121\pi^2}+1\big)\exp(6e^{-\gamma}+785/484)\mathfrak{w}_0' \approx 3.056413\cdot 10^8$。[37] [24] 中使用的雅可比热核并非恰好是 $G^{\alpha,\beta}_t(x,y)$，不过这两个核之间通过一个简单恒等式相互联系。

与球体和单纯形相关的热核。 在 [28]中获得了对应于多维球和单纯形中某些正交展开的热核的尖锐估计。这些核通过某些积分公式与雅可比热核相关，参见 [28, 第 5,6],节；结合目前的结果，这些公式可用于求得相关界中的显式乘性常数。在这些结果之前，所讨论热核的定性尖锐估计已分别在 [37]和 [18, 19]中得到证明。

与锥体和圆锥曲面相关的热核。 文献 [14] 推导出了与多维锥体和圆锥曲面上的正交展开相关的热核尖锐界。再次可以通过积分公式（参见 [14，引理 2.1、引理 2.2]）看出其与雅可比热核的联系；借助本文，便可求得热核估计中的显式乘性常数。

与其他旋转体和旋转曲面相关的热核。 还有其他区域也允许进行正交展开，其相关热核可能与雅可比热核有关，例如多维抛物面和双曲面及其曲面，参见[42, 43], ；但这一问题及其在本文背景下可能产生的影响仍有待研究。

Appendix: tabulation of constants and auxiliary functions

Table 1. 数值常数

常数	值	近似值
γ	$-\Gamma'(1)$	0.577216
$\mathfrak{b}$	$2/\pi^2$	0.202642
$\mathfrak{B}$	$1/2$	0.5
$\mathfrak{w}_0$	$\big(1+\frac{21}{500}\big)\frac{1}{1+256/(27\pi^3)}$	0.797983
$\mathfrak{w}_0'$	$\big(1+\frac{1}{1000}\big)e$	2.721
$\mathfrak{w}_1$	$\frac{\pi}{4}\big(1+\frac{256}{27\pi^3}\big)$	1.025567

Table 2. 直接参数常数

常数	公式	参数范围
$h^{\alpha,\ \beta}_{n}$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)}$	$\alpha,\beta>-1,\quad n\ge 1$
$h_0^{\alpha,\beta}$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$	$\alpha,\beta>-1,\ n=0$
$h_0^{\alpha+\beta+1/2}$	$\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+3/2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$	$\alpha+\beta>-3/2$
k_α	$\frac{2^{\alpha-1/2}\lvert\alpha+1/2\rvert\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+3/2)}$	$\alpha>-1$
K_α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+3/2)}$	$\alpha>-1$
l_α	$\frac{\lvert\alpha+1/2\rvert}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}$	$\alpha>-1$
L_α	$\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$	$\alpha>-1$
n_α	$(1\wedge 2^{1/2-\alpha})\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)\,\Gamma(\alpha+1)}{}$	$\alpha>-1/2$
N_α	$(1\vee 2^{1/2-\alpha})\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)\,\Gamma(\alpha+1)}{}$	$\alpha>-1/2$
m_ω	$\frac{1-2^{-\omega}}{e\,\omega}$	$\omega>0$
M_ω	$\frac{2}{(1-1/e)^2\,\omega}$	$\omega>0$
$\mathbb{D}_\alpha$	$\Gamma(\alpha+3/2)^{1/(\alpha+1/2)}$	$-1/2\ne\alpha>-3/2$
$\mathbb{D}_{-1/2}$	$\exp(-\gamma)$	$\alpha=-1/2$
$\mathbb{E}_\alpha$	$(\alpha+1/2)/e+\exp(-\gamma)$	$\alpha\ge-1/2$
b_α	$(1\wedge 2^{\alpha-1/2})\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}\exp(-\mathbb{D}_\alpha)$	$\alpha>-1/2$
B_α	$(1\vee 2^{\alpha-1/2})\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}$	$\alpha>-1/2$
$b_{-1/2},\ B_{-1/2}$	$1/2$	$\alpha=-1/2$
$\Lambda\equiv\Lambda_{\alpha,\beta}$	$\alpha+\beta+1/2$	$\alpha,\beta>-1$
$\breve{\lambda}$	$\lceil 2\lambda\rceil-\lambda$	$\lambda\in\mathbb{R}$

TABLE 3. 选定的辅助函数

函数	公式	参数/自变量范围
$F(u,\ v) \equiv F_{\theta,\ \varphi}(u,\ v)$	$\left[\text{反余弦}\ \left(u\,\text{正弦}\ \frac{\theta}{2}\text{正弦}\ \frac{\varphi}{2}+v\,\text{余弦}\ \frac{\theta}{2}\text{余弦}\ \frac{\varphi}{2}\right)\right]^2$	$u, v \in [-1,1],\ \theta, \varphi \in [0,\pi]$
$\Psi_\alpha^\kappa(t,\ \theta,\ \varphi)$	$\left[\mathbb{D}_\alpha t \vee \kappa\theta\varphi\right]^{-\alpha-1/2}$	$\theta, \varphi \in [0,\pi],\ t, \kappa > 0$
$\Psi(\varphi)$	$\varphi/\,\text{正弦}\,\varphi$	$\varphi \in [0,\pi]$
$\omega_\lambda(t)$	$2^{\lceil 2\lambda\rceil/2-\lambda}e^{(\lambda-\lceil 2\lambda\rceil/2)(\lambda+\lceil 2\lambda\rceil/2+1)t}$	$t,\ \ \lambda > 0$
$\Omega_\lambda(t)$	$2^{\lceil 2\lambda\rceil/2-\lambda-1/2}e^{(\lambda-\lceil 2\lambda\rceil/2+1/2)(\lambda+\lceil 2\lambda\rceil/2+1/2)t}$	$t,\ \ \lambda > 0$
$q_\lambda(t)$	$2(\lambda+1)(\lambda+2)e^{-t(\lambda+3/2)}$	$t > 0,\ \ \lambda > -1$
$\widetilde{q}_\lambda(t)$	$2(\lambda+2)e^{-t(\lambda+3/2)}$	$t > 0,\ \lambda > -3/2$

REFERENCES

[1] 巴特曼手稿项目（A. Erd´elyi 编），*Higher transcendental functions*（3 卷），麦格劳-希尔，纽约，1953–55 年。[2] S. Bochner,
Sturm-Liouville and heat equations whose eigenfunctions are ultraspherical polynomials or associated Bessel functions，《马里兰州大学公园分校微分方程会议论文集》，第 23–48 页，1956 年。[3] S. Bochner,
Positivity of the heat kernel for ultraspherical polynomials and similar functions，《数学分析与应用档案》70（1979），211–217。[4] J. Cheeger，S.T. Yau，*A lower bound for the heat kernel*，《纯粹与应用数学通讯》34（1981），465–480。[5] L. Comtet,
Une formule explicite pour les puissances successives de l'opérateur de dérivation de Lie，《巴黎科学院院报》A–B 辑第 276 卷（1973），A165–A168。[6] L. Comtet,
Advanced combinatorics. The art of finite and infinite expansions。修订增补版，D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1974 年。[7] T. Coulhon，G. Kerkyacharian，P. Petrushev,
Heat kernel generated frames in the setting of Dirichlet spaces，《傅里叶分析与应用杂志》18（2012），995–1066。[8] A.D.D. Craik，*Prehistory of Faà di Bruno's formula*，《美国数学月刊》112（2005），119–130。[9] E.B. Davies，*Heat kernels and spectral theory*，《剑桥数学论丛》第 92 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989 年。[10] A. Debiard，B. Gaveau，E. Mazet，*Théorèmes de comparaison en géométrie riemannienne*，《数学科学研究所刊物》12（1976/77），391–425。[11] A. Dijksma，T.H. Koornwinder,
Spherical harmonics and the product of two Jacobi polynomials，荷兰皇家科学院，论文集 A 辑，74 =《数学研究》33（1971），191–196 =《数学研究（论文集）》74（1971），191–196。[12] H. Dym，H.P. McKean,
Fourier series and integrals，《概率与数理统计》第 14 期，学术出版社，纽约—伦敦，1972 年。[13] G. Gasper,
Positivity and the convolution structure for Jacobi series，《数学年刊》93（1971），112–118。[14] D. Hanrahan，D. Kosz，*Sharp estimates for Jacobi heat kernels in conic domains*，《逼近理论杂志》293（2023），论文编号 105921，共 11 页。[15] S. Helgason，*Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators，and sphericalfunctions*。1984 年原版的勘误重印本。数学调查与专著第 83 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2000 年。[16] W.P. Johnson，*The curious history of Faà di Bruno's formula*，《美国数学月刊》109（2002），217–234。[17] S. Karlin，J. McGregor,
Classical diffusion processes and total positivity，《数学分析与应用杂志》1（1960），163–183。[18] G. Kerkyacharian，P. Petrushev，Y. Xu，*Gaussian bounds for the weighted heat kernels on the interval，ball, andsimplex*，《构造性逼近》51（2020），73–122。[19] G. Kerkyacharian，P. Petrushev，Y. Xu,
Gaussian bounds for the heat kernels on the ball and the simplex:classical approach，《数学研究》250（2020），235–252。[20] B. Langowski，A. Nowak,
On sharp heat kernel estimates in the context of Fourier–Dini expansions，《逼近理论杂志》304（2024），论文编号 106103，共 22 页。

[21] J. Ma-lecki, G. Serafin, T. Zorawik, *Fourier–Bessel heat kernel estimates*, 《数学分析与应用杂志》439（2016），91–102。[22] G. Nemes, *Simple error bounds for an asymptotic expansion of the partition function*, 《拉马努金杂志》65（2024），1757–1771。[23] A. Nowak, L. Roncal, *On sharp heat and subordinated kernel estimates in the Fourier–Bessel setting*, 《落基山数学杂志》44（2014），1321–1342。[24] A. Nowak, L. Roncal, *Sharp heat kernel estimates in the Fourier–Bessel setting for a continuous range of thetype parameter*, 《数学学报（英文版）》30（2014），437–444。[25] A. Nowak, P. Sj¨ogren, *Sharp estimates of the Jacobi heat kernel*, 《数学研究》218（2013），219–244。[26] A. Nowak, P. Sj¨ogren, T.Z. Szarek, *Analysis related to all admissible type parameters in the Jacobi setting*, 《构造性逼近》41（2015），185–218。[27] A. Nowak, P. Sj¨ogren, T.Z. Szarek, *Sharp estimates of the spherical heat kernel*, 《纯粹与应用数学杂志》129（2019），23–33。[28] A. Nowak, P. Sj¨ogren, T.Z. Szarek, *Genuinely sharp heat kernel estimates on compact rank-one symmetric spaces, for Jacobi expansions, on a ball and on a simplex*, 《数学年刊》381（2021），1455–1476。[29] A. Nowak, P. Sj¨ogren, T.Z. Szarek, *New sharp bounds for the Jacobi heat kernel via an extension of the Dijksma-Koornwinder formula*, 《构造性逼近》，即将刊出。arXiv:2402.08800[30] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, *NIST handbook of mathematical functions*, 美国商务部、美国国家标准与技术研究院，华盛顿特区；剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。在线配套资料及更新：dlmf.nist.gov[31] B.V. Pal′tsev, *On two-sided estimates, uniform with respect to the real argument and index, for modified Besselfunctions*, 《数学札记》65（1999），681–692；译文发表于《数学笔记》65（1999），571–581。[32] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, I.O. Marichev, *Integrals and series. Vol. 1*, Gordon & Breach 科学出版社，纽约，1986 年。[33] F. Qi, Ch.-P. Chen, *A complete monotonicity property of the gamma function*, 《数学分析与应用杂志》296（2004），603–607。[34] H. Robbins, *A remark on Stirling's formula*, 《美国数学月刊》62（1955），26–29。[35] A.V. Shchepetilov, *Calculus and mechanics on two-point homogeneous Riemannian spaces*。《物理学讲义》第 707 卷。施普林格，柏林，2006 年。[36] N.J.A. Sloane（创始人）, *The on-line encyclopedia of integer sequences*: oeis.org[37] P. Sj¨ogren, T.Z. Szarek, *Analysis in the multi-dimensional ball*, 《数学》65（2019），190–212。[38] G. Szeg¨o, *Orthogonal polynomials*, 第四版，美国数学学会讨论会出版物第 23 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1975 年。[39] H.-C. Wang, *Two-point homogeneous spaces*, 《数学年刊》55（1952），177–191。[40] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, 第二版，剑桥大学出版社，剑桥，1966 年。[41] J.G. Wendel, *Note on the gamma function*, 《美国数学月刊》55（1948），563–564。[42] Y. Xu, *Orthogonal structure and orthogonal series in and on a double cone or a hyperboloid*, 《美国数学会会刊》374（2021），3603–3657。[43] Y. Xu, *Fourier orthogonal series on a paraboloid*, 《数学分析杂志》149（2023），251–279。[44] J. Yi, *Theta-function identities and the explicit formulas for theta-function and their applications*, 《数学分析与应用杂志》292（2004），381–400。

（Adam Nowak） Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Śniadeckich 8, 00-656 Warsaw, Poland*Email address*: anowak@impan.pl（Pawe-l Plewa） Faculty of Mathematics, Wrocław University of Science and Technology, Wyb. Wys-piańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland*Email address*: pawel.plewa@pwr.edu.pl（Tomasz Z. Szarek） Department of Mathematics, University of Georgia, Athens, GA 30602, USA andMathematical Institute, University of Wrocław, Pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wrocław, Poland*Email address*: tzs10705@uga.edu