arXiv:2512.16354v1 [math.SG] 18 Dec 2025

曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴的变形

SEVERIN BARMEIER、SIBYLLE SCHROLL 和 ZHENGFANG WANG

Abstract. 我们完整地描述了分次曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴的 A_∞ 变形理论。我们证明，任何抽象的 A_∞ 变形都是“几何的”，也就是说，它等价于原曲面经部分紧化后得到的轨形曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴。对于某些亏格 0 曲面，这些变形一般是紧致枕头套的 Fukaya 范畴。

我们引入弱对偶的概念，并使用无界扭曲复形来克服当某些边界分支被完全绕包时自然出现的曲率问题。

我们的结果首次阐述了在存在停止数据的情况下，Fukaya 范畴的 A_∞ 变形与部分紧化之间的关系；这一观点由 P. Seidel 在 2002年国际数学家大会的报告中提出。所有结果同样适用于原曲面含有有限多个二阶轨形点的情形。

Contents

1. 引言 2
1.1. 主要结果 3
2. 曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴 6
2.1. 生成元 7
3. Hochschild 上同调、变形与 DG 代数族 12
3.1. Bar 分解 13
3.2. DG 单项式代数的 Bardzell 分解 14
3.3. 预三角化 DG 代数与 A_∞ 范畴的变形 16
3.4. DG 代数族 16
4. DG gentle 代数 20
4.1. DG gentle 代数的曲面模型与形式性 23
4.2. DG gentle 代数的 Hochschild 上同调 25
5. 通过弱对偶解决曲率问题 30
5.1. 两个存在曲率问题的例子 31
5.2. 曲率问题 34
5.3. 弱对偶 36
5.4. 作为无界扭曲复形范畴的部分缠绕 Fukaya 范畴 41

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 18G70，次要分类号 16S80、53D37、16E35。*Key words and phrases.*温和代数、曲面的 Fukaya 范畴、A_∞ 变形、Hochschild 上同调。

5.5. 变形等价与曲率问题的解决方案 445.6. 变形、局部化与完备化 466. 部分缠绕 Fukaya 范畴的变形 496.1. $\mathcal{W}(S)$ 的变形 497. 枕形曲面的 Fukaya 范畴 53参考文献 57

1. Introduction

导出范畴的变形是代数与几何交汇处一个极富魅力的课题。Kontsevich 的同调镜像对称猜想[Kon94] 意味着凝聚层导出范畴与 Fukaya 范畴之间存在等价，且两侧的变形理论也彼此等价。在 B 侧，凝聚层范畴的变形不仅会产生底层簇的变形，还会产生“非交换簇”；这类变形与泊松结构的量子化密切相关 [Kon01,LVdB05, Kal08]。在 A 侧，A_∞ Fukaya 范畴的变形源于底层辛流形的部分紧化，或辛形式的变形 [Sei02]。例如，Auroux、Katzarkov 和 Orlov 的研究 [AKO06, AKO08] 将 $\mathbb{P}^2$ 及 Del Pezzo 曲面的非交换变形，与其镜像 Landau–Ginzburg 模型上恰辛形式的非恰变形联系起来。

为了描述导出范畴的变形理论，必须克服若干技术和概念上的障碍。三角范畴的变形理论只有在增强层级上才开始表现良好，无论是微分分次还是 A_∞ 增强，抑或稳定的 ∞-范畴增强。除非所讨论的范畴存在倾斜对象，否则这类变形不仅涉及结合变形，还涉及一般的微分分次或 A_∞ 变形。在这种情形下，很快就会遇到曲率问题，它会给返回三角层级造成严重障碍。

变形理论本身涉及一种通常相当复杂的障碍演算，其作用范围可以是无穷小的，也可以是形式的，也就是说，作用于局部 $\Bbbk$-代数上。然而，为了在平等的基础上比较变形后的范畴与原范畴，理想情况下，我们希望通过将变形参数取为非零常数，把无穷小或形式变形转化为“严格”变形。这要求构造代数化或至少收敛的变形。最后，即使成功做到这一点，如何从几何上理解这类变形通常仍不清楚。例如，要将一个经典几何对象（如局部环化空间）与凝聚层导出范畴的“非交换”变形联系起来相当困难——至少，如果要求该几何对象包含足够的信息，以便恢复变形后的导出范畴的话。同样，先验而言，一般的抽象 Fukaya 范畴 A_∞ 变形是否具有内在的辛几何解释（例如可解释为另一个 Fukaya 范畴），也并不清楚。

本文针对一类特殊的范畴——分次曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴——为上述所有问题给出了相当令人满意的解决方案。这些 Fukaya 范畴与表示理论中研究的 gentle 代数和 skew-gentle 代数导出等价。对于每个分次曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴（曲面可能带有孤立的二阶轨形奇点），我们构造了一个由与 Hochschild 2-余循环相关的仿射空间参数化的 A_∞变形半普适族。该族可以视为形式变形问题的代数化，并在该族中心纤维的形式邻域内恢复形式变形理论。描述（增强）范畴变形的一种自然方式，是考察经典生成元的自同态代数的变形。然而，只要曲面具有“完全绕包”的边界分支（没有停止点），且绕数为 1 或 2，这类变形就总会受到曲率问题的制约。我们利用某些无界扭曲复形范畴，通过弱生成元来描述曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴及其所有变形。这避开了通过经典生成元进行描述时自然出现的曲率问题。最后，我们证明，这个变形半普适族中的所有范畴实际上都有自然的几何解释——按照 [CK、AP、BSW] 的意义，它们是带有有限个轨形点的曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴。换言之，我们的结果表明，所有由部分缠绕 Fukaya 范畴的 Hochschild复形控制的抽象 A_∞ 变形都是几何的，并且对应于底层曲面的部分轨形紧化。

1.1. **主要结果**。 下面更详细地概述我们的主要结果。设$\mathbf{S} = (S,\ \Sigma,\ \eta)$ 是一个带停止点的分次轨形曲面，即一个轨形曲面 S，其分次结构 η 由 S上的线场给出，并配有一组停止数据构成的闭子集 $\Sigma \subset \partial S$。我们将 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 记为 $\mathbf{S}$ 的部分缠绕 Fukaya 范畴（见第 2节）。

Hochschild 上同调。 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 作为 A_∞ 范畴的变形理论由其二阶 Hochschild 上同调控制。我们证明，该 Hochschild 上同调群的维数可以直接从曲面中读出——它等于绕数为 1 或 2 的某些边界分支的数量。

定理 1.1 (定理 4.10)。 设 $\mathbf{S} = (S,\ \Sigma,\ \eta)$ 是一个边界上带有停止点的分次轨形曲面，并设 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 是其部分缠绕 *Fukaya* 范畴。那么 $\mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S}))$ 的维数等于以下各类边界分支的总数：

（*i*）带有一个边界停止点且绕数为1（*ii*）带有一个完整边界停止点且绕数为1 或2（*iii*）不带停止点且绕数为1 或2的边界分支。

为证明定理 1.1，我们为 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 选取一个合适的生成元，其自同态代 A 数正是我们所称的 *DG gentle* 代数 （见第 4节）。这使我们能够将 $\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A$识别为 DG 范畴上的扭曲复形范畴

$\mathrm{add}\,A$ 由 A 的不可分解直和项构成（视为右 DG A-模）。这一识别给出一个同构 $\mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S})) \simeq \mathrm{HH}^2(A, A)$。我们通过将单项式代数的 Bardzell 分解推广到一类自然的 DG 单项式代数来计算后者（第 3.2 节）。对于 DG gentle 代数，这个分解可视为底层分次 gentle 代数的 Koszul 分解的一种扰动。

曲面上的 Fukaya 范畴变形。对于每个至少具有一个部分绕包边界分支的分次轨形曲面 $\mathbf{S}$，我们构造了 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的一个半普适变形族。

定理 *1.2*（定理 *5.20* 和定理 *6.1*）。设 $S = (S, \Sigma, \eta)$ 是一个边界上带有停止点的分次轨形曲面，并且 $d = \dim HH^2(\mathcal{W}(S)\ \mathcal{W}(S))$。那么，经过局部化后，部分缠绕福柯范畴 $\mathcal{W}(S)$ 存在一个 A_∞ 变形族$\{\mathcal{W}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$，其中心纤维为 $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}(S)$。

这个变形族具有以下性质：

(i) 对每个 $\lambda \in \mathbb{A}^d \setminus \{0\}$，存在一个等价 $\mathcal{W}_\lambda \simeq \mathcal{W}(S_\lambda)$，其中 S_λ 是由 $S = S_0$ 经过部分紧化得到的、带有停止点的分次轨形曲面。*(ii)* 对每个 $\lambda \in \mathbb{A}^d$，范畴 $\mathcal{W}_\lambda \simeq \mathcal{W}(S_\lambda)$ 都存在一个形式生成元；若 λ 一般，则该生成元是内在形式的。*(iii)* 预三角化 A_∞ 范畴族 $\{\mathcal{W}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$ 由一个 DG 代数族$\{B_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$ 诱导，该代数族在所有 $\lambda \in \mathbb{A}^d$ 处都是半万能的，并且在$\lambda = 0$ 处是半普适的。*(iv)* 如果 S 有一个边界分支不对 $HH^2(\mathcal{W}(S)\ \mathcal{W}(S))$ 作出贡献，那么 $\mathcal{W}_\lambda$ 一般刚性，即对一般的 λ，$HH^2(\mathcal{W}_\lambda, \mathcal{W}_\lambda) = 0$。

为在所述一般性下证明这一结果，我们利用以下观察：$\mathcal{W}(\mathbf{S})^-$ $^-$对于一般的 $\mathbf{S}$，可由 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 经局部化得到，其中 $\mathbf{S}$ 是通过在绕数为 0 的每个边界分支上添加一个边界停止点（若存在此类边界分支），从 $\mathbf{S}$ 得到的分次轨形曲面。这$^-$确保 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 是 局部适当的，即同伦范畴中的态射空间是一个分次向量空间，且每个次数上的维数都有限。我们$^-$证明，$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的任意变形都由 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的某个变形诱导（定理5.26）。

弱生成元、弱对偶以及曲率问题的一个解。同一性 $\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\,A)$ 表明，$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形理论等价于 A的变形理论。然而，只要 $\mathbf{S}$ 存在绕数为 1 或 2 且没有停止点的边界分支，即这些边界分支完全绕包，那么任意选取经典生成元都会产生曲率变形 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$（命题 5.4）。为了在不对1.2 作任何限制（例如要求不存在这类边界分支）的情况下构造定理$\mathbf{S}$ 所述的半普适族，我们通过某个代数上的一类无界扭曲复形范畴的变形来描述 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形，其中代数 B是 B导出 Fukaya 范畴中某个弱生成元的端同态代数

$\bar{\mathrm{D}}\mathcal{W}(\mathbf{S})$。这使我们能够以如下方式规避 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的曲率问题。

定理 1.3 (命题 5.25，定理5.26 和定理5.20)。 设 $\mathbf{S}$ 是任意一个边界上带有停止点的分次轨形曲面。那么， $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形可以按以下意义消除弯曲。

(i) 存在等价 $\mathcal{W}(S) \simeq \mathcal{W}(\bar{S})[W^{-1}]$，由一个局部化函子$\bar{}$诱导，该函子通过“移除停止点”给出；其中 S 是在绕数为 0 的每个完全绕包边界分支上各添加一个停止点后得到的曲面。$\bar{}$*(ii)* 存在 $D\mathcal{W}(S)$ 的一个弱生成元，其微分分次 End 代数 B 为有限维， $\mathcal{W}$使得 $\bar{S}$ 与由某些无界扭曲复形构成的范畴 Tw^{-J},$b(add\ B)$ 等价，这些复形取自 DG 范畴 $add\,B$。 *(iii)* B 与 Tw^{-J},$b(add\ B) \simeq \mathcal{W}(\bar{S})$ 具有等价的变形理论，其中 B没有弯曲变形。*(iv)* $\mathcal{W}(S)$ 的任意变形都由 B的一个变形诱导。

代数 B 本身就是一个 DG gentle 代数，而 A 和 B 可以选择为满足一种我们称为弱对偶的对偶关系：对于某些经典生成元和弱生成元的选择，其自同态代数分别为 A 和 B，我们有 $B = A^{\vee_J}$，并称 B 为 A的弱对偶。这里， J 是 $\mathrm{add}\,A$ 或 $\mathrm{add}\ B$中不可分解对象的一个子集，等价地说，它是 A 和 B的箭图顶点的一个子集。之所以称为对偶，是因为我们有 $B^{\vee_J} = (A^{\vee_J})^{\vee_J} \simeq A$ （见第 5.3 节）。弱对偶以如下方式推广了分次 gentle 代数或 skew-gentle 代数的 Koszul 对偶。如果 A 是同调光滑的，那么代数 $B = A^{\vee_J}$ 与 Koszul 对偶 $A^!$ 导出等价，并且 $\mathrm{H}^0\,\mathrm{Tw}^{-J}(\mathrm{b}(\mathrm{add}\ B) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A^!) \simeq \mathrm{per}(A)$。当$A$ 适当时， A 没有弯曲变形，因此我们可以取 $J = \varnothing$，此时 $A = B = A^{\vee_J}$。换言之，弱对偶可用于将任意 DG gentle 代数 A 转化为适当的 DG gentle 代数 $A^{\vee_J}$，同时仍可从 $A^{\vee_J}$恢复 A 的完美导出范畴，只要 A 是局部适当的（等价地， A 在 0 次上是有限维的）。

枕形曲面的 Fukaya 范畴。在定理 1.2中，曲面$\mathbf{S}_\lambda$ 由 $\mathbf{S}$ 紧化而得：将绕数为 1 或 2 的某些边界分支分别紧化为轨形点或光滑点。特别地，当变形参数取一般值时，所有边界分支都可能对 HH^2 作出贡献，并且都被紧化。在这种情况下，一般变形就是一个枕头套的 Fukaya 范畴；枕头套是一个具有四个 2 阶轨形点的球面。

定理 1.4 (定理7.8)。设 $\mathbf{S}$ 是一个分次轨形曲面，且所有边界分支都对 $\mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S}))$作出贡献。那么， $\mathcal{W}(\mathbf{S})$的一般变形是紧致枕头套的 *Fukaya* 范畴。

定理1.4 的情形是唯一存在真正一参数模空间的情形。在此情形下，这个族中不包含刚性范畴，因为枕头套的 Fukaya 范畴总可以进一步变形为一个“邻近”枕头套的 Fukaya 范畴，这类变形对应于（非恰当）辛形式的变形。

2. 部分缠绕 Fukaya 范畴

按照 [Kon94，Sei08] 将 Fukaya 范畴视为预三角化的 A_∞ 范畴，即某个 A_∞ 代数上的扭曲复形范畴。对于带停止点的分次曲面，这个 A_∞ 代数可以取为一组曲线（拉格朗日子流形）的端同态代数，并赋予能够刻画这些曲线的部分缠绕弗洛尔理论的高阶结构，具体意义见[Aur10a、Aur10b、Syl19、GPS20]。态射由内部交点或边界流（Reeb 弦）给出，而微分、乘法和高阶乘法则通过计数伪全纯圆盘得到。

我们研究 [HKK17、LP20] 中所研究的曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴，以及 [CK、AP、BSW]中从几种不同（但等价）的观点给出的其到轨形曲面的推广。更确切地说，带有边界停止点的分次（轨形）曲面$\mathbf{S} = (S, \Sigma, \eta)$由以下数据组成：

- 一个光滑紧致的实定向（轨形）曲面 S，具有非空光滑边界 ∂S
- 一个非空闭子集 $\Sigma \subsetneq \partial S$，即停止数据
- 一个分次结构，由光滑线场 η给出，即射影化切（轨形）丛的一个整体截面。

我们将 Σ 的边界停止点 中可缩的连通分支称为边界停止点；将与 S^1 同胚的完整边界停止点称为完整边界停止点，并将二者统称为停止点。（更多细节参见 [HKK17、LP20、BSW]。）

我们始终假设 Σ 至少包含一个非完整边界停止点。（换言之，我们假设至少有一个边界分支是部分缠绕的。）

全文中，我们讨论 $\Bbbk$-线性范畴和 $\Bbbk$-代数，其中 $\Bbbk$ 是特征为 0 的域。我们将曲面 S 的部分缠绕福柯范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$定义为（$\Bbbk$-线性的）预三角化 A_∞ 范畴

$$\mathcal{W}(\mathbf{S}) = \operatorname{tw}(\operatorname{add}\operatorname{End}(\Gamma))^\natural$$

其中，$\Gamma = \bigoplus_i \gamma_i$ 是曲面中有限个弧的直和。这里，End(Γ)表示其 A_∞ 端同态代数，而 tw(add End(Γ)) 表示由 End(Γ)（视为其自身上的右 A_∞-模）的不可分解直和项所构成的 A_∞ 范畴上的扭曲复形范畴 [BK91、Kon94、Sei08]；$-^\natural$ 表示幂等完备化。关于 Γ 的具体描述，光滑情形可参见 [HKK17]，轨形情形可参见 [CK、AP、BSW、Kim24] 。在光滑曲面的情形中，曲线 γ_i 在曲面内部不应有交点，并将曲面剖分为“多边形”，每个多边形至多包含一个停止点，该停止点可以是边界停止点，也可以是穿孔点；后者用带有完整边界停止点的边界分支来建模。在轨形曲面的情形中，剖分的概念更为一般，曲线也可以在轨形点处相交。我们采用 [BSW 第 5]节中所考察的剖分。另一种等价但略有不同的观点见 [CK 第 3]节。

备注 2.1（适当和/或同调光滑）。 分次曲面 $\mathbf{S} = (S, \Sigma, \eta)$ 的停止数据 Σ 决定了部分缠绕福柯范畴

是否同调光滑和/或适当：有 $\mathcal{W}$（$\mathbf{S}$）当且仅当每个边界分支都包含一个完整边界停止点或至少一个边界停止点时，才是适当的 [HKK17，命题 3。5] 且 当且仅当 Σ 不包含完整边界停止点时，才是同调光滑（参见 [Kal15]）。第 5.3 节和5.6 节给出了类似的刻画，说明何时 $\mathcal{W}$（$\mathbf{S}$）局部适当。）

注2.2（从预三角化范畴到三角范畴）。范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 可视为 DG 范畴，或作为（幂等完备且三角化的）导出 *Fukaya* 范畴$\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}) = \mathrm{H}^0\mathrm{tw}(\mathrm{End}(\Gamma))^\natural$ 的 A_∞ 增强，其中 DG 范畴 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴 $\mathrm{H}^0\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，其态射由 $\mathcal{C}$ 中态射复形的零阶上同调群给出。

由于 Hochschild 上同调和变形理论在增强层级上的性质更好（例如参见 [Kel21]），我们几乎总是在 DG 层级上进行研究。我们使用无界扭曲复形，以避免考虑弯曲变形（见第 5 节）。这意味着我们可以随时转到三角层级。

关于部分缠绕福柯范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的一个核心结果如下。

定理 2.3。 设$\mathbf{S}$ 为一个边界上带有停止点的分次轨形曲面。那么$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 是曲面的拉格朗日核上一个预三角化 A_∞ 范畴余层的整体截面范畴。

Kontsevich 曾猜想可以用余层理论描述包裹 Fukaya 范畴 [Kon09]，；这一猜想最初针对 Stein 流形上的完全绕包 Fukaya 范畴。定理 2.3 针对曲面确立了这一猜想，并在[DK18、 HKK17] 中对光滑曲面予以证明（相关结果另见 [NZ09、 STZ14、 Dyc17、 PS19] ），并在 [BSW] 中对轨形曲面予以证明。高维情形下的类似结果另见 [GPS20 、GPS24] 。

对于带有停止点的分次（轨形）曲面 $\mathbf{S}$ ，定理 2.3 中出现的拉格朗日核是一个带有额外结构的带状图 G，这些结构用于编码停止点、分次结构和轨形点。该带状图与一个剖分对偶， Δ该剖分由曲面中的弧构成。

2.1. 生成元。

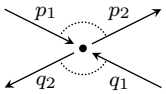
2.1.1. 形式生成元。 一个引人注目的结果 [HKK17]指出，当$\mathbf{S}$ 是一个带有停止点的光滑曲面时，其部分缠绕福柯范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 存在形式（经典）生成元 Γ ，其端同态代数 $A = \mathrm{End}(\Gamma)$ 是分次的*gentle* 代数。在三角化层面，这给出了一个等价

$$\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{per}(A) \tag{2.4}$$

在 $\mathbf{S}$ 的导出 Fukaya 范畴（参见注2.2）与 A的完美导出范畴之间。反过来，对于任意分次 gentle 代数 A，都存在一个分次光滑曲面 $\mathbf{S} = (S, \Sigma, \eta)$，使得（2.4） [LP20]成立。这里，$A$ 由带关系的箭图给出的表示，确定了底层曲面 S 以及停止点集合 Σ；该集合可通过一个带状图确定，而这个带状图可以直接由箭图 [Sch15]构造得到。

对于箭图上的任意分次，都存在一个线场 η （在同伦意义下唯一），它诱导出该分次 [LP 20]。

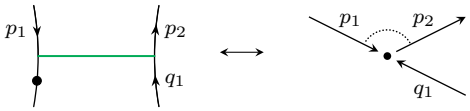
温和代数最初是在有限维代数的表示理论中引入的，因为其表示理论易于处理 [AH81，AS87]。它们是二次单项式结合代数，其带关系箭图表示在每个顶点至多有两个入箭头和两个出箭头



其中虚线表示复合 $p_2p_1 = 0$ 和 $q_2q_1 = 0$为零，而另外两个复合非零。在曲面上，Fukaya 范畴中的单个对象以及两个入射和两个出射态射这一构型，由一条连接两个（可能相同的）边界分支的曲线给出



其中 p_1，p_2，q_1，q_2 对应于沿边界通往曲面中其他曲线或从其他曲线而来的 Reeb 弦。如果边界上有停止点，对应的箭图中的箭头便不存在（反之亦然），例如



对于轨形曲面 $\mathbf{S}$，$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 存在一大类形式生成元，这一点已在 [BSW、Kim 24] 中得到证明，其中对所谓的形式剖分进行了分类。（另见 [AP，第 5] 节，其中使用带标记剖分研究 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 中的倾斜对象。）我们在 [BSW，猜想 89]中提出猜想：所有形式生成元的自同态代数均源自形式剖分。这将提供一个几何判据，用以确定所有与给定的分次 gentle 或 skew-gentle 代数导出等价的分次结合代数。形式生成元的完整分类以及由此得到的分次结合代数类的描述，是正在进行的研究工作的内容 [BCK+]。

为了研究 $\mathcal{W}$(S)的变形理论，我们可以选择任意合适的生成元，因为 [Kel03]表明，对于 $\mathcal{W}$(S)的任意（经典）生成元 Γ， $\mathcal{W}$(S)的Hochschild复形都同构于 End(Γ) 的Hochschild复形（见第 3.3 节）。 $\mathcal{W}$(S)的一个合适的经典生成元可以由 S 的某个 “ 标准 ” 剖分得到，如图 1 所示。（详细内容参见 [BSW] 。）相应的自同态代数通过图 2 中的带关系的 DG 箭图加以描述，其分次和微分见命题 2.5。尽管命题 2.5 的表述可由 [BSW], 的结果直接得到，我们仍将其记录于此，以便为后续使用固定箭图中箭头的系统标记。

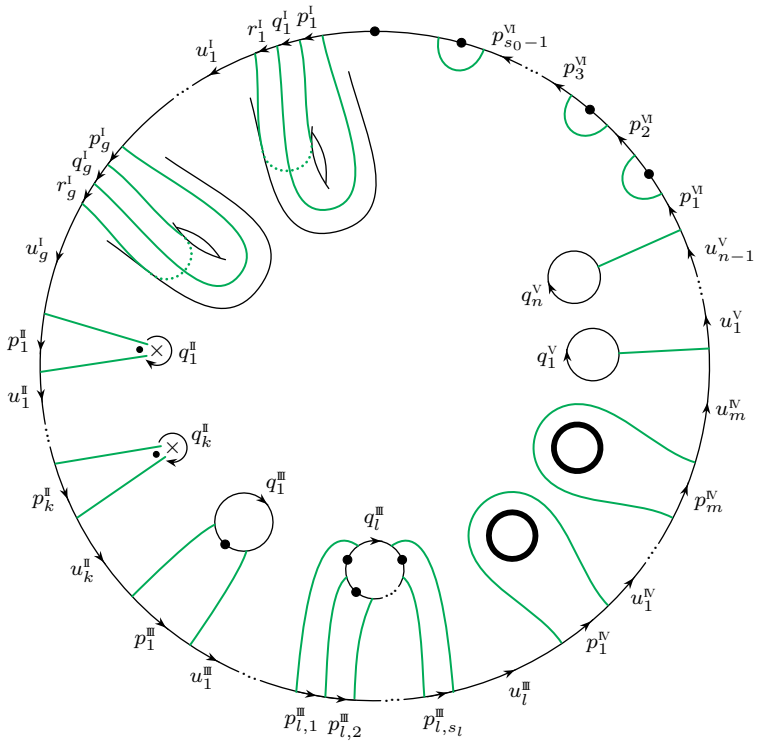


FIGURE 1. 带停止点的分次轨形曲面$\mathbf{S}$ 的标准剖分：每个边界分支上都有停止点，且其曲线的端同态代数生成 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$

命题 2.5。 令$\mathbf{S} = (S, \Sigma, \eta)$ 为一个带停止点的分次轨形曲面，且至少有一个边界分支 $\partial_0 S$ 包含至少一个边界停止点。我们记

(I) g 亏格 S(II) k 轨形点的数量(III) l 带边界停止点的额外边界分支数量（不包括 $\partial_0 S$），分别记为 $\partial_1^{\mathrm{III}} S, \ldots, \partial_l^{\mathrm{III}} S$；对每个 $1 \leq j \leq l$，边界分支 $\partial_j^{\mathrm{III}} S$ 含有 $s_j \geq 1$ 个边界停止点(IV) m带完整边界停止点的边界分支数量，记为$\partial_1^{\mathrm{IV}} S$, $\ldots, \partial_m^{\mathrm{IV}} S$(V) n 不带停止点的边界分支数量，记为 $\partial_1^{\mathrm{V}} S, \ldots, \partial_n^{\mathrm{V}} S$(VI) $s_0 \geq 1$ $\partial_0 S$ 的边界停止点数量。

那么 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$存在一个形式（经典）生成元 Γ ，其微分分次端代数$\mathrm{End}(\Gamma)$ 是由图 *2* 的分次箭图给出的微分分次 *gentle* 代数，带有

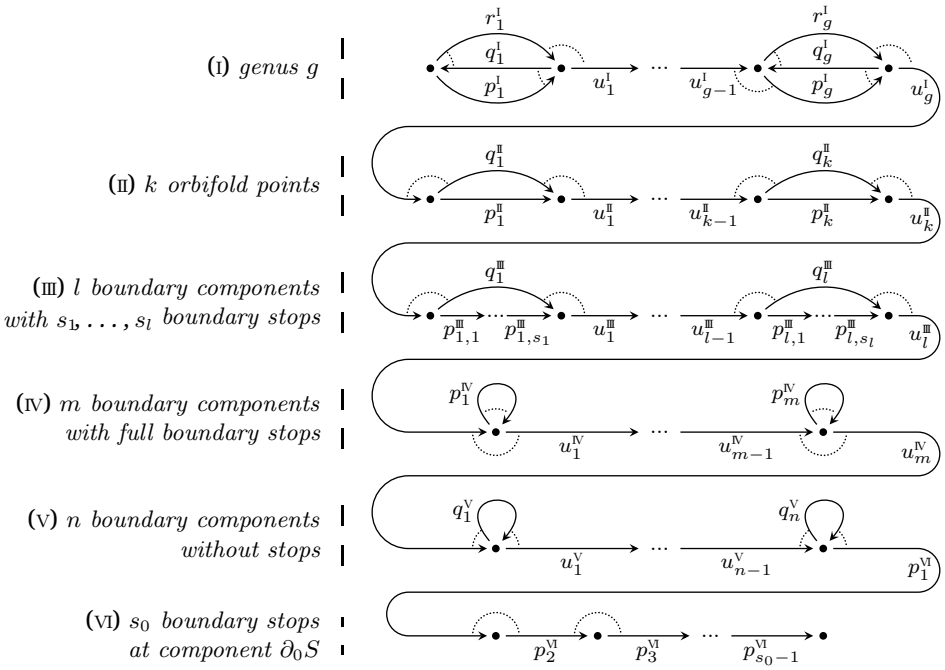


FIGURE 2. 对应于图 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$中剖分的生成元1的 DG 端代数的箭图。
虚线表示二次单项式关系。微分和分次见命题2.5。

二次单项式关系

$$
\begin{array}{rrll}
 & q_i^{\mathrm{I}}p_i^{\mathrm{I}},\ r_i^{\mathrm{I}}q_i^{\mathrm{I}},\ u_i^{\mathrm{I}}r_i^{\mathrm{I}} & (1\le i\le g) & p_{i+1}^{\mathrm{I}}u_i^{\mathrm{I}} \quad (1\le i<g)\\
q_1^{\mathrm{II}}u_g^{\mathrm{I}} & u_i^{\mathrm{II}}q_i^{\mathrm{II}} & (1\le i\le k) & q_{i+1}^{\mathrm{II}}u_i^{\mathrm{II}} \quad (1\le i<k)\\
q_1^{\mathrm{III}}u_k^{\mathrm{II}} & u_i^{\mathrm{III}}q_i^{\mathrm{III}} & (1\le i\le l) & q_{i+1}^{\mathrm{III}}u_i^{\mathrm{III}} \quad (1\le i<l)\\
u_1^{\mathrm{IV}}u_l^{\mathrm{III}} & {p_i^{\mathrm{IV}}}^2 & (1\le i\le m) & u_{i+1}^{\mathrm{IV}}u_i^{\mathrm{IV}} \quad (1\le i<m)\\
q_1^{\mathrm{V}}u_m^{\mathrm{IV}} & u_i^{\mathrm{V}}q_i^{\mathrm{V}} & (1\le i\le n) & q_{i+1}^{\mathrm{V}}u_i^{\mathrm{V}} \quad (1\le i<n)\\
p_1^{\mathrm{VI}}q_n^{\mathrm{V}} & p_{i+1}^{\mathrm{VI}}p_i^{\mathrm{VI}} & (1\le i\le s_0-2) &
\end{array}
$$

以及微分

$$d p_i^{\mathrm{II}} = q_i^{\mathrm{II}} \quad (1\le i\le k)$$

使得 d 在所有其他箭上均为零。箭的分次如下：

$$
\begin{array}{llll}
|q_i^{\mathrm{II}}| = 1 & (1\le i\le k) & |q_i^{\mathrm{III}}| = \mathrm{w}_\eta(\partial_i^{\mathrm{III}}S) & (1\le i\le l)\\
|p_i^{\mathrm{IV}}| = 1-\mathrm{w}_\eta(\partial_i^{\mathrm{IV}}S) & (1\le i\le m) & |q_i^{\mathrm{V}}| = \mathrm{w}_\eta(\partial_i^{\mathrm{V}}S) & (1\le i\le n)
\end{array}
$$

所有其他箭的次数均为0。

证明。 图 1 中的曲线按照 [BSW第 8]节的意义，定义了一个形式微分分次剖分。因此，Γ 生成 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$，并且根据 [BSW命题 8。4] 其端同态

代数 End(Γ) 是一个 DG 代数，根据 [BSW定理 8，6] 它是形式的，即 A∞- 与其（结合）上同调代数拟同构。文献同上也给出了 End(Γ) 作为带关系的 DG 箭图的描述。□

我们将在第 4.2 节看到，上同调 $\mathrm{HH}^2(\mathrm{End}(\Gamma),\mathrm{End}(\Gamma))$ 由 2-余循环张成，这些余循环产生 End(Γ) 作为弯曲 DG 代数的变形。这归因于生成元的特殊选择。对于其他生成元，其自同态代数的 2-余循环自然地参数化为弯曲 A∞代数的变形，而这类变形通常具有非平凡的高阶乘法。这些变形见 [BSW]（另请参见关于 A∞ 变形的注记4.13，以及关于如何处理弯曲变形的第 5 节）。

2.1.2. 经典生成元与弱生成元。回忆一下，三角范畴 $\mathcal{C}$ 的一个弱生成元 是一个对象 E，满足对于任意其他对象 X，都存在一个从 E 到 X某个平移的非平凡态射，即对于某个 $n \in \mathbb{Z}$，有 $\mathrm{Hom}(E, X[n]) \neq 0$。如果包含 E 的 $\mathcal{C}$ 的最小三角子范畴就是整个 $\mathcal{C}$，那么 E 就称为经典生成元。

利用对曲面部分缠绕 Fukaya 范畴中不可分解对象和态射的分类 [HKK17, OPS], 可以从几何角度刻画部分剖分何时构成弱生成元。只有当范畴存在绕数为 $\neq 0$ 的无停止点边界分支时，才会出现这种差异。换言之，若要观察经典生成元与弱生成元之间的差别，就需要考虑非适当且不集中于 0 次的 gentle 代数或 skew-gentle 代数。

事实证明，这种差异使我们能够用弱生成元替换经典生成元，并转而考虑某些无界扭曲复形，从而恢复 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$（参见第 5.4 节）。

定理 2.6。设**S** 为一个分次轨形曲面，且设 Γ 为**S** 中的一组曲线，它们在**S**的内部互不相交。那么， Γ 是导出部分缠绕 *Fukaya* 范畴$\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的弱生成元，当且仅当 Γ 中的曲线将曲面切分为若干连通分支，且每个连通分支均属于以下类型之一：

(i) 包含至多一个停止点的光滑圆盘(ii) 不含边界停点的轨形圆盘(iii) 包含一个完整边界停止点且不含其他边界停点的光滑圆环(iv) 不含停止点，且有一个绕数为 $\neq 0$ 的边界分支的光滑圆环。

如果不存在最后一种类型的连通分支，那么 Γ是一个经典生成元 $r.$
证明。 设 $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ 并写作 $S \setminus \Gamma = \bigsqcup_i C_i$。 对于“仅当”方向，只需注意到，只要连通分支 C_i 还包含其他内容，就可以构造一个由完全位于C_i 内的曲线表示的对象 X，使得不存在从 Γ 到 $X[n]$的态射，这与 Γ上的弱生成假设相矛盾。对于“当”方向，注意到关于

连通分支 Γ 意味着 Γ 是一个经典生成元，由$\mathbf{S}$ 的剖分给出，正如 [HKK17、BSW], 中所讨论的那样，除非存在第四类分支；在这种情况下，未被 Γ经典生成的“缺失”对象是连接到不带停点的边界分支的曲线。但这些曲线必须连接到同一连通分支内的另一个边界分支，或穿过切出该分支的某条弧。在这两种情况下，都存在某个次数上的非平凡态射，这表明 Γ 满足弱生成元的条件。 □

备注 2.7（弱生成元的分类）。 我们预期定理 2.6一般也成立，即我们预期这些条件能完整刻画弱生成元，也就是说，D$\mathcal{W}$(**S**) 的任意弱生成元都由一个对象给出，该对象对应的曲线将曲面剖分为满足条件（i）–（iv）的连通分支，而不必假设曲线在内部相交。请注意，这一一般性结果将意味着，对于任意分次 gentle 代数或 skew-gentle 代数A ，只要它是适当的，或（可能不适当但）集中在 0 次，则 per(A) 的任意弱生成元都是经典生成元。

3. Hochschild cohomology、 deformations and families of DG algebra s

现在我们回顾计算 $\mathcal{W}$(**S**) 的 Hochschild 上同调所需的一些关于 DG 代数的基本概念。首先，我们约定记号和符号规则如下。

记号 3.1。 设 (V, d_V) 是一个 $\Bbbk$-向量空间上的上链复形，即 V是一个$\mathbb{Z}$-分次的 $\Bbbk$-向量空间，且 $d_V\colon V \to V$是一个次数为$\mathbf{1}$的微分。我们将 V 的次数为 i 的分量记作 V^i ，并将以 sV 表示 1 次平移复形，其分量为 (sV)$^i = V^{i+1}$ ，微分为 $d_{\mathrm{s}V}(\mathrm{s}v) = -\mathrm{s}d_V(v)$。对于齐次元素 $v \in V^i$，我们用 $|v| = i$ 表示其次数。对应元素 s$v \in \mathrm{s}V$的次数为 $|\mathrm{s}v| = |v| - 1$。（也可以将 sV视为张量积 $\Bbbk[1] \otimes V$，其中 $\Bbbk[1]$是集中在次数 -1 的一维复形，因此 sv 可与 $1 \otimes v$等同，其中 $1 \in \Bbbk$ 是 $\Bbbk$ 的单位元，但置于次数 -1。）

我们通常在记号中省略微分，并简单地将微分 d_V 隐含其中的上链复形写作 V。

对于两个上链复形 U 和 V，令 Hom(U, V) 表示满足以下条件的上链复形：其次数 i 的分量 Hom(U, V)^i 是由次数为 i 的 $\Bbbk$-线性映射构成的 $\Bbbk$-向量空间。其微分由分次交换子给出

$$d_{\mathrm{Hom}(U,V)}(f) = d_V \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_U \tag{3.2}$$

其中符号由 Koszul 符号规则确定。

类似地，两个上链复形 U 和 V 的张量积是上链复形 $U \otimes V$，其中

$$(U \otimes V)^i = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} U^{i-j} \otimes V^j$$

和微分

$$d_{U \otimes V}(u \otimes v) = d_U(u) \otimes v + (-1)^{|u|} u \otimes d_V(v). \tag{3.3}$$

（这也解释了 $\mathrm{s}V = \Bbbk[1] \otimes V$ 的微分符号。）

3.1. Bar 分解。 设 A 是一个微分分次代数，并记其包络代数为 $A^{\mathrm{e}} = A \otimes A^{\mathrm{op}}$，其中反微分分次代数 A^{op} 与 A 具有相同的底层分次上链复形，其乘法为 $b \cdot^{\mathrm{op}} a = (-1)^{|a||b|} ab$。$A$ 的**巴分解** 是左微分分次 A^{e}-模

$$\mathrm{Bar}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} A \otimes (\mathrm{s}A)^{\otimes n} \otimes A. \tag{3.4}$$

对于 $1 \leq i \leq j \leq n$，我们用以下简写

$$\mathrm{s}a_{i\ldots j} := \mathrm{s}a_i \otimes \mathrm{s}a_{i+1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}a_j \tag{3.5}$$

表示 $(\mathrm{s}A)^{\otimes n}$ 中 $j - i + 1$ 个张量因子的元素。由于 $\mathrm{s}a_{i\ldots j}$ 中包含 $j - i + 1$ 个 s，其次数为

$$|\mathrm{s}a_{i\ldots j}| = |a_i| + |a_{i+1}| + \cdots + |a_j| - (j - i + 1).$$

$\mathrm{Bar}(A)$ 的微分可表示为以下两项之和：$d_{\mathrm{Bar}(A)} = d^{\mathrm{int}} + d^{\mathrm{ext}}$ 由 通过 (3.3)诱导的“内部”微分

$$\begin{aligned} d^{\mathrm{int}}(a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots n} \otimes a_{n+1}) &= d_A(a_0) \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots n} \otimes a_{n+1} \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{|a_0| + |\mathrm{s}a_{1\ldots i-1}|} a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots i-1} \otimes d_{\mathrm{s}A}(\mathrm{s}a_i) \otimes \mathrm{s}a_{i+1\ldots n} \otimes a_{n+1} \\ &+ (-1)^{|a_0| + |\mathrm{s}a_{1\ldots n}|} a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots n} \otimes d_A(a_{n+1}) \end{aligned}$$

以及巴构造的“外部”微分

$$\begin{aligned} d^{\mathrm{ext}}(a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots n} \otimes a_{n+1}) &= (-1)^{|a_0|} a_0 a_1 \otimes \mathrm{s}a_{2\ldots n} \otimes a_{n+1} \\ &+ \sum_{1 \leq i < n} (-1)^{|a_0| + |\mathrm{s}a_{1\ldots i}|} a \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots i-1} \otimes \mathrm{s}a_i a_{i+1} \otimes \mathrm{s}a_{i+1\ldots n} \otimes a_{n+1} \\ &- (-1)^{|a_0| + |\mathrm{s}a_{1\ldots n-1}|} a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots n-1} \otimes a_n a_{n+1}. \end{aligned}$$

A^{e}上的 $A \otimes (\mathrm{s}A)^{\otimes n} \otimes A$ 的分次模结构由下式给出

$$(a \otimes b)(a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots n} \otimes a_{n+1}) := (-1)^{|b|(|a_0| + |\mathrm{s}a_{1\ldots n}| + |a_{n+1}|)} a a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\ldots n} \otimes a_{n+1} b.$$

存在一个自然的微分分次 A^{e}-模态射 $\varepsilon\colon \mathrm{Bar}(A)\ A$，由以下复合给出

$$\mathrm{Bar}(A) \xrightarrow{\mathrm{pr}_0} A \otimes A \xrightarrow{m_2} A \tag{3.6}$$

其中 pr_0 是典范投影，而 m_2 是 A的乘法。众所周知， ε是一个拟同构。

由于 $\mathrm{Bar}(A)$ 是左侧微分分次 A^{e}-模 A 的 DG 投射分解，因此上链复形 $\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{e}}}(\mathrm{Bar}(A)\ A)$ 计算 A 的 Hochschild 上同调。其微分由 $d(f)$ 给出：$= d_A \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_{\mathrm{Bar}(A)}$，如（3.2）所示。自然同构

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{s}A)^{\otimes n}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{e}}}(A \otimes (\mathrm{s}A)^{\otimes n} \otimes A, A) \tag{3.7}$$

~它将 f 映射为由以下方式定义的映射 f

$$a_0 \otimes \mathrm{s}a_{1\dots n} \otimes a_{n+1} \longmapsto (-1)^{|a_0||f|} a_0 f(\mathrm{s}a_{1\dots n}) a_{n+1}.$$

在 $\mathrm{Hom}_{A^e}(\mathrm{Bar}(A)\ A)$ 与 A的经典 Hochschild 上链复形 $\mathbf{C}^\bullet(A,\ A)$ 之间诱导出一个上链复形的同构。

3.2. **DG 单项式代数的 Bardzell 分解**。 Bar 分解（3.4）通常规模过大，难以用于显式计算。对于有限生成代数，一种可行的替代方案是与约化系统相关联的分解，参见 [Bar97、CS15] 和 [BW[a]、BW24、BW26] 关于其在变形理论中的作用。现在我们来说明如何将 Bardzell 的极小分解 [Bar97] 从（平凡分次的）单项式代数推广到 DG 情形。

设 Q 为一个（有限）箭图。 Q 上的分次由一个函数 $|-|\colon Q_1 \to \mathbb{Z}$给出,一该函数为每个箭 $x \in Q_1$ 赋予其次数 $|x|$。长度为 n 的路径 $p = p_n \cdots p_2 p_1$ 由一列 n 个可合成的箭 p_1，……， $p_n \in Q_1$ 构成，我们用 Q_n 表示长度为 n的路径集。（特别地， Q_0 对应于 Q的顶点。）通过令以下取值， Q_1 上的分次可扩展到 Q_n

$$|p| = |p_1| + \cdots + |p_n|$$

这使路径代数 $\Bbbk Q$ 成为分次代数。注意， $\Bbbk Q$ 自然带有双分次，因为每条路径既有（路径）长度，也有次数。

令 I 为 $\Bbbk Q$ 的齐次理想。由于我们只需要二次单项式情形，因此假设 I 由一个子集 $R \subset Q_2$生成。（一般单项式情形类似，而一般非单项式情形则可通过同调扰动得到，例如参见 [BW[a]]。）令 $A = \Bbbk Q/I$ 为分次商代数。

设 $W_0 = Q_0$ 和 $W_1 = Q_1$，并令 $n \geq 2$

$$W_n = \{w_1 w_2 \cdots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in Q_1,\ w_i w_{i+1} \in R \text{ for each } 1 \leq i < n\} \subset Q_n.$$

特别地，我们有 $W_2 = R$。 W_3 中的元素称为重叠歧义，而对于 $n \geq 4$， W_n 中的元素称为高阶重叠歧义。若 w 不是任何 $m > n$ 的子路径，则称 $w \in W_n$（对于 $n \geq 1$）为**极大重叠歧义**，或简称为**极大重叠**。

现在考虑如下左微分分次 A^e-模

$$\mathrm{P}_\bullet(Q, R) = \bigoplus_{n \geq 0} A \otimes \mathrm{s}^n \Bbbk W_n \otimes A$$

其中 $\otimes = \otimes_{\Bbbk Q_0}$ 且 $\mathrm{s}^n \Bbbk W_n$ 是由 n生成的分次向量空间的第 次移位W_n。与（3.5）类似，我们将使用简写

$$\mathrm{s}w_{i\dots j} := \mathrm{s}^{j-i+1} w_i w_{i+1} \cdots w_j$$

对于 $i \leq j$和 $w_i w_{i+1} \cdots w_j \in W_{j-i+1}$，并将 $A \otimes \mathrm{s}^n \Bbbk W_n \otimes A$ 中的元素写作

$$a \otimes \mathrm{s}w_{1\dots n} \otimes b$$

对于 a，$b \in A$ 和 $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in W_n$。微分 ∂^{ext} 定义为

$$\begin{aligned}\partial_n^{\mathrm{ext}}(a_0 \otimes \mathrm{s}w_{1\ldots n} \otimes a_{n+1}) &= (-1)^{|a_0|} a_0 w_1 \otimes \mathrm{s}w_{2\ldots n} \otimes a_{n+1} \\ &\quad - (-1)^{|a_0|+|\mathrm{s}w_{1\ldots n-1}|} a \otimes \mathrm{s}w_{1\ldots n-1} \otimes w_n a_{n+1}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

注意，我们有

$$\partial_1^{\mathrm{ext}}(a \otimes \mathrm{s}x \otimes b) = (-1)^{|a|}(ax \otimes b - a \otimes xb)$$

对于任意箭 $x \in Q_1$ 和元素 a，$b \in A$。那么，$\mathrm{P}_\bullet(Q, R)$ 与 ∂^{ext} 一起构成 A 的 DG 投射分解。

如果 (A, d) 是一个 DG 代数，就可以扰动 $\mathrm{P}_\bullet(Q, R)$ 的微分 ∂^{ext}，从而得到 (A, d) 的 DG 投射分解。∂^{ext} 的一般公式相当复杂。不过，如果我们假设只要存在一条经过 w 的关系，就有 $d(w) = 0$，也就是说，对于某些 $w', w'' \in Q_1$，$ww' \in I$ 或 $w''w \in I$ 成立，那么公式就会简化。这个简化假设足以满足我们的目的，因为当 (A, d) 是一个 DG gentle 代数时（见定义 4.5），该假设成立。在这种情况下，内部微分 ∂^{int} 由下式简单给出

$$\begin{aligned}&\partial_n^{\mathrm{int}}(a_0 \otimes \mathrm{s}w_{1\ldots n} \otimes a_{n+1}) \\ &\qquad = d(a_0) \otimes \mathrm{s}w_{1\ldots n} \otimes a_{n+1} + (-1)^{|a_0|+|\mathrm{s}w_{1\ldots n}|} a_0 \otimes \mathrm{s}w_{1\ldots n} \otimes d(a_{n+1})\end{aligned}$$

对于任意 $n \geq 0$。记 $\partial = \partial^{\mathrm{int}} + \partial^{\text{外部}}$。那么我们有如下结果。

命题 3.9。设 (A, d) 是一个二次单项式 *DG* 代数，使得 d 在二次关系中出现的箭上消失，即写作 $A = \Bbbk Q/I$ 时，我们有 $d(w) = 0$ 且 $d(w') = 0$，对任意满足 $w, w' \in Q_1$ 的 $ww' \in I$ 均成立。

那么 $\mathrm{P}_\bullet(Q, R)$ 连同微分 ∂ 构成 A 作为左 DG A^{e}-模的一个 DG 投射分解。

证明。首先注意到 $\partial^2 = (\partial^{\text{外部}} + \partial^{\text{内部}})^2 = 0$。也就是说，$(\mathrm{P}_\bullet(Q, R), \partial)$ 是一个左 DG A^{e}-模。我们可以将 $\mathrm{P}^\bullet(Q, R)$ 看作一个双复形的全复形，其垂直复形为 $A \otimes \mathrm{s}^n \Bbbk W_n \otimes A$，带有内部微分。众所周知，每个带有外部（Hochschild）微分 ∂^{ext} 的水平复形都是正合的。于是，根据无环组装引理（例如参见 [Wei94，第 2.7] 节），全复形 $(\mathrm{P}_\bullet(Q, R), \partial)$ 也是正合的。□

我们可以使用投射分解 $\mathrm{P}_\bullet(Q, R)$ 来计算分次温和代数 A 的 Hochschild 上同调。利用以下观察：

$$\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{e}}}(A \otimes \mathrm{s}^i \Bbbk W_i \otimes A, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk Q_0^{\mathrm{e}}}(\mathrm{s}^i \Bbbk W_i, A)$$

可知 $\mathrm{HH}^\bullet(A, A)$ 同构于以下复形的上同调

$$\mathrm{P}^\bullet(Q, R) = \left(\prod_{i \geq 0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk Q_0^{\mathrm{e}}}(\mathrm{s}^i \Bbbk W_i, A), \delta \right) \tag{3.10}$$

其中微分 δ 由下式给出

$$\delta(f)(\mathrm{s}^{i+1} w) = -(-1)^{|\mathrm{s}w_1||f|} w_1 f(\mathrm{s}w_{2\ldots i+1}) + (-1)^{|\mathrm{s}w_{1\ldots i}|-|f|} f(\mathrm{s}w_{1\ldots i}) w_{i+1} \tag{3.11}$$

对于任意 $f \in \mathrm{Hom}^{\Bbbk Q_0^{\mathrm{e}}}(\mathrm{s}^i \Bbbk W_i, A)$ 以及任意 $w = w_1 w_2 \cdots w_{i+1} \in W_{i+1}$。

3.3. **预三角化微分分次 DG 和 A_∞ 范畴**。代数和范畴的变形由 Hochschild复形的一种适当概念控制 [KS], 与 HH^2 被认定为模等价的一阶变形集合。

Keller 的一项结果 [Kel03] 表明，DG 范畴的 Hochschild 上同调与其扭曲复形范畴的 Hochschild 上同调同构。这个同构可以视为一个更强的一般性结果的体现：对于任意（小）DG 范畴 $\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$ 与 tw($\mathcal{A}$) 的 Hochschild 复形在 B_∞ 代数 [Kel03] 的同伦范畴中同构，因而在 DG Lie 或 L_∞ 代数的同伦范畴中也同构。（B_∞ 结构包含 Gerstenhaber 括号，它控制着变形理论。）因此，可以通过研究 $\mathcal{A}$本身的变形理论，来研究 tw($\mathcal{A}$) 的变形理论。（关于阿贝尔范畴变形的类似结果，参见 [LVdB05、LVdB06] 。）

对于 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$，我们取 $\mathcal{A} = \mathrm{addEnd}(\Gamma)$ 作为 Γ 图 1 中 $D\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的标准生成元。由 1。Keller 的结果 [Kel03]可得以下同构

$$\mathrm{HH}^\bullet(\mathcal{W}(\mathbf{S}), \mathcal{W}(\mathbf{S})) \simeq \mathrm{HH}^\bullet(\mathrm{End}(\Gamma), \mathrm{End}(\Gamma)) \tag{3.12}$$

（当 $\mathcal{A}$ 是一个 A_∞ 范畴时，参见 [PS，第 2 节4] 。）此外，$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的完整变形理论可以通过 End(Γ) 的变形理论来描述。当 Γ 是一个形式生成元时，End(Γ) 是一个 DG 代数，其 Hochschild复形通常控制 End(Γ) 作为弯曲 A_∞ 代数的变形。在第4.2节中，我们将证明，对于命题 2.5 的标准生成元，HH^2(End(Γ), End(Γ)) 存在一个标准基，该基由 2-余循环组成，并参数化 End(Γ) 作为弯曲 DG 代数的变形。我们证明，只需选择 Γ 作为 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的弱生成元即可（见第5节）；在这种情况下，只需将 End(Γ) 变形为（非弯曲的）DG 代数。

3.4. **DG 代数族**。尽管我们可以将 DG 代数A 的 Hochschild复形视为参数化其 A 的形式变形或无穷小变形，但我们将考虑一种稍强的 DG 代数变形概念，即由某个仿射概形 Spec R“参数化”的 DG 代数族。给定这样的族，我们可以考虑 Spec R 在一个闭点处的完备化，这给出了该族在此点处的纤维的形式变形。反过来，这样的族可以看作形式族的代数化。[1]

从形式变形过渡到代数族通常极为困难。然而，对于微分分次代数或 A_∞ 代数而言，首先建立良好的变形形式理论还面临额外障碍：曲率问题 使得难以定义合适的变形等价概念。幸运的是，对于 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形，我们能够克服所有这些困难。尽管 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 在通过经典的

[1]这是标准术语中一个令人遗憾的冲突。 *formal generator* Γ是一个生成元，其自同态DG代数 A_∞-拟同构于其（结合）Ext 代数 $A = \mathrm{Ext}^\bullet(\Gamma, \Gamma)$，且不含高阶结构。 *formal deformation* 的 A 是在一个完备局部诺特 $\Bbbk$-代数 R上的变形；也就是说，这里的“形式的”指的是 R的完备性，而不是指高阶结构消失。

生成元来描述时自然会容许弯曲变形，但我们通过用弱生成元给出一种等价描述（见第 5 节），绕开了曲率问题，随后构造了一个代数族。

我们将详细阐述族这一概念，包括与之相关的、映至 Hochschild 上同调的 Kodaira–Spencer 映射；该映射用于引入半万能族或半普适族的概念。

对于我们的应用， $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形最终证明是无障碍的，并且由有限个参数参数化，因此只需在基代数 $R=\Bbbk[x_1,\dots,x_d]$ 上进行研究，尽管相同的定义对任意交换 Noether $\Bbbk$-代数 R 都有意义。我们假设 $\Bbbk$ 是代数闭域且特征为 0，因此 $R=\Bbbk[x_1,\dots,x_d]$ 的极大理想具有如下形式：对于某个 d-元组 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\in\Bbbk^d$，有 $\mathfrak{m}_\lambda=(x_1-\lambda_1,\dots,x_d-\lambda_d)$。当然，$\operatorname{Spec}R$ 是仿射 d-空间 $\mathbb{A}^d$，我们照常将 R 的极大理想、$\operatorname{Spec}R$ 的闭点和元素 $\lambda\in\Bbbk^d$ 视为彼此对应。

3.4.1. *DG* 代数。 设 V 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 $\Bbbk$-向量空间，其次数为 i 的分量记为 V^i，如记号 3.1所示。出于符号方面的原因，在移位向量空间 s_∞ 上定义 DG 或 AV 结构较为方便，其次数为 i 的分量为 V^{i+1}，其中的元素记为 $\mathrm{s}v$，其中 $v\in V$。这一移位保证所有符号都由 Koszul 符号规则产生。于是， V 上的 DG 代数结构由一对次数为 1 的映射

$$\mu^1\in\operatorname{Hom}(\mathrm{s}V,\mathrm{s}V)\qquad\text{and}\qquad\mu^2\in\operatorname{Hom}((\mathrm{s}V)^{\otimes 2},\mathrm{s}V) \tag{3.13}$$

满足（移位的）A$_\infty$ 方程

$$\begin{aligned}\mu^1(\mu^1(\mathrm{s}v))&=0\\ \mu^2(\mathrm{s}v,\mu^1(\mathrm{s}u))+\mu^1(\mu^2(\mathrm{s}v,\mathrm{s}u))+(-1)^{|\mathrm{s}u|}\mu^2(\mu^1(\mathrm{s}v),\mathrm{s}u)&=0\\ \mu^2(\mathrm{s}w,\mu^2(\mathrm{s}v,\mathrm{s}u))+(-1)^{|\mathrm{s}u|}\mu^2(\mu^2(\mathrm{s}w,\mathrm{s}v),\mathrm{s}u)&=0\end{aligned} \tag{3.14}$$

对任意 u、v、$w\in V$，其中 $|\mathrm{s}u|=|u|-1$ 是 u的移位次数。当然，这三个方程表达了 μ^1 是一个微分，并且相对于由 μ^2给出的分次结合乘法满足分次 Leibniz 规则。（参见 [BSW，第 2 节。1] 更多细节，尤其是关于如何恢复 DG 代数通常的符号和次数约定，请参见 [BSW，注 2。4]，）我们通常将 $A=$（V、μ^1、μ^2）记作 DG 代数，并且在未特别说明时，我们总是指一个 DG $\Bbbk$-代数。

3.4.2. DG 代数族。现在令 R 为一个交换诺特 $\Bbbk$-代数。 R 上的 DG 代数族是一个 DG R-代数 $\widetilde{A}=(V\otimes R,\widetilde{\mu}^1,\widetilde{\mu}^2)$，其定义与第 3.4.1 节相同，但其中所有对象都不是 $\Bbbk$-线性的，而是 R-线性的；特别是，Hom 和 $\otimes$ 都是关于 R 的。更准确地说， V 是一个分次 $\Bbbk$-向量空间，使得$V\otimes R$ 是一个自由分次 R-模，并且要求 $\widetilde{\mu}^1\in\operatorname{Hom}_R$(s$V\otimes R$, s$V\otimes R$) 和 $\widetilde{\mu}^2\in\operatorname{Hom}_R((\mathrm{s}V\otimes R)^{\otimes_R 2},\mathrm{s}V\otimes R)$ 满足 (3.14) 的类似条件。

注意， R-线性意味着 $\widetilde{\mu}^1$ 和 $\widetilde{\mu}^2$ 分别由它们在 sV 或 (sV)$^{\otimes 2}$ 上的取值确定，即我们可以将 $\widetilde{\mu}^1$ 和 $\widetilde{\mu}^2$ 视为映射

$$\widetilde{\mu}^1\in\operatorname{Hom}(\mathrm{s}V,\mathrm{s}V\otimes R),\qquad\widetilde{\mu}^2\in\operatorname{Hom}((\mathrm{s}V)^{\otimes 2},\mathrm{s}V\otimes R)$$

也就是说，视为映射 $\mathrm{s}V \mathrm{s}V$ 或 $(\mathrm{s}V)^{\otimes 2} \to \mathrm{s}V$，但其系数取自 R 的元素；对我们而言，这些元素就是 x_1，……，x_d 中的多项式。

DG 代数族确实是朴素意义下的 DG $\Bbbk$-代数族，因此我们也将定义在 R 上的族写作 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \operatorname{Spec} R}$。也就是说，对于 $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_d]$以及每个 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \Bbbk^d$，我们可以将 $\Bbbk_\lambda = R/\mathfrak{m}_\lambda \simeq \Bbbk$ 写作一维R-模，其中每个 x_i 都通过乘以 λ_i来作用。对于每个 $\lambda \in \Bbbk^d$，应用函子 $- \otimes_R \Bbbk_\lambda$ 会将一个分次 R-模变为分次 $\Bbbk$-向量空间，并将一个 DGR-代数 $\widetilde{A}$ 变为 DG 代数 $\widetilde{A} \otimes_R \Bbbk_\lambda \simeq A_\lambda = (V, \mu^1_\lambda, \mu^2_\lambda)$。这里，$\mu^1_\lambda = \widetilde{\mu}^1 \otimes_R \Bbbk_\lambda$和 $\mu^2_\lambda = \widetilde{\mu}^2 \otimes_R \Bbbk_\lambda$ 是如 (3.13) 中的映射，它们是通过对 $\widetilde{\mu}^1$ 的所有系数多项式和 $\widetilde{\mu}^2$求值而得到的。 ⊢

由于 $\widetilde{\mu}^1$ 和 $\widetilde{\mu}^2$ 满足 (3.14)，因此 μ^1_λ 和 μ^2_λ也满足，所以 $A_\lambda = (V, \mu^1_\lambda, \mu^2_\lambda)$ 确实是一个 DG $\Bbbk$-代数。

注意，$\operatorname{Hom}_R((\mathrm{s}V \otimes R)^{\otimes_R n}, \mathrm{s}V \otimes R)$ 是一个右 R-模，其作用为

$$(\varphi \cdot r)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot r$$

因此，我们可以将 $\widetilde{\mathrm{C}}^\bullet_R(A, A) \otimes_R \Bbbk_\lambda \simeq \widetilde{\mathrm{C}}^\bullet(A_\lambda, A_\lambda)$ 等同起来。也就是说，应用函子 $- \otimes_R \Bbbk_\lambda$ 会将 DG R-代数 A 的 R-线性 Hochschild复形转化为 DG 代数 A_λ通常的 $\Bbbk$-线性 Hochschild复形。（注意，R-线性 Hochschild复形使用 R-线性微分分次结构 $\widetilde{\mu}^1$，$\widetilde{\mu}^2$ 张量化 $\Bbbk_\lambda$后，该结构简化为 $\Bbbk$-线性结构 μ^1_λ，μ^2_λ。）

3.4.3. *Kodaira–Spencer* 映射。给定一个 DG 代数族 $\widetilde{A} = (V \otimes R, \widetilde{\mu}^1, \widetilde{\mu}^2)$ 上的 $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_d]$，其在闭点 λ处的切空间可视为一个d-参数的一阶变形 A_λ。Kodaira–Spencer 映射是一个自然映射，它将 λ 处的切向量对应到与该一阶变形相对应的上同调类。（例如，参见 [Iwa，第 3 节。4]其中讨论了稳定 ∞-范畴变形中的 Kodaira–Spencer 映射。）

具体而言，在 $\Bbbk$-线性同一 $R/\mathfrak{m}^2_\lambda \simeq \Bbbk_\lambda \oplus (\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}^2_\lambda)$ 下，我们可以将 $\widetilde{\mu}^1$，$\widetilde{\mu}^2$ 在 $- \otimes_R R/\mathfrak{m}^2_\lambda$ 下的像视为 μ^1_λ，μ^2_λ 的一阶变形。

例如，如果

$$\widetilde{\mu}^1(\mathrm{s}v) = \sum_{1 \le i \le k} \mathrm{s}w_i \otimes r_i$$

对于某些 $w_i \in V$和 $r_i \in R$，零点定理允许我们写成

$$r_i = \underbrace{r_i(\lambda)}_{\in \Bbbk_\lambda} \oplus \underbrace{r_i - r_i(\lambda)}_{\in \mathfrak{m}_\lambda}.$$

因此，我们可以将 $\widetilde{\mu}^1, \widetilde{\mu}^2$ 在 $- \otimes_R (R/\mathfrak{m}^2_\lambda)$ 下的像分别写成 $\mu^1_\lambda + \widehat{\mu}^1_\lambda$ 和 $\mu^2_\lambda + \widehat{\mu}^2_\lambda$，其中现在

$$\widehat{\mu}^i_\lambda \in \operatorname{Hom}((\mathrm{s}V)^{\otimes i}, \mathrm{s}V) \otimes (\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}^2_\lambda), \qquad i = 1, 2. \tag{3.15}$$

将第一个张量因子视为 $\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}^2_\lambda \simeq \Bbbk^d$ 的系数，我们将 $(\widehat{\mu}^i_\lambda)_j$记作 j基向量的系数，其中 $\Bbbk^d$。

引理 3.16. 对于 $1 \le j \le d$，元素 $((\widehat{\mu}^1_\lambda)_j, (\widehat{\mu}^2_\lambda)_j)$ 在$\mathrm{C}^\bullet(A_\lambda, A_\lambda) \otimes (\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}^2_\lambda)$中定义 2-余循环。

证明。由于 $\widehat{\mu}^1_\lambda$ 和 $\widehat{\mu}^2_\lambda$ 是 A_λ的 d参数一阶变形的无穷小量，它们的分量满足 $\mathrm{C}^2(A_\lambda, A_\lambda)$ 中的余循环条件。□

由于 $\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^2$ 是有限维的，我们有一个自然同构

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{s}V)^{\otimes i}, \mathrm{s}V) \otimes (\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^2) \simeq \mathrm{Hom}((\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^2)^*, (\mathrm{s}V)^{\otimes i}, \mathrm{s}V)). \tag{3.17}$$

注意，我们可以将 λ 处的切空间 $\mathrm{T}_\lambda\mathbb{A}^d$ 识别为对偶空间 $(\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^2)^*$。因此，对于每个 λ，我们都能得到一个定义良好的*Kodaira–Spencer* 映射

$$\mathrm{KS}_\lambda \colon \mathrm{T}_\lambda\mathbb{A}^d \longrightarrow \mathrm{HH}^2(A_\lambda, A_\lambda), \tag{3.18}$$

它是 $\Bbbk$-线性映射，由余循环 $((\widehat{\mu}^1_\lambda)^i,(\widehat{\mu}^2_\lambda)^i)$ 的上同调类诱导。这表明，Kodaira–Spencer 映射有一种自然的解释——它不过是由求值映射 $\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^2 \otimes (\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^2)^* \to \Bbbk$ 诱导的自然映射，其中$\partial_{x_j-\lambda_j} = (x_j - \lambda_j)^*$ 通过对 (3.15) 的右侧张量因子求值而作用。

定义 3.19。我们称 DG 代数 A 在 R 上的族在闭点 $\lambda \in$ 谱 R处是半万能的（即半泛的），如果 Kodaira–Spencer 映射（3.18）是满射（即双射）。

下面的命题表明，在 λ 处具有半万能性或半泛性的概念在拟同构下是不变的。

命题 3.20. 设 $\widetilde{A} = (V \otimes R, \widetilde{\mu}^1, \widetilde{\mu}^2)$ 和 $\widetilde{A}' = (V' \otimes R, \widetilde{\mu}'^1, \widetilde{\mu}'^2)$ 是 R 上的两个 *DG* 代数族。那么，*DG* 代数之间任意一个 R-线性拟同构 $\Phi\colon A \to A'$都会导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathrm{KS}_\lambda} & \mathrm{HH}^2(A_\lambda, A_\lambda) \\ \mathrm{T}_\lambda\mathbb{A}^d & & \downarrow \simeq \\ & \xrightarrow{\mathrm{KS}_\lambda} & \mathrm{HH}^2(A'_\lambda, A'_\lambda). \end{array} \tag{3.21}$$

因此，在闭点 $\lambda \in$ 谱 R 处具有半万能性或半泛性的性质，在该族的拟同构下是不变的。

证明. DG R-代数之间的态射 $\Phi\colon A \to A'$ 诱导一个 DG$\Bbbk$-代数之间的态射 $\Phi_\lambda\colon A_\lambda \to A'_\lambda$。后者诱导两个复形的映射

$$\mathrm{C}^\bullet(A_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow{f} \mathrm{C}^\bullet(A_\lambda, A'_\lambda) \xleftarrow{g} \mathrm{C}^\bullet(A'_\lambda, A'_\lambda).$$

它们是拟同构。于是，式（3.21）中的竖直态射由以下复合给出

$$\mathrm{HH}^2(A_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow{f} \mathrm{HH}^2(A_\lambda, A'_\lambda) \xrightarrow{g^{-1}} \mathrm{HH}^2(A'_\lambda, A'_\lambda).$$

尚需证明下图交换

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{HH}^2(A_\lambda, A_\lambda) & & \\ & \nearrow & & \searrow^{f} & \\ \mathrm{T}_\lambda\mathbb{A}^d & & & & \mathrm{HH}^2(A_\lambda, A'_\lambda). \\ & \searrow & & \nearrow_{g} & \\ & & \mathrm{HH}^2(A'_\lambda, A'_\lambda) & & \end{array}$$

利用（3.17）中的同构，可由下列交换图得出

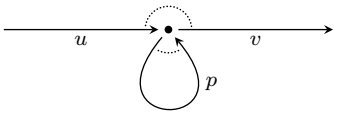
$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{A}\otimes\widetilde{A})\otimes_R R/\mathfrak{m}_\lambda^2 & \longrightarrow & \widetilde{A}\otimes_R R/\mathfrak{m}_\lambda^2 \\ \downarrow{\scriptstyle (\Phi\otimes\Phi)\otimes_R \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi\otimes_R \mathrm{id}} \\ (\widetilde{A}'\otimes\widetilde{A}')\otimes_R R/\mathfrak{m}_\lambda^2 & \longrightarrow & \widetilde{A}'\otimes_R R/\mathfrak{m}_\lambda^2. \end{array}$$

交换图（3.21）表明，若其中一个是满射，那么另一个也是满射。□

4. DG GENTLE ALGEBRAS

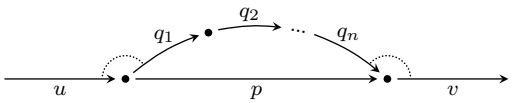
本节介绍 *DG gentle* 代数这一概念，它可用于为任意分次轨形曲面**S**上的部分缠绕福柯范畴 $\mathcal{W}$(**S**) 建模。事实证明，将分次 gentle 代数转化为 DG 代数的选择余地极小。首先，莱布尼茨法则意味着微分由其在箭头上的取值决定。结合 gentle 代数的带关系箭图的特殊形状，我们证明，除相差一个余边界外，微分仅可能在以下三种类型的箭头上非零:

(4.1)



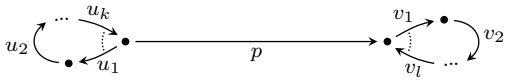
$$d(p) = e_{\mathrm{s}(p)}$$

(4.2)



$$d\ (p)\ = q_n\cdots q_2q_1$$

(4.3)



$$d(p)\ = vpu_\circ$$

在（4.1）和（4.2）中， u 或 v 可以出现在 Q中，也可以不出现，但在 s(p) 和 t(p) 处不能再有其他入箭头或出箭头。在（4.3）中，圈 $u = u_k\cdots u_2u_1$和 $v = v_l\cdots v_2v_1$ 必须存在（即 $k,\ l \geq 1$），但同样，在 s(p) 和 t(p) 处不能再有其他入箭头或出箭头。

此外，莱布尼茨法则意味着，对于不超过 n 条路径，微分只有在路径以环路开头和/或结尾（如（4.1）所示）时才可能非零。

以下引理证明了这些观察结果。（另请参见定理4.10 的证明，其中对 HH 的非平凡余循环$^2(A, A)$ 作了更一般的讨论。）

引理 4.4。 设 $A = \Bbbk Q/I$ 是一个分次 *gentle* 代数， d 是定义在 A 上、关于 A 上乘法满足莱布尼茨法则的微分~。那么 d 定义了 A 的一个 *Hochschild* 2-余循环；该余循环在同构意义下与下列标准形式的微分 d 上同调等价:

(i) $d(e_i)\ = 0$ 对任意顶点 $i \in Q_0$

(*ii*) 若 $p \in Q_1$ 属于一个无关系环，即 $p = p_1$ 对于某个圈 $p_n \cdots p_2 p_1$，其中有 $p_2p_1, p_3p_2, \ldots, p_1p_n \notin I$，则 $p_1p_np_{n-1}\cdots p_2p_1$ 不会作为非零系数项出现在 $d(p)$

(*iii*) 若 $p \in Q_1$ 属于一个涉及另一条箭的零关系，即若对于某些 p'、$p'' \in Q_1 \setminus \{p\}$，有$pp' \in I$ 或 $p''p \in I$，则 $d(p) = 0$

(*iv*) 若 $p \in Q_1$ 不属于无关系环，也不属于涉及另一条箭的零关系，则 $d(p) \neq 0$ 仅当

- 或者 $\mathrm{s}(p) \neq \mathrm{t}(p)$，此时 $d(p) = q$，其中 q 是与 p 平行的唯一一条路径，其次数必须为 $|q| = |p| + 1$
- 或者 $\mathrm{s}(p) = \mathrm{t}(p)$，此时必须有 $|p| = -1$ 且 $d(p) = e_{\mathrm{s}(p)}$

(*v*) 若 $r = r_n \cdots r_2 r_1$ 是一条长度为 $n \geq 2$的路径，则 $d(r) \neq 0$ 仅当所有r_i都不属于无关系环，并且此外满足以下三种情形之一时：

- $d(r_n) = 0$ 且 r_1 是一个次数为 -1、满足 $d(r_1) = e_{\mathrm{s}(r)} \neq 0$ 的环路，其中在 $d(r) = (-1)^{|r_n\cdots r_2|} r_n \cdots r_3 r_2$的情况下
- $d(r_1) = 0$ 且 r_n 是一个次数为 -1、满足 $d(r_n) = e_{\mathrm{t}(r)}$ 的环路，在这种情况下 $d(r) = r_{n-1}\cdots r_2 r_1$
- $d(r_1) = e_{\mathrm{s}(s)} \neq 0$ 以及 $d(r_n) = e_{\mathrm{t}(r)} \neq 0$ 的情况下

$$d(r) = (-1)^{|r_n\cdots r_2|} r_n \cdots r_3 r_2 + r_{n-1}\cdots r_2 r_1.$$

证明。对于（i），注意到，对于任意满足 $i \in Q_0$ 的幂等元 e_i，任意微分 d

$$d(e_i) = d(e_i^2) = e_i d(e_i) + d(e_i)e_i = 2d(e_i).$$

由于我们是在特征为 0 的域上工作，因此得出 $d(e_i) = 0$。

我们来验证，那么与 p_0 平行且次数为 $|p| + 1$ 的路径 q, r 至多有两条。由于 $\mathrm{s}(p)$ 处至多有两条出箭头，p 本身必定属于这两条路径中的至少一条，不妨设为 r。将 $p = p_0$写出，我们便有 $r = p_0p_n\cdots p_2p_1p_0$，其中 $p_n\cdots p_2p_1p_0$ 是一个无关系环。（尽管对于所有$k \geq 0$，路径 $p_0(p_n\cdots p_2p_1p_0)^k$ 都与 $p = p_0$ 平行，但只有当 $k = 1$ 时，这样的路径才可能比 p_0的次数高一。）现在我们证明 $\widetilde{d}$，$d(p_0)$中对应于 r 的项可以通过一个余边界消去。换言之，我们证明

$$\widetilde{d}(p_0) = \lambda q + \lambda' p_0p_n\cdots p_2p_1p_0$$

与.....上同调等价

$$d(p_0) = \lambda q.$$

考虑由下式给出的元素 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Bbbk Q_0, A)$

$$\varphi(e_i) = \lambda_i p_{i-1}\cdots p_2p_1p_0p_n\cdots p_i$$

对于 $0 \leq i \leq n$，其中我们记 $p = p_0$。然后利用公式（3.11），我们得到$0 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}\delta(\varphi)(\mathrm{s}p_i) &= -(-1)^{|p_i|-1}p_i\varphi(e_i) + (-1)^{-|\varphi|}\varphi(e_{i+1})p_i \\ &= (-1)^{|p_i|}\lambda_i p_i \cdots p_1 p_0 p_n \cdots p_i - \lambda_{i+1}p_i \cdots p_1 p_0 p_n \cdots p_i \\ &= ((-1)^{|p_i|}\lambda_i - \lambda_{i+1})p_i \cdots p_1 p_0 p_n \cdots p_i\end{aligned}$$

其中我们记 $\lambda_{n+1} = \lambda_0$。注意，对于任意不属于该环的箭 p'，有 $\delta(\varphi)(\mathrm{s}p') = 0$，因为 $p'p_i = 0 = p_i p'$ 在 A 中。为了得到 $\delta(\varphi) = r$，我们需要满足

$$\begin{aligned}(-1)^{|p_0|}\lambda_0 - \lambda_1 &= 1 \\ (-1)^{|p_i|}\lambda_i - \lambda_{i+1} &= 0 \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ (-1)^{|p_n|}\lambda_n - \lambda_0 &= 0.\end{aligned}$$

这等价于 $(-1)^{|p_0|}\lambda_0 - \lambda_1 = 1$ 以及

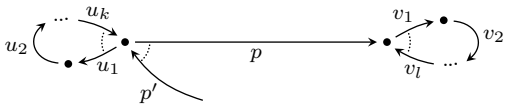
$$\lambda_i = (-1)^{|p_i|+\cdots+|p_n|}\lambda_0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n.$$

因此，我们得到一个（唯一的）解 $\lambda_0 = (-1)^{|p_0|}$ 以及

$$\lambda_i = (-1)^{|p_0|+|p_i|+\cdots+|p_n|}\lambda_0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n.$$

~这表明 d 与 d 上同调等价。

为证明（iii），令 $p \in Q_1$ 满足 $d(p) \neq 0$，并令 $p' \in Q_1 \setminus \{p\}$ 使得 $pp' \neq 0$ in $\Bbbk Q$，但 $pp' \in I$。由（ii）及莱布尼茨法则，我们可以假设 $d(p)$ 不含有属于无关系环的项。在此情形下，至多存在一条与 p 平行的非零路径 q。通过对 p 重新缩放，我们因而可以假设 $d(p) = q$。首先假设 q 包含 p 作为子路径，即对于某些在 $\mathrm{s}(p)$ 处的环 $u = u_k \cdots u_2 u_1$ 和在 $\mathrm{t}(p)$ 处的环 $v = v_l \cdots v_2 v_1$，有 $q = vpu$，且它们的长度为 k, $l \geq 0$。注意，由于 $\Bbbk Q/I$ 是 gentle，我们必须有 $u_1 u_k$, $v_1 v_l \in I$，因为 pu_k, $v_1 p \notin I$；也就是说，环 u 和 v 分别在 $\mathrm{s}(p)$ 和 $\mathrm{t}(p)$ 处各有一个关系。



我们有

$$0 = d(0) = d(pp') = d(p)p' + (-1)^{|p|}pd(p') = vpup' + (-1)^{|p|}pd(p').$$

该等式仅在 $d(p') = (-1)^{|p|+1}up'$ 且 $v = \mathrm{t}(p)$ 是一个顶点（即 $l = 0$）时成立。在这种情况下，d 实际上是一个余边界，因为如果我们考虑 $\psi(e_{\mathrm{s}(p)}) = (-1)^{|p|-1}u$，那么 $\delta(\psi) = d$。

如果 $d(p)$ 不包含 p 作为子路径，即对于所有$1 \leq i \leq m$, $q = q_m \cdots q_2 q_1$ 且 $q_i \neq p$，那么 $d(p)p' = qp' \neq 0$，因为 $q = q_m \cdots q_2 q_1 \neq 0$ 和 $q_1 p' \neq 0$都成立。这是因为我们已经有 $pp' \in I$，由此可得 $q_1 p' \notin I$，因为 $\Bbbk Q/I$ 是 gentle。如果 $d(p') = 0$，这就已经导出了矛盾。如果 $d(p') = q' \neq 0$，我们有

$$0 = d(pp') = qp' + (-1)^{|p|}pq'$$

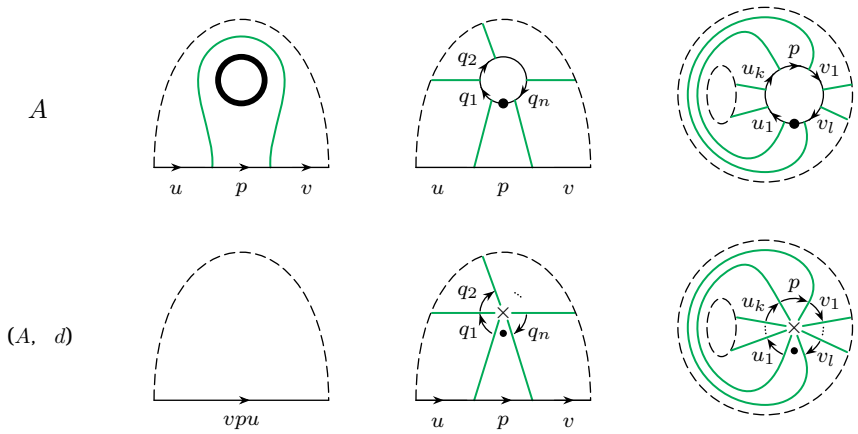


FIGURE 3. 底层 gentle 代数所对应的三种（光滑）曲面的局部图示 A，以及由（A，d）建模的相应轨形曲面A，d展示了微分（4.1）–（4.3）的几何解释。

但由于 $q_m \neq p$，右侧非零，这与 d 在 $\Bbbk Q/I$上的良定义性矛盾。

用类似的论证可以验证（iv）和（v）。 □

引理4.4 启发了下面的定义。

定义 4.5. *DG gentle* 代数是一个 DG 代数 $(A,\ d)$，满足 $A = \Bbbk Q/I$ 是一个分次 gentle 代数，并且对于任意箭 $p \in Q_1$，$d(p)$ 中以非零系数出现的路径，其起点和终点都不为 p。

注记 4.6. 引理 4.4 表明，DG gentle 代数中关于微分的条件总能在相差一个余边界的意义下得到满足。式（$d(p) \neq 0$ 中给出了4.1）–（4.3）所示的三种可能情形，其局部示意图见图 3。对于长度为 ≥ 2 的路径，只有当路径以一个环路为起点和/或终点，且该环路经微分映射到幂等元时，微分才可能非零。

4.1. **DG gentle 代数的曲面模型与形式性。** 在 [BSW] 中，我们引入了分次轨形曲面的若干种剖分概念，并为每种剖分 Δ 关联一个 A_∞ 范畴 $\mathbf{A}_\Delta$，使得 $\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{tw}(\mathbf{A}_\Delta)^\natural$。在 [BSW 的第 8] 节中，我们定义了 *DG* 剖分 的概念，其关联的 A_∞ 范畴$\mathbf{A}_\Delta$ 是一个 DG 范畴。事实证明，这一概念在以下意义上与 DG gentle 代数的概念一致。

命题 4.7。 设 A 是一个 *DG gentle* 代数，将其视为对象为Q_0的 *DG* 范畴。那么存在一个带有停止点的分次轨形曲面 $\mathbf{S}$ 以及 $\mathbf{S}$的一个 *DG* 剖分 Δ，使得 A 与 *DG* 范畴 $\mathbf{A}_\Delta$拟同构。

结合命题 4.7 与 [BSW 定理 8。6] 的主要思想，我们还可以刻画 DG gentle 代数何时是形式的。（特别地，微分具有类型 (4.3) 的非零分量的 DG gentle 代数绝不是形式的。）

定理 4.8。 设 A 是一个微分分次 *gentle* 代数，且其关联的轨形曲面不是边界上有一个停止点和两个轨形点的圆盘。则 A 是形式的，当且仅当对于每个箭 p，使得 $d(p) \neq 0$，我们或者有 $d(p)$ 是长度为0 或1 的路径，或者 p 无法与任何其他箭进行非平凡复合。

证明。当微分在类型（4.2）的箭上非零时，该陈述已在 [BSW，定理 8 中得到证明。6] 还需证明，当其微分A 在类型（4.3）的箭上非零时， d 不是形式的；并证明在类型（4.1）的环路上非零并不妨碍其成为形式的。

后者可由以下观察得到：存在一个拟同构 $eAe \to A$其中， eAe 是由幂等元e确定的子代数，该幂等元由除去那些位于 d像中的幂等元之外的所有幂等元之和给出。（另见下文定理 6.1 的证明中的（6.4）。）

前者可按如下方式证明。设 p 为一条箭，使得 $d(p) = v_l \cdots v_2 v_1 p u_k \cdots u_2 u_1$ 如（4.3）中所示，并设 $e = e_{\mathrm{s}(p)} + e_{\mathrm{t}(p)}$ 为与 p的起点和终点相对应的幂等元。我们断言，子代数$eAe \subset A$ 并非形式的。记 $v = v_l \cdots v_1$ 和 $u = u_k \cdots u_1$，则有

$$eAe \simeq \left(\Bbbk\Big(\circlearrowleft_u \xrightarrow{p} \circlearrowleft_v \Big), d(p) = vpu \right)$$

$$\mathrm{H}^\bullet(eAe) \simeq \Bbbk\Big(\circlearrowleft_u \underset{[vp]}{\overset{[pu]}{\rightrightarrows}} \circlearrowleft_v \Big) \,/\, I$$

其中 $[pu]$ 和 $[vp]$ 表示（余循环） pu 和 vp 的上同调类，而 I是由点所标示的单项式关系以及元素 $[vp]u - v[pu]$生成的理想。我们断言，$\mathrm{H}^\bullet(eAe$不能作为微分分次代数 eAe 的极小模型，除非 $\mathrm{H}^\bullet(eAe$具有非平凡的高阶结构。 eAe 的底层代数是一个 gentle 代数。类似于下文定理 4.10的证明可得，$\dim \mathrm{HH}^2(eAe, eAe) \leq 1$。然而可以看出，$\mathrm{H}^\bullet(eAe$作为不带高阶结构的分次结合代数，至少还具有一个额外的非平凡 2-余循环，因此

$$\dim \mathrm{HH}^2(\mathrm{H}^\bullet(eAe), \mathrm{H}^\bullet(eAe)) \geq \dim \mathrm{HH}^2(eAe, eAe) + 1.$$

与定理 4.10 中一样，我们可以使用与约化系统 $\{(u^2, 0), ([pu]u, 0), ([vp]u, v[pu]), (v[vp], 0), (v^2, 0)\}$ (参见 [CS15, BW[a]]) 相关的 $\mathrm{H}^\bullet(eAe)$ 的 Chouhy–Solotar 分解来计算 $\mathrm{HH}^\bullet$。我们有一个上链 φ，其定义如下

$$\varphi \colon v[vp]u \longmapsto (-1)^{|vp|}[vp]$$
$$[vp]u^2 \longmapsto [pu].$$

由于 $v[vp]u$ 和 $[vp]u^2$ 是重叠歧义（按*1*-歧义的记号，见[BW[a]，第 3]章）， φ在底层上链复形中定义了一个 3-上链。由于$|u| + |v| = 1$，该上链是一个次数为 -1 的映射，因此定义了一个总次数为

2 的上链，即 $|\varphi| = 2$。我们断言， φ 是一个余循环。事实上，我们可以如下验证 $\partial^\bullet\varphi = 0$ 。有两个 2-歧义分别涉及 φ 不为零的两个重叠歧义，即 $v[vp]u^2$ 和 $v^2[vp]u$。可以检查出 $\partial^\bullet\varphi$ 在两者上均为零:

$$\begin{aligned}(\partial^\bullet\varphi)(v[vp]u^2) &= -(-1)^{|\mathrm{s}v||\varphi|}v\cdot\varphi([vp]u^2) + (-1)^{|\mathrm{s}v[vp]u|-|\varphi|}\varphi(v[vp]u)\cdot u\\ &= -(-1)^{|vp|}[vp]u + (-1)^{|vp|}v[pu] = 0\\ (\partial^\bullet\varphi)(v^2[vp]u) &= -(-1)^{|\mathrm{s}v||\varphi|}v\cdot\varphi(v[vp]u) = -(-1)^{|vp|}v[vp] = 0\end{aligned}$$

其中微分的定义方式类似于 (3.11)，并且我们使用了 $|\varphi| = 2$ 来进行符号计算。显然， $\partial^\bullet\varphi$ 在所有其他 2-歧义上都平凡地消失，因此定义了一个 2-余循环。为了说明 φ 不是余边界，考虑一个 2-余链 ψ。为了使 $\partial^\bullet\psi$ 有可能消去 φ中的项，只需考虑ψ 具有如下的一般形式

$$\begin{aligned}\psi\colon v[vp] &\longmapsto \alpha_1[pu] + \alpha_2[vp] + \alpha_3 v[pu]\\ [vp]u &\longmapsto \alpha_4[pu] + \alpha_5[vp] + \alpha_6 v[pu]\\ [pu]u &\longmapsto \alpha_7[pu] + \alpha_8[vp] + \alpha_9 v[pu]\\ u^2 &\longmapsto \alpha_{10}e_{\mathrm{s}(p)} + \alpha_{11}u\\ v^2 &\longmapsto \alpha_{12}e_{\mathrm{t}(p)} + \alpha_{13}v\end{aligned}$$

对于某些常数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{13} \in \Bbbk$。于是我们有

$$\begin{aligned}(\partial^\bullet\psi)(v[vp]u) &= \pm\alpha_2[vp]u \pm \alpha_4 v[pu] \pm \alpha_9[pu] \pm \alpha_{10}v[pu]\\ &= (\pm\alpha_2 \pm \alpha_4 \pm \alpha_{10})v[pu] \pm \alpha_9[pu]\\ (\partial^\bullet\psi)([vp]u^2) &= \pm\alpha_5 v[pu] \pm \alpha_7 v[pu] \pm \alpha_{10}[vp] \pm \alpha_{11}v[pu]\\ &= (\pm\alpha_5 \pm \alpha_7 \pm \alpha_{11})v[pu] \pm \alpha_{10}[vp].\end{aligned}$$

这里，精确的符号无关紧要，因为这些项均不出现在 $\varphi(v[vp]u)$ 和 $\varphi([vp]u^2)$ 中，因此 φ 不是余边界。

因此， φ 定义了一个非平凡 2-余循环，而它在 eAe 中不存在，所以我们必须有 dim $\mathrm{HH}^2(\mathrm{H}^\bullet(eAe), \mathrm{H}^\bullet(eAe)) > \dim \mathrm{HH}^2(eAe, eAe)$。这意味着，不带高阶结构的 $\mathrm{H}^\bullet(eAe)$ 不可能与 eAe A_∞-拟同构，因为任何 A_∞-拟同构都会在 Hochschild 上同调上诱导一个同构。

我们得出 eAe 不是形式的。由此可根据 [BSW，命题 2，8]也可得出 A 不是形式的，因为它包含一个非形式的满子范畴（将 A 视为一个对象由顶点给出的 DG 范畴时）。 □

4.2. **DG gentle 代数的 Hochschild 上同调。** 以下引理表明，模余边界而言，DG gentle 代数 A 的 Hochschild 余循环由其在单项关系的极大重叠上的取值所确定。

引理 4.9. 设 A 是一个 *DG gentle* 代数，且 $\varphi \in \mathrm{Hom}^{\Bbbk Q_0^{\mathrm{s}}}(\mathrm{s}^m\Bbbk W_m, A)$ 是 $m \geq 1$ 的一个余循环。若属于 $m = 1$ 的情形，则假设 x 不作为加项出现在每个 $x \in Q_1$ 的 $\varphi(\mathrm{s}x)$ 中。

那么， φ 与一个余循环 $\varphi' \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{k}Q_0^e}(\mathrm{s}^m \mathbb{k}W_m, A)$ 上同调等价，其中对于任意重叠 $w \in W_m$，只要它是某个极大重叠的真子路径（不包括具有完全关系的环），就有 $\varphi'(\mathrm{s}^m w) = 0$。

证明。假设 $\varphi(\mathrm{s}^m w) \neq 0$，其中某个重叠 $w = x_1 \cdots x_m$ 是极大重叠 v 的真子路径。记作 $v = x_{-k} \cdots x_0 w x_{m+1} \cdots x_n$（所有 x_i 两两不同）。当 $m = 1$ 时，我们进一步假设 $\varphi(\mathrm{s}w)$ 没有 w 的倍数作为加项。

不失一般性，我们可以假设对于所有 $j \leq -1$，都有 $\varphi(\mathrm{s}^m x_{j+1} \cdots x_{j+m}) = 0$，也就是说，$w$ 是 v 中满足 $\varphi(\mathrm{s}^m w) \neq 0$ 的最左侧重叠。特别地，$\varphi(\mathrm{s}^m x_0 \cdots x_{m-1}) = 0$。假设 $\lambda_p p$ 是 $\varphi(\mathrm{s}^m w)$ 的一个非零加项，其中 p 是一条与 w 平行的不可约路径。由于 $\delta(\varphi) = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\delta(\varphi)(\mathrm{s}^{m+1} w x_{m+1}) &= -(-1)^{|\mathrm{s}x_1||\varphi|} x_1 \varphi(\mathrm{s}^m x_2 \cdots x_{m+1}) + (-1)^{|w|-|\varphi|} \varphi(\mathrm{s}^m w) x_{m+1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

分为两种情况。第一种情况下，p 的最后一支箭不是 x_m，因此 $p x_{m+1} \neq 0$（因为 A 是 gentle），由此可知 $\varphi(\mathrm{s}^m w) x_{m+1}$ 有一个非零加项 $p x_{m+1}$。于是，由上面的等式可得，$\varphi(\mathrm{s}^m x_2 \cdots x_{m+1})$有一个加项$(-1)^{|x_1||\varphi|-|w|} \lambda_p p' x_{m+1}$，使得 $p = x_1 p'$。考虑由下式定义的元素$\psi \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{k}Q_0^e}(\mathrm{s}^{m-1}\mathbb{k}W_{m-1}, A)$

$$\psi(\mathrm{s}^{m-1} x_2 \cdots x_m) = -(-1)^{|\mathrm{s}x_1||\varphi|} \lambda_p p'$$

并且当 $u \neq x_2 \cdots x_m \in W_{m-1}$时，$\psi(\mathrm{s}^{m-1} u) = 0$。于是

$$\begin{aligned}\delta(\psi)(\mathrm{s}^m x_1 \cdots x_m) &= \lambda_p x_1 p' = \lambda_p p \\ \delta(\psi)(\mathrm{s}^m x_2 \cdots x_{m+1}) &= -(-1)^{\epsilon - |\varphi| + |\mathrm{s}x_1||\varphi|} \lambda_p p' x_{m+1}\end{aligned}$$

并且对于所有其他的 $v \in W_m$，$\delta(\psi)(\mathrm{s}^m v) = 0$。

第二种情况下，p 的终止箭是 x_m（这只会在$m > 1$时发生）。由于 $\delta(\varphi)(\mathrm{s}^{m+1} x_0 w) = 0$ 且 $\varphi(\mathrm{s}^m x_0 \cdots x_{m-1}) = 0$，可知 $x_0 p = 0$（因为 A 是 gentle）。也就是说，$p = x_1 p' x_m$ 有起始箭 x_1 和终止箭 x_m。考虑由下式定义的元素 $\psi \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{k}Q_0^e}(\mathrm{s}^{m-1}\mathbb{k}W_{m-1}, A)$

$$\psi(\mathrm{s}^{m-1} x_1 \cdots x_{m-1}) = (-1)^{\epsilon_{m-1} - |\varphi|} \lambda_p x_1 p'$$

并且当 $u \neq x_1 \cdots x_{m-1} \in W_{m-1}$ 时，$\psi(\mathrm{s}^{m-1} u) = 0$。然后

$$\begin{aligned}\delta(\psi)(\mathrm{s}^m x_0 \cdots x_{m-1}) &= \pm \lambda_p x_0 x_1 p' = 0 \\ \delta(\psi)(\mathrm{s}^m x_1 \cdots x_m) &= \lambda_p x_1 p' x_m = \lambda_p p\end{aligned}$$

并且对于所有其他的 $v \in W_m$，$\delta(\psi)(\mathrm{s}^m v) = 0$。

在上述两种情形中的任一种情形下，定义 $\varphi_1 = \varphi - \delta(\psi)$。我们发现，$\varphi_1(\mathrm{s}^m w)$ 的非零加项数比 $\varphi(\mathrm{s}^m w)$ 的少一个，因为 $\varphi(\mathrm{s}^m w)$ 含有加项 $\lambda_p p$，而 $\varphi_1(\mathrm{s}^n w)$ 不含有该加项。此外，对于所有 $v \in W_m \backslash \{w, x_2 \cdots x_{m+1}\}$，$\varphi_1(\mathrm{s}^m v) = \varphi(\mathrm{s}^m v)$。

对 φ_1 应用上述过程并反复进行，我们可以得到一个余循环 φ_2，它与 φ 上同调等价，并满足 $\varphi_2(\mathrm{s}^m x_{j+1} \cdots x_{j+m}) = 0$对 $j \leq 0$成立。□

现在，我们用相应 DG gentle 代数的 Hochschild 上同调来证明关于 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的 Hochschild 上同调的主要定理 —— 该上同调可以与 $\mathbf{S}$ 的某些边界分支联系起来 ——。这初步揭示了变形与部分紧化之间的关系，该关系将在定理 6.1 中得到证明。

定理 4.10. 设 $\mathbf{S} = (S, \Sigma, \eta)$ 是一个边界上带有停止点的分次轨形曲面，且 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 是其部分缠绕福柯范畴。那么 $\mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S}))$ 的维数由以下类型的边界分支总数给出：

(i) 带有一个边界停止点且绕数为 $1(ii)$ 带有完整边界停止点且绕数为1 或 $2(iii)$ 不带停止点且绕数为1 或2的边界分支。

我们使用同构 $\mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathrm{S})\ \mathcal{W}(\mathrm{S})) \simeq \mathrm{HH}^2(A, A)$ (3.12)，其中 A =End(Γ) 是对应于图 1 剖分的生成元 Γ 的 DG 端代数。 A 的带关系 DG 箭图见命题 2.5。随后可使用第 3.2 节中给出的投射分解 $\mathbf{P}_\bullet(Q, R)$。

定理 *4.10* 的证明。与命题 2.5 中一样，我们选取一个边界分支 $\partial_0 S$，它带有 $s_0 \geq 1$ 个停止点；根据我们对 $\mathbf{S}$ 的既定假设，这样的边界分支确实存在。

由于 A 是一个微分分次 gentle 代数，且它是二次单项式代数，因此我们可以使用第 3.2 节的 Bardzell 分解来计算其 Hochschild 上同调。

由引理 4.9 可知，$\mathrm{HH}^2(A, A)$ 由形如 $\varphi(\mathrm{s}^n w_{1\ldots n}) = v$ 的余循环 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{s}^n W_n, A)$ 张成，其中 w 或为 (a) 单个箭（即 $n = 1$），(b) 长度为 $n \geq 1$ 且具有完全关系的本原环，(c) 长度为 $n \geq 1$ 的极大重叠，或 (d) 单个顶点（即 $n = 0$）；而 v 是一条与 w 平行的路径，并且对于 $\mathrm{s}^n W_n$ 的所有其他元素，$\varphi(w') = 0$。

根据 A 的箭图的明确描述，我们得到与情形 (a)–(d) 对应的以下余循环。

(a) 回忆一下，$\partial_0 S$ 表示 $\mathbf{S}$ 的指定边界分支。我们将其余带有边界停止点的边界分支记为 $\partial_1^{\text{III}} S, \ldots, \partial_l^{\text{III}} S$，并令 $J \subset \{1, \ldots, l\}$ 表示 $1 \leq j \leq l$ 的子集，使得 $\partial_j^{\text{III}} S$ 恰好包含一个边界停止点（即在命题 2.5 的记号中满足 $s_j = 1$ 的边界分支）。

对于所有 $j \in J$，我们都有余循环

$$\varphi_j^{\text{III}} : p_{j,1}^{\text{III}} \longmapsto q_j^{\text{III}} \tag{4.11}$$

当 $\mathrm{w}_\eta(\partial_j^{\text{III}} S) = 1$ 时，它们是非平凡 2-余循环。

我们断言，任何其他形如 $\varphi(w) = \sum_p \lambda_p p$ 的非平凡 2-余循环，其中 w 是单个箭，且 p 是与 w 平行的不可约路径，都是上述 2-余循环的线性组合。事实上，注意到 w 本身不能作为加项出现（否则，φ 的总次数为 1，而它不可能是 $\mathrm{HH}^2(A, A)$ 中的余循环）。由于 φ 在 $\mathrm{HH}^2(A, A)$ 中非零，根据引理 4.9，w 不能是极大重叠的真子路径；也就是说，不存在涉及 w 的关系。因此，w 不可能出现在图 2 的部分 (I)、(II) 和 (VI) 中。注意，还有类似的 2-余循环 φ_j^{II}: $p_{j,1}^{\text{II}}$ ‣ q_j^{II}，其对象为

上标 II，但它们是 2-余边界，因为它们属于 A 的（内部）微分的像，即 $d(p^{\mathrm{II}}_{j,1}) = q^{\mathrm{II}}_j$。如果 $w = q^{\mathrm{V}}_i$ 中带有 $|q^{\mathrm{V}}_i| = 1$，且它位于图 V 的部分（V）中，2那么

$$\varphi(w) = (q^{\mathrm{V}}_i)^2$$

是一个实际上为余边界的 2-余循环。因此，φ 只能是φ^{III}_j的线性组合。这证明了该断言。

总之，2-余循环（4.11）与具有单个边界停止点且绕数为 1 的边界分支一一对应。

（b）具有完全关系的唯一本原环是对应于带有完整边界停止点的边界分支 $p^{\mathrm{IV}}_i$for $1 \le i \le m$ 的环 $\partial^{\mathrm{IV}}_1 S$，……，$\partial^{\mathrm{IV}}_m S$。一般的上链具有如下形式：$p^{\mathrm{IV}} N \to \lambda e^{\mathrm{IV}}_i + \mu p^{\mathrm{IV}}_i$，其中 e^{IV}_i 是 p^{IV}_i 的源点和靶点。（注意，由于 $p^{\mathrm{IV}2}_i = 0$，e^{IV}_i 和 p^{IV}_i 是唯一的平行路径。）由于$|p^{\mathrm{IV}}_i| = 1 - \mathrm{w}\eta$（$\partial^{\mathrm{IV}}_i S$），2-余链由 φ^{IV}_i 张成，其中任一项

$$\varphi^{\mathrm{IV}}_i(\mathrm{s}p^{\mathrm{IV}}_i) = e^{\mathrm{IV}}_i \quad \text{if } \mathrm{w}_\eta(\mathrm{s}^2\partial^{\mathrm{IV}}_i S) = 2 \qquad \text{or} \qquad \varphi^{\mathrm{IV}}_i(\mathrm{s}^2 p^{\mathrm{IV}2}_i) = e^{\mathrm{IV}}_i \quad \text{if } \mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{IV}}_i S) = 1$$

并且对于 $\mathrm{s}^j W_j$ 的所有其他元素，有 $\varphi^{\mathrm{IV}}_i(\mathrm{s}^j w') = 0$。我们声称 φ^{IV}_i 是一个 2-余循环。确实，对于第一种情况，根据公式可得

$$\begin{aligned}\delta(\varphi^{\mathrm{IV}}_i)(\mathrm{s}^2 p^{\mathrm{IV}2}_i) &= -(-1)^{(|p^{\mathrm{IV}}_i|-1)|\varphi^{\mathrm{IV}}_i|} p^{\mathrm{IV}}_i \varphi^{\mathrm{IV}}_i(\mathrm{s}p^{\mathrm{IV}}_i) + (-1)^{(|p^{\mathrm{IV}}_i|-1)-|\varphi^{\mathrm{IV}}_i|} \varphi^{\mathrm{IV}}_i(\mathrm{s}p^{\mathrm{IV}}_i) p^{\mathrm{IV}}_i \\ &= -p^{\mathrm{IV}}_i + p^{\mathrm{IV}}_i = 0\end{aligned}$$

这里我们使用 $|p^{\mathrm{IV}}_i| = -1$ 和 $|\varphi^{\mathrm{IV}}_i| = 2$。对于第二种情况，可得

$$\begin{aligned}\delta(\varphi^{\mathrm{IV}}_i)(\mathrm{s}^3 p^{\mathrm{IV}3}_i) &= -(-1)^{(|p^{\mathrm{IV}}_i|-1)|\varphi^{\mathrm{IV}}_i|} p^{\mathrm{IV}}_i \varphi^{\mathrm{IV}}_i(\mathrm{s}^2 p^{\mathrm{IV}2}_i) + (-1)^{2(|p^{\mathrm{IV}}_i|-1)-|\varphi^{\mathrm{IV}}_i|} \varphi^{\mathrm{IV}}_i(\mathrm{s}^2 p^{\mathrm{IV}2}_i) p^{\mathrm{IV}}_i \\ &= -p^{\mathrm{IV}}_i + p^{\mathrm{IV}}_i = 0\end{aligned}$$

这里我们使用 $|p^{\mathrm{IV}}_i| = 0$。这说明 φ^{IV}_i 是一个余循环。注意，它不可能是余边界（不存在余边界的可能性），因此它在 $\mathrm{HH}^2(A,\ A)$ 中非零。

总之，上述 2-余循环对应于具有完整边界停止点且绕数为 1 或 2 的边界分支。

(c) A 的箭图有一个长度为 > 1 的极大重叠 $w = w^{\mathrm{VI}} \cdots w^{\mathrm{II}} w^{\mathrm{I}}$，其中 re

$$\begin{aligned} w^{\mathrm{I}} &= u^{\mathrm{I}}_g r^{\mathrm{I}}_g q^{\mathrm{I}}_g p^{\mathrm{I}}_g \cdots u^{\mathrm{I}}_2 r^{\mathrm{I}}_2 q^{\mathrm{I}}_2 p^{\mathrm{I}}_2 u^{\mathrm{I}}_1 r^{\mathrm{I}}_1 q^{\mathrm{I}}_1 p^{\mathrm{I}}_1 & w^{\mathrm{IV}} &= u^{\mathrm{IV}}_m \cdots u^{\mathrm{IV}}_2 u^{\mathrm{IV}}_1 \\ w^{\mathrm{II}} &= u^{\mathrm{II}}_k q^{\mathrm{II}}_k \cdots u^{\mathrm{II}}_2 q^{\mathrm{II}}_2 u^{\mathrm{II}}_1 q^{\mathrm{II}}_1 & w^{\mathrm{V}} &= q^{\mathrm{V}}_n \cdots u^{\mathrm{V}}_2 q^{\mathrm{V}}_2 u^{\mathrm{V}}_1 q^{\mathrm{V}}_1 \\ w^{\mathrm{III}} &= u^{\mathrm{III}}_l q^{\mathrm{III}}_l \cdots u^{\mathrm{III}}_2 q^{\mathrm{III}}_2 u^{\mathrm{III}}_1 q^{\mathrm{III}}_1 & w^{\mathrm{VI}} &= p^{\mathrm{VI}}_{s_0-2} \cdots p^{\mathrm{VI}}_2 p^{\mathrm{VI}}_1. \end{aligned}$$

当且仅当 $s_0 = 1$ 时，该重叠有一条平行的不可约路径 $v = u^{\mathrm{V}}_{n-1} \cdots p^{\mathrm{I}}_1 q^{\mathrm{I}}_1 r^{\mathrm{I}}_1$，因此不存在 VI 类型的箭头。注意，$s_0 = 1$ 意味着 $\partial_0 S$ 恰好包含一个边界停止点。考虑上链 $\varphi^{\mathrm{VI}}(\mathrm{s}^j w) = v$，并对 $\mathrm{s}^j W_j$ 的所有其他元素，令 $\varphi^{\mathrm{VI}}(\mathrm{s}^j w') = 0$。注意，由于 w 是一个极大重叠，因此 φ^{VI} 自动是一个余循环，从而 $\delta(\varphi^{\mathrm{VI}}) = 0$。

我们断言 $\varphi^{\mathrm{VI}} \neq 0$ 属于 $\mathrm{HH}^\bullet(A,\ A)$。事实上，假设存在一个上链$\psi$，使得 $\delta(\psi)(\mathrm{s}^n w) = \varphi(\mathrm{s}^n w) = v$。另一方面，我们有

$$\delta(\psi)(\mathrm{s}^n w) = \pm\psi(\mathrm{s}^{n-1} w') p^{\mathrm{I}}_1 \pm p^{\mathrm{V}}_n \psi(\mathrm{s}^{n-1} w'')$$

这不可能等于 v，因为 v 既不以 p^{I}_1 开头，也不以 p^{V}_n结尾。由此证明了该断言。

由庞加莱–霍普夫指标定理可知， φ^{V} 是一个二次映射，当且仅当 $\mathrm{w}_\eta(\partial_0 S) = 1$。由引理4.9 可知，不存在涉及 w的任何真子重叠的其他非零 2-余循环。特别地，若 $\mathbf{S}$ 包含至少有两个边界停止点的边界分支，我们可以选取 $\partial_0 S$ 作为该边界分支，此时 w 不会对 $\mathrm{HH}^2(A, A)$ 作出贡献。

(d) 最后，设 e 是图 2中箭图某个顶点处的一个幂等元。那么有以下两种情况。在第一种情况下，上链 φ 具有如下形式

$$\varphi(e^{\mathrm{I}}_{2i-1}) = \lambda_i q^{\mathrm{I}}_i r^{\mathrm{I}}_i \quad \text{and} \quad \varphi(e^{\mathrm{I}}_{2i}) = \mu_i p^{\mathrm{I}}_i q^{\mathrm{I}}_i \quad \text{for } 1 \le i \le g$$

其中 $\lambda_i, \mu_i \in \Bbbk$。若 φ 是一个余循环，即 $\delta(\varphi) = 0$，则 $\delta(\varphi)(p^{\mathrm{I}}_i) = \pm\lambda_i p^{\mathrm{I}}_i q^{\mathrm{I}}_i r^{\mathrm{I}}_i = 0$，这意味着 $\lambda_i = 0$ 且 $\delta(\varphi)(r^{\mathrm{I}}_i) = \pm\mu_i p^{\mathrm{I}}_i q^{\mathrm{I}}_i r^{\mathrm{I}}_i = 0$，这意味着对每个$1 \le i \le g$都有 $\mu_i = 0$。因此， $\varphi = 0$，也就是说不存在这样的非零余循环。

在第二种情况下，令 e^{V}_i 表示 $1 \le i \le n$ 时 p^{V}_i的源点和靶点对应的幂等元，并令 $\partial^{\mathrm{V}}_i S$ 表示相应的无停止点边界分支。由于 $|p^{\mathrm{V}}_i| = \mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{V}}_i S)$，我们有 2-余链 φ^{V}，其形式为以下两者之一

$$\varphi^{\mathrm{V}}(e^{\mathrm{V}}_i) = {q^{\mathrm{V}}_i}^2 \qquad \text{if } \mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{IV}}_i S) = 2$$

or

$$\varphi^{\mathrm{V}}(e^{\mathrm{V}}_i) = q^{\mathrm{V}}_i \qquad \text{if } \mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{IV}}_i S) = 1.$$

同样，我们可以计算得出 $\delta(\varphi^{\mathrm{V}}) = 0$。

总之，上述 2-余循环对应于没有停止点且绕数为 1 或 2 的边界分支。□

注 4.12（与辛上同调的关系）。在定理 4.10 中，我们给出了一个纯代数证明，说明 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的 Hochschild 上同调可以从具有特定绕数的边界分支中读出，这也是[CSSS]的一个分次类比。尽管我们只给出了 HH^2，的结果，但一般情形下也可以证明类似的结果。（参见 [Opp、BSSWW]，分别讨论分次 gentle 代数和 skew-gentle 代数的情形。）从更具几何性的角度来看，Hochschild 上同调可能通过闭开映射与辛上同调相关联

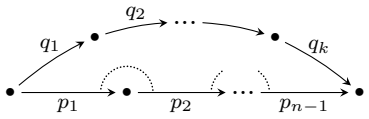
$$\mathcal{CO}\colon \mathrm{SH}^\bullet(S, \Sigma, \eta) \longrightarrow \mathrm{HH}^\bullet(\mathcal{W}(\mathbf{S}), \mathcal{W}(\mathbf{S}))$$

在完全绕包情形下，这是一个同构 [Gan12，Gan]。

注记 4.13（∞ 来自一般剖分的变形）。在目前的描述中，我们选取了 $\mathcal{W}(\mathbf{S}$ 的一个特殊生成元，其端同态代数是一个微分分次 gentle 代数 A，使得所有 2-余循环都对应于 A 作为弯曲 DG 代数的变形。其他生成元的选择自然可能会导出对应于具有非平凡高阶乘法的弯曲 A_∞ 变形的 2-余循环。尽管 $\mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S}))$ 与 $\mathbf{S}$ 的某些边界分支之间的关系仍如定理 4.10 所述，但 2-余循环的形式会有所不同，相应的变形通常也会包含非平凡的高阶乘法。例如，绕数为 1 且有一个停止点的边界分支 σ 将产生一个 A_∞ 变形，其高阶乘积形式如下

$$\mu^{n-1}(sp_{n-1} \otimes \cdots \otimes sp_2 \otimes sp_1) = sq_k \cdots q_2 q_1 \tag{4.14}$$

当停止点 σ 位于一个 n 边形内时。在这种情况下，我们有 $\sum_{1\leq i\leq k}|q_i| - \sum_{1\leq j\leq n-1}|p_j| = 3-n$，且相应生成元的端同态代数$\mathbf{S}$ 包含如下形式的子箭图



以及 A_∞ 变形对应于引入非平凡的高阶乘积μ^{n-1} (4.14) 到该子箭图中。正如本文所做的，仅考虑标准剖分，可确保该停止点 σ 位于一个二边形内（见图1），因此在此情形下，2-余循环对应于一个微分 μ^1，从而产生微分分次变形（改变微分）。更一般剖分所对应的 2-余循环的 A_∞ 结构的明确描述见 [BSW]。

类似地，具有完整边界停止点且绕数为 1 的边界分支将产生一个由下式定义的 2-余循环:

$$\mu^{2n}(p_{i+2n}\otimes\cdots\otimes \mathrm{s}p_{i+2}\otimes \mathrm{s}p_{i+1}) = \mathrm{s}e_{\mathrm{t}(p_i)},\qquad 1\leq i\leq n$$

（见 [BW[b]]），其中指标按循环方式理解，并且 $p_1,\dots,p_n$ 构成一个具有完整二次关系的圈，即 $p_{i+1}p_i=0$ 对所有 i均成立。同样，标准剖分这一特殊情形确保 $n=1$，从而产生一个余循环 $\mu^2(\mathrm{s}p\otimes \mathrm{s}p) = e_{\mathrm{t}(p)}$ 再次用于参数化一个微分分次变形（改变底层结合结构）。

5. A solution to the curvature problem via weak duality

本节将证明，只要$\mathbf{S}$ 存在没有停止点且绕数为 1 或 2 的边界分支，$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 就会出现**曲率问题**。随后，我们将为分次 gentle 代数和微分分次 gentle 代数引入一种弱对偶性 的概念，以绕开曲率问题。

在研究 Fukaya 范畴的变形时，常常会在相对 *Fukaya* 范畴的背景下，采用一种常见策略：接受曲率，并研究 Fukaya 范畴的形式弯曲 A_∞ 变形，例如参见 [Sei02、She24、PS]。然而，对于曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴，事实证明，经过若干中间步骤后，我们可以完全绕开曲率问题。这带来了许多令人欣喜的结果。首先，没有弯曲变形，就能使用预三角化 A_∞ 范畴的常用技巧。值得注意的是，变形后我们可以转到（三角化的）同伦范畴。由于我们不仅能够构造形式变形，还能构造一个以 $\mathbb{A}^{\dim \mathrm{HH}^2}$ 为底的“严格”变形半普适族（其含义见第3.4节），因此可以讨论该族的各个纤维，每个纤维都由将变形参数取为常数得到。特别是，该族的纤维是完全不含形式变形参数的预三角 DG 范畴，并且可以被视为内禀的几何对象：它们是通过对初始曲面作部分轨形紧化而得到的部分缠绕 Fukaya 范畴（见第6节）。

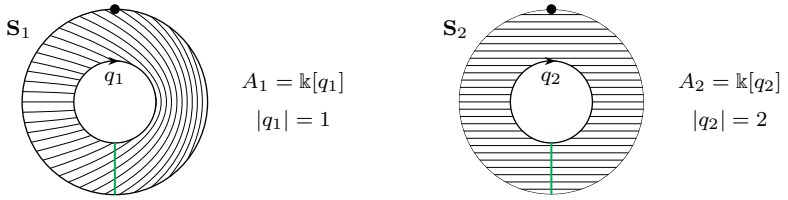


FIGURE 4. 圆柱上两种分次结构（带有一个边界停止点）以及生成曲线对应的自同态代数

5.1. **两个存在曲率问题的例子**。 在讨论一般情形之前，我们先考察曲率问题及其解决方法，选取曲率问题出现时最简单的两种分次曲面：带一个边界停止点的圆柱，配备两种不同的分次结构。在这种情形下，第5.3 节为解决任意分次（轨形）曲面的曲率问题而引入的弱对偶性，与经典 Koszul 对偶一致。Koszul 对偶无法解决一般情形，但我们的弱对偶概念与之密切相关；这两个例子将有助于说明解决曲率问题的一般策略。

设 $S = [0,1] \times \mathbb{S}^1$ 为边界分支分别为 $\partial_0 S = \{0\} \times \mathbb{S}^1$ 和 $\partial_1 S = \{1\} \times \mathbb{S}^1$ 的圆柱/圆环。设 $\Sigma = \{(0,\ 1)\}$，其由位于 $\partial_0 S$ 上的一个边界停止点组成；设 η_1 和 η_2 为 S 上的两条线场，使得沿着没有停止点的边界分支 $\partial_1 S$ 的绕数分别为 $\mathrm{w}_{\eta_1}(\partial_1 S) = 1$ 和 $\mathrm{w}_{\eta_2}(\partial_1 S) = 2$。

令 $\mathbf{S}_1 = (S,\ \Sigma,\ \eta_1)$ 和 $\mathbf{S}_2 = (S,\ \Sigma,\ \eta_2)$，则有

$$\mathcal{W}(\mathbf{S}_1) \simeq \mathrm{tw}(A_1) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{W}(\mathbf{S}_2) \simeq \mathrm{tw}(A_2)$$

其中 $A_1 = \Bbbk[q_1]$ 和 $A_2 = \Bbbk[q_2]$ 是仅有一个生成元的的一元多项式环，生成元 q_1 分别为 q_2，其次数分别为 1 和 2。图 4 展示了 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$及其标准剖分，并且我们还画出了两条线场 η_1 和 η_2。

5.1.1. 曲率问题。 由定理 4.10 的证明可知，我们有 $\dim \mathrm{HH}^2(A_1,\ A_1) = \dim \mathrm{HH}^2(A_2,\ A_2) = 1$ 以及 A_1 和 A_2 二者都具有一个自然的 2-余循环 $\varphi_1\colon\ \Bbbk \to A_1$ 分别为 $\varphi_2\colon\ \Bbbk \to A_2$ 它们参数化了一个弯曲变形的单参数族。这两个 2- 余循环由下式给出：

$$\varphi_1(1) = q_1^2 \qquad \text{and} \qquad \varphi_2(1) = q_2. \tag{5.1}$$

（注意，这些余循环的 Hochschild次数为 0，但由于它们是“内部”次数为 2 的映射，因此总次数为 2，从而在总次数中定义了 2-余循环。）相应地，对于 A_1 和 A_2，我们分别可以定义一个在 $\mathbb{A}^1$ 上的弯曲变形族 $\{A_{1,\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{A}^1}$ 和 $\{A_{2,\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{A}^1}$。对于每个 $\lambda \in \Bbbk$，我们令

$$A_{1,\lambda} = (A_1, \mu^0_\lambda) \qquad \text{and} \qquad A_{2,\lambda} = (A_2, \mu^0_\lambda) \tag{5.2}$$

其中，对于 $A_{1,\ \lambda}$ 相应地，对于 $A_{2,\ \lambda}$ 曲率项分别由 $\mu^0_\lambda = \lambda q_1^2$ 和 $\mu^0_\lambda = \lambda q_2$给出。注意，对于 $\lambda = 0$，曲率项消失，我们便得到 $A_1 = A_{1,\ 0}$ 和$A_2 = A_{2,\ 0}$。

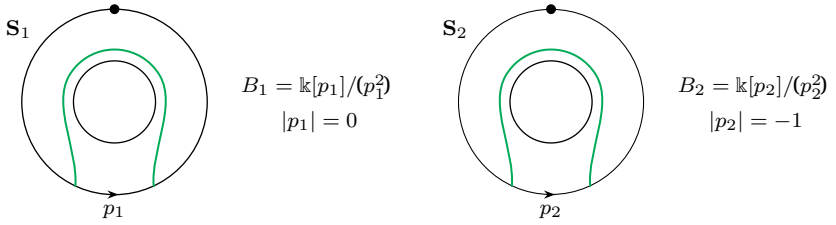


FIGURE 5. 由一条绕过无停止点的边界分支的曲线给出的 $\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}_1)$ 和 $\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}_2)$ 的弱生成元及其端同态代数

正如我们将在第 5.2节证明的那样，不存在另一个经典生成元$\mathcal{W}(\mathbf{S}_1)$ 或 $\mathcal{W}(\mathbf{S}_2)$，使得其自同态代数不允许任何弯曲变形。事实上，任何经典生成元都必须包含一条连接两个边界分支的曲线，因此也包含图4中的剖分所含的那条曲线。

5.1.2. 一个弱生成元与 *Koszul* 对偶。 虽然 $\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}_1)$ 和 $\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}_2$都不存在自同态代数不含弯曲变形的经典生成元，但根据定理 2.6 ，两个范畴都存在一个 弱生成元 $\Gamma^\vee$ ，它对应于图 5所示的绕边界分支的曲线。我们称 $B_i = A_i^\vee = \mathrm{End}(\Gamma^\vee)$ 为弱对偶 的 A_i，在此情形下它与 Koszul 对偶一致。

我们有 $B_1 \simeq A_1{}^!$ 且 $B_2 \simeq A_2{}^!$ 并且根据 [Kel94，10.5 引理] 三角等价

$$\mathrm{per}(A_1) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B_1) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{per}(A_2) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B_2).$$

这些三角等价可以如下提升到预三角化层面。

代数 B_1 和 B_2 是有限维分次 gentle 代数（作为 DG 代数是适当的）。它们的有界导出范畴具有一个自然的 DG 增强，由范畴 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_i)$ 给出，其中 $i = 1, 2$（见第 5.4 节）。在这个简单例子中，$\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_i)$ 是由以下无界单边扭曲复形生成的范畴：该复形由简单 B_i-模 $B_i/\mathrm{rad}(B_i) \simeq \Bbbk$ 的半自由（余纤维）分解构成（集中于 0 次），且 p_i 在其上作用为 0。$\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}$ 中的上标旨在让人联想到有限维零次代数 B 的等价 $\mathrm{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\, B) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$；在这种情况下，我们确实有 $\mathrm{H}^0\,\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ B) \simeq \mathrm{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\, B)$。

考虑分次后，我们有 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_1)$ 由单个扭曲复形生成，其对应的微分分次模由上链复形给出

$$\begin{array}{ccccccccc} & & -5 & & -4 & & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & \\ \cdots & \xrightarrow{p_1\cdot} & (\Bbbk\, p_1)[4] & & (\Bbbk\, 1)[4] & \xrightarrow{p_1\cdot} & (\Bbbk\, p_1)[2] & & (\Bbbk\, 1)[2] & \xrightarrow{p_1\cdot} & \Bbbk\, p_1 & & \Bbbk\, 1 & & 0 & \cdots \end{array}$$

（参见（5.9）中扭曲复形的表示）且 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_2)$ 由

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & -4 & & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & \\ \cdots & & \begin{array}{c}(\Bbbk\,1)[4]\\ \oplus\\ (\Bbbk\,p_2)[4]\end{array} & \xrightarrow{p_2\cdot} & \begin{array}{c}(\Bbbk\,1)[3]\\ \oplus\\ (\Bbbk\,p_2)[3]\end{array} & \xrightarrow{p_2\cdot} & \begin{array}{c}(\Bbbk\,1)[2]\\ \oplus\\ (\Bbbk\,p_2)[2]\end{array} & \xrightarrow{p_2\cdot} & \begin{array}{c}(\Bbbk\,1)[1]\\ \oplus\\ (\Bbbk\,p_2)[1]\end{array} & \xrightarrow{p_2\cdot} & \begin{array}{c}\Bbbk\,1\\ \oplus\\ \Bbbk\,p_2\end{array} & 0 & \cdots \end{array}$$

用 Loewy 记号表示，这不过是简单 B_2-模 1 的投射分解 $\cdots \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \twoheadrightarrow 1$（此处 1 表示 B_2的顶点）。

因此，在预三角化层面上，我们得到等价

$$\mathcal{W}(\mathbf{S}_1) \simeq \mathrm{tw}(A_1) \simeq \mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_1) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{W}(\mathbf{S}_2) \simeq \mathrm{tw}(A_2) \simeq \mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_2). \tag{5.3}$$

注意，这两个无界扭曲复形的自同态代数分别同构于 A_1 和 A_2，从而经由双重对偶恢复了原代数。

5.1.3. 曲率问题的一种解法。用 $i=1$的 A_i 来表述时，我们在第 5.1.1 节看到，$\mathcal{W}(\mathbf{S}_i) \simeq \mathrm{tw}(A_i)$ 的变形自然会遇到曲率问题，因为 A_i 只允许弯曲变形。然而，等价关系 (5.3) 现在表明，$\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}_i) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B_i)$ 的变形等价于 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_i)$ 的变形（见第 5.5 节），而后者又等价于 B_i的变形，其中 B_i 不存在弯曲变形。事实上，$B_1 = \Bbbk[p_1]/(p_1^2)$ 在 $|p_1|=0$ 的情况下存在一个由 $\psi_1(p_1 \otimes p_1) = 1$ 确定的 2-余循环，它产生了 B_1 的一个单参数族结合变形

$$B_{1,\lambda} = \Bbbk[p_1]/(p_1^2 - \lambda).$$

类似地，B_2 具有一个 2-余循环 $\psi_2(p_2) = 1$，由此产生 B_2的一个 DG 变形单参数族

$$B_{2,\lambda} = (\Bbbk[p_2]/(p_2^2), \mu_\lambda^1)$$

其中 μ_λ^1 是由 $\mu_\lambda^1(p_1) = \lambda 1$确定的微分。注意，$\psi_1$ 和 ψ_2 与（5.1）中的 φ_1 和 φ_2 互为“对偶”：ψ_1 将长度为 2 的路径映射为长度为 0 的路径，而 φ_1 将长度为 0 的路径映射为长度为 2 的路径。同样，ψ_2 将长度为 1 的路径映射为长度为 0 的路径，而 φ_2 将长度为 0 的路径映射为长度为 1 的路径。

5.1.4. 非平凡变形的几何解释。对于 $\lambda \in \Bbbk \smallsetminus \{0\}$，族（5.2）的纤维 $A_{i,\lambda}$ 是弯曲的 A_∞ 代数（$i=1,2$），因而妨碍了通常通向三角化同伦范畴的过程。相比之下，对于两者 $i=1,2$，纤维$B_{i,\lambda}$都是 DG 代数。因此，对于所有 $\lambda \in \Bbbk$，范畴 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_{1,\lambda})$ 仍是预三角化的。

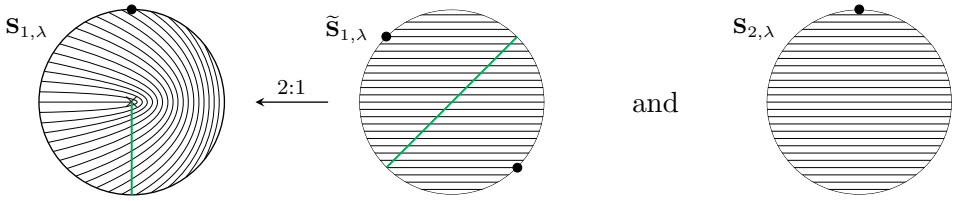
当 $\lambda = 0$ 时，可恢复 $\mathcal{W}(\mathbf{S}_1)$ 和 $\mathcal{W}(\mathbf{S}_2)$；而对于 $\lambda \neq 0$，我们有

$$B_{1,\lambda} \simeq \Bbbk \times \Bbbk \qquad \text{and} \qquad B_{2,\lambda} \overset{\mathrm{qis}}{\simeq} 0.$$

事实上，接下来我们有

$$\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_{i,\lambda}) \simeq \mathcal{W}(\mathbf{S}_{i,\lambda}), \quad i=1,2$$

其中对所有 $\lambda \neq 0$，我们有



对于 $\lambda \neq 0$ 曲面 $\mathbf{S}_{1,\lambda}$，它是一个带有一个停止点的轨形圆盘，由 $\mathbf{S}_1$ 将内边界分支“部分紧化”为一个点而得到。由于 $\mathbf{S}_1$ 的内边界分支绕数为 1，这个点必然是一个阶为 2 的轨形点。这里我们还画出了双覆盖 $\widetilde{\mathbf{S}}_{1,\lambda}$，它是一个带有两个停止点的光滑圆盘。注意，$\mathcal{W}(\mathbf{S}_{1,\lambda}) \simeq (\mathcal{W}(\widetilde{\mathbf{S}}_{1,\lambda})/\mathbb{Z}_2)^\natural$（见 [CK, AP, BSW]）。双覆盖的范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S}_{1,\lambda})$ 恰好包含一个对象 X，其 $\mathrm{End}(X) \simeq \Bbbk$，因此它的轨道范畴包含一个对象 X，其端同态代数为 $\Bbbk \otimes \Bbbk[\mathbb{Z}_2] \simeq \Bbbk \times \Bbbk$。因此，幂等完备化（记作 $-^\natural$）恰好包含两个对象，它们之间没有非平凡态射，有时用一对弧表示，其中一条“带标记”，另一条“不带标记”。

类似地，对于 $\lambda \neq 0$，$\mathbf{S}_{2,\lambda}$ 是一个带有一个停止点的（光滑）圆盘，同样是通过将内边界分支紧化为一个（光滑）点，从 $\mathbf{S}_2$ 得到的。$B_{2,\lambda}$ 与零代数拟同构，这也与 $\mathbf{S}_{2,\lambda}$ 中的所有曲线都同伦于边界这一事实相符。从更几何的角度看，任何（恰当的）拉格朗日子流形 γ 都有一个无环的部分缠绕Floer复形，因为任意这样的曲线都存在一个次数为 -1 的边界态射 p_2，它出现在定义Floer微分 $\partial(p_2) = \mathrm{id}_\gamma$ 的伪全纯圆盘中。

这表明，代数变形应当对应于部分紧化这一启发式想法，在避开曲率问题的中间范畴 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(B_i)$ 中，对于严格变形确实可以“照字面”成立。

5.2. **曲率问题**。如果 $\mathbf{S}$ 有不带停止点且绕数为1或2的边界分支，那么事实证明，通过任意经典生成元 Γ 计算得到的 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的Hochschild 上同调中存在非平凡 2-余循环，它们参数化了 Γ 的自同态代数的弯曲变形。

曲率意味着 Hom 空间上的微分不再满足平方为零。具体而言，同伦范畴（参见注释 2.2）不再有良好定义。这被称为曲率问题，因为要将一个有意义的三角范畴与这种弯曲变形联系起来，不再那么直接 [Pos11、KLN10、LVdB15]。

近年来出现了几种规避或克服曲率问题的方法，例如考虑三角范畴或稳定范畴的变形 ∞，并配备一个 t-结构 [GLVdB，GLSVdB，Iwa]；或者在存在曲率的情况下定义新的三角范畴 [Pos11，GL21，GHL，Leh，LL^{a}，LL^{b}]。

以下命题表明，通过任意经典生成元描述 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形，总会导致曲率问题。

命题 5.4. 设$\mathbf{S}$ 是一个曲面，其边界分支均无停止点，绕数为1 和/或2。那么， $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的任意经典生成元的自同态代数都允许弯曲变形。因此，若不考虑弯曲变形，就无法用经典生成元来描述$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的完整变形理论。

证明。设 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$ 是一个绕数为 1 且没有停止点的边界分支。任意经典生成元 Γ 都必须包含至少一条连接到 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$ 的曲线 γ （见图 1）。由于 D$\mathcal{W}$(S) $\simeq$(D$\mathcal{W}(\widetilde{\mathrm{S}})/\mathbb{Z}_2)^\natural$ [CK, AP, BSW], ，我们可以将 D$\mathcal{W}$(S) 中的对象视为双覆盖 S 上（导出）部分缠绕福柯范畴$\widetilde{\qquad\qquad}$D$\mathcal{W}$(S)中的 $\mathbb{Z}_2$-不变对象，也可以附带一个幂等元（见 [BSW，第 2 节.4]），并对后者使用态射分类 [ALP16, OPS]。该分类表明，End$_{\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathrm{S})}(\Gamma)$由边界路径、轨形路径，以及对应于 Γ 曲面 S 内部曲线交点的成对态射生成。现在考虑 End(γ)，此时我们只有从γ 到其自身的边界路径，以及对应于 γ每个自交点的一对态射。我们假设 γ 的一个端点位于 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$上。此时有三种情况：(1) 另一个端点位于不同的边界分支 $\partial_k S \neq \partial_j^{\mathrm{v}} S$上；(2) 另一个端点是一个轨形点；(3) γ 的另一个端点也位于 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$上。在第一种和第二种情况下，令 q 表示沿着 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$从 γ 到其自身的边界态射。如果该边界分支的绕数为 1，我们断言，由$\varphi_1(e\gamma) = q^2$ 确定的 0-上链 φ_1 定义了一个非零的 2-余循环。同样，如果绕数为 2，我们断言，由 $\varphi_2(e\gamma) = q$ 确定的 φ_2 定义了一个非零的 2-余循环。事实上，由于q 与 End(Γ) 的任何其他生成元复合均为零，我们得出，在这两种情况下 $\partial^\bullet \varphi_i = 0$ ， 2。

在第三种情形中，令 q_1， q_2 表示沿着 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$从 γ 到其自身的两个边界态射。注意， $q_1^2 = 0$ 和 $q_2^2 = 0$ ，但 $q_1 q_2$ 和 $q_2 q_1$ 均非零。若沿着 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$ 的绕数为 1，则有 $|q_1| + |q_2| = 1$ ，并且我们断言，由 $\varphi_1(e\gamma) = q_1q_2q_1q_2 + q_2q_1q_2q_1$ 确定的 φ_1 定义了一个非零的 2-余循环。与之前一样， q_1， q_2 与 End(Γ) 的所有其他生成元复合时结果均为零，唯有 q_2， q_1分别例外。然而，对于 q_1 和 q_2 ，我们也有

$$\begin{aligned}(\partial^\bullet \varphi_1)(q_1) &= -q_1 \cdot (q_1q_2q_1q_2 + q_2q_1q_2q_1) + (q_1q_2q_1q_2 + q_2q_1q_2q_1) \cdot q_1 \\ &= -q_1q_2q_1q_2q_1 + q_1q_2q_1q_2q_1 = 0\end{aligned}$$

其中符号差异源于微分中的符号 ∂_1 （参见（3.11）或[BW^{a}，第5节。2]）。类似地，我们有（$\partial^\bullet \varphi_1$）（$q_2$） $= 0$。由于 φ_1 是底层上链复形的一个 0-上链，因此它不可能是余边界；又由于它是一个 2 次映射，因此它定义了 End(Γ) 的 Hochschild 上同调中的一个非平凡 2-余循环。由于 φ_1 是一个 0-上链，通过引入一个曲率项，它会产生 End(Γ) 的一个非平凡弯曲变形，类似于（5.2）。

当 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$ 的绕数为 2 时，论证完全类似，此时 $|q_1| + |q_2| = 2$。随后，由 $\varphi_2(e\gamma) = q_1q_2 + q_2q_1$ 确定的 0-上链 φ_2

是一个 2 次映射，并定义了一个非平凡 2-余循环，同样以此参数化 End(Γ) 的弯曲变形。□

5.3. **弱对偶性**。对于 $\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A)$，结果表明，我们可以通过从 A 转向弱生成元的自同态代数来避免曲率问题。在第 2.1.2 节中，我们对弱生成元进行了几何分类。就我们的目的而言，只需考虑一个由 S的标准剖分得到的特定弱生成元。从 A 转向该弱生成元的自同态代数，满足一种与 Koszul 对偶密切相关的对偶性，我们称之为弱对偶性。

本节的大多数结果都假设 A 是一个 局部适当的 DG gentle 代数，即 $\dim \mathrm{H}^i(A) < \infty$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$均成立。在第 5.6 节中，我们将说明任意 DG gentle 代数如何通过局部化从局部适当的 DG gentle 代数得到。注意， A 是局部适当的，当且仅当相应的曲面不存在绕数为 0 且没有停止点的边界分支；在这种情况下，$\mathrm{H}^i(A$仅在 $i = 0$时才是无限维。

下面的引理将有助于从概念上解释弱对偶。

引理 5.5. 令 $A = (\Bbbk Q/I, d)$ 为与标准剖分关联的 *DG gentle* 代数；对每个 $i \in Q_0$，令 $P_i = e_i A$ 为 $\mathrm{add}\, A$ 中对应的不可分解对象。那么 P_i 分为三个两两不同的类别。

(i) $\mathrm{End}(P_i)$ 是适当的，但不同调光滑(ii) $\mathrm{End}(P_i)$ 是同调光滑的，但不适当 (iii) $\mathrm{End}(P_i)$ 既同调光滑又适当。

在这三种情况下，我们分别有：

(i) $\mathrm{End}(P_i) \simeq \Bbbk[p_i]/(p_i^2)$ (ii) $\mathrm{End}(P_i) \simeq \Bbbk[q_i]$ (iii) $\mathrm{End}(P_i) \simeq \Bbbk$。

此外，若 A 是局部适当的，则 $|q_i| \neq 0$。

证明。关于同调光滑和/或适当性的三种情况划分，可直接从自同态代数的显式形式得出，这些形式可由图 2 中的箭图读出。若 i 是一个顶点，且没有以 i 为起点和终点的有向环，那么 $\mathrm{End}(P_i) \simeq \Bbbk$，它既同调光滑又适当。若 i 是一个顶点，存在一个以 i 为起点和终点的非零圈，则该圈的长度必为 1 或 2。长度为 1 的圈（环路）有两种类型。对于 $1 \leq j \leq m$ 的情形，在顶点 $i = \mathrm{s}(p_j^{\mathrm{IV}})$ 处有一个环路 p_j^{IV}，并满足 $p_j^{\mathrm{IV}\,2} = 0$；此时 $\mathrm{End}(P_i) = \Bbbk[p_j^{\mathrm{IV}}]/(p_j^{\mathrm{IV}})^2$，如 (iii) 中所示，它是适当的，但不同调光滑。对于 $1 \leq j \leq n$ 的情形，在顶点 $i = \mathrm{s}(q_j^{\mathrm{V}})$ 处有一个没有关系的环路 q_j^{V}；此时 $\mathrm{End}(P_i) = \Bbbk[q_j^{\mathrm{V}}]$，如 (ii) 中所示，它是同调光滑的，但不适当。最后，对于 $1 \leq j \leq g$ 的情形，若 $i = \mathrm{s}(p_j^{\mathrm{I}})$ 或 $i = \mathrm{t}(p_j^{\mathrm{I}})$，则分别存在长度为 2 的圈 $q_j^{\mathrm{I}} r_j^{\mathrm{I}}$ 和 $p_j^{\mathrm{I}} q_j^{\mathrm{I}}$；由于零关系 $r_j^{\mathrm{I}} q_j^{\mathrm{I}} = 0$ 和 $q_j^{\mathrm{I}} p_j^{\mathrm{I}} = 0$，它们的平方也为

零。同样，我们有 $\mathrm{End}(P_i) \simeq \Bbbk[p_i]/(p_i^2)$，如 (i) 中所示，它同样是适当的，但不同调光滑。

由于 A 局部适当当且仅当不存在 0 次有向环，因此这恰好对应于 $|q_i| \neq 0$ 的情形，其中 q_i 对应于没有关系的环路之一 q_1^{v}，……，q_n^{v}。□

这些 P_i构成了 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的经典生成元。弱对偶的主要思想是，将那些属于引理 P_j中类型 (ii) 的 5.5 ——它们导致 A 不适当——替换为对象 $P_j^{\vee_J}$，使得所得集合仍是一个弱生成元，但现在具有有限维自同态代数。（关于如何从这样的弱生成元恢复 5.4 一节见下文。） $\mathcal{W}(\mathbf{S})$

为简单起见，我们只针对图 1的标准剖分所关联的特定 DG gentle 代数表述这一弱对偶概念，不过类似的想法似乎也适用于任何 DG gentle 代数。

设 $A = \Bbbk Q/I$ 为与图 1 中的标准剖分相关联的 DG gentle 代数，其带关系的箭图如命题 2.5 所示。

令 $J \subset Q_0$ 表示 Q 的所有顶点中使 $\mathrm{End}(P_j)$ 不适当的子集。（注意，根据引理 5.5，这意味着 $\mathrm{End}(P_j)$ 是同调光滑的。）对每个 $j \in J$，令 $P_j^{\vee_J}$表示扭曲复形

$$P_j^{\vee_J} = \Big(P_j[1-|q_j|] \oplus P_j, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ q_j & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big). \tag{5.6}$$

从几何上看， P_j 对应于剖分中连接边界分支 $\partial_0 S$ 与边界分支 $\partial_j^{\mathrm{v}} S$ 的唯一曲线，而 $P_j^{\vee_J}$对应于环绕该边界分支的曲线，如图 6所示。从代数上看，从 P_j 到 $P_j^{\vee_J}$的变换会将类型（ii）对象变为类型（i）对象。

引理 5.7。设 $P_j^{\vee_J}$为 5.6）中的扭曲复形。则 $\mathrm{End}_{\mathrm{H}^0\,\mathrm{tw}(\mathrm{add}\,A)}(P_j^{\vee_J}) \simeq \Bbbk[p_j]/(p_j^2)$，其中，且 是 $\mathrm{End}(P_j)$的生成元。

证明。 扭曲复形的端同态由其底层对象（不考虑微分）的端同态给出。若该端同态是微分 $^0\,\mathrm{tw}(\mathrm{add}\,A)$ 的余循环，则会在同伦范畴 $\mathrm{H}\,\mu^1_{\mathrm{tw}(\mathrm{add}\,A)}$中诱导出一个非零态射。对于 $P_j^{\vee_J}$(5.6) 底层直和 $P_j[1-|q_j|] \oplus P_j$的端同态由一个 2×2 矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{smallmatrix}\right)$ 给出，其中 $f_1, \ldots, f_4 \in \mathrm{End}(P_j)$。它是同伦范畴中的态射，当且仅当满足

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}$$

这表明我们必须有 $f_2 = 0$ 和 $f_1 = f_4$。虽然原则上 f_3 可以由 q_j 中任意多项式的乘法给出，但 q_j 中 ≥ 1 阶的项可以通过一个余边界消去

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_j^k \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_j^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_j^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_j^{k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，$\mathrm{End}(P_j^{\vee_J})$ 由 $p_j := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 生成；事实上，它的次数为 $1-|q_j|$，因为它定义了一个 0 次映射 $P_j[1-|q_j|] \oplus P_j \to P_j[2-2|q_j|] \oplus P_j[1-|q_j|]$。□

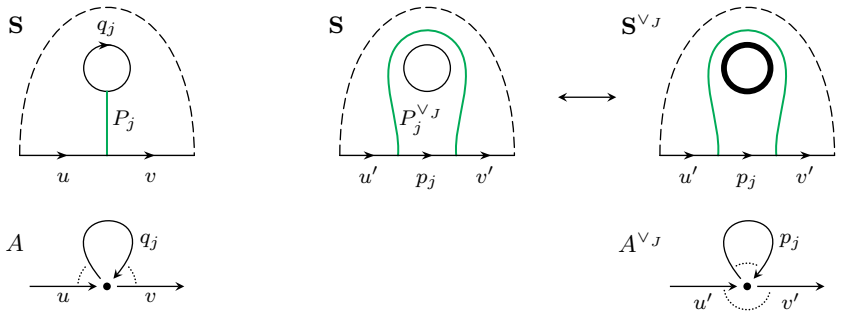


FIGURE 6. 将标准剖分 Γ修改为图中所示的形式，只要 $A=\mathrm{End}(\Gamma)$ 局部适当，就会得到一个弱生成元。其自同态代数是 DG gentle 代数 $A^{\vee_J}$，其曲面模型 $\mathbf{S}^{\vee_J}$ 由$\mathbf{S}$ 添加一个完整边界停止点得到，该停止点位于没有停止点的边界分支上。

我们有如下重要观察。

命题 5.8. 设 $A=(\Bbbk Q/I,d)$ 为与$\mathbf{S}$ 的标准剖分 Γ 相关联的 *DG gentle* 代数，并设 J 为 Q 的所有顶点中满足 $\mathrm{End}(P_j)$不适当的顶点所构成的子集。如果 A 局部适当，那么对象 $\Gamma^{\vee_J}=\bigoplus_{i\in Q_0\setminus J}P_i\oplus\bigoplus_{j\in J}P_j^{\vee_J}$是 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的弱生成元，并且 $\mathrm{End}(\Gamma^{\vee_J})$ 是一个适当的 *DG gentle* 代数。

证明。 将图 4 和图 5所示的情形推广，对象 $\Gamma^{\vee_J}$由 $\mathbf{S}$ 中的曲线给出：这些曲线由标准剖分得到，方法是将每条连接到不带停点的边界分支的曲线替换为一条环绕该边界分支的曲线，如图 6所示。若 A 是局部适当的，则 $\mathbf{S}$不含绕数为 0 且不带停点的边界分支。因此， $\Gamma^{\vee_J}$ 中环绕不带停点的边界分支的曲线满足定理 2.6 的条件，因而定义了 $\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的一个弱生成元。 □

类似地（并且正如我们将看到的，这是对偶的），我们用 $K\subset Q_0$ 表示 Q 中满足以下条件的所有顶点的子集： P_k 由一条环绕带有完整边界停止点的边界分支的曲线给出。注意，$\mathrm{End}(P_k)$ 并非同调光滑，但它是适当的（见引理 5.5）。对每个 $k\in K$，令 $P_k^{\vee_K}$表示无界单边扭曲复形

$$P_k^{\vee_K}=\left(\cdots\oplus P_k[2-2|p_k|]\oplus P_k[1-|p_k|]\oplus P_k,\begin{pmatrix}\ddots & & \vdots\\ & 0\ 0\ 0 & \\ p_k\,0\ 0 & & \\ \cdots\ 0p_k\,0 & & \end{pmatrix}\right). \tag{5.9}$$

从几何上看， $P_k^{\vee_K}$可由一条曲线表示，该曲线不断螺旋靠近由对应于 P_k 的曲线所围成的完全停止边界分支。从代数上看，从 P_k 到 $P_k^{\vee_J}$ 的变换会将一个类型（i）对象变为引理 ii）中提到的类型（5.5）对象。

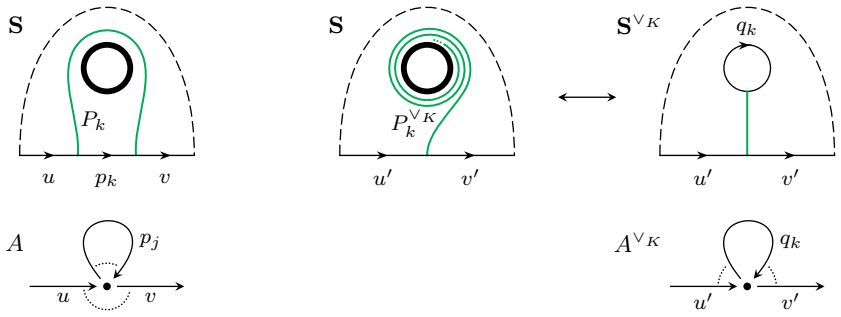


FIGURE 7. 图 6 所示情形的对应情形。将对象 P_k 的 $k \in K$ 替换为无限扭曲复形$P_k^{\vee K}$，对应于一条螺旋延伸至完全停止边界分支的曲线。其自同态代数是 DG gentle 代数 $A^{\vee J}$，其曲面模型$\mathbf{S}^{\vee K}$ 由 $\mathbf{S}$去除完整边界停止点并将 $P_k^{\vee K}$视为一条连接到该边界分支、且该处没有停止点的曲线而得到。

引理 5.10。 设 $P_k^{\vee K}$ 为 (5.9) 中的扭曲复形，并设 p_k 表示 $\mathrm{End}(P_k)$ 的生成元。那么，$\mathrm{End}_{\mathrm{H}^0\,\mathrm{tw}(\mathrm{add}\,A)}(P_k^{\vee K}) \simeq \Bbbk[\![q_k]\!]$ 当 $|p_k| = 1$ 时，否则$\mathrm{End}_{\mathrm{H}^0\,\mathrm{tw}(\mathrm{add}\,A)}(P_k^{\vee K}) \simeq \Bbbk[q_k]$。两种情况下，我们都有 $|q_k| = 1 - |p_k|$。

证明。 注意，作为复形， $P_k^{\vee K}$的上同调是集中在 0 次的一维空间。也就是说， $P_k^{\vee K}$ 是 $\mathrm{End}(P_k) \simeq \Bbbk[p_i]/(p_i^2)$ 的简单模的半自由分解。因此我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathrm{H}^0\,\mathrm{tw}(\mathrm{add}\,A)}(P_k^{\vee K}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}(P_k)}(P_k^{\vee K}, \Bbbk)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \Bbbk[n - n|p_k|], \Bbbk\right)\\ &\simeq \begin{cases} \Bbbk[\![q_k]\!] & \text{if } |p_k| = 1\\ \Bbbk[q_k] & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

若 $|p_k| = 1$，则复形 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \Bbbk[n - n|p_k|]$ 集中在 0 次，且为无限维； q_k 是从 $\Bbbk[1 - |p_k|]$ 到 $\Bbbk$ 的恒等映射，其次数为 $1 - |p_k|$。 □

定义 5.11。 令 $A = (\Bbbk Q/I,\ d)$ 为与标准剖分相关联的 DG gentle 代数。令 $L \subset Q_0$ 为任意子集。那么，相对于L 的弱对偶 是代数

$$A^{\vee L} := \mathrm{End}\big(\textstyle\bigoplus_{i \in Q_0} P_i^{\vee L}\big)$$

其中我们令 $P_i^{\vee K} = P_i^{\vee J} = P_i$，当 $i \in Q_0 \setminus (J \cup K)$ 时。

定理 5.12。设 $A = (\Bbbk Q/I, d)$ 为与分次轨形曲面 $\mathbf{S}$ 的标准剖分相关联的 *DG gentle* 代数。如果 A 是局部适当的，那么对于任意子集 $L \subset Q_0$，有如下结论。

(i) $A^{\vee_L}$ 是一个 *DG gentle* 代数，其关联曲面模型为 $\mathbf{S}^{\vee_L} = (S, \Sigma^{\vee_L}, \eta)$由 $\mathbf{S}$ 经如下操作得到：每当对应边界分支周围的曲线对应于 L 中的一个顶点时，移除一个完整边界停止点；若一条连接到某个边界分支的曲线对应于 L 中的一个顶点，则在该无停止点的边界分支上添加一个完整边界停止点（见图 6 和图 7）。注意，若 $L \supset J \cup K$，则所有完整边界停止点都会被移除，并且每个无停止点的边界分支上都会添加一个完整边界停止点。

(ii) 我们有如下对偶性

$$(A^{\vee_L})^{\vee_L} \simeq A.$$

(iii) 令 $J \subset Q_0$ 为所有满足 $\mathrm{End}(P_j)$ 不是适当的 $j \in Q_0$ 组成的子集。则$A^{\vee_J}$ 是适当的。特别地，若 A 是适当的，则 $J = \varnothing$ 和$A^{\vee_J} \simeq A$。(iv) 令 $K \subset Q_0$ 为所有满足 $\mathrm{End}(P_k)$ 不是同调光滑的 $k \in Q_0$ 组成的子集。则 $A^{\vee_K}$ 是同调光滑的。特别地，若 A 是同调光滑的，则 $K = \varnothing$ 和 $A^{\vee_K} \simeq A$。

证明。对于 $l \in L$ 对应于一条连接到无停止点的边界分支的曲线这一情形，A 与 $A^{\vee_L}$ 之间的关系如图 6 所示；对于 $l \in L$ 对应于一条环绕带有完整边界停止点的边界分支的曲线这一情形，则如图 7 所示。假设 A 局部适当，这意味着 P_l 不是无限维且集中于单一次数的。这保证了如图 6 和图 7 的图示以及以下观察所示，我们可以将 $A^{\vee_L}$ 理解为 $\Gamma^{\vee_L} = \bigoplus_{l\in L} P_l^{\vee_L} \oplus \bigoplus_{i\in Q_0\setminus L} P_i$ 的自同态代数。设 Q_0 的一个顶点为 $k \in L$，且 P_k 对应于一条环绕带有完整边界停止点的边界分支的曲线。那么 $P_k^{\vee_L}$ 就是无界扭曲复形 (5.9)。由 [OPS] 中的态射分类可知，P_i 与 $P_i^{\vee_L}$ 之间的态射（根据命题 5.14，我们可以将它们视为某个分次 gentle 代数的 $\mathbb{Z}_2$- 不变扭曲复形）对应于图 6 和图 7 所示的边界态射，但 $P_k^{\vee_L}$ 除外：如引理 5.10 所示，它有一个额外的非恒等自同态。□

就曲面而言，A 局部适当，当且仅当$\mathbf{S}$ 不含绕数为 0 且没有停止点的边界分支。（根据 [BGO，推论 9.4。5] 这一条件还意味着 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 是自反。）

如下定理表明，弱对偶性与 Koszul 对偶密切相关。

定理 5.13。$A^{\vee_{Q_0}} = A^{\vee_{J\cup K}}$ 与 A的 *Koszul* 对偶 $A^!$ 导出等价。

证明。对于光滑曲面，分次 gentle 代数与其 Koszul 对偶代数的曲面模型之间的关系已在 [OPS、LQZ]中得到研究。具体而言，底层曲面和线场相同，但对于每个没有停止点的边界分支，都会添加一个完整边界停止点；每个原有的完整边界停止点则会被

移除。从 $\mathbf{S}$ 转到其光滑二重覆盖（如有必要）后，可以发现，$A^{\vee_{Q_0}}$ 和 $A^!$ 的曲面模型相同，因此两种代数都对应于同一曲面模型的不同剖分，故根据关于曲面剖分的一般结果，它们导出等价 [HKK17、OPS、CK、BSW]。□

5.4. 部分缠绕 Fukaya 范畴作为无界扭曲复形范畴。虽然 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 首先被描述为一组生成拉格朗日子流形 Γ 的“扭曲完备化” $\mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A)$（见第 2 节），我们现在继续将 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 描述为代数 A 的弱对偶 $A^{\vee_J}$ 上的无界扭曲复形范畴；该代数与标准剖分相关联，其中 J 对应于 $\mathrm{add}\, A$ 中的一组对象 P_j，这些对象具有非适当端同态代数，如引理 5.5 (ii) 所述。根据命题 5.8，这些对象连同 $i \in Q_0 \setminus J$ 的 P_i 构成 $\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的一个弱生成元。我们将证明一个等价

$$\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A) \simeq \mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\, A^{\vee_J})$$

只要 A 是局部适当的。以弱生成取代经典生成，代价是将范畴从有界扭曲复形扩展到某些无界扭曲复形。然而，由于 $A^{\vee_J}$ 是适当的（定理 5.12），这种取舍最终绕开了曲率问题，使我们能够用经典生成元描述$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形理论（见第 5.5 节），正如定理 4.10 的证明中所见，适当的 DG gentle 代数不允许任何弯曲变形。

由于 $A^{\vee_J}$ 是一个（适当的）DG gentle 代数，其微分具有（4.2）所示的形式，即微分将某些箭映射到与之平行的箭，并将所有其他路径映射为零。由定理 4.8 可知 $A^{\vee_J}$ 是形式的，即 A_∞-拟同构于其上同调代数；根据 [BSW，第 8] 节，该上同调代数是分次 skew-gentle 代数（另见 [BW^{b}]）。换言之，$\mathrm{H}^\bullet(A^{\vee_J})$ 是一个有限维分次 skew-gentle 代数，且与 $A^{\vee_J}$拟同构。

对于 DG 范畴 $\mathcal{C}$，我们按照 [AL24] 的定义，用 $\mathrm{Tw}_\pm(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 上的双侧无界扭曲复形范畴。对于 $\mathcal{C} = \mathrm{add}\, A^{\vee_J}$，我们用 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J}) \subset \mathrm{Tw}_\pm(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 表示由简单 $\mathrm{H}^\bullet(A^{\vee_J})$- 模的半自由分解生成的满子范畴，这些分解实现为 $\mathrm{add}\ A^{\vee_J}$ 上的无界扭曲复形。这里的上标 $^{-,\mathrm{b}}$ 是为了提醒我们：当 B 是一个集中在 0 次的任意结合代数时，$\mathrm{add}\ B \simeq \mathrm{proj}\, B$，而范畴 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ B)$ 是有限生成投射 B-模的同伦范畴 $\mathrm{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\, B)$ 的 DG 增强；该范畴与有界导出范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$ 三角等价。

同样，对于 $A^{\vee_J}$，范畴 $\mathrm{Tw}^{-,\ \mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 是范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A^{\vee_J})$ 的 DG 增强；后者由具有有限维上同调的 DG $A^{\vee_J}$-模组成，因为它也由简单 $\mathrm{H}^\bullet(A^{\vee_J})$-模生成。注意，简单 $\mathrm{H}^\bullet(A^{\vee_J})$-模的同构类与 $A^{\vee_J}$ 的箭图顶点以及 $\mathrm{add}\ A^{\vee_J}$ 中的不可分解对象一一对应。我们将 $\mathrm{add}\, A^{\vee_J}$ 中的对象记为 P_i，其中 $i \in Q_0$；这让人联想到，当 $A^{\vee_J}$ 集中于 0 次时，对象 P_i 恰好是不可分解的投射 $A^{\vee_J}$-模。

由任意真分次 gentle 代数 B [OPS] 的 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$ 中对象分类可知，$\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\, B)$ 中的每个对象都对应于

曲面 $\mathbf{S}$ 上的一条曲线。$\mathrm{tw}(\mathrm{add}\ A^{\vee,J})$ 中的曲线对应于闭曲线，或端点位于 $\partial S \setminus \Sigma$ 上的“开”曲线；而更大的范畴 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ B)$ 还包含一端或两端无穷延伸、分别绕着一个或两个不同的带有完整边界停止点的边界分支盘旋的曲线。

这一分类可以推广到 skew-gentle 代数，如下所示。

命题 5.14. 设 B 是一个带有 $\mathbb{Z}_2$-作用的真分次温和代数，并设 $\widetilde{B} \simeq B * \mathbb{Z}_2$ 是相应的适当分次偏绅士代数。那么我们有拟等价

$$(\mathrm{tw}(\mathrm{add}\,\widetilde{B})/\mathbb{Z}_2)^{\natural} \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\,B)$$
$$(\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\,\widetilde{B})/\mathbb{Z}_2)^{\natural} \simeq \mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\,B)$$

特别地，$\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\,B)$ 中的每个可能无界的扭曲复形，都可以视为 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ \widetilde{B})$ 中的一个 $\mathbb{Z}_2$-不变扭曲复形。

证明。关于有界扭曲复形的论述由以下结果得出：[CK、AP、BSW], 因此我们需要证明关于无界扭曲复形的论述。

由 [Chr, 引理 2.11] 可知，派生 ∞-范畴 $\mathcal{D}(B)$（其中 B 是稳定的 $\Bbbk$-线性范畴）与其群商 ∞-范畴 $\mathcal{D}(B)^{\mathbb{Z}_2}$ 之间存在一个伴随，其中后者 ∞-范畴可根据 [Chr, 命题 3.5], 识别为 $\mathcal{D}(B) \simeq \mathcal{D}(B * \mathbb{Z}_2) \simeq (\mathcal{D}(\widetilde{B})/\mathbb{Z}_2)^{\natural}$。按照惯例，我们用 $\natural$ 表示幂等完备化。这个伴随诱导出一个伴随

$$\mathrm{D}(B) \underset{G}{\overset{F}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathrm{D}(\widetilde{B})$$

在（三角化的）无界导出范畴层面上。利用这一伴随关系，可以验证等价 $(\mathrm{D}(\widetilde{B})/\mathbb{Z}_2)^{\natural} \simeq \mathrm{D}(B)$ 限制到有界导出范畴后仍给出等价 $(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\widetilde{B})/\mathbb{Z}_2)^{\natural} \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$。左伴随函子 F 将任意对象 X 映到 $X \oplus -1 \cdot X$，其中 -1 是 $\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}^{\times}$ 的生成元。经由识别 $(\mathrm{D}(\widetilde{B})/\mathbb{Z}_2)^{\natural} \simeq \mathrm{D}(B)$，可见 $F(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\widetilde{B})) \subset \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$，因为两个具有有限维上同调的复形的直和仍具有有限维上同调。我们断言，这一嵌入的像分裂生成 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$。由于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$ 由简单 B-模生成，只需证明每个简单 B-模都属于 $F(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\widetilde{B}))$ 的幂等闭包。事实上，若 $\widetilde{i}$ 是 Q 中一个在 $\mathbb{Z}_2$ 作用下不动的顶点，则相应的简单模 $S_i = e_i B/\mathrm{rad}(e_i B)$ 会映到箭图 Q（对应于 B）中相应 $\widetilde{\ }$ 顶点处的简单 B-模。若 i 是 Q 中一个在 $\mathbb{Z}_2$ 作用下不动的顶点，则相应的简单模 S_i 会映到 Q 中与顶点 i 对应的两个简单模的直和，并赋予一个幂等环 ε。因此，除去直和项后，我们发现所有简单 B-模都在 F 的像中，从而证得所述断言。

最后，由于 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ \widetilde{B})/\mathbb{Z}_2$ 是 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\widetilde{B})/\mathbb{Z}_2$ 的一个 DG 增强，同样，$\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\, B)$ 是 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$ 的一个增强，因此我们可以用 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ \widetilde{B})$ 中的一个 $\mathbb{Z}_2$-不变对象（连同一个幂等元的选取）来表示 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(B)$ 中的任意对象。□

命题 5.14 中的描述表明，在 $B = A^{\vee_J}$ 的情形下，$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A^{\vee_J})$ 的每个对象都可以表示为一个无界扭曲复形，其中包含至多两种对象的无穷多个副本 P_i。

现在我们如下定义 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 的一个子范畴。

定义 5.15。设 A 是与分次轨形曲面**S**的标准剖分相关联的 DG gentle 代数。设 $A^{\vee_J}$ 是如上所述的 A 的适当弱对偶。我们用以下符号表示

$$\mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\, A^{\vee_J}) \subset \mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\, A^{\vee_J})$$

满足以下条件的扭曲复形 X 的满子范畴：只要 $i \notin J$， X 中出现的 P_i 的移位副本数量有限。

注意，对于 $j \in J$， P_j 对应于**S** 中没有停止点的边界分支周围的曲线，如图6所示。允许 $j \in J$具有 P_j的无穷多个副本的扭曲复形时，范畴 $\mathrm{Tw}^{-_J,\,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 恰好包含表示绕这些边界分支盘旋的曲线的无界扭曲复形，但不包含绕**S**中已完全设置停止点的边界分支盘旋的曲线。

根据这些定义，我们现在可以证明以下结论。

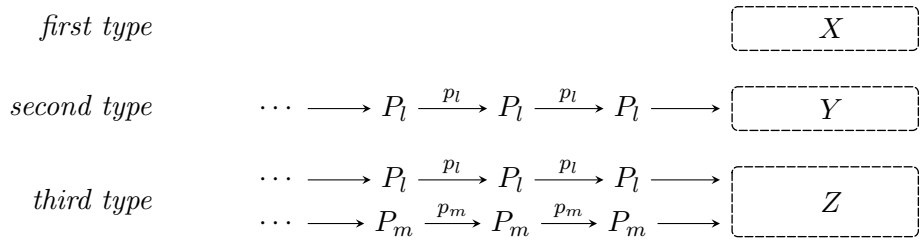
引理 5.16. $\mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 是一个幂等元完备的预三角 *DG* 范畴。

证明。 根据 $\mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 的定义，它对平移和映射锥封闭。由于 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 是幂等元完备的，因此 $\mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 也是如此。□

定理 5.17. 令 $A = (\Bbbk Q/I, d)$ 为由**S** 的标准剖分得到的 *DG gentle* 代数，并令 $J \subset Q_0$ 为所有满足 $\mathrm{End}(P_j)$ 非适当的 $j \in Q_0$ 所成的集合。若 A 是局部适当的，则有如下等价关系

$$\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A) \simeq \mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\, A^{\vee_J}).$$

证明。 $\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 中的对象分类表明，每个不可分解对象至多有两个周期端；对于 $A^{\vee_J}$，这些端是 2-周期的（见命题 5.14）。$\mathrm{Tw}^{-,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 中的每个元素都属于以下三种类型之一，可用图示表示如下



这里，虚线框表示有界扭曲复形 $X, Y, Z \in \mathrm{tw}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$；为简洁起见，我们省略了记号中的平移。最后两种类型的对象属于 $\mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$，当且仅当 $l$resp. l, m 属于 J。

现在注意到，无穷端可以由 $P_j^{\vee_J}$ 表示，适用于 $j \in J$。特别地，每个对象都是由所有 i 对应的 P_i'以及适用于 $j \in J$的$P_j^{\vee_J}$"构成的（有限）迭代映射锥。这表明，$\mathrm{Tw}^{-_J,\ \mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 由 P_i'以及适用于 $j \in J$的 $P_j^{\vee_J}$"生成，也就是说，$\bigoplus_{j\in J} P_j^{\vee_J} \oplus \bigoplus_{i\in Q_0} P_i$是一个生成元。但对于每个$j \in J$，对象 P_j是一个映射 $P_j^{\vee_J} \to P_j^{\vee_J}[1]$的映射锥，因此 P_j'是多余的，而 $\Gamma^{\vee_J} := \bigoplus_{j\in J} P_j^{\vee_J} \oplus \bigoplus_{i\in Q_0\setminus J} P_i$ 也能生成。现在我们有 $\mathrm{End}(\Gamma^{\vee_J}) \simeq A$，因此 $\mathrm{Tw}^{-_J,\ \mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J}) \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\ A)$。□

5.5. **变形等价与曲率问题的解决。**

命题 5.18. 设 $A^{\vee_J}$ 是局部适当 *DG* 代数 A 的（适当）弱对偶。那么 A 和 $A^{\vee_J}$ 在 B_∞ 代数的同伦范畴中具有同构的 *Hochschild* 上链复形。

证明. 按通常方式将 A 和 $A^{\vee_J}$ 视为 DG范畴，我们有以下 DG 范畴的包含

$$\begin{aligned} A &\subset \quad \mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A) \quad \subset \mathrm{DGMod}(A) \\ A^{\vee_J} &\subset \mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\, A^{\vee_J}) \subset \mathrm{DGMod}(A^{\vee_J}) \end{aligned}$$

其中 DGMod(A) 是由所有（右）DG A-模组成的 DG 范畴。在这两种情形下，第一个包含是将一个对象视为单项扭曲复形给出的，第二个包含则由 Yoneda 嵌入诱导。于是由 [LVdB05，定理 4.4。1]可知，诱导出的 Hochschild 复形之间的限制映射

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{DGMod}(A)) &\longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A)) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(A) \\ \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{DGMod}(A^{\vee_J})) &\longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(A^{\vee_J})) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(A^{\vee_J}) \end{aligned} \tag{5.19}$$

都是 B_∞ 代数的拟同构。（这里为简便起见，我们将 $\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{C})$ 记作 $\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{C},\mathcal{C})$。）由 [Kel03] 定理 5.17 中的拟等价 $\mathrm{tw}(\mathrm{add}\ A) \simeq \mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J})$ 诱导出一个拟同构 $\mathrm{C}^\bullet(\mathrm{tw}(\mathrm{add}\ A)) \to \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{Tw}^{-_J,\mathrm{b}}(\mathrm{add}\ A^{\vee_J}))$，因此（5.19）的各行在 B_∞ 代数的同伦范畴中也同构。□

汇总上述得到的各项结果，现在我们可以证明，弱对偶性为$\mathbf{S}$的曲率问题提供了一种解法。

定理 5.20。 设$\mathbf{S}$是任意一个边界上带有停止点的分次轨形曲面。若$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 是局部适当的，则存在一个适当的 *DG gentle* 代数 B，使得

- $\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{Tw}^{-_J,\ \mathrm{b}}$(添加 B) 作为预三角化 A_∞ 范畴
- $\mathrm{Tw}^{-_J,\ \mathrm{b}}$(添加 B) 与 B 具有等价的变形理论$_\sim$
- B 存在一个（未弯曲）微分分次变形的半普适族 $B = \{B_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$。

特别地，完整的变形理论 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 可以通过 B的（未弯曲）微分分次变形来描述。

证明。我们可以令 A 为与 $\mathbf{S}$ 的标准剖分相关联的 DG gentle 代数，并令 $B = A^{\vee_J}$ 为其（适当）弱对偶，它也是一个 DG gentle 代数。第一个断言已在定理 5.17中证明。第二个断言已在命题5.18中证明。因此，只需证明第三个断言。

与定理 4.10的证明中一样，令 L 表示具有一个边界停止点且绕数为 1 的边界分支数，并令 M_1 和 M_2 分别表示具有完整边界停止点且绕数为 1 和 2 的边界分支数。由定理 4.10 可得 $L + M_1 + M_2 = \dim \mathrm{HH}^2(B, B) =: d$。~现在，我们利用定理 B 证明中给出的、关于 B 的 2-余循环构造一个 DG 代数族 4.10。为简便起见，我们将这些 2-余循环重新标记如下

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_d) = (\varphi^{\mathrm{III}}_{j_1}, \dots, \varphi^{\mathrm{III}}_{j_L}, \varphi^{\mathrm{IV}}_{j_1,1}, \dots, \varphi^{\mathrm{IV}}_{j_1,M_1}, \varphi^{\mathrm{IV}}_{j_2,1}, \dots, \varphi^{\mathrm{IV}}_{j_2,M_2})$$

箭头 $p^{\mathrm{III}}_{j_i}$、$q^{\mathrm{III}}_{j_i}$、$p^{\mathrm{IV}}_{j_1,i}$、$p^{\mathrm{IV}}_{j_2,i}$也类似。

令 $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_d]$，并令 $\widetilde{B} = (B \otimes R,\ \widetilde{\mu}^1,\ \widetilde{\mu}^2)$ 为微分分次 R-代数，它定义在与 B 相同的分次箭图上（见命题2.5），但关系和微分作如下修改：

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}^1(p_i) &= x_i q_i & 1 \le i \le L \\ \widetilde{\mu}^2(p_i \otimes p_i) &= x_i e_i & L+1 \le i \le L+M_1 \\ \widetilde{\mu}^1(p_i) &= x_i e_i & L+M_1+1 \le i \le L+M_1+M_2. \end{aligned}$$

~注意，B是一个微分分次 gentle R-代数。这里，x_1、……、x_d视为 $\mathbb{A}^d$上的坐标函数。一个（闭）点 $\lambda \in \mathbb{A}^d \simeq$谱 $\Bbbk[x_1, \dots, x_d]$对应于极大理想 $\mathfrak{m}_\lambda = (x_1 - \lambda_1$、……、$x_d - \lambda_d)$。记作 $\Bbbk_\lambda = R/\mathfrak{m}_\lambda$。对于 $\mathbb{A}^d$中的任意（闭）点 $\lambda = (\lambda_1$、……、$\lambda_d)$，通过对 $x_i \mapsto \lambda_i$求值给出，因此可得到一个~“严格”变形 $B_\lambda = B \otimes \Bbbk_\lambda$，~它对应于余循环 $\varphi_\lambda = \sum_{1 \le i \le d} \lambda_i \varphi_i$。考虑由 $t_j(x_i - \lambda_i + \mathfrak{m}_\lambda^2) = \delta_{ij}$（其中 $1 \le i,\ j \le d$）给出的 $\mathrm{T}_\lambda \mathbb{A}^d \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^2, \Bbbk)$ 的基 t_1、……、t_d。在此基下，Kodaira–Spencer 映射 $\mathrm{T}_\lambda \mathbb{A}^d \to \mathrm{HH}^2(B_\lambda, B_\lambda)$ 由 $t_i \mapsto [\varphi_i]$给出，其中 $[\varphi_i] \in \mathrm{HH}^2(B_\lambda, B_\lambda)$ 是 2-余循环 φ_i的上同调类。根据构造，在 $\lambda = 0$处的半普遍性成立，因为 $[\varphi_1]$、……、$[\varphi_d]$张成了 $\mathrm{HH}^2(B, B)$。任意 λ 处的普适性则由以下观察得到：B_λ 是 B的一个变形，并且对于 B，所有 2-余循环 φ_1、……、φ_d 仍是 B_λ的 2-余循环；但当 $\lambda_i \neq 0$时，余循环 φ_i 变成了余边界。因此，Kodaira–Spencer 映射是满射，但对于 $\lambda \neq 0$ 不再是同构。□

备注 5.21（弯曲莫里塔变形）。对于任意微分分次（或 A∞）范畴 $\mathcal{A}$ 以及交换诺特 $\Bbbk$-代数 R，存在一个自然映射 [KL09，LVdB15]

$$\Theta \colon \mathrm{Def}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{A}, R) \longrightarrow \mathrm{MC}(\mathcal{A}, R)$$

其中，$\mathrm{Def}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{A}, R)$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Morita R-变形在变形的挠 Morita 等价下的集合；$\mathrm{MC}(\mathcal{A}, R)$ 是 $\mathcal{A}$ 上的 Hochschild 上链复形中 Maurer–Cartan 元素在规范等价下的集合。

准确地说，设 $(\mathcal{B},\mathcal{M},\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Morita R-变形。也就是说，$\mathcal{B}$ 是一个 $\Bbbk$-线性 DG 范畴，$\mathcal{M}$ 是一个 Morita $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-双模，而 $\mathcal{B}$ 是一个 R-线性 A_∞ 范畴，并且 $\mathcal{B}\otimes_R \Bbbk \simeq \mathcal{B}$，参见 [LVdB15，定义 5.2]。$\mathcal{B}$ 上的 R-线性 A_∞ 结构自然定义了一个元素 $\varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}} \in \mathrm{MC}(\mathcal{B},R)$。Morita 双模 $\mathcal{M}$ 诱导出一个典范同构

$$\Phi_{\mathcal{M}}\colon \mathrm{MC}(\mathcal{B},R) \longrightarrow \mathrm{MC}(\mathcal{A},R).$$

定义 $\Theta((\mathcal{B},\ \mathcal{M},\ \mathcal{B})) = \Phi_{\mathcal{M}}(\varphi_{\widetilde{\mathcal{B}}})$。LVdB15，定理 5。4] 表明 Θ 对 $R=\Bbbk[\![t]\!]$是单射。

在近期工作 [LL[a]中，Leh] 将上述单射 Θ扩展为关于$R=\Bbbk[t]/(t^n)$的双射

$$\mathrm{cDef}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{A},R) \longrightarrow \mathrm{MC}(\mathcal{A},R)$$

其中 $\mathrm{cDef}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{A},\ R)$ 表示 $\mathcal{A}$ 在变形的挠 Morita 等价意义下的弯曲 Morita R-变形集合。

在我们的情形中，令 A 为与 S 的标准剖分相关联的局部适当 DG gentle 代数，令 $B = A^{\vee_J}$ 为其适当弱对偶，如定理 5.20 所述。现在令$\mathcal{A} = \mathsf{tw}(\mathsf{add}\ A)$ 和 $\mathcal{B} = \mathsf{tw}(\mathsf{add}\ B)$ 以及 $\mathcal{B}' = \mathsf{Tw}^{-_J}\mathsf{b}(\mathsf{add}\ B)$。由于 $B = A^{\vee_J}$是适当的，因而不允许弯曲变形，由 [LVdB15、~~LL~~[a]] 可知，当映射 $\mathrm{Def}_{\mathrm{tMor}}(-,R)$、$\mathrm{cDef}_{\mathrm{tMor}}(-,R)$、$\mathrm{MC}(-,R)$ 分别作用于 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 时，它们都是双射。因此，我们得到如下图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Def}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{A},R) & \hookrightarrow & \mathrm{cDef}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{A},R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{MC}(\mathcal{A},R) \\
 & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\mathrm{Def}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{B}',R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{cDef}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{B}',R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{MC}(\mathcal{B}',R) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\mathrm{Def}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{B},R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{cDef}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{B},R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{MC}(\mathcal{B},R)
\end{array}$$

顶行的竖直映射由拟等价 $\mathcal{A}\simeq\mathcal{B}'$ 诱导。由此，我们得到一个双射 $\mathrm{cDef}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{A},\ R) \simeq \mathrm{Def}_{\mathrm{tMor}}(\mathcal{B},\ R)$。

注 5.22（曲变形与第二类导出范畴）。尽管我们已经绕过了 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的曲率问题，但同样可以根据定理4.10 中给出的 A 的 2-余循环自然基，为任意分次 gentle 代数构造曲变形的半万有族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$ ——其中也包括产生曲率项的余循环。若能弄清是否存在一族与这族曲代数自然关联的范畴，将会很有意思——例如余导出范畴 [Pos11] 或第二类紧支撑导出范畴 [GL21、GHL]——使其能够直接从 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$ 恢复这族范畴 $\{\mathsf{Tw}^{-_J},\ \mathsf{b}(B_\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$。

5.6. **变形、局部化与完备化**。为了全面处理 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形理论描述，我们需要讨论一个最后的问题；这个问题已经出现在第 5.3–5.5节结果的陈述中，其中一些结果假设 A 是局部适当的。也就是说，当 S 同时具有绕数为 0 且没有停止点的边界分支，以及绕数为

1 或 2 且没有停止点的边界分支时，后一类边界分支会导致曲率问题（第 5.2节）。然而，正如第 5.5节中那样，利用弱对偶性绕开曲率问题，我们将得到一个等价（定理 5.17）

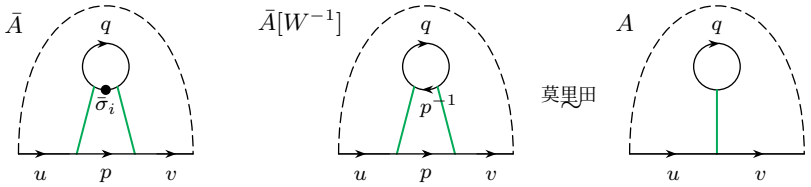
$$\mathrm{tw}(\operatorname{add}\widehat{A}) \simeq \mathrm{Tw}^{-J,\mathrm{b}}(\operatorname{add} A^{\vee_J}). \tag{5.23}$$

前一种类型的边界分支现在意味着 A 不是局部适当的^因此左侧的完备化非平凡，也就是说， $A \not\simeq A$。因此，等价（5.23）只能从弱对偶 $\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{tw}(\operatorname{add} A)$中恢复出来，且仅“在完备化意义下”。（关于分次 gentle 代数情形在这一方向上的进一步结果，参见 $A^{\vee_J}$ OPS [。] ）

为了原样恢复 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$，我们注意到 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$可以按如下方式，作为另一个部分缠绕福柯范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的局部化得到。¯ ¯照常记$\mathbf{S} = (S,\ \Sigma,\ \eta)$，令$\mathbf{S} = (S,\ \Sigma\cup\Sigma,\ \eta)$为从$\mathbf{S}$得到的曲面：对每个绕数为¯0且没有停止点的边界分支，恰添加一个边界停止点。也就是说， $\Sigma = \{\bar{\sigma}_i\}_i$ 其中 i 遍历 S的边界分支，使得 $\partial_i S \cap \Sigma = \varnothing$ 且 $\mathrm{w}\eta\,(\partial_i S)\ = 0$。

$\mathbf{S}$的标准剖分，并按惯例令 A =End(Γ)¯ ¯ ¯和 $A = \mathrm{End}(\Gamma)$。由于 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{S}$ 仅在绕数为 0 的边界分支上不同， Γ 与 Γ 以及 A 与 A 之间的差异可局部观察到，如下图左侧和右侧所示：

(5.24)



¯令 W 表示 A 中由左图里的箭 p 组成的箭集合，中间的图示由下述结果说明。

命题 5.25. 设 A 为与分次轨形曲面$\mathbf{S}$ 的标准剖分¯ ¯
相关联的 *DG gentle* 代数，令 A为$\mathbf{S}$的对应剖分。存在一个局部化函子

$$l\colon \operatorname{add}\bar{A} \longrightarrow \operatorname{add}\bar{A}[W^{-1}]$$

使得 $\bar{A}[W^{-1}]$ 与 A莫里田等价。此外，该局部化诱导出一个函子

$$L\colon \mathcal{W}(\bar{\mathbf{S}}) \longrightarrow \mathcal{W}(\mathbf{S})$$

¯这可以与停止点移除函子相对应，即移除 Σ。

证明。 局部化函子的存在性源于微分分次范畴和 A_∞ 范畴局部化的基本构造，参见例如 [Dri04、To¨e07、LO06]以及 [OT、Pas24、COS]。 $\bar{A}[W^{-1}]$ 与 A 之间的莫里田等价，可以通过直接计算得到，也可以由 [BSW，定理 713] 得出：注意到，正如式（5.24）所示，它们对应于轨形曲面 $\mathbf{S}$的不同剖分。 □

（参见 [GPS24，第 6] 节，介绍一般部分缠绕 Fukaya 范畴中的停止点移除函子。）

定理 5.26。局部化函子 l：加性 $\bar{A}$ 加性 $\bar{A}[W^{-1}]$ 在 ***Hochschild*** 复形之间诱导出映射

$$\mathrm{C}^\bullet(\bar{A},\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet(\bar{A},\bar{A}[W^{-1}]) \longleftarrow \mathrm{C}^\bullet(\bar{A}[W^{-1}],\bar{A}[W^{-1}]) \simeq \mathrm{C}^\bullet(A,A) \tag{5.27}$$

这些映射诱导出同构

$$\mathrm{HH}^n(\bar{A},\bar{A}) \simeq \mathrm{HH}^n(A,A)$$

对所有 $n \geq 2$均成立。特别地，$\mathcal{W}$（**S**）的每个一阶变形都由 $\mathcal{W}$（**S**）的一个一阶变形诱导。

证明。注意，$\bar{A}$ 和 A 都是 DG gentle 代数。由于 $\bar{A}[W^{-1}]$ 和 A 根据命题5.25是Morita等价的，因此它们具有同构的 Hochschild 复形（见第 3.3节）。(5.27）中的 Hochschild 复形之间的映射由局部化给出的前复合和后复合映射诱导，即任意上链 $\bar{A}^{\otimes n} \to \bar{A}$都会诱导一个上链 $\bar{A}^{\otimes n} \to \bar{A} \to \bar{A}[W^{-1}]$，而任意上链（$\bar{A}[W^{-1}]$）$^{\otimes n} \to \bar{A}[W^{-1}]$都会诱导一个上链 $\bar{A}^{\otimes n}$（$\bar{A}[W^{-1}]$）$^{\otimes n} \to \bar{A}[W^{-1}]$。

关于 $n \geq 2$ 上诱导同构的陈述现在可由定理 4.10 的证明中的计算，结合以下三点观察得出。首先，W 中的箭——在 (5.24) 中记为 p ——次数为 0，且在 A 中不出现在任何重叠中。其次，这些箭有唯一的平行路径 —— 在 (5.24) 中记为 q —— 其次数同样为 0。第三，W 中各箭的形式逆元——在 (5.24) 中记为 p^{-1} ——不存在任何平行路径。此外，$\bar{A}$ 与 $\bar{A}[W^{-1}]$ 的曲面和箭图，除涉及 p、q 和 p^{-1} 的路径外，完全相同。因此，现在计算 $n \geq 2$ 的 HH^n 时，唯一的区别在于存在由下式确定的 2-余循环 φ_p

$$\begin{aligned} \varphi_p \colon p^{-1}p &\longmapsto e_{\mathrm{s}(p)} \\ pp^{-1} &\longmapsto e_{\mathrm{t}(p)}. \end{aligned}$$

由于关系 $p^{-1}p = e_{\mathrm{s}(p)}$ 和 $pp^{-1} = e_{\mathrm{t}(p)}$ 已存在于 $\bar{A}[W^{-1}]$中，这些 2-余循环是余边界（参见 [BW[a]，例 918]）。这些观察现在表明，$\bar{A}$ 与 $\bar{A}[W^{-1}]$的 Hochschild 上同调之差至多体现在总次数为 1 的上链上，由此得到 HH^n 的同构，对所有 $n \geq 2$ 均成立。□

当 $\mathcal{W}$(**S**) 面临曲率问题时，我们可以将 $\mathcal{W}$(**S**) 视为局部适当范畴 $\mathcal{W}$(**S**) 的局部化，并对后者进行变形，从而避免考虑非局部适当的 DG gentle 代数的完备化。

注记 5.28（代数几何视角）。从 **S**到 **S** 再通过局部化返回的过程，可以从 B 侧视角理解为添加或移除一个“无穷远处”的点。例如，考虑这样的情形：**S** 是一个圆柱/圆环，其中一个边界分支上有一个停止点，并配备了一个在

¯两个边界分支周围绕数均为 0 的线场。此时，$\mathbf{S}$ 由一个在两个边界分支上各有一个边界停止点的圆柱给出。于是我们得到等价

$$\mathrm{D}\mathcal{W}(\mathbf{S}) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{A}^1)$$
$$\mathrm{D}\mathcal{W}(\bar{\mathbf{S}}) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^1)$$

其中局部化由包含映射 $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ 所诱导。

6. Deformations of partially wrapped Fukaya categories

在 2002年国际数学家大会 的演讲“Fukaya 范畴与变形”中， [Sei02] P. Seidel 概述了一项研究计划：通过研究（非紧）恰辛流形上的包裹 Fukaya 范畴的 A_∞ 变形，来研究紧辛流形上的 Fukaya 范畴。Seidel 展示了恰辛流形的部分紧化如何产生 Hochschild余循环，从而参数化其 Fukaya 范畴的 A_∞ 变形。此后，这一计划在代数和几何方面都取得了长足进展。在代数方面，在各种设置下，关于 $\Bbbk$-线性范畴变形的理论已经发展得相当成熟：例如，关于阿贝尔范畴 [LVdB05, LVdB06, BW24], 微分分次和 A_∞ 范畴 [Kel03, KS, GLVdB]，以及 $\Bbbk$-线性 ∞-范畴 [Lur11, BKP18, Iwa]。在每一种设置中，变形都由 Hochschild复形的某个版本控制。

在几何方面，Seidel 所设想的 Fukaya 范畴变形与部分紧化之间的关系，已在相对 Fukaya 范畴的背景下得到研究，例见 [Sei15、She15、She24、PS]。

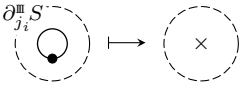
在二次微分模空间与稳定性条件的背景下，曲面所关联的部分紧化与 3-Calabi–Yau范畴变形之间的关系也已在 [Qiu] 中得到研究。在 $\mathbb{Z}_2$-分次且完全绕包的情形下，gentle 代数的变形及其镜像伙伴已在 [BvdK、BvdK25] 中得到研究。

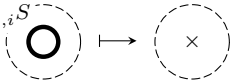
6.1. （$\mathcal{W}(\mathbf{S})$）。现在我们能够证明关于分次轨形曲面部分缠绕 Fukaya 范畴变形理论的主定理。该定理表明，任意抽象的 A_∞ 变形都有一种几何解释，即它是另一个分次轨形曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴。

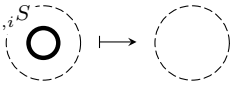
定理6.1。设$\mathbf{S}$ 是一个带有停止点的分次轨形曲面，并用 $d = \dim \mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S}))$表示。则存在一个由一族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$ *DG* 代数诱导的一族 $\{\mathcal{W}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$ 幂等完备预三角*DG*范畴，它们具有以下性质：

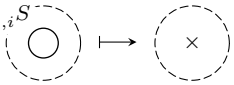
（*i*） $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}$（$\mathbf{S}$） （*ii*）对于每个 $\lambda \in \mathbb{A}^d$，都存在一个曲面 $\mathbf{S}_\lambda$，它由 $\mathbf{S}$ 经部分紧化得到，使得 $\mathcal{W}_\lambda = \mathcal{W}$（$\mathbf{S}_\lambda$）。更准确地说，曲面 $\mathbf{S}_\lambda$ 由下述方式得到

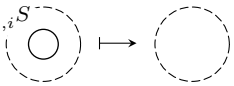
：将 S替换为

$\mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{III}}_{j_i} S) = 1$  若 $\lambda^{\mathrm{III}}_{j_i} \neq 0$ 对于 $1 \le i \le L$

$\mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{IV}}_{j_{1,\ i}} S) = 1$  若 $\lambda^{\mathrm{IV}}_{j_{1},i} \neq 0$ 对于 $1 \le i \le M_1$

$\mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{IV}}_{j_{2,\ i}} S) = 2$  如果 $\lambda^{\mathrm{IV}}_{j_{2},i} \neq 0$ 对于 $1 \le i \le M_2$

$\mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{V}}_{j_{1,\ i}} S) = 1$  如果 $\lambda^{\mathrm{V}}_{j_{1},i} \neq 0$ 对于 $1 \le i \le N_1$

$\mathrm{w}_\eta(\partial^{\mathrm{V}}_{j_{2,\ i}} S) = 2$  如果 $\lambda^{\mathrm{V}}_{j_{2},i} \neq 0$ 对于 $1 \le i \le N_2$

其中

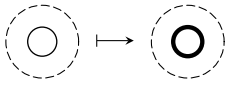
$$\lambda = (\lambda^{\mathrm{III}}_{j1}, \dots, \lambda^{\mathrm{III}}_{j_L}, \lambda^{\mathrm{IV}}_{j1,1}, \dots, \lambda^{\mathrm{IV}}_{j1,M_1}, \lambda^{\mathrm{IV}}_{j2,1}, \dots, \lambda^{\mathrm{IV}}_{j2,M_2}, \lambda^{\mathrm{V}}_{j1,1}, \dots, \lambda^{\mathrm{V}}_{j1,N_1}, \lambda^{\mathrm{V}}_{j2,1}, \dots, \lambda^{\mathrm{V}}_{j2,N_2}).$$

(iii) 族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{A}^d}$ 在每个 $\lambda \in \mathbb{A}^d$ 处都是半万能的，并且在 $0 \in \mathbb{A}^d$ 处是半泛的，即对于所有 λ，*Kodaira–Spencer* 映射 $T_\lambda \mathbb{A}^d$ $HH^2(B_\lambda, B_\lambda)$ 都是满射；对于 $\lambda = 0$，它是同构。*(iv)* 对于每个 $\lambda \in \mathbb{A}^d$，*DG* 代数 B_λ 都是形式的。*(v)* 如果 *S* 有一个不对 $HH^2(\mathcal{W}(S)\ \mathcal{W}(S))$ 作出贡献的边界分支，那么 $\mathcal{W}_\lambda$ 一般是刚性的，即对于一般的 λ，$HH^2(\mathcal{W}_\lambda, \mathcal{W}_\lambda) = 0$ 。

参见图 8 ，其中展示了变形对 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的影响 in 定理 6.1。

证明。 令 A 表示与S的一个标准剖分相关联的代数。若 A 适当，则其变形族由定理5.20构造。接下来需要推出一般情形，并给出这些变形的几何解释。首先，假设 A 局部适当。则其弱对偶 $B = A^{\vee_J}$ 是一个适当的~微分分次 gentle 代数；同样由定理5.20 可知，它具有一个微分分次变形的半万有族 B ，且（iii）已在该定理的证明中得到证明。按照同一证明中的写法，将$B_\lambda = \widetilde{B} \otimes \Bbbk_\lambda$ 记为……，并令 $\mathcal{W}_\lambda = \mathrm{Tw}^{-_J}{}_{\flat}(\mathrm{add}\ B_\lambda)$。我们有 $B_0 \simeq B$，由定理5.17 可得一个等价 $\mathcal{W}_0 \simeq \mathrm{Tw}^{-_J}{}_{\flat}(\mathrm{add}\ B_0) \simeq \mathrm{tw}(\mathrm{add}\ A) \simeq \mathcal{W}(\mathbf{S})$，从而证明（$i$）。

曲面$\mathbf{S}^{\vee_J}$ 的 $B = A^{\vee_J}$ 是通过将$\mathbf{S}$ 中所有没有停止点的边界分支替换为带有完整边界停止点的边界分支而得到的，如下图所示：



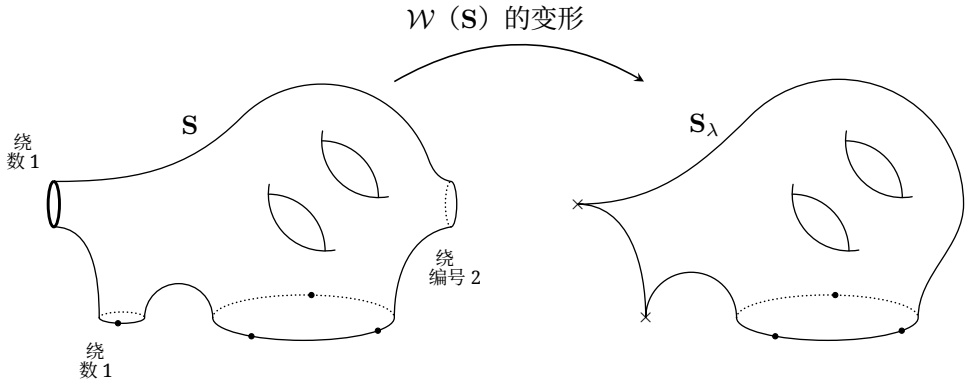
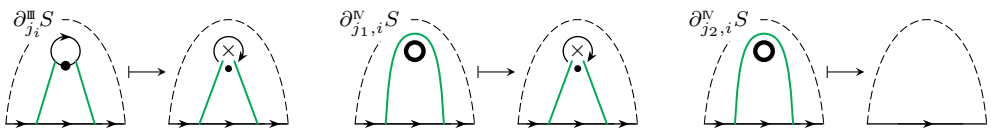


FIGURE 8. 部分缠绕福柯范畴的变形所产生的效果示意图 $\mathcal{W}$（$\mathbf{S}$）分次曲面$\mathbf{S}$（定理6.1）。此处 $\dim \mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S})) = 3$，它来自具有指定绕数的三个边界分支（定理4.10）。对于变形参数的一般取值 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，所得的变形范畴是部分缠绕福柯范畴$\mathcal{W}$（$\mathbf{S}_\lambda$），其对应于一个轨形曲面$\mathbf{S}_\lambda$；其中，两个变形参数对应于将绕数为 1 的边界分支部分紧化为轨形点，第三个参数则对应于将绕数为 2 的边界分支部分紧化。

在证明的其余部分，我们假设$\mathbf{S}$ 只有一个边界分支$\partial_0 S$，且该边界分支要么有多个边界停止点，要么绕数为 $\mathrm{w}^\eta(\partial_0 S) \neq 1$。（所有带有边界停止点的边界分支都恰好有一个停止点且绕数为 1 的特殊情形将在第7 节中处理，我们也将在该节完成此情形下的证明。）

为证明 (ii) 和 (iv)，令 S_λ 为定理陈述中的 S 的修改，并令 $\mathrm{S}_\lambda^\vee$ 为通过给 S_λ 中每个没有停止点的边界分支添加一个完整边界停止点，从 S_λ 得到的曲面模型。我们断言，B_λ 是一个以 $\mathrm{S}_\lambda^\vee$为曲面模型的 DG gentle 代数。由于 $B = B_0$ 由 $\mathrm{S}^{\vee_J} = \mathrm{S}_0^\vee$的剖分 Δ 给出，如图 1 所示，我们可以找到 S_λ 的一个剖分 Δ_λ，它由 Δ 经过以下修改得到



只要 λ 中相应的条目非零。

经过这些修改，Δ_λ 是$\mathbf{S}_\lambda$ 在 [BSW第 8] 节（另见定理4.8）意义下的形式剖分，我们声称相应生成元 Γ_λ 的自同态代数与 B_λ莫里田等价。首先注意，根据

通过对 $p^{\mathrm{III}}_{j_i}$, $p^{\mathrm{IV}}_{j_1,\ i}$ 或 $p^{\mathrm{IV}}_{j_2,\ i}$ 进行缩放，我们可以假设 λ 的元素不是 0 就是 1。为证明 End(Γ_λ) 与 B_λ莫里田等价，我们使用以下三个观察结果。观察 *1*。存在一个代数同构

$$\mathbb{k}\left(\begin{tikzcd} & 2^+ \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "c"'] & & 3 \\ & 2^- \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}\right) \Big/ (ba-dc) \xrightarrow{f} \mathbb{k}\left(\begin{tikzcd} & 2 \arrow[loop above, "p"] \arrow[dr, bend left, "v_2"] & \\ 1 \arrow[ur, bend left, "v_1"] & & 3 \end{tikzcd}\right) \Big/ (p^2-e_2) \tag{6.2}$$

由.....给出

$$\begin{array}{llll} f(e_1)=e_1 & f(e_{2^+})=\frac{1}{2}(e_2+p) & f(a)=\frac{1}{2}(e_2+p)v_1 & f(b)=\frac{1}{2}v_2(e_2+p) \\ f(e_3)=e_3 & f(e_{2^-})=\frac{1}{2}(e_2-p) & f(c)=\frac{1}{2}(e_2-p)v_1 & f(d)=\frac{1}{2}v_2(e_2+p). \end{array}$$

观察 *2.* 存在一个拟同构

$$\mathbb{k}\left(\begin{tikzcd} & 2^+ \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "c"'] & & 3 \\ & 2^- \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}\right) \Big/ (ba-dc) \xrightarrow{F_1} \left(\mathbb{k}\left(\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "v_1"'] & 2^- \arrow[r, bend left, "q"] \arrow[r, "p"'] & 2^+ \arrow[r, "v_2"'] & 3 \end{tikzcd}\right), d(p)=q\right) \tag{6.3}$$

由.....给出

$$\begin{array}{llll} F_1(e_1)=e_1 & F_1(e_{2^+})=e_{2^+} & F_1(a)=pv_1 & F_1(b)=v_2 \\ F_1(e_3)=e_3 & F_1(e_{2^-})=e_{2^-} & F_1(c)=v_1 & F_1(d)=v_2p \end{array}$$

对于满足约束条件的任意分次 $|p|=0$, $|q|=1$, $|a|=|c|=|v_1|$ 以及 $|b|=|d|=|v_2|$。容易验证， F_1 是 DG 代数态射，其中左侧被视为微分为零的 DG 代数，并且该态射诱导出与右侧上同调的同构。（例如，注意到 q是一个余边界，而 p 不是余循环，因此 p 和 q 都不在F_1的像中。）结合 F_1 和 f，我们还得到一个从（6.2）右侧到（6.3）右侧的拟同构。

观察 *3.*存在一个拟同构

$$\mathbb{k}\left(1 \xrightarrow{a} 3\right) \xrightarrow{F_2} \left(\mathbb{k}\left(\begin{tikzcd} & 2 \arrow[loop above, "p"] \arrow[dr, bend left, "v_2"] & \\ 1 \arrow[ur, bend left, "v_1"] & & 3 \end{tikzcd}\right), d(p)=e_2\right) \tag{6.4}$$

由.....给出

$$F_2(e_1)=e_1 \qquad F_2(e_3)=e_3 \qquad F_2(a)=v_2pv_1$$

对于满足 $|p|=-1$ 和 $|a|=|v_1|+|v_2|$ 的任意分次。

这三个观察合起来给出一个拟同构 End(Γ_λ) $\simeq B_\lambda$。也就是说，在 (6.2) 中， p 扮演 $p^{\mathrm{IV}}_{j_1}$ 的角色；对于 $1\le i\le M_1$，只要 $\lambda^{\mathrm{IV}}_{j_1、\ i}\neq 0$ 和 v_1、v_2 分别是以 $p^{\mathrm{IV}}_{j_1、\ i}$ 的源点／靶点为终点或起点的任意路径，它们便扮演相应的角色。这里我们还使用了到 (6.3) 右侧的拟同构。类似地，在 (6.3) 中， p 和 q 扮演 $p^{\mathrm{III}}_{j_i}$,1 和 $q^{\mathrm{III}}_{j_i}$ 的角色；对于 $1\le i\le L$，只要 $\lambda^{\mathrm{III}}_{j_i}\neq 0$ 和 v_1、v_2 仍然是路径即可。在 (6.4) 中， p 扮演 $p^{\mathrm{IV}}_{j_2}$ 的角色；对于 $1\le i\le M_2$，只要 $\lambda^{\mathrm{IV}}_{j_2、\ i}\neq 0$ 即可。特别地， B_λ 拟同构于一个 DG gentle 代数，其中微分仍由将某些箭映到平行箭头、并在所有其他路径上取零给出。特别地，某些无界扭曲复形范畴 Tw^{-J},b(add B_λ) 的定义（定义 5.15）仍然

定义良好。由于 $\mathbf{H}^\bullet(B_\lambda)$ 仍是一个分次 skew-gentle 代数，依据 [BSW，第 8] 节（另见第 节），第5.4 节的结果也适用于 B_λ。特别地，我们有 $\mathrm{tw}(\mathrm{add}\ B_\lambda) \simeq \mathcal{W}(\mathbf{S}^\vee_\lambda)$ 和 $\mathrm{Tw}^{-\prime,\flat}(\mathrm{add}\ B_\lambda) \simeq \mathcal{W}(\mathbf{S}_\lambda)$。这就证明了当 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 局部适当时的情形（ii）。

当 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 不是局部适当时，我们可以将其视为局部适当范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的局部化（参见第5节 5.6）。由于根据定理 5.26，$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的每个一阶变形都由 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形诱导，因此，刚刚构造的 $\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 变形族经局部化后，便产生了 $= \mathcal{W}(\mathbf{S})[W^{-1}]$ 的变形族$\mathcal{W}$。□

注6.5。变形曲面 $\mathbf{S}_\lambda$ 不一定包含边界停止点。例如，若 $\mathbf{S}$ 中带有边界停止点的所有边界分支都恰好有 1 个停止点且绕数为 1，但另有一些带有完整边界停止点、无法变形的边界分支。一个特殊情形是，$\mathbf{S}$ 恰好有 4 个边界分支，而 $\mathbf{S}$ 中带有边界停止点的边界分支都恰好有 1 个停止点且绕数为 1；此时，变形曲面 $\mathbf{S}_\lambda$ 是无边界的紧致曲面。下一节将对此进行详细讨论。

7. Fukaya categories of pillowcases

第 6.1 节的结果表明，$\mathcal{W}(\mathbf{S})$ 的变形对应于$\mathbf{S}$ 的某些边界分支的紧化，这些边界分支的绕数为 1 或 2。因此，经过变形，所有边界分支$\mathbf{S}$ 都有可能被紧化，从而得到一个边界为空的紧轨形曲面。

在这种情况下，结果曲面是一个枕头套，即带有四个 2 阶轨形点的拓扑球面。除了光滑环面之外，它是唯一允许全局线场的紧曲面；枕头套可以看作环面关于椭圆 involution 的$\mathbb{Z}_2$-商。与带边界曲面的情形相比，一个定性差异在于，枕头套自然地出现在一个单参数族中；从辛几何视角看，这可由一个取决于球面总体积的参数的存在来解释。从镜像对称视角看，我们可以将枕头套的 B 侧视为一条带有四个 2 阶权重的加权射影直线，每个权重对应一个轨形点。通过 $\mathbb{P}^1$的自同构将前两个加权点固定为 $\{0,1,\infty\} \in \mathbb{P}^1$ 后，第四个轨形点在 $\mathbb{P}^1 \simeq \mathrm{S}^2$ 上的位置模空间是一个数 $\lambda \in \Bbbk \smallsetminus \{0,1\}$。它的双覆盖是一条椭圆曲线 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \lambda\mathbb{Z})$。

令 $\mathbf{S}_\lambda$ 为参数为 $\lambda \in \Bbbk \smallsetminus \{0,1\}$ 的枕头套。与带边界的轨形曲面类似，其 Fukaya 范畴由 [BSW], 引入，我们可以将枕头套 $(\mathbf{S}_\lambda)$的 Fukaya 范畴定义为 $\mathbf{S}_\lambda$ 上某个预三角化 A 范畴余层的整体截面范畴。该余层定义在与 $\mathbf{S}_\lambda$ 的多边形剖分对偶的带状图（或带状复形）上。参数 λ与 A 关系中出现的多边形面积有关（参见注 7.6）。

我们现在定义一族 DG 代数，并用它直接定义枕头套的 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(\mathbf{S}_\lambda)$。该定义基于一种特定的剖分，如图 9右侧所示。我们将在后续工作中证明该定义与剖分的选择无关，并进一步探讨 $\mathcal{W}(\mathbf{S}_\lambda)$ 的性质。

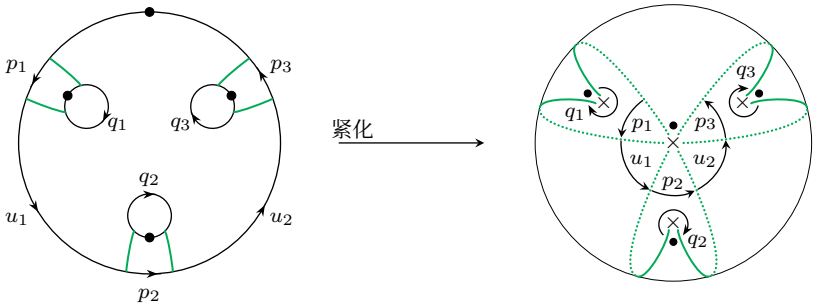
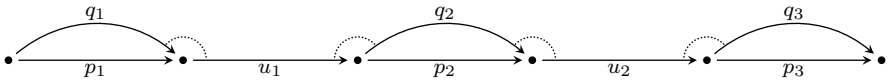


FIGURE 9. 一个亏格 0 曲面，具有四个绕数为 1 的边界分支（左图）；以及将其紧化为枕头套后的模型（右图）。该模型由一个球面表示，正面半球上有三个轨形点，背面有一个轨形点（由左图中的外边界分支紧化而来）

定义 7.1。考虑分次 gentle 代数 A



其中 $|q_1| = |q_2| = |q_3| = 1$ 且所有其他箭的次数均为 0。与 A 相对应的曲面如图 9左侧所示。

注意，$\dim \mathrm{HH}^2(A, A) = 4$ 使用标准余循环时

$$\mu^1(\mathrm{s}p_i) = \lambda_i \mathrm{s}q_i \qquad \text{当 } i = 1, 2, 3 \text{ 时}$$

$$\mu^5(\mathrm{s}q_3 \otimes \mathrm{s}u_2 \otimes \mathrm{s}q_2 \otimes \mathrm{s}u_1 \otimes \mathrm{s}q_1) = \lambda_4 \mathrm{s}p_3u_2p_2u_1p_1$$

并且我们得到一个 4 参数族 $\{A_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}\}$，由上述内容给出的 $A = A_{0,\,0,\,0,\,0}$ 的 A_∞ 变形，以及以下额外乘积组成

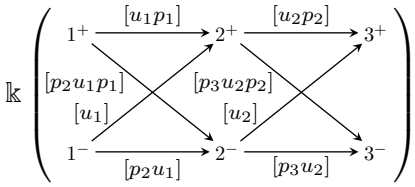
$$\begin{aligned}
\mu^4(\mathrm{s}p_3u_2 \otimes \mathrm{s}q_2 \otimes \mathrm{s}u_1 \otimes \mathrm{s}q_1) &= \lambda_3\lambda_4\, \mathrm{s}p_3u_2p_2u_1p_1 \\
\mu^4(\mathrm{s}q_3 \otimes \mathrm{s}u_2 \otimes \mathrm{s}p_2u_1 \otimes \mathrm{s}q_1) &= \lambda_2\lambda_4\, \mathrm{s}p_3u_2p_2u_1p_1 \\
\mu^4(\mathrm{s}q_3 \otimes \mathrm{s}u_2 \otimes \mathrm{s}q_2 \otimes \mathrm{s}u_1p_1) &= \lambda_1\lambda_4\, \mathrm{s}p_3u_2p_2u_1p_1 \\
\mu^3(\mathrm{s}p_3u_2 \otimes \mathrm{s}q_2 \otimes \mathrm{s}u_1p_1) &= \lambda_1\lambda_3\lambda_4\, \mathrm{s}p_3u_2p_2u_1p_1 \\
\mu^3(\mathrm{s}q_3 \otimes \mathrm{s}u_2 \otimes \mathrm{s}p_2u_1p_1) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_4\, \mathrm{s}p_3u_2p_2u_1p_1 \\
\mu^2(\mathrm{s}p_3u_2p_2 \otimes \mathrm{s}u_1p_1) &= (1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)\mathrm{s}p_3u_2p_2u_1p_1.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

从代数的角度来看，额外乘积（7.2）对于获得定义良好的 A_∞ 代数是必要的。从几何的角度来看，这些乘积可以看作是在一个枕头套中计数伪全纯圆盘。对一组拉格朗日子流形中的伪全纯圆盘进行计数，可以定义一个 A_∞ 范畴，其中伪全纯圆盘的面积 a 产生高阶乘法 T^a 的系数 μ^i，$i \geq 1$，其中 T 是（形式的）Novikov 参数。在枕头套的情形中，系数 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 在（7.2）中可以看作是 $\lambda_i = \mathrm{e}^{-a_i}$，

通过将 Novikov 参数 T^{a_i} 取值为 $T\mathrm{e}^{-1}$而得到，其中 a_i 是圆盘的面积，类似于 [PZ98，第 4]节。特别地，情形 $\lambda_i = 1$ 对应于相应伪全纯圆盘的面积趋于 0 时的极限情形。然而，由于枕头套具有一个（固定的）总体积，在剖分为四个多边形（例如图 9 中的一个六边形和三个二边形）时，在保持总体积固定的情况下，其面积中只有三个可以趋于 0。这为枕头套留下了一个自由度——球面的总（复化）体积——它是有限且非零的。

直接计算可得如下结果。

引理 7.3。 上同调代数 $\mathrm{H}^\bullet(A_{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4})$ 集中在次数0，并可由以下箭图给出：



其中一个方形为反交换：

$$[p_3u_2p_2][u_1p_1] = (1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)[p_3u_2][p_2u_1p_1]$$

其余方形则严格交换：

$$[u_2p_2][u_1p_1] = [u_2][p_2u_1p_1],\quad [p_3u_2p_2][u_1] = [p_3u_2][p_2u_1],$$

$[u_2p_2][u_1] = [u_2][p_2u_1]$.特别地，$A_{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4}$ 是形式的，且$\mathrm{H}^\bullet(A_{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4})$是$A_{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4}$的极小模型。

若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$，则可通过一个同构将这些系数重新缩放为 1。我们将 $A_\lambda = \mathrm{H}^\bullet(A_{1,1,1,\lambda})$ 记为。

定义 7.4（枕头套的 Fukaya 范畴）。设 $\lambda \in \Bbbk \smallsetminus \{0, 1\}$，并设$\mathbf{S}_\lambda$ 是参数为 λ 的枕头套。枕头套的 ***Fukaya*** 范畴 是一个（$\mathbb{Z}$-分次的）预三角化 DG 范畴

$$\mathcal{W}(\mathbf{S}_\lambda) := \mathrm{tw}(\mathrm{add}\, A_\lambda)^\natural.$$

注 7.5。虽然 A_λ 自然地与$\mathbf{S}_\lambda$ 的一个特定剖分相关联，但我们将在后续工作中证明，（在拟等价意义下），$\mathcal{W}(\mathbf{S}_\lambda)$ 不依赖于该剖分，因此也不直接依赖于 A_λ。

理解这个定义与为探究其和结同调之间的关系而研究的枕形曲面的 Fukaya 范畴之间的关系，将会很有意思，参见 [HHK14，HHK18，HHHK20]。

注记 7.6。 在定义 7.4 中，我们排除了以下情形： $\lambda = 0$，$\mathbf{1}$。尽管代数A_0 和 A_1 可以自然地加入族 $\{A_\lambda\}$中，但这两个例外情形有其几何原因。代数 A_0 同构于 skew-gentle 代数

$$\Bbbk\left(\begin{array}{ccccc} p_1 & & p_2 & & p_3 \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ 1 & \xrightarrow{u_1} & 2 & \xrightarrow{u_2} & 3 \end{array}\right) \Big/ \left(p_i^2 - e_i\right)_{1\le i\le 3} \tag{7.7}$$

其曲面模型是一个带有三个轨形点且边界上有一个停止点的圆盘，这对应于以下事实： $\lambda = 0$ 可以看作极限情形 $\mathrm{vol}(\mathbf{S}_\lambda) \to \infty$。因此，相应的曲面是非紧的，而它（更确切地说，其“内部 Liouville 域”）应由一个具有非空边界的曲面表示。

代数 A_1 可以定义为族 A_λ 的退化，该族中唯一具有单项式关系的代数。再次将 λ 理解为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{vol}(\mathbf{S}_\lambda)}$，情形 $\lambda = 1$ 将对应于体积为零的枕头套。

现在我们可以陈述最后一个主要结果，它说明（紧）枕形曲面的 Fukaya 范畴如何作为某些带边界的亏格 0 曲面的部分包裹 Fukaya 范畴的变形出现。

定理 7.8。 设 $\mathbf{S}$ 是一个分次轨形曲面，具有

- $K \geq 0$ 个轨形点
- $L \geq 1$ 个边界分支，每个边界分支带有一个边界停止点，且绕数为 1
- $M_1 \geq 0$ 个边界分支，带有完整边界停止点，绕数1
- $M_2 \geq 0$ 个边界分支，带有完整边界停止点，绕数2
- $N_1 \geq 0$ 个边界分支，不带停止点，绕数1
- $N_2 \geq 0$ 个边界分支，不带停止点，绕数2

且没有其他边界分支。于是 $K + L + M_1 + N_1 = 4$ 和

$$d = \dim \mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S}), \mathcal{W}(\mathbf{S})) = L + M_1 + M_2 + N_1 + N_2 = 4 - K + M_2 + N_2.$$

对于一般的 $\lambda \in \mathbb{A}^d$，范畴 $\mathcal{W}_\lambda \simeq \mathcal{W}(\mathbf{S}_\lambda)$ 在定理 $\{\mathcal{W}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{A}^d}$ 的族*6.1* 等价于枕头套的 *Fukaya* 范畴。

证明。 由 Poincar´e–Hopf 指数定理可得

$$-K - L - M_1 - 2M_2 - N_1 - 2N_2 = 4 - 4g - 2b$$

其中 b 为边界分支的数量。由于 $b = L + M_1 + M_2 + N_1 + N_2$我们得到

$$K + L + M_1 + N_1 = 4 - 4g. \tag{7.9}$$

由于 $L \geq 1$ 且其他数值为 ≥ 0 因此必有 $g = 0$ 和$K + L + M_1 + N_1 = 4$。特别地，数值 M_2和 N_2没有任何限制。$\mathrm{HH}^2(\mathcal{W}(\mathbf{S})\ \mathcal{W}(\mathbf{S}))$ 的维数由定理 4.10给出。

根据定理 6.1，轨形曲面 $\mathbf{S}_\lambda$对于一般的 $\lambda \in \mathbb{A}^d$，可由 $\mathbf{S}$通过部分紧化得到，从而有 $K + L + M_1 + N_1 = 4$ 个轨形点，且所有其他边界分支都紧化为光滑点。也就是说，$\mathbf{S}_\lambda$ 是一个枕头套，而范畴 $\mathcal{W}_\lambda$ 等价于一个枕头套的 Fukaya 范畴 S_λ。 □

Acknowledgements

在撰写本文期间，我们感谢 Merlin Christ、Sheel Ganatra、Fabian Haiden、Julian Holstein、Gustavo Jasso、Dmitry Kaledin、Kyoungmo Kim、Alessandro Lehmann、Sebastian Opper、Yu Qiu 和 Kyungmin Rho，感谢他们提供的有益讨论和意见。

本研究始于波恩豪斯多夫数学研究所的初级三个月项目“表示理论新趋势”期间。该项目由德国研究基金会（DFG）通过德国卓越战略（EXC-2047/1 – 390685813）资助。我们谨向项目组织者和研究所致谢，感谢他们提供了卓越的研究环境。第三作者还获得了中国国家重点研发计划（2024YFA1013803）、中央高校基本科研业务费（编号：020314380037）以及国家自然科学基金委员会（编号：13004005 和 12371043）的资助。

References

[AP] C. Amiot, P.-G. Plamondon, 作为轨形 Fukaya 范畴的斜群 A_∞范畴，arXiv:2405.15466 (2024)。[AL24] R. Anno, T. Logvinenko, 无界扭曲复形，J. Algebra 647 (2024) 794-822。[ALP16] K.K. Arnesen, R. Laking, D. Pauksztello, gentle 代数有界导出范畴中不可分解复形之间的态射，J. Algebra 467 (2016) 1–46。[AH81] I. Assem, D. Happel, 类型为 $\mathbb{A}_n$的广义倾斜代数，Comm. Algebra 9 (1981) 2101–2125。[AS87] I. Assem, A. Skowro´nski, 类型为 $\widetilde{\mathbb{A}}_n$的迭代倾斜代数，Math. Z. 195 (1987) 269–90。[Aur10a] D. Auroux，Fukaya 范畴与带边 Heegaard–Floer 同调，载于《国际数学家大会论文集》（海得拉巴，2010），第 II 卷，917–941，Hindustan Book Agency，Gurgaon，2010。[Aur10b] D. Auroux，对称积的 Fukaya 范畴与带边 Heegaard–Floer 同调，J. G¨okova Geom. Topol. 4 (2010) 1–54。[AKO06] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov，Del Pezzo 曲面的镜像对称：消失圈与凝聚层，Invent. Math. 166 (2006) 537–582。[AKO08] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov，加权射影平面及其非交换变形的镜像对称，Ann. Math. 167 (2008) 867–943。[Bar97] M.J. Bardzell，单项式代数交替的 syzygy 行为，J. Algebra 188 (1997) 69–89。[BCK+] S. Barmeier, C.-H. Cho, K. Kim, K. Rho, S. Schroll, Z. Wang，准备中。[BSW] S. Barmeier, S. Schroll, Z. Wang，轨形曲面的部分缠绕 Fukaya 范畴，arXiv:2407.16358 (2024)。[BW^{a}] S. Barmeier, Z. Wang，带关系箭图的路径代数的变形，即将在 Ast´erisque 发表，ar Xiv:2002.10001 (2020)。[BW24] S. Barmeier, Z. Wang，通过带关系箭图对凝聚层范畴进行变形，Algebr. Geom. 11 (2024) 1–36。[BW26] S. Barmeier, Z. Wang，扩展 Khovanov 弧代数的$_\infty$ A变形与 Stroppel 猜想，Adv. Math. 485 (2026) 110733。[BW^{b}] S. Barmeier, Z. Wang，表示理论中的轨形曲面 Fukaya 范畴，载于《国际代数表示会议论文集》（ICRA 21）（上海，2024），2025。[BSSWW] X. Bian, S. Schroll, A. Solotar, X. Wang, C. Wen，准备中。

[BKP18] A. Blanc, L. Katzarkov, P. Pandit，范畴形式变形中的生成元，Compositio Math. 154 (2018) 2055–2089。[BvdK] R. Bocklandt, J. van de Kreeke，gentle A_∞-代数的变形，arXiv:2304.10223 (2023)。[BvdK25] R. Bocklandt, J. van de Kreeke，带 puncture 曲面的变形镜像对称，J. Algebra 672 (2025) 413–602。[BK91] A.I. Bondal, M.M. Kapranov，增强三角范畴，Math. USSR Sb. 70 (1991) 93–107。[BGO] M. Booth, I. Goodbody, S. Opper，代数与拓扑中的自反 dg 范畴，arXiv:2506.11213 (2025)。[COS] A. Canonaco, M. Ornaghi, P. Stellari，环上 A_∞ 范畴的局部化与内部 Hom，arXiv:2404.06610 (2024)。[CSSS] C. Chaparro, S. Schroll, A. Solotar, M. Su´arez-´Alvarez，gentle 代数的 Hochschild（上）同调，arXiv:2311.08003 (2023)。[CK] C.-H. Cho, K. Kim，标记弧的拓扑 Fukaya 范畴，arXiv:2404.10294 (2024)。[CS15] S. Chouhy, A. Solotar，结合代数的投射分解与歧义，J. Algebra 432 (2015) 22–61。[Chr] M. Christ，通过斜群代数实现 ∞范畴群商，arXiv:2501.13666 (2025)。[Dri04] V. Drinfeld，DG 范畴的 DG 商，J. Algebra 272 (2004) 643–691。[Dyc17] T. Dyckerhoff，曲面拓扑 Fukaya 范畴的 $\mathbb{A}^1$同伦不变量，Compositio Math. 153 (2017) 1673–1705。[DK18] T. Dyckerhoff, M. Kapranov，三角范畴中的三角剖分曲面，J. Eur. Math. Soc. 20 (2018) 1473–1524。[Gan12] S. Ganatra，包裹 Fukaya 范畴的辛上同调与对偶性，博士论文，麻省理工学院，剑桥，马萨诸塞州，2012。[Gan] S. Ganatra，由 Hochschild（上）同调得到辛上同调，见 https: //sheelganatra.com/wrapcy2.pdf。[GPS20] S. Ganatra, J. Pardon, V. Shende，Liouville 扇区上协变函子性的包裹 Floer 理论，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 131 (2020) 73–200。[GPS24] S. Ganatra, J. Pardon, V. Shende，包裹 Fukaya 范畴的扇区下降，J. Amer. Math. Soc. 37 (2024) 499–635。[GLSVdB] F. Genovese, W. Lowen, J. Symons, M. Van den Bergh，通过导出内射对象对带 t-结构的三角范畴进行变形，arXiv:2411.15359 (2024)。[GLVdB] F. Genovese, W. Lowen, M. Van den Bergh，DG-范畴上的 t-结构与导出变形，arXiv:2212.12564 (2022)。[GHL] A. Guan, J. Holstein, A. Lazarev，第二类 Hochschild 上同调：Koszul 对偶与 Morita 不变性，arXiv:2312.16645 (2023)。[GL21] A. Guan, A. Lazarev，第二类紧生成导出范畴的 Koszul 对偶，J. Noncommut. Geom. 15 (2021) 1355–1371。[HKK17] F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich，平坦曲面与稳定性结构，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 126 (2017) 247–318。[HHK14] M. Hedden, C. M. Herald, P. Kirk，枕头套与纽结群无迹表示的扰动，Geom. Topol. 18 (2014) 211–287。[HHK18] M. Hedden, C. M. Herald, P. Kirk，枕头套与纽结群的无迹表示 II：枕头套中的拉格朗日-Floer 理论，J. Symplectic Geom. 16 (2018) 721–815。[HHHK20] M. Hedden, C. M. Herald, M. Hogancamp, P. Kirk，枕头套的 Fukaya 范畴、无迹特征簇与 Khovanov 上同调，Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020) 8391–8437。[Iwa] I. Iwanari，带 t-结构的稳定 ∞-范畴的 Hochschild 上同调与变形理论，arXiv:2506.21867 (2025)。

[Kal15] M. Kalck，温和代数的奇点范畴，Bull. London Math. Soc. 47 (2015) 65–74.[Kal08] D. Kaledin，非交换几何中的同调方法，见 http: //imperium.lenin.ru/~kaledin/math/tokyo/final.pdf，2008.[Kel94] B. Keller，导出 DG 范畴，Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. 27 (1994) 63–102. [Kel03] B. Keller，Hochschild 复形上高阶结构的导出不变性，见 https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/publ/dih.pdf，2003. [Kel21] B. Keller，Hochschild（上）同调与导出范畴，Bull. Iranian Math. Soc. 47 (2021) 491–496. [KL09] B. Keller, W. Lowen，关于 Hochschild 上同调与莫里田变形，Int. Math. Res. Not. IMRN 2009 (2009) 3221–3235. [KLN10] B. Keller, W. Lowen, P. Nicol´as，关于带曲率 DG 代数的某些“导出”范畴是否为零，J. Pure Appl. Algebra 214 (2010) 1271–1284. [Kim24] K. Kim，标记弧系统的拓扑 Fukaya 范畴与导出驯化代数，博士论文，首尔国立大学，首尔，2024. [Kon94] M. Kontsevich，镜像对称的同调代数，国际数学家大会论文集（苏黎世，1994），第 I 卷，120–139，Birkh¨auser，巴塞尔，1995. [Kon01] M. Kontsevich，代数簇的变形量子化，Lett. Math. Phys. 56 (2001) 271–294. [Kon09] M. Kontsevich，同调代数的辛几何，数学工作会议（波恩，2009），MPIM 预印本系列 2009 (40 a)，见 https: //archive.mpim-bonn.mpg.de/id/eprint/1536，马克斯·普朗克数学研究所，波恩，2009. [KS] M. Kontsevich, Y. Soibelman，变形理论 I，书稿，见 http: //www.math.ksu.edu/~soibel/Book-vol1.ps [Leh] A. Lehmann，Hochschild 上同调参数化弯曲莫里塔变形，arXiv:2406.04945v2 (2024). [LL^{a}] A. Lehmann, W. Lowen，弯曲变形的滤过导出范畴，arXiv:2402.08660 (2024). [LL^{b}] A. Lehmann, W. Lowen，Hochschild 上同调与三角范畴的扩张，arXiv:2503.13700 (2025). [LP20] Y. Lekili, A. Polishchuk，通过 Fukaya 范畴得到温和代数的导出等价，Math. Ann. 376 (2020) 187–225. [LQZ] Z. Li, Y. Qiu, Y. Zhou，分次 gentle 代数的 Koszul 对偶的几何实现，arXiv:2403.15190 (2024). [LVdB05] W. Lowen, M. Van den Bergh，阿贝尔范畴与环空间的 Hochschild 上同调，Adv. Math. 198 (2005) 172–221. [LVdB06] W. Lowen, M. Van den Bergh，阿贝尔范畴的变形理论，Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006) 5441–5483. [LVdB15] W. Lowen, M. Van den Bergh，形式变形与无穷小变形的曲率问题，arXiv:1505.03698 (2015). [Lur11] J. Lurie，导出代数几何 X：形式模空间问题，见 https: //people.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG-X.pdf，2011. [LO06] V. Lyubashenko, S. Ovsienko，商 A_∞-范畴的一种构造。Homology Homotopy Appl. 8 (2006) 157–203. [NZ09] D. Nadler, E. Zaslow，可构造层与 Fukaya 范畴，J. Amer. Math. Soc. 22 (2009) 233–286. [OT] Y.-G. Oh, H. L. Tanaka，A∞ 范畴的商与局部化的无穷范畴泛性质，arXiv:2003.05806 (2020). [Opp] S. Opper，正在撰写。[OPS] S. Opper, P.-G. Plamondon, S. Schroll，温和代数导出范畴的几何模型，arXiv:1801.09659 (2018).

[Pas24] J. Pascaleff，关于微分分次范畴与 A∞ 范畴等价性的备注，Homology Homotopy Appl. 26 (2024) 275–285. [PS19] J. Pascaleff, N. Sibilla，带 puncture 曲面的拓扑 Fukaya 范畴与镜像对称，Compositio Math. 155 (2019) 599–644. [PS] T. Perutz, N. Sheridan，构造相对 Fukaya 范畴，即将发表于 J. Symplectic Geom.，arXiv:2203.15482 (2022). [PZ98] A. Polishchuk, E. Zaslow，范畴镜像对称：椭圆曲线，Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 443–470. [Pos11] L. Positselski，两类导出范畴、Koszul 对偶与余模–反余模对应，Mem. Amer. Math. Soc. 212 (2011) 第 996 号. [Qiu] Y. Qiu，二次微分的模空间：Abel–Jacobi 映射与变形，arXiv:2403.10265 (2024). [Sch15] S. Schroll，温和代数的平凡扩张与 Brauer 图代数，J. Algebra 444 (2015) 183–200. [Sei02] P. Seidel，Fukaya 范畴与变形，载于国际数学家大会论文集（北京，2002），第 II 卷，351–360，Higher Ed. Press，北京，2002. [Sei08] P. Seidel，Fukaya 范畴与 Picard–Lefschetz 理论，European Mathematical Society，苏黎世，2008.[Sei15] P. Seidel，四次曲面的同调镜像对称，Mem. Amer. Math. Soc. 236 (2015) 第 1116 号. [She15] N. Sheridan，射影空间中 Calabi–Yau 超曲面的同调镜像对称，Invent. math. 199 (2015) 1–186. [She24] N. Sheridan，相对 Fukaya 范畴的半万能性，Geom. Topol. 24 (2024) 747–884. [STZ14] N. Sibilla, D. Treumann, E. Zaslow，带状图与镜像对称，Selecta Math. 20 (2014) 979–1002. [Syl19] Z. Sylvan，关于部分缠绕 Fukaya 范畴，J. Topol. 12 (2019) 372–441. [To¨e07] B. To¨en， *dg*-范畴的同伦论与导出 Morita 理论，Invent. Math. 167 (2007) 615–667. [Wei94] C. Weibel，同调代数导论，剑桥高等数学研究丛书 38，剑桥大学出版社，剑桥，1994.

University of Cologne, Mathematical Institute, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Germany*Email address*: s.barmeier@gmail.comUniversity of Cologne, Mathematical Institute, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Ger-many*Email address*: schroll@math.uni-koeln.deNanjing University, School of Mathematics, Nanjing 210093, Jiangsu, China*Email address*: zhengfangw@nju.edu.cn