arXiv:2512.16374v1 [math.AT] 18 Dec 2025

相对幺半群模型 ∞-幺半群

K. ARAKAWA、V. CARMONA 和 F. PRATALI

摘要。给定一个（带色）幺半群及一组一元运算，我们可以通过局部化构造一个相关的 ∞-幺半群。我们证明，局部化确定了相对算子与 ∞-幺半群的同伦理论之间的等价。作为应用，我们对 Harpaz 提出的一个开放问题给出肯定回答，证明 Lurie 的操作子神经函子确定了单纯幺半群与 Lurie 的 ∞-幺半群的同伦理论之间的等价。

引言

相对范畴 是（∞，1）-范畴，或简称 ∞-范畴的一种异常简单却强大的模型。相对范畴是一个对（$\mathcal{C}$，W），其中$\mathcal{C}$ 是一个范畴，而 $W \subseteq \mathcal{C}$ 是一个充全子范畴，其态射称为弱等价。 [1]

该定义形式化了数学中的一种常见情形：一个范畴中存在不可逆态射，但它们“表现得像”同构。为了将它们视为同构，我们将 W 中的映射自由地求逆，从而得到一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}[W^{-1}]$，称为 $\mathcal{C}$ 在 W处的**局部化** 。从同伦论发展的早期起，人们就已注意到，许多 ∞-范畴都可以表示为相对范畴 [Qui67, DK80c, DK80a, DK80b]的局部化。这类表示极为有用，因为它们使各种 ∞-范畴构造可以在普通范畴的层面上进行，而在该层面上处理这些构造要容易得多。

自然会问，这样的表示是否总是存在。Joyal 的去局部化定理最初由 Joyal [Joy07, §13.6] 提出，随后由 Stevenson [Ste17, Theorem 1.3], 证明。该定理对此给出了肯定的回答：每个 ∞-范畴都是某个相对范畴的局部化。事实上，根据 Barwick– Kan [BK12a, BK12b], 的工作，我们知道局部化确定了 ∞-范畴之间的一个等价

$$\mathsf{RelCat}[\mathrm{loc.eq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}\mathsf{at}_{\infty},$$

其中 loc.eq 表示局部等价所构成的子范畴，即在局部化后诱导出等价的相对范畴映射。

局部化范畴是一种研究成熟的做法，但人们越来越有兴趣将局部化技术扩展到其他类似范畴的结构，以编码额外的代数信息，例如**歌剧** （也称为对称多重范畴）。歌剧可视为范畴的一种推广，其中态射允许有多个输入，从而能够表达普通范畴所不具备的乘法或复合结构。如果我们有一个歌剧，就可以自由地将其中一组一元箭头求逆，从而得到一个 ∞-歌剧，称为它的**局部化**。更准确地说，将**相对歌剧** 定义为

2020 数学主题分类。18Nxx, 18N55, 18N70, 18M60, 18M75, 55U35. 关键词和短语。相对 ∞-幺半群、局部化、高阶代数、幺半范畴神经。[1]在 Barwick 和 Kan 的原始工作 [BK12a, BK12b] 中， W 只要求包含所有对象。本文修改了定义，因为我们不会在任何地方用到宽性，并且只有在对 ∞-范畴进行不变处理时，才能讨论饱满子范畴。这一修改不会影响相对范畴的同伦论。

一对 $(\mathcal{O},\ S)$，其中 $\mathcal{O}$ 是一个歌剧，而 S 是 $\mathcal{O}$中一元运算范畴 $U(\mathcal{O})$ 的充全子范畴；其**局部化** 是 ∞-歌剧 $\mathcal{O}[S^{-1}]$ ，通过自由地将 S中的运算求逆而得到。

这一构造近来从理论角度（例如， [BBP+18、Pra25]）和实践角度都受到了关注，尤其是在数学物理中因子化代数 和代数性量子场论 的语境下；在这些领域，它被用于处理拓扑公理和动力学公理（例如，[BCGSS24、BCNS25、BCS23、BS25、Cal24、CC25、CS25、Lur17、KSW25]）。

在 [Pra25]，中，第三位作者将 Joyal 去局部化定理推广到了幺半群情形，证明每个 ∞-幺半群都是一个普通（离散）幺半群的局部化。在本文中，我们利用这一结果得到了同伦理论的等价，从而确立了 Barwick–Kan 定理的幺半群版本：

定理 A (定理 2.20)。 相对算子的局部化确定了 ∞-范畴之间的等价

$$\mathsf{RelOp}[\mathrm{loc.eq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\mathsf{p}_{\infty}.$$

作为定理 A 的应用，我们解决了 Harpaz 在 MathOverflow [Har]上提出的一个开放问题。问题是，Lurie 的幺半群神经函子N_{Lurie}: $\mathrm{Op}_{\mathrm{Kan}} \to \mathrm{LQOp}$ 是否确定了从局部 Kan 单纯形运算子到 Lurie 准拟运算子的相关 ∞-范畴之间的等价。

尽管人们预期这种等价“很有可能”成立，因为这是两个 ∞-运算子模型之间“一种相当自然的构造” [Har], ，但由于模型范畴技巧无法直接应用，这一比较已被证明颇为困难。（幺半范畴神经函子既不是左 Quillen 函子，也不是右 Quillen 函子。）

然而，有了定理 A，我们便能给出完整猜想的清晰证明，从而证实 Harpaz 的预期：

定理 B (定理 3.1)。 幺半范畴神经函子确定了 ∞-范畴之间的等价 N_{Lurie}： $\mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}}[\mathrm{weq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathsf{LQOp}[\mathrm{weq}^{-1}]$。

粗略地说，定理 A 使比较变得更容易，因为相对算子及其局部化可以在任何合理的 ∞-算子模型中加以诠释。因此，我们预计，我们的方法可以扩展到比较其他各种 ∞-算子模型。

与其他工作的关系。Barwick–Kan 的等价是在模型范畴层面建立的，而我们关于幺半群的等价则是在相对范畴层面表述的。原则上，应该可以将 Barwick–Kan 的模型范畴推广到算子情形，但由此增加的技术复杂性几乎没有带来什么益处，因此本文不作此尝试。

早在 Harpaz 猜想提出之前，Heuts-Hinich-Moerdijk 就在 [HHM16，命题 6.1 中给出了一个部分肯定的答案。1], 该命题证明了无单位算子（即 开算子）的等价。定理 B 重现并推广了同上中的等价。那篇论文似乎也是首次将 Lurie 的算子神经表述为相对范畴之间的函子——我们同样采用这一视角。除此之外，两种方法有所不同：同上中开算子的等价是通过一串 Quillen 等价得到的，而我们的证明直接依赖定理 A，或许在概念上更为清晰。

本文结构。本文共分为三节。第 1 节回顾 ∞-幺半群和 ∞-范畴的基本定义与事实。第 2 节简要讨论相对 ∞-幺半群及其

局部化。第 3 节通过 Morita 型泛性质（命题 3.6 和 3.8）刻画单纯形和 Lurie 的 ∞- 歌剧的局部化，并证明定理 B。

我们还采用以下约定：

约定 A. 在本文中，我们广泛使用 ∞-范畴。特别是，除非另有说明，各种范畴论构造（余极限、局部化等）均在 ∞-范畴的范畴中进行。大多数情况下，读者无需关心我们使用哪种 ∞-范畴模型。但若要明确说明，我们指的是 *Joyal* [Joy02], 意义下的拟范畴；这是发展最完善的$(\infty,1)$-范畴模型。我们在记号上不区分范畴及其神经，并将“∞-群胚”用作“*Kan* 复形”的同义词。

1. 预备知识

本节回顾关于 ∞-幺半群和∞-范畴的一些基本定义与事实。

1.1. -范畴的模型。

∞存在许多等价的 ∞-范畴模型。本文将关注以下三个模型：

- QCat 是**拟范畴**的范畴；拟范畴是单纯集合范畴上的 Joyal 模型结构的纤维对象 [Lur09，定理 2.2.5。1]
- CSS 是**完全 Segal 空间**的范畴；完全 Segal 空间是单纯形单纯集合范畴（即双单纯形集）上的完全 Segal 空间模型结构的纤维对象 [Rez01，定理 7。2]
- $\mathrm{Cat}_{\mathrm{Kan}}$ 是**局部 Kan 单纯范畴**的范畴；局部 Kan 单纯范畴是单纯范畴上的 Bergner 模型结构的纤维对象 [Ber07]。

我们将这些范畴视为相对范畴，其弱等价是相应模型范畴中的弱等价。

这些相对范畴通过以下函子相互关联：

$$\mathsf{QCat} \xrightarrow{N_{\mathrm{Rezk}}} \mathsf{CSS} \xrightarrow{q} \mathsf{QCat} \xleftarrow{N_{\mathrm{hc}}} \mathsf{Cat}_{\mathrm{Kan}},$$

其中：

- N_{Rezk} 表示如下给出的**Rezk 神经**函子：

$$N_{\mathrm{Rezk}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Map}(\Delta^{\bullet}, \mathcal{C}).$$

这里，Map 表示单纯集合内 Hom 的最大 Kan 子复形。

- q 表示函子 $\mathsf{ev}^{\mathbf{\Delta}_{\mathrm{op}}\ 0}$ ： $\mathsf{sSet}^{\mathbf{\Delta}_{\mathrm{op}}} \to \mathsf{Set}^{\mathbf{\Delta}_{\mathrm{op}}}$的限制。
- N_{hc} 表示**同伦相干神经**函子 [Cor82]。

以下定理断言，这些函子在同伦理论之间诱导出等价：

定理 1.1。这些函子

$$\mathsf{QCat} \xrightarrow{N_{\mathrm{Rezk}}} \mathsf{CSS} \xrightarrow{q} \mathsf{QCat} \xleftarrow{N_{\mathrm{hc}}} \mathsf{Cat}_{\mathrm{Kan}}$$

在对弱等价进行局部化后，诱导出 ∞-范畴之间的等价。

证明。 </style>关于 q 的断言证明见 [JT07, Theorem4.11], ，而关于 N_{Rezk}的断言则由 [JT07, Proposition 1.20 and Theorem 4.12]推出。关于 N_{hc} 的断言证明见 [Lur09, Theorem 2.2.5.1]。 □

由于定理 1.1，我们作如下定义：

定义 1.2. 我们用 Cat_∞ 表示相对范畴 QCat、CSS 或 $\mathsf{Cat}_{\mathrm{Kan}}$中的任意一个，并将其对象称为**具体 ∞-范畴**。我们将 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$记为局部化 $\mathsf{Cat}_\infty[\mathsf{weq}^{-1}]$ ，并将其对象称为 **∞-范畴**。

注记 1.3。 定义 1.2 与约定 A 并不冲突，因为我们可以选择一个不改变对象集的局部化函子 $\mathsf{QCat} \to \mathsf{QCat}[\mathsf{weq}^{-1}]$ 。

1.2. **模型 ∞-歌剧**。 我们在第 1.1 小节讨论的每种 ∞-范畴模型都有相应的操作子推广：

- 范畴 DQOp，其对象是树状准操作子，即树状集合范畴上 operad 模型结构的纤维对象[CM11，定理 2.4]。
- 范畴 CDSS，其对象是完备树状 Segal 空间，即树状单纯集合范畴上 operad 模型结构的纤维对象 [CM13a，定义 6.2]。
- 范畴 $\mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}}$ 的对象是**局部 Kan 单纯形运算子**，它们是单纯形算子范畴上 Dwyer–Kan 模型结构的纤维对象 [CM13b，定理 1.14]。

还有另一种 ∞-幺半群模型，也许是迄今发展得最完善的一种。它建立在 ∞-范畴理论之上，而非对其进行推广：

- 范畴 LQOp 由**Lurie 准拟运算子**构成，它们是 ∞-预操作子范畴上的预操作子模型结构的纤维对象 [Lur17, Proposition 2.1.4.6]。

同样，我们将这些模型各自视为相对范畴，其中弱等价就是相应模型范畴中的弱等价。这些范畴与前文讨论的 ∞-范畴模型构成如下图表，该图表在自然弱等价意义下交换：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathsf{LQOp} & \xrightarrow{\delta} & \mathsf{CDSS} & \xrightarrow{q} & \mathsf{DQOp} & \xleftarrow{N_d} & \mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}} \\ \downarrow{\scriptstyle U_1} & (1) & \downarrow{\scriptstyle U_2} & (2) & \downarrow{\scriptstyle U_3} & (3) & \downarrow{\scriptstyle U_4} \\ \mathsf{QCat} & \xrightarrow[N_{\mathrm{Rezk}}]{} & \mathsf{CSS} & \xrightarrow[q]{} & \mathsf{QCat} & \xleftarrow[N_{\mathrm{hc}}]{} & \mathsf{Cat}_{\mathrm{Kan}}. \end{array} \tag{1.4}$$

下面说明图表中的函子：

- δ 由 $\delta(\mathcal{O}) = \mathrm{Map}_{\mathsf{LQOp}}(i(-)\ \mathcal{O})$ 给出。这里，$\mathrm{Map}_{\mathsf{LQOp}}$ 表示 ∞-预操作子的单纯模型结构中的映射空间，而函子$i\colon \mathbf{\Omega} \subset \mathrm{Op} \to \mathsf{LQOp}$ 表示由 Lurie 的幺半群神经函子 [Lur17, Definition 2.1.1.23]给出的包含。
- q 表示函子 $\mathrm{ev}_{\mathbf{\Omega}^{\mathrm{op}}\ 0} : \mathrm{sSet}^{\mathbf{\Omega}^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Set}^{\mathbf{\Omega}^{\mathrm{op}}}$的限制，它是该包含的右伴随；
- N_d 表示**树状同伦相干神经**函子 [MW09, §7]（hcN_d 见该文献）。
- 函子 U_i's 提取出 ∞-范畴中的一元运算。更准确地说， U_1 取关于 $\langle 1\rangle \in \mathrm{Fin}_*$ 的纤维，而 U_3 由包含 $\mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Omega}$所诱导， U_4 则将一个单纯幺半群映射到其一元运算的单纯范畴。

根据 [Lur17, Example 2.1.3.5]，方形 (1) 在自然弱等价意义下交换；方形 (2) 和 (3) 严格交换。

幺半群范畴 Op 以如下方式全忠实地嵌入到这些范畴中的每一个：

(i) 使用树形神经函子 N_d：$\mathrm{Op} \to \mathsf{DQOp}$ [MW09，第 §2] 节；

(ii) 通过包含 $\mathsf{Op} \to \mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}}$，将一个幺半群视为映射对象离散的单纯幺半群；(iii) 使用 Lurie 的操作子神经函子 $N_{\mathrm{Lurie}}\colon \mathsf{Op} \to \mathsf{LQOp}$ [Lur17，定义 2.1.1。23] 以及函子 $\delta\colon \mathsf{LQOp} \to \mathsf{CDSS}$。

以下结果是定理 1.1 的歌剧类比。

定理 1.5. 这些函子

$$\mathsf{LQOp} \xrightarrow{\delta} \mathsf{CDSS} \xrightarrow{q} \mathsf{DQOp} \xleftarrow{N_d} \mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}}$$

在对弱等价进行局部化后，诱导出 ∞-范畴之间的等价。

证明。对于 δ，该结论已在 [HM24, 定理 1.1.1] 中证明；对于 q，见 [CM13a, 推论 6.7]；而对于 N_d，见 [CM13b, 定理 8.15]。□

考虑到定理 1.5，使用以下定义将很有帮助：

定义 1.6。我们用 Op_∞ 表示相对范畴 LQOp、CDSS、DQOp 或 $\mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}}$中的任意一个，并用 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 表示其在弱等价处的局部化。我们将 Op_∞ 的对象称为具体的 **∞-幺半群**，将 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 的对象称为 **∞-幺半群**。

图 1.4 给出了遗忘函子 $U\colon \mathsf{Op}_\infty \to \mathsf{Cat}_\infty$ 和 $U\colon \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty \to \mathcal{C}\mathsf{at}_\infty$。若 $\mathcal{O}$ 是一个具体的 ∞-幺半群（或一个 ∞-幺半群），我们将 $U(\mathcal{O})$称为**具体的∞-一元运算范畴**（或称为 **∞-范畴一元运算**）。

注 1.7。函子 $U\colon \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty \to \mathcal{C}\mathsf{at}_\infty$ 有一个全忠实左伴随。（这是因为，例如，函子 $U_3 : \mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}} \to \mathsf{Cat}_{\mathrm{Kan}}$ 属于一个 Quillen 伴随，且其导出单位是同构。）我们将利用这个左伴随，把 $\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty$ 视为 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 的全子范畴。

注记 1.8. ∞-范畴 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 具有对称幺半结构。举例而言，可以通过观察到 Lurie 针对拟幺半群的模型结构是一个对称幺半模型范畴来得出这一点（[Lur17, 命题 2.2.5.7]）；也可以利用 Hinich-Moerdijk 的结果，该结果将树状集合的张量积提升为 CDSS 的 ∞-范畴上的对称幺半结构（[HM24, §5]）。[HM24, 定理 1.1.1]保证这两个张量积等价。展开定义后，我们发现，包含 $\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty \hookrightarrow \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 可以提升为对称幺半函子，其中 $\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty$ carries 笛卡尔幺半结构。因此，按照 [Lur17, 定义 4.2.1.28]的意义，$\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 可以在 $\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty$ 上富化（也就是说，它可以提升为一个 $(\infty, 2)$-范畴）。我们将其映射范畴记为 $\mathsf{Alg}_{-}(-)$。于是我们有一个等价

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{O}, \mathcal{P}) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{P}))$$

关于所有变量都是自然的。

2. 主要结果

本节陈述并证明本文的主要结果，即相对幺半群为 ∞-幺半群提供模型（定理 2.20）。为准确陈述这一主要结果，我们先简要讨论相对 ∞-范畴和相对 ∞-幺半群。

2.1. **相对 ∞-范畴**。 本小节介绍相对 ∞-范畴。

定义 2.1。 一个**具体相对 ∞-范畴** 是一个二元组 $(\mathcal{C}, S)$，其中 $\mathcal{C}$ 是一个具体的 ∞-范畴，而 S 是 $\mathcal{C}$ 中的一组态射，在 $\mathcal{C}$的复合下稳定；当将其视为 $\mathcal{C}$中从 $[1] \to \mathcal{C}$ 出发的函子集合时，在自然等价下也稳定。

一个**相对函子** $(\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ 是具体 ∞-范畴之间的一个 Map $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，将 S 映入 T。我们令 $\mathbf{RelCat}_\infty$ 表示相对具体 ∞-范畴及相对函子所构成的范畴。

定义 2.2。 一个**相对 ∞-范畴** 是 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$的一个单态射 $S \to \mathcal{C}$，我们通常将其缩写为 $(\mathcal{C}, S)$。我们令 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty \subset \mathbf{Fun}([1], \mathcal{C}\mathrm{at}_\infty)$ 表示由相对 ∞-范畴生成的全子范畴。

注 2.3. 利用 Ara24 中关于∞-范畴的箭头范畴映射空间的描述及命题 B.1], ，我们得到 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的映射空间如下描述：若 $(\mathcal{C}, S)$ 和 $(\mathcal{D}, T)$ 是相对 ∞-范畴，则映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}((\mathcal{C}, S), (\mathcal{D}, T)) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

是全忠实的，其本质像由满足以下条件的映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 组成：其在 S 上的限制经由 T 分解。

与相对 ∞-范畴相关的一项重要操作是局部化：

定义 2.4. 设 $(\mathcal{C}, S)$ 是一个相对 ∞-范畴。若映射 $\gamma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$of ∞-范畴**展示** $\mathcal{D}$ **为** $\mathcal{C}$ **在** S 处的局部化，则称之为如此；如果对于每个 ∞-范畴$\mathcal{Z}$，与 γ 的前复合都会诱导一个等价

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{D}, \mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}^S_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, \mathcal{Z}),$$

其中 $\mathbf{Map}^S_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, \mathcal{Z}) \subset \mathbf{Map}^{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, \mathcal{Z})$ 表示由映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}$ 所张成的全子 ∞-群胚，这些映射将 S 的每个态射映为 $\mathcal{Z}$中的一个等价。若满足此条件，我们记作 $\mathcal{D} = \mathcal{C}[S^{-1}]$。

注2.5：注意，相对 ∞-范畴 $(\mathcal{C}, S)$ 的局部化总是存在的；例如，我们可以直接取推出 $S[S^{-1}] \amalg_S \mathcal{C}$，其中 $S[S^{-1}]$ 表示 S 的 ∞-群胚完备化。由注2.3可知，局部化甚至可以函子性地构造：包含

$$\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty \hookrightarrow \mathcal{R}\mathsf{el}\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty,\ \mathcal{C} \mapsto (\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\simeq}) = (\mathcal{C}, \text{equivalences})$$

存在一个左伴随，其单位映射由局部化给出。

注2.6：∞-范畴的局部化具有 $(\infty,2)$-泛性质。更准确地说，函子 $\gamma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ （ ∞-范畴之间）将 $\mathcal{D}$ 表示为 $\mathcal{C}$ 在 S 处的局部化，当且仅当它满足以下一个表面上更强的条件：对于每个 ∞-范畴 $\mathcal{Z}$，与 γ 前复合会诱导出 ∞-范畴之间的一个等价

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C}, \mathcal{Z}),$$

其中 $\mathbf{Fun}(-,-)$ 表示笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 的内 Hom，而右侧是 $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{Z})$ 的全子范畴，该子范畴由将 S 中每个映射送到 $\mathcal{Z}$ 中等价的函子张成。这个泛性质由米田引理得出，因为我们有如下同一性

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{A}, \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C}, \mathcal{Z})) \simeq \mathrm{Map}^S_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{Z})).$$

请注意，在某些文献中（最著名的例子是 [Lur09]），术语“局部化”专指具有全忠实右伴随的函子。因此，我们意义上的局部化有时称为*Dwyer–Kan* 局部化。

如果一个具体相对 ∞-范畴之间的相对函子在 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 中的像是等价，我们就称它为**相对等价** 。根据这个定义，我们有：

命题2.7。函子

$$\mathsf{RelCat}_\infty[\mathrm{rel.eq}^{-1}] \to \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$$

是 ∞-范畴之间的等价，其中$\mathrm{rel.eq}$ 表示其在 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 中的像为等价的映射所构成的子范畴。

证明。所考虑的函子本质满，因此只需证明它是全忠实的。我们利用导出映射空间引理 [ACK25，定理2.2], 来证明，该引理通过分解刻画局部化的映射空间。

给定一个具体的相对 ∞-范畴 $(\mathcal{C}, S)$，在定义 Cat_∞ 的任一模型结构中，选取$\mathcal{C}$ 的余单纯分解 $\mathcal{C}^\bullet$ 。我们将 $\mathcal{C}^\bullet$ 扩张为 RelCat_∞ 中的余单纯对象 $(\mathcal{C}^\bullet, S^\bullet)$，使得对每个 $n \geq 0$, 映射 $(\mathcal{C}^n, S^n) \to (\mathcal{C}, S)$ 都是相对等价。（具体而言， S^n 是 S在 $\mathcal{C}^n \to \mathcal{C}$下的原像。）若 $(\mathcal{D}, T)$ 是任意另一个具体的相对 ∞-范畴，则单纯集合 $\mathsf{RelCat}_\infty((\mathcal{C}^\bullet, S^\bullet), (\mathcal{D}, T))$ 是 $\mathsf{Cat}_\infty(\mathcal{C}^\bullet, \mathcal{D})$ 的全子 ∞-群胚，由这些顶点所张成： $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}$ 决定一个具体相对 ∞-范畴的态射 $\left(\mathcal{C}^0, S^0\right) \to (\mathcal{D}, T)$。

根据 [ACK25，定理 2.2],该映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{RelCat}_\infty}((\mathcal{C}, S), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{RelCat}_\infty}((\mathcal{C}^\bullet, S^\bullet), -)$$

函子 $\mathsf{RelCat}_\infty \to \mathcal{S}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{Map}_{\mathsf{RelCat}_\infty[\mathrm{rel.eq}^{-1}]}((\mathcal{C}, S), -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{RelCat}_\infty}((\mathcal{C}^\bullet, S^\bullet), -).$$

类似地，我们有一个等价

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}_\infty}(\mathcal{C}^\bullet, -).$$

结合二者可知，对于任意具体的相对 ∞-幺半群（$\mathcal{D}$， T），该映射

$$\mathrm{Map}_{\mathsf{RelCat}_\infty[\mathrm{rel.eq}^{-1}]}((\mathcal{C}, S), (\mathcal{D}, T)) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

是 ∞-群胚的一个单态射，其本质像由那些可$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 提升为相对 ∞-范畴（$\mathcal{C}$， S）的态射的映射组成 $\to$（$\mathcal{D}$， T）。由注 2.3 可知，映射 $\mathsf{RelCat}_\infty[\mathrm{rel}。\mathrm{eq}^{-1}] \to \mathcal{R}$ $\mathrm{el}\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$ 是全忠实的，正如所要求的那样。□

2.2. **相对 ∞-幺半群及其局部化**。 在本小节中，我们介绍相对 ∞-幺半群及其局部化的概念。

定义2.8。 我们通过普通拉回定义具体相对∞ 幺半群的普通范畴 RelOp**具体相对**∞**-幺半群**

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{RelOp}_\infty & \longrightarrow & \mathsf{Op}_\infty \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow U \\ \mathsf{RelCat}_\infty & \xrightarrow[\mathrm{ev}_0]{} & \mathsf{Cat}_\infty. \end{array}$$

具体而言，RelOp_∞ 的一个对象是一个对 $(\mathcal{O}, S)$，其中 $\mathcal{O}$ 是一个具体的 ∞-幺半群， S 是 $U(\mathcal{O})$的态射集合，该集合在复合下封闭；将其视为 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\infty$中函子 $[1] \to U(\mathcal{O})$的集合时，它在自然等价下也封闭。我们将通过函子把 Op_∞ 视为 RelOp_∞ 的一个全子范畴

$$\mathsf{Op}_\infty \hookrightarrow \mathsf{RelOp}_\infty, \quad \mathcal{O} \mapsto (\mathcal{O}, U(\mathcal{O})^{\simeq})$$

将 $\mathcal{O}$ 映射到其上的“最小”相对 ∞-幺半群。

当我们采用 Op_∞ 的某个特定选择时，会使用 RelDQOp 之类的记号，以及“相对树状拟运算子”之类的术语。

定义 2.9. 我们通过以下拉回定义一个 ∞-范畴 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty & \longrightarrow & \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow U \\ \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{C}\mathsf{at}_\infty & \xrightarrow[\mathrm{ev}_0]{} & \mathcal{C}\mathsf{at}_\infty, \end{array}$$

并将其对象称为**相对 ∞-幺半群**。具体而言，相对 ∞-幺半群是一个配备了 ∞-范畴 $S \hookrightarrow U(\mathcal{O})$ 的单态射的 ∞-幺半群 $\mathcal{O}$。我们通常将此类有序对缩写为 $(\mathcal{O},\ S)$。

注 2.10。 根据注 2.3，若 $(\mathcal{O},\ S)$ 和 $(\mathcal{P},\ T)$ 是相对 ∞-幺半群，则映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}((\mathcal{O},S),(\mathcal{P},T)) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}(\mathcal{O},\mathcal{P})$$

是 $\mathrm{Map}^{\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}(\mathcal{O},\ \mathcal{P})$ 的全子 ∞-群胚，其对象由将 $\mathcal{O} \to \mathcal{P}$ 映到 T 的映射 S 生成。

利用这一点，我们发现 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 通过“最小”相对运算子函子全忠实地嵌入 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$，正如 Op_∞ 全忠实地嵌入 RelOp_∞ 一样。

存在一个显然的函子

$$\mathsf{RelOp}_\infty \longrightarrow \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty,$$

我们称 RelOp_∞ 中的态射为**相对等价**，如果它在$\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 中的像是等价。于是得到以下命题，其证明与命题 2.7 的证明完全类似：

命题 2.11. 函子

$$\mathsf{RelOp}_\infty[\mathrm{rel.eq}^{-1}] \to \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$$

是 ∞-范畴之间的等价，其中$\mathrm{rel.eq}$ 表示由那些在 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 中的像为等价的映射构成的子范畴。

接下来我们讨论相对 ∞-幺半群的局部化。

定义 2.12. 设 $(\mathcal{O},S)$ 是一个相对 ∞-幺半群。我们称映射 $\gamma\colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$（属于 ∞-幺半群）**展示 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{O}$ 在 S 处的局部化**，如果对于每个 ∞-幺半群 $\mathcal{Q}$，与 γ 前复合会诱导出一个等价

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}^S_{\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}(\mathcal{O},\mathcal{Q}),$$

其中 $\mathrm{Map}^S_{\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}(\mathcal{O},\mathcal{Q}) \subset \mathrm{Map}^{\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty}(\mathcal{O},\mathcal{Q})$ 表示由满足以下条件的映射 $\mathcal{O} \to \mathcal{Q}$ 所张成的全子 ∞-群胚：每个映射都将 S 中的每个态射映入 $U(\mathcal{Q})^{\simeq}$。如果满足此条件，我们记作 $\mathcal{P} = \mathcal{O}[S^{-1}]$。

注 2.13. 在定义 2.12 所述的情形中，底层函子$U(\gamma)\colon U(\mathcal{O}) \to U\big(\mathcal{O}[S^{-1}]\big)$ 是本质满的。为此，将 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}[S^{-1}]$分解为 $\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{Q} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}[S^{-1}]$，其中 $U(\alpha)$ 是本质满的，而 $U(\beta)$ 是全忠实的。根据局部化的泛性质，我们可以在图中找到一条虚线箭头

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{Q} \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & \overset{\chi}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \mathcal{O}[S^{-1}] & \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}]{} & \mathcal{O}[S^{-1}] \end{array}$$

图表的交换性意味着 $U(\beta)$ 是本质满的。因此，$U(\gamma) = U(\beta) \circ U(\alpha)$ 是两个本质满函子的复合，从而得出该结论。

注意，每个相对 ∞-幺半群 $(\mathcal{O},\ S)$ 都存在一个局部化：例如，我们只需将 $\mathcal{O}[S^{-1}]$ 取为推出

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ S[S^{-1}] & \longrightarrow & \mathcal{O}[S^{-1}], \end{array}$$

其中 $S[S^{-1}]$表示范畴 S 在其所有态射处的局部化。结合注2.10，我们可得：

命题 2.14。 包含 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty \hookrightarrow \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 有一个左伴随。

我们将命题 2.14 中的左伴随称为**幺半群局部化函子**，并记作 $L\colon \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty \to \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$。

定义 2.15。 相对 ∞-幺半群或具体相对 ∞-幺半群之间的态射称为**局部等价**，若其在局部化函子 L 下的像是一个等价。

推论 2.16。 函子 $\mathsf{Op}_\infty \hookrightarrow \mathsf{RelOp}_\infty \to \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty \xrightarrow{L} \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 诱导出 ∞-范畴的等价

$$\mathsf{Op}_\infty[\mathrm{weq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathsf{RelOp}_\infty[\mathrm{loc.eq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty[\mathrm{loc.eq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty,$$

其中 $\mathrm{loc.eq}$ 表示局部等价构成的子范畴。

证明。 函子 $\mathsf{Op}_\infty[\mathrm{weq}^{-1}] \to \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 显然是一个等价，因此只需证明中间箭头和右侧箭头是等价。根据命题 2.11，中间箭头的结论成立，因为 rel.eq $\subseteq$loc.eq。根据命题 2.14，右侧箭头的结论成立，因为具有全忠实右伴随的函子是局部化 [Lur25，标签 04JL], ，并且 loc.eq 按定义是 L-局部等价构成的子范畴。□

注记 2.17。 正如 ∞-范畴的局部化一样，幺半群局部化具有一个（∞，2）-泛性质。更准确地说，如果（$\mathcal{O},\ S$）是一个相对 ∞-幺半群，那么对于任意 ∞-幺半群 $\mathcal{P}$，映射

$$\theta\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}(\mathcal{P}) \to \mathrm{Alg}^{S}_{\mathcal{O}}(\mathcal{P})$$

是一个等价，其中右侧表示由将 S 中的每个映射送到 $U(\mathcal{P})$ 的等价的映射所张成的全子范畴。事实上，θ 是映射 $\mathrm{Fun}(S[S^{-1}],\ U(\mathcal{P})) \to \mathrm{Fun}^{S}(S,\ U(\mathcal{P}))$ 的拉回，而根据注记 2.6，该映射是一个等价。

注记 2.18。 注记 2.17 中对幺半群局部化的刻画与 ∞-幺半群的逼近 理论密切相关，参见 [Lur17, §2.3.3] （另见[Har21]或 [CS25, §C]），该理论给出了将（相对）∞-幺半群间的映射判定为局部化的充分条件。读者也可参阅 [CC25, 推论 B.3],以及相关的 [KSW25, 引理 A.4.2], ，其中从相对 ∞-范畴局部化的角度，给出了相对 ∞-幺半群局部化的另一种刻画。

2.3. **定理 A 的证明**。 现在我们可以陈述并证明本文的主要结果（定理 2.20）。

定义 2.19。 一个**相对歌剧** 是一个偶对 $(\mathcal{O}, S)$，其中 $\mathcal{O}$ 是一个歌剧，S 是由一元运算范畴构成的充全子范畴，其态射称为**弱等价**。相对歌剧之间的**态射** 是底层歌剧之间保持弱等价的态射。我们用 RelOp 表示相对歌剧及其态射构成的范畴。注意，我们可以将 RelOp 识别为 $\mathcal{R}\mathrm{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 的一个全子范畴。

定理 2.20。 复合$\mathsf{RelOp} \hookrightarrow \mathcal{R}\mathsf{el}\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty \xrightarrow{L} \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 诱导出一个 ∞-范畴之间的等价

$$\mathsf{RelOp}[\mathrm{loc.eq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\mathsf{p}_\infty.$$

证明。 由推论 2.16 可知，只需证明包含 ι: RelOp $\to$ RelOp$_\infty$诱导了一个 ∞-范畴等价

$$\mathsf{RelOp}[\mathrm{loc.eq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathsf{RelOp}_\infty[\mathrm{loc.eq}^{-1}].$$

我们通过令 Op$_\infty$ 为树状准操作子范畴 DQOp，并构造一个函子 Φ: RelOp$_\infty \to$ RelOp 来证明这一点，使得 $\Phi \circ \iota$ 和 $\iota \circ \Phi$ 都自然地局部等价于恒等函子。

关键之处在于第三位作者对 ∞-幺半群的去局部化：在 [Pra25 的定义 3.11], 中，第三位作者为每个树状准操作子 $\mathcal{O}$定义了一个普通运算体 $\boldsymbol{\Omega}/\mathcal{O}$ ，并为其配备了一个映射

$$\rho_X : \boldsymbol{\Omega}/\mathcal{O} \to \mathcal{O}$$

称为**根函子**。根函子在 $\mathcal{O} \in$ DQOp 中自然；此外，若$\mathcal{O}$ 在 operad 模型结构中是上纤维的，那么它在 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 中的像就是对那些在 $\mathcal{O}$ 中像为等价的 [一元运算进行局部化 [Pra25，定理 3.13]。

有鉴于此，我们定义函子 Φ: RelOp$_\infty \to$ RelOp 如下：选取一个上纤维替换函子 $(-)^c$: dSet $\to$ dSet；因此 $(-)^c$ 配备了一个自然的幺半群等价 $(-)^c \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{dSet}}$。我们按以下公式定义 Φ

$$\Phi(\mathcal{O}, S) = \big(\boldsymbol{\Omega}/\mathcal{O}^c, \rho_{\mathcal{O}^c}^{-1}(S^c)\big),$$

其中， S^c 表示在映射 $\mathcal{O}^c \to \mathcal{O}$ 下 S 的原像。我们断言， Φ 是 ι 的同伦逆。

根函子确定了一个自然变换 ν: $\iota \circ \Phi \Rightarrow \mathrm{id}^{\mathsf{RelOp}_\infty}$，其在每个相对歌剧 $(\mathcal{O},\ S)$ 处的分量由以下复合映射给出

$$\big(\boldsymbol{\Omega}/\mathcal{O}^c, \rho_{\mathcal{O}^c}^{-1}(S^c)\big) \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{O}^c, S^c) \xrightarrow{\beta} (\mathcal{O}, S).$$

映射 α 是局部等价，因为 $\rho_{\mathcal{O}^c}$ 是局部化，而映射 β 是相对等价，因此也是局部等价。由此， ν 是一个自然的局部等价。将 ν 限制到 RelOp，我们也得到一个自然的局部等价 $\Phi \circ \iota \Rightarrow \mathrm{id}^{\mathsf{RelOp}}$，证明至此完成。□

3. 应用：Harpaz 猜想

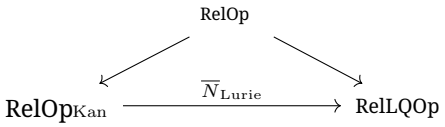
作为定理 2.20 的应用，我们对以下长期悬而未决的猜想给出肯定的回答：

猜想 ([Har])。 *Lurie* 的操作子神经函子 N_{Lurie}: $\mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}} \to \mathsf{LQOp}$ 在对弱等价进行局部化后，诱导出一个 ∞-范畴的等价。

函子 N_{Lurie} 由 Lurie 在 [Lur17, Definition 2.1.1.23] 中定义。尽管它是将局部 Kan 单纯形运算子表示为 ∞-运算子的基础工具，据作者所知，它尚未被证明能够在同伦理论之间诱导等价，这与其树状对应物不同（参见定理 1.5）。Heuts-Hinich-Moerdijk 在 [HHM16, Proposition 6.1.1]，中朝这一方向迈出了部分一步，他们证明了将 N_{Lurie} 限制在无单位元 的幺半群（文中也称为开幺半群）上时，它会诱导同伦理论之间的等价。然而，这一等价尚未得到完整证明，而 Harpaz 在 MathOverflow 帖子 [Har] 中提出了这一猜想。

现在我们将给出上述猜想的完整证明，从而肯定地回答 Harpaz 提出的问题（定理 3.1）。证明基于 N_{Lurie} 的以下三个性质：

(ON1) N_{Lurie} 是相对范畴的函子。(ON2) 对于局部 Kan 单纯幺半群 $\mathcal{O}$，$\mathcal{O}$ 的一元运算集合可与 $N_{\mathrm{Lurie}}(\mathcal{O})$ 的一元运算集合相对应。在此对应下，赋值 $(\mathcal{O},\ S) \mapsto (N_{\mathrm{Lurie}}(\mathcal{O})\ S)$ 确定了一个函子 $N_{\mathrm{Lurie}}\colon \mathsf{RelOp}_{\mathrm{Kan}} \to \mathsf{RelLQOp}$，使图表



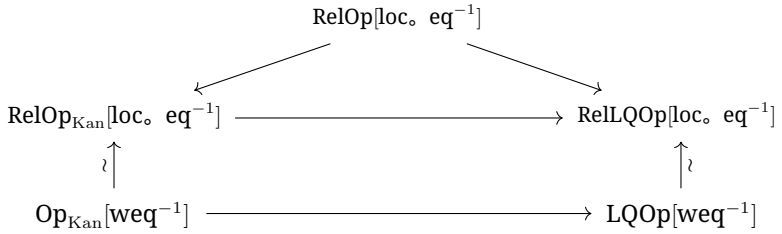
交换的。(ON3) N_{Lurie} 保留局部等价。

性质 (ON1) 和 (ON2) 根据定义显然成立。性质 (ON3) 并非显然，我们稍后将证明它（定理 3.4）。暂且接受这一点，我们可以证明 Harpaz 的猜想：

定理 3.1. 函子 $N_{\mathrm{Lurie}}\colon \mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}} \to \mathsf{LQOp}$ 诱导出 ∞- 范畴的等价

$$\mathsf{Op}_{\mathrm{Kan}}[\mathrm{weq}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathsf{LQOp}[\mathrm{weq}^{-1}].$$

证明。 由性质 (ON1) 至 (ON3)，存在一个 ∞-范畴图表



它在自然等价意义下交换。由推论 2.16 和定理 2.20 可知，标记为 $\sim$ 的箭头都是等价。因此，其余箭头也必定都是等价。特别是，最下面的箭头是等价。□

备注 3.2. 定理 3.1 的证明展示了相对算子的实用性：由于每个幺半群都可以解释为一个 ∞-幺半群，而且局部化在任何 ∞-幺半群模型中都有意义，因此相对算子是比较不同 ∞-幺半群模型的非常便利的“枢纽”。我们预计，我们的方法将有助于比较各种 ∞-幺半群模型，而这类模型为数众多。

在深入证明之前，我们先陈述一个直接但有用的推论。令 (δ, λ) 为 Lurie 的 ∞-幺半群与 Hinich-Moerdijk [HM24] 构造的完备去树状 Segal 空间之间的伴随等价（另见备注 1.8）。于是我们观察到，(δ, λ) 交织了神经构造：

推论 3.3。 存在一对自然等价

$$\delta \circ N_{\mathrm{Lurie}} \simeq N_d \qquad and \qquad \lambda \circ N_d \simeq N_{\mathrm{Lurie}}.$$

证明。 这由定理 3.1 以及以下事实得到： ∞-范畴中的 ∞-幺半群仅具有平凡自同构 [AGG15]。□

现在我们转向 (ON3) 的证明。让我们回顾一下它的内容：

定理 3.4 （性质 (ON3)）。 函子

$$\overline{N}_{\mathrm{Lurie}}\colon \mathsf{RelOp}_{\mathrm{Kan}} \to \mathsf{RelLQOp},\ (\mathcal{O}, S) \mapsto (N_{\mathrm{Lurie}}(\mathcal{O}), S)$$

保留局部等价。

我们将通过 Morita 型泛性质（命题 3.6 和 3.8）刻画 $\mathrm{Op}_{\mathrm{Kan}}$ 和 LQOp 中的局部化，进而证明这些泛性质等价，从而证明定理 3.4。

我们首先刻画单纯幺半群的局部化。

记号 3.5. 设 $(\mathcal{O}, S)$ 是一个相对局部 Kan 单纯形歌剧，其中 $\mathcal{O}$ 是 Σ-上纤维的。回顾一下，单纯形集范畴中 $\mathcal{O}$-代数所在的范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{sSet})$ 具有投射模型结构 [HM22，定理 13.29]。我们将其左 Bousfield 局部化记作 $\mathscr{L}_S\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{sSet})$，其纤维对象是这样的 $\mathcal{O}$-代数：它们将 S 中的每个映射都映为单纯形集间的弱同伦等价。（左 Bousfield 局部化可能不再是模型范畴，但它总是作为左半模型范畴存在 [BW24，定理 A]。）构造 $\mathscr{L}_S\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathrm{sSet})$ 的一种方法，是选择 S 在如下复合映射下的像作为 Bousfield 局部化的局部化集

$$U(\mathcal{O})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Fun}(U(\mathcal{O}), \mathsf{sSet}) \longrightarrow \mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{sSet}),$$

其中，第一个映射是余 Yoneda 嵌入，第二个映射由沿 $U(\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$ 的歌剧左 Kan 扩张给出（根据 [HM22，定理 14.43]，它是一个左 Quillen 函子）。

命题 3.6。 *设 $(\mathcal{O}, S)$ 是一个相对局部 Kan 单纯形歌剧，且设 $\gamma\colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ 是局部 Kan 单纯形歌剧之间的映射。假设：*

- *γ 将 S 中的每个映射都映为等价；*
- *$\mathcal{P}$ 是 Σ-上纤维的（因此 $\mathcal{O}$ 也是如此）。*

那么以下条件等价：

(1) *映射 γ 在 $\mathcal{O}\mathrm{p}_\infty$ 中的像将 $\mathcal{P}$ 展示为 S处 $\mathcal{O}$ 的局部化。(2)* *函子 $U(\gamma)$: $U(\mathcal{O}) \to U(\mathcal{P})$ 是本质满的，并且伴随*

$$\gamma_!\colon \mathscr{L}_S(\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{sSet})) \rightleftarrows \mathsf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathsf{sSet})\colon \gamma^*$$

是半模型范畴之间的 Quillen 等价。

证明。我们首先为 $\mathcal{O}[S^{-1}]$ 构造一个具体模型。令 J 表示由偏序集 $[1] = \{0 < 1\}$ 生成的群胚。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\sim} & \coprod_S [1] & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ B & \xrightarrow[\sim]{} & \coprod_S J & \longrightarrow & \mathcal{P}, \end{array}$$

其中，f 是单纯幺半群范畴上的 Dwyer–Kan 模型结构中上纤维对象之间的一个余纤维化，而标记为 $\sim$ 的箭头是该模型结构中的弱等价。我们将映射 $\mathcal{O} \amalg_A B \to \mathcal{P}$ 分解为先经过一个平凡余纤维化，再经过一个纤维化，并将所得分解记为 $\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{Q} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$。根据 [CM13b，定理 8.7]，$\alpha$ 将 $\mathcal{Q}$ 表示为在 S 处的局部化，因此我们记作 $\mathcal{Q} = \mathcal{O}[S^{-1}]$。

根据 [CG20，定理 1.5]，，条件 (1) 等价于以下条件：

(1′) 函子 $U(\beta)$ 是本质满的，并且伴随

$$\beta_!\colon \mathsf{Alg}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}(\mathsf{sSet}) \rightleftarrows \mathsf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathsf{sSet})\colon \beta^*$$

是一个 Quillen 等价。

现在 $U(\alpha)$ 是本质满的（注 2.13），因此 $U(\beta)$ 是本质满的，当且仅当 $U(\gamma)$ 具有这一性质。因此，要证明 (1′) 与 (2) 等价，只需证明以下内容：

(∗) 伴随

$$\alpha_!\colon \mathscr{L}_S\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{sSet}) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathsf{Alg}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}(\mathsf{sSet})\colon \alpha^*$$

是一个 Quillen 等价。

为证明 (∗)，我们回顾 [Heu11 定理 2.3]：对于每个树状集合X，范畴 dSet/X 都具有一种称为**协变模型结构**的组合单纯形模型结构，其纤维对象是 X上的树状左纤维化。当 X 正规时（即在 operad 模型结构中上纤维），[Heu11 定理 2.7] 和 [HM22 定理 14.43] 给出一个 Quillen 等价

$$\mathrm{St}\colon \mathsf{dSet}_{/N_d(\mathcal{O})} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{sSet})\colon \mathrm{Un}. \tag{3.7}$$

这可以纳入一个交换至自然同构的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_S(\mathsf{dSet}_{/N_d(\mathcal{O})}) & \xrightarrow{\mathrm{St}} & \mathscr{L}_S(\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{sSet})) \\ {\scriptstyle N_d(\alpha)_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_!} \\ \mathsf{dSet}_{/N_d(\mathcal{O}[S^{-1}])} & \xrightarrow[\mathrm{St}]{} & \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}(\mathsf{sSet}) \end{array}$$

其中 $\mathscr{L}_S\big(\mathsf{dSet}_{/N_d(\mathcal{O})}\big)$ 表示协变模型结构的左 Bousfield 局部化，其纤维对象是S-局部左纤维化 [Pra25，定义 4.3]。函子 $N_d(\alpha)_!$ 由 [Pra25，命题 4.4], 给出一个左 Quillen 等价；底部水平箭头由 (3.7) 应用于 $\mathcal{O}[S^{-1}]$ 给出一个左 Quillen 等价。因此，只需证明顶部水平箭头是 Quillen 等价。按照 [Pra25，命题 4.9], 中的推理可知，Un 保持并检测纤维 S-局部常值代数，即 $\mathscr{L}_S(\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{sSet}))$ 中的局部对象。这源于代数的非直化的纤维与求值之间的等价，即 $\mathrm{Un}(F)_a \simeq F(a)$。通过（半）模型范畴的标准论证（例如，参见 [HM22，勘误，引理3]中的模型范畴版本），Quillen 等价 3.7 可下降到左 Bousfield 局部化，从而完成证明。

□

接下来，我们转向 Lurie 模型中局部化的刻画。

命题 3.8. 设$(\mathcal{O}, S)$ 是一个相对 *Lurie* 准 *operad*，并设 $\gamma\colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ 是一个 *Lurie* 准 *operad* 映射，它将 S 中的每个映射都映为 $U(\mathcal{P})$中的等价。以下条件等价：

(1) 映射 γ 在 $\mathcal{O}\mathsf{p}_\infty$ 中的像表明，$\mathcal{P}$是 $\mathcal{O}$ 在 S处的局部化。*(2)* 函子 $U(\gamma)\colon U(\mathcal{O}) \to U(\mathcal{P})$ 是本质满的，并且函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S}) \to \mathrm{Alg}^S_{\mathcal{O}}(\mathcal{S})$$

是范畴等价。这里 $\mathcal{S}$表示 ∞-群胚的笛卡尔对称幺半 ∞-范畴。

证明。 蕴含关系 (1)⇒(2) 由注释 2.13 和 2.17 得出。对于 (2)⇒(1)，假设条件 (2) 成立。由于 γ 将 S 中的每个映射都映为等价，因此它可经由 $\mathcal{O}[S^{-1}]$ 分解，例如写作 $\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}[S^{-1}] \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$。我们希望证明$\beta$ 是 Lurie 准幺运算子的等价。根据假设和注记 2.17，函子

$$\beta^*\colon \mathrm{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S}) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}(\mathcal{S})$$

是一个等价。此外，由于 $U(\gamma)$ 本质满， $U(\beta)$ 也本质满。因此，Hinich–Moerdijk 重构定理 [HM24, 定理 4.1.1] 表明β 是一个等价，得证。□

现在我们可以给出定理 3.4 的证明：

定理 *3.4* 的证明。 设 $\alpha\colon(\mathcal{O},\ S)\ \to(\mathcal{P},\ T)$ 是相对局部 Kan 单纯形歌剧之间的局部等价。我们必须证明 $N_{\mathrm{Lurie}}(\alpha)$ 是一个等价。利用 N_{Lurie} 保持相对等价这一事实，我们可以假设 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{P}$ 是 Σ-上纤维的。由命题 3.6，伴随

$$\alpha_!\colon \mathscr{L}_S(\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathsf{sSet}))\ \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}\ \mathscr{L}_T(\mathsf{Alg}_{\mathcal{P}}(\mathsf{sSet}))\colon \alpha^*$$

是一个 Quillen 等价。根据 ∞-幺半群上的代数的整流定理（参见 [PS18，定理 7.11]，或 [WY24，定理 7.3.1]），这等价于说，前复合 α 诱导出 ∞-范畴 $\mathsf{Alg}^{T}_{N_{\mathrm{Lurie}}(\mathcal{P})}(\mathcal{S})\ \xrightarrow{\sim}\mathsf{Alg}^{S}_{N_{\mathrm{Lurie}}(\mathcal{O})}(\mathcal{S})$ 之间的等价。由命题 3.8，这等价于说 $N_{\mathrm{Lurie}}(\alpha)$ 是一个局部等价，证明完毕。□

致谢。 K.A. 获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业项目编号 24KJ- 1443 的资助。V.C. 获得了由西班牙科学、创新与大学部/西班牙国家研究署/10.13039/501100011033 资助的项目 PID2024-157173NB-I00 以及欧洲区域发展基金、欧盟提供的部分资助。F.P. 获得了玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议编号 945332 和 ENW-XL 资助的支持。

参考文献

[ACK25] Kensuke Arakawa、Daniel Carranza 和 Chris Kapulkin。《∞-范畴的导出映射空间》，2025年。arXiv:2509.10288 [math]。[AGG15] Dimitri Ara、Moritz Groth 和 Javier J Gutiérrez。《关于（∞，1）-范畴中 ∞-算子的自等价》。Mathematische Zeitschrift，281(3):807–848，2015年。[Ara24] Kensuke Arakawa。《流形微积分的一个语境》，2024年。arXiv:2403.03321 [math]。[BBP+18] Maria Basterra、Irina Bobkova、Kate Ponto、Ulrike Tillmann 和 Sarah Yeakel。《算子中的反演运算》。Topology Appl.，235:130–145，2018年。[BCGSS24] Marco Benini、Victor Carmona、Alastair Grant-Stuart 和 Alexander Schenkel。《代数量子场论与预因子化代数的等价性》，2024年12月。即将发表于《数学物理通讯》，arXiv:2412.07318 [math-ph]。[BCNS25] Marco Benini、Victor Carmona、Pieter Naaijkens 和 Alexander Schenkel。《超选择扇区与拓扑序的 C-范畴预因子化代数》，2025年11月。即将发表于《数学物理通讯》，arXiv:2505.07960 [math-ph]。[BCS23] Marco Benini、Victor Carmona 和 Alexander Schenkel。《同伦时间片公理的严格化定理》。《数学物理通讯》，113(1):第20号论文，27页，2023年。[Ber07] Julia E. Bergner。《单纯范畴范畴上的一个模型范畴结构》。Trans. Amer. Math. Soc.，359(5):2043–2058，2007年。[BK12a] C. Barwick 和 D. M. Kan。《单纯局部化函子的刻画及对 DK 等价的讨论》。Indag. Math. (N.S.)，23(1-2):69–79，2012年。[BK12b] C. Barwick 和 D. M. Kan。《相对范畴：同伦理论之同伦论的另一种模型》。Indag. Math. (N.S.)，23(1-2):42–68，2012年。[BS25] Marco Benini 和 Alexander Schenkel。《代数量子场论中的算子、同伦论与高阶范畴》。载于《数学物理百科全书》第5卷：分析与量子场论，第556–568页。Academic Press，阿姆斯特丹，2025年。[BW24] Michael Batanin 和 David White。《无需左正则性的左 Bousfield 局部化》。J. Pure Appl. Algebra，228(6):第107570号论文，23页，2024年。[Cal24] Damien Calaque。《量子力学中并非太少的区间》。Port. Math.，2024年10月。arXiv:2408.10033 [math]。[CC25] Damien Calaque 和 Victor Carmona。《并非太少圆盘上的代数》。https://arxiv.org/abs/2407.18192，2025年。即将发表于《数学物理通讯》，arXiv:2407.18192 [math]。[CG20] Giovanni Caviglia 和 Javier J. Gutiérrez。《单纯代数理论与算子上的 Morita 弱等价》。J. Pure Appl. Algebra，224(4):106217，22页，2020年。

[CM11] Denis-Charles Cisinski 和 Ieke Moerdijk。《树状集合作为同伦算子的模型》。J. Topol.，4(2):257–299，2011年。[CM13a] Denis-Charles Cisinski 和 Ieke Moerdijk。《树形 Segal 空间与 ∞-算子》。J. Topol.，6(3):675–704，2013年。[CM13b] Denis-Charles Cisinski 和 Ieke Moerdijk。《树状集合与单纯幺半群》。J. Topol.，6(3):705–756，2013年。[Cor82] Jean-Marc Cordier。《关于同伦相干图表的概念》。范畴拓扑与微分几何札记，23(1):93–112，1982年。[CS25] Victor Carmona 和 Anja Svraka。《带角流形上可构造因子化代数的可加性》，2025年10月。arXiv:2510.26504 [math]。[DK80a] W. G. Dwyer 和 D. M. Kan。《计算单纯形局部化》。J. Pure Appl. Algebra，18(1):17–35，1980年。[DK80b] W. G. Dwyer 和 D. M. Kan。《同伦代数中的函数复形》。Topology，19(4):427–440，1980年。[DK80c] W. G. Dwyer 和 D. M. Kan。《范畴的单纯局部化》。J. Pure Appl. Algebra，17(3):267–284，1980年。[Har] Yonatan Harpaz。《幺半范畴神经函子是否为 ∞-范畴的等价？》MathOverflow。https://mathoverflow.net/users/51164/yonatan-harpaz（版本：2016-09-15）。[Har21] Yonatan Harpaz。《小立方体代数与因子化同调》，2021年。讲义，见 https://www.math.univ-paris13.fr/~harpaz/lecture_notes.pdf。[Heu11] Gijs Heuts。《∞-算子上的代数》，2011年。arXiv:1110.1776 [math]。[HHM16] Gijs Heuts、Vladimir Hinich 和 Ieke Moerdijk。《Lurie 模型与 ∞-算子的树形模型之间的等价性》。《数学进展》，302:869–1043，2016年。[HM22] Gijs Heuts 和 Ieke Moerdijk。《单纯同伦论与树形同伦论》，《数学及其边界领域成果》第75卷，第3辑，《数学成果与相关领域：现代数学概览丛书》第3辑。Springer，尚， [2022] ©2022。勘误见 https://utrechtgeometrycentre.nl/wp-content/uploads/2024/11/errata.pdf。[HM24] Vladimir Hinich 和 Ieke Moerdijk。《Lurie 的 ∞-算子与树形 ∞-算子的等价性》。J. Topol.，17(4):第e70003号论文，31页，2024年。[Joy02] A. Joyal。《拟范畴与 Kan 复形》。J. Pure Appl. Algebra，175(1-3):207–222，2002年。纪念 Max Kelly 教授70岁生日特刊。[Joy07] André Joyal。《拟范畴札记》。
http://www.fields.utoronto.ca/av/slides/06-07/crs-quasibasic/joyal/download.pdf，2007年。[JT07] André Joyal 和 Myles Tierney。《拟范畴与 Segal 空间》。载于《代数、几何与数学物理中的范畴》，《当代数学》第431卷，第277–326页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年。[KSW25] Eilind Karlsson、Claudia I. Scheimbauer 和 Tashi Walde。《可构造因子化代数的组装》，2025年11月。即将发表于《拓扑学杂志》，arXiv:2403.19472 [math]。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，《数学年刊研究》第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Lur17] J. Lurie。《高阶代数》。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017年。[Lur25] Jacob Lurie。《Kerodon》。https://kerodon.net，2025年。[MW09] I. Moerdijk 和 I. Weiss。《树状集合范畴中的内 Kan 复形》。Adv. Math.，221(2):343–389，2009年。[Pra25] Francesca Pratali。《根函子》，2025年。arXiv:2505.14288 [math]。[PS18] Dmitri Pavlov 和 Jakob Scholbach。《有色对称算子的可容许性与整直化》。J. Topol.，11(3):559–601，2018年。7.5和7.9的修订证明见 https://arxiv.org/abs/1410.5675。[Qui67] Daniel G. Quillen。《同伦代数》，《数学讲义》第43卷。Springer 出版社，柏林-纽约，1967年。[Rez01] Charles Rezk。《同伦论之同伦论的一个模型》。Trans. Amer. Math. Soc.，353(3):973–1007，2001年。[Ste17] Danny Stevenson。《协变模型结构与单纯局部化》。North-West. Eur. J. Math.，3:141–202，2017年。[WY24] David White 和 Donald Yau。《幺半模型范畴中算子代数的 Smith 理想》。Algebr. Geom. Topol.，24(1):341–392，2024年。

K.A.：京都大学数学系，日本京都市北白川追分町，邮编 606-8502
arakawa_kensuke.22c@st.kyoto-u.ac.jp

V.C.：马克斯·普朗克数学科学研究所，德国莱比锡 Inselstrasse 22，邮编 04103 vcarmonamath@gmail.com

F.P.：乌得勒支大学乌得勒支几何中心，荷兰乌得勒支 Budapestlaan 6，邮编 3584 CD，Hans Freudenthalgebouw f.pratali@uu.nl