arXiv:2512.16410v1 [math.GN] 18 Dec 2025

非阿基米德模糊度量空间的 Gromov–Hausdorff紧致性定理

SERGIO MACARIO, MANUEL SANCHIS.

卡斯特利翁数学与应用大学研究所（*IMAC*），豪梅一世大学，*Riu Sec* 校区，*s/n*，*12071* 卡斯特利翁（西班牙）

Abstract. 作者在此前的一篇论文中引入了非阿基米德紧致模糊度量空间之间的模糊格罗莫夫-豪斯多夫距离，并提出了格罗莫夫完备性定理的模糊版本。本文提出格罗莫夫预紧性定理的模糊版本，借助与度量空间相关联的标准模糊度量，可由此推出紧致度量空间的经典定理。至此，先前的工作得以完成。

1. Introduction

格罗莫夫于 [13] 引入了Gromov–Hausdorff收敛，以此研究度量空间的收敛性；事实证明，它是一般拓扑学、几何学、泛函分析、生物统计学等领域中的有力工具（[3, 4, 6, 8, 19, 22, 24, 29]）。有兴趣的读者可参阅综述 [25]（另见 [5]），了解紧致度量空间的Gromov–Hausdorff收敛。

由于 Gromov–Hausdorff度量具有广泛的应用，因此在模糊度量空间的背景下定义 Gromov–Hausdorff度量或许很有意义。第一步，即定义 Hausdorff模糊度量，已由 Rodr´ıguez-L´opez 和 Romaguera 在 [26] 中完成。此后，作者在 [21], 中针对紧致非阿基米德模糊度量空间引入了所谓的格罗莫夫-豪斯多夫模糊度量，并据此证明了格罗莫夫完备性定理的一个模糊版本。

本文完善了先前的工作，给出了格罗莫夫预紧性定理的一个模糊版本；借助与度量空间相关联的标准模糊度量（下文定义），可由此推出度量空间的经典定理。

值得一提的是，在 Gromov–Hausdorff收敛理论中，最有用的工具之一是所谓的格罗莫夫紧致性定理，它是在一致收敛框架下的 Arzel`a-Ascoli 定理的一个类似结果。格罗莫夫在其著名论文 [13] 中于1981年证明了这一结果，而且它有许多应用。例如，在辛拓扑中，模空间的紧致性发挥着关键作用 [14]。其他有趣的应用还包括伪全纯曲线理论 [15], 和黎曼流形 [18]。关于这一

电子邮件地址: macario@uji.es, sanchis@mat.uji.es.关键词与短语。 格罗莫夫´s 紧致性定理，模糊度量空间，格罗莫夫-豪斯多夫模糊度量。通讯作者：M. Sanchis，sanchis@uji.es。

定理在其他重要领域中的应用，参见文献 [1, 2, 23, 30, 31]等。因此，格罗莫夫紧致性定理的模糊版本或许能为模糊语境中的未来应用开辟道路。

本文结构如下。第 2 节介绍模糊度量的基本概念和事实。第 3 节陈述我们在早期论文 [21] 中证明的关于非阿基米德 Gromov–Hausdorff 模糊距离的主要结果。第 4 节给出本文的主要结果，由此得到格罗莫夫–豪斯多夫预紧性定理，并探讨其与度量空间情形的关系。结论见最后一节。

2. Preliminaries and Basic Facts

我们首先介绍本文中用到的模糊度量空间的一些基本概念。集合 X 上的模糊集 M 是一个映射 $M\colon X\to[0,1]$。处理模糊集通常需要一个 t-范数。根据 [27],，连续的 t-范数是一个满足以下条件的二元运算 $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$：(i) $*$ 具有结合律和交换律；(ii) $*$ 连续；(iii) 对每个 $a\in[0,1]$，$a*1=a$；(iv) 当 $a\le c$ 和 $b\le d$ 时，$a*b\le c*d$，其中 $a,b,c,d\in[0,1]$。

给定 $*$ 和 $\diamond$这两个连续 t-范数，关系 $*\le\diamond$ 表示 $a*b\le a\diamond b$，对所有 a，$b\in[0,1]$均成立。连续 t-范数的例子包括最小值 $a\wedge b=\min\{a,b\}$、通常乘积 $a\cdot b$ 以及由 $a*_L b=\max\{a+b-1,0\}$给出的 Lukasiewicz t-范数。它们之间的关系为 $*_L\le\cdot\le\wedge$。事实上，对于每个连续 t-范数 $*$，都有 $*\le\wedge$。

定义 2.1。([17]) 在集合 X 上，一个模糊度量（根据克拉莫西尔和米哈莱克的定义）是一个二元组 $(M,*)$，其中 M是 $X\times X\times[0,\infty$上的模糊集，而 $*$是一个连续t-范数，并且对所有 x，y，$z\in X$和 t，$s>0$均满足：
(KM1) $M(x,y,0)=0$；(KM2) 对所有 $t>0$，$M(x,y,t)=1$ 当且仅当 $x=y$；(KM3) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$；
(KM4) $M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,t+s)$，且 (KM5) $M(x,y,\cdot)\colon[0,\infty)\to[0,1]$ 是左连续函数。

三元组 $(X,M,*)$，其中 X是一个集合，且 $(M,*)$ 是 X上的模糊度量，称为一个模糊度量空间。在 $(X,M,*)$ 中，我们考虑拓扑 τ_M，其中 $x\in X$ 的邻域基由以下集合构成：

$$B_M(x,\varepsilon,t)=\{y\in X: M(x,y,t)>1-\varepsilon\}$$

对所有 $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $t>0$。这些集合称为开球。

如果将定义 2.1 中的三角不等式（KM4）替换为

$$\text{(NA)}\quad M(x,z,\max\{t,s\})\ge M(x,y,t)*M(y,z,s)$$

对于所有 x，y，$z\in X$ 以及所有 t，$s>0$，则称 $(X$，M，$*)$ 为一个非阿基米德模糊度量空间 （见 [16]）。容易证明，条件 (NA) 蕴含条件 (KM4)，也就是说，每个非阿基米德模糊度量空间本身都是一个模糊度量空间。直接验证可知，条件 (NA) 等价于以下两个条件：

$$\text{(NA1)}\quad M(x,z,t)\ge M(x,y,t)*M(y,z,t)\ \text{and}$$

(NA2) 对所有 $x, y \in X$, $M(x, y,)$ 都是非递减的。

按照通常的做法，下面的例子展示了如何将经典度量 与模糊度量联系起来。

例2.2. （比较 [7, 9]）设 (X, d) 是一个度量空间。在 $X \times X \times [0, \infty$ 中定义一个模糊集 M_d 为

$$M_d(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + d(x, y)} & \text{for all } x, y \in X \text{ and } t > 0; \\ 0 & \text{for all } x, y \in X \text{ and } t = 0. \end{cases}$$

显然，对于任意连续的 t-范数 $*$, $(M_d, *)$ 都是 X 上的模糊度量。它称为由 (X, d) 诱导的标准模糊度量 。此外，$(M_d, \cdot)$ 是非阿基米德的（更一般的情形参见 [20, 例4.2.3]）。相反，只有当 d是超度量时，$(M_d, \wedge)$ 才是非阿基米德模糊度量（参见 [12]）。

容易证明，若 $*$ 和 $\diamond$ 是满足 $\diamond \leq *$ 的两个连续 t-范数，且 $(X, M, *)$ 是一个非阿基米德模糊度量空间，那么 $(X, M, \diamond)$ 也是如此。由于 Lukasiewicz t-范数和通常乘积 t-范数满足 $*_L \leq \cdot$, 上述事实意味着：若 (X, d) 是一个度量空间，那么 $(X, M_d, *_L)$ 也是一个非阿基米德模糊度量空间。

例2.3。 设 (X, d) 是一个度量空间。对于每个 $\alpha \in [0, 1)$，我们都可以考虑模糊集

$$M_{\alpha 1}(x, y, 0) = 0 \quad \text{and, for } t > 0, \quad M_{\alpha 1}(x, y, t) = \begin{cases} \alpha & \text{if } t \leq d(x, y) \\ 1 & \text{if } t > d(x, y) \end{cases}$$

那么，对于任意连续的 t-范数 $*$, $(X, M_{\alpha 1}, *)$ 都是一个模糊度量空间，尽管一般而言它不是非阿基米德的，因为性质 (NA1) 可能不成立。然而，当 X 是一个两点空间时，$X = \{x_1, x_2\}$，那么 $(X, M_{\alpha 1}, *)$ 是一个非阿基米德模糊度量空间。

下面的概念给出了非阿基米德模糊度量空间的另一个例子。

定义2.4 ([11])。 若定义在集合 X 上的模糊度量 $(M, *)$ 满足 M 不依赖于 t，则称其为平稳的；也就是说，对于每个 $x, y \in X$，函数 $M_{(x,y)}(t) = M(x, y, t)$ 都是常数。

显然，任何其中 $(M, *)$ 为平稳的模糊度量空间 $(X, M, *)$ 都是非阿基米德模糊度量空间，因为此时性质 (KM4) 与 (NA) 等价。

3. The non-Archimedean Gromov-Hausdorff fuzzy distance

非阿基米德格罗莫夫-豪斯多夫模糊度量由作者在 [21], 中引入，他们在那里研究了紧致模糊度量空间的柯西序列的收敛性。本节中的大多数概念和结果都可以在该参考文献中找到。为完整起见，我们在此加以介绍。接下来，我们总结这种模糊度量的性质。我们的方法遵循 [26] 中给出的模式。第一步是定义紧子集的 Hausdorff模糊度量概念。

设 A 是模糊度量空间（X, M, $*$）的一个（非空）子集。对于 $x \in X$ 和 $t > 0$, 令 M（x, A, t）$=\sup\{M$（x, a, t）: $a \in A\}$（见 [28, 定义 2.4]）。

定义 3.1。 设（X， M， $*$）为一个模糊度量空间。若 A 和 B 是 X 的（非空）紧子集，则

$$H_M(A,B,t)=\min\{\inf_{a\in A}M(a,B,t),\inf_{b\in B}M(A,b,t)\}$$

对所有 $t\geq 0$。

注3.2。 上述定义是针对非紧子集的更一般定义的一个特例（见 [26]）。注意，若 A和 B 是 X和 H_M（A， B， t）中的紧子集，则以下条件成立：

(1) 给定 $a\in A$，存在 $b\in B$使得 $M(a,\ b,\ t)>1-\varepsilon$。
(2) 给定 $b\in B$，存在 $a\in A$使得 $M(a,\ b,\ t)>1-\varepsilon$。

反过来，若对某个 $t>0$ 和某个 $0<\varepsilon<1$，条件 (1) 和 (2) 均成立，则 $H_M(A,\ B,\ t)\geq 1-\varepsilon$。

给定两个模糊度量空间 $(X,\ M_X,\ *)$ 和 $(Y,\ M_Y,\ *)$，若不交并 $X\sqcup Y$上的模糊度量 M在 X和 Y上分别限制为给定的度量，则称其为容许的 。在 [21], 中，作者利用这一概念将非阿基米德格罗莫夫–豪斯多夫模糊距离 $(M_{GH},\ *)$ 重新表述如下。

定义 3.3. [21, 定理 3.4] 给定两个非阿基米德模糊度量空间 $(X,M_X,*)$ 和 $(Y,M_Y,*)$，则

$$M_{GH}(X,Y,t)=\sup\{H_M(X,Y,t):M\in\mathcal{A}(X\sqcup Y)\}\quad(t\geq 0)$$

其中 $\mathcal{A}(X\sqcup Y)$ 表示 $X\sqcup Y$ 上所有可容许的非阿基米德模糊度量所构成的集合。

非阿基米德格罗莫夫-豪斯多夫模糊度量满足非阿基米德模糊度量定义中的条件 (i)、(iii)、(NA) 和 (v)。正如 [21], 中所指出的，条件 (ii) 未必成立。然而，对于紧致非阿基米德模糊度量空间，条件 (ii) 在等距意义下 成立（[21, 定理 3.11]）。设 $\mathcal{M}=\{(X_j,M_{X_j},*)$ 是一个紧致非阿基米德模糊度量空间的集合，并令 $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 中元素的所有等距类所构成的集合。因此，

定理 3.4。 [21, 定理 3。14] $(\mathcal{I}(\mathcal{M})\ M_{GH},*)$ 是一个非阿基米德模糊度量空间。

4. Gromov-Hausdorff fuzzy compactness theorem

在 [21], 中，作者证明了，紧致非阿基米德模糊度量空间的每个柯西序列在非阿基米德格罗莫夫-豪斯多夫模糊度量下都收敛。因此，$(\mathcal{I}(\mathcal{M})\ M_{GH},*)$ 是一个完备度量空间。本文的目标是通过给出充分条件来确保 $(\mathcal{I}(\mathcal{M})\ M_{GH},*)$ 是一个紧度量空间，从而完善这项工作。由于该空间是完备的，我们只需研究它何时预紧。

定义 4.1。 非阿基米德模糊度量空间序列 $\{(X_n,M_{X_n},*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到非阿基米德模糊度量空间 $(X,M_X,*)$，如果 $\lim_n M_{GH}(X_n,X,t)=1$ 对所有 $t>0$ 成立。

定义 4.2。 若非阿基米德模糊度量空间序列 $\{(X_n, M_{X_n}, *)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：对于每个 $t>0$ 和 $0<\varepsilon<1$，都存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得$M_{GH}(X_n, X_m, t) > 1-\varepsilon$对所有 $n, m \geq n_0$成立，则称其为柯西序列。

注4.3。 值得指出的是，如果对于每个固定的 $t>0$ 和 $0<\varepsilon<1$，都能找到一个子序列 $\{(X_{n_k}, M_{X_{n_k}}, *)\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $j, k\in\mathbb{N}$, $M_{GH}(X_{n_j}, X_{n_k}, t) > 1-\varepsilon$，那么非阿基米德模糊度量空间的序列 $\{(X_n, M_{X_n}, *)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 就含有一个柯西子序列。事实上，对每个 $t=\frac{1}{n}$ 和 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，例如 $\{X^n_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，都找到这样的子序列，就能得到对角子序列 $\{X^n_{n_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$；它满足：对于每个 $t>0$ 和 $0<\varepsilon<1$，以及 $n, m\geq n_0$，其中$\frac{1}{n_0} < \min\{\varepsilon, t\}$，

$$M_{GH}(X^n_{n_n}, X^m_{m_m}, t) > M_{GH}\left(X^n_{n_n}, X^m_{m_m}, \frac{1}{n}\right) > 1-\frac{1}{n} > 1-\varepsilon.$$

定义 4.4. 设 $(X, M, *)$ 是一个模糊度量空间。给定 $0<\varepsilon<1$和 $t>0$，若集合 A满足：对每个 $x\in X$，都存在 $y\in A$使得 $M(x, y, t) > 1-\varepsilon$，则称它是 X中的一个 (t, ε)-网。

为简化记号，如果 $M(x, y, t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon)$，我们将其称为一个 $(t, \varepsilon * \varepsilon)$-网，依此类推。

存在一个 (t, ε)-网，意味着 X可以由球 $B(y, \varepsilon, t)$ 覆盖，其中心 y位于 A中。

定义 4.5. [9, 定义 1] 若模糊度量空间 $(X, M_X, *)$ 对每个 $t>0$和 $0<\varepsilon<1$，都存在 X的有限子集 A，使得 $X=\bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon, t)$，则称其为预紧 。此时，我们称 M_X 为预紧模糊度量。这等价于说，对每个$t>0$ 和 $0<\varepsilon<1$， X中都存在一个有限的 (t, ε)-网。

设（X， M_X， $*$）为一个模糊度量空间。根据 [21], 给定的 δ_1， δ_2，对于 $0<\delta_1<1$和 $\delta_2>0$，我们将（δ_1,δ_2）-覆盖数定义为（X， M_X， $*$）的

$$\mathrm{Cov}(X, \delta_1, \delta_2) = \min\left\{|C| : X = \bigcup_{c\in C} B(c, \delta_1, \delta_2)\right\}.$$

其中， $|C|$ 表示 C的基数。注意，当且仅当（X， M_X， $*$）是预紧的，对于所有 δ_1， δ_2，$\mathrm{Cov}(X, \delta_1, \delta_2)$都是有限的。

下面的结果表明，当 X 和 Y 足够接近时，我们可以分别在 X和 Y中找到两个有限网，使得 X 中的网与 Y 中的网的不同元素之间的模糊距离也同样接近。

从现在起 ，模糊度量空间均理解为阿基米德模糊度量空间 $e.$

命题4.6。 设（$X, M_X, *$）和（$Y, M_Y, *$）是两个紧致模糊度量空间，且M_{GH}（X, Y, t）$>1-\varepsilon$对于某个 $t>0$和某个 $0<\varepsilon<1$成立。则分别存在 X和 Y中的两个（$t, \varepsilon*\varepsilon*\varepsilon$）-网，$\{x_i\}_{i=1}^n$和$\{y_i\}_{i=1}^n$，使得对于每个 $i, j=1$，2.....，n，都有

(a) $M_X(x_i, x_j, t) \geq M_Y(y_i, y_j, t) * (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon)$;

(b) $M_Y(y_i, y_j, t) \geq M_X(x_i, x_j, t) * (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon)$.

证明。 设 $t>0$和 $0<\varepsilon<1$满足 $M_{GH}(X, Y, t) > 1-\varepsilon$。由 X的紧致性，我们可以在 X中找到一个 (t, ε)-网，记为 $\{x_i\}_{i=1}^n$。由于 $M_{GH}(X, Y, t) > 1-\varepsilon$，我们可以固定一个可容许模糊度量

M在 $X \sqcup Y$上满足 $H_M(X,\ Y,\ t) > 1-\varepsilon$。于是，对于每个 x_i，我们都可以选取一个元素 $y_i \in Y$，使得 $M(x_i,\ y_i,\ t) > 1-\varepsilon$（参见注3.2）。

Claim: $\{y_i\}_{i=1}^n$是 Y中的一个$(t, \varepsilon*\varepsilon*\varepsilon)$-网。为说明这一点，注意到若 $y \in Y$，则存在一个 $x \in X$，使得 $M(x,y,t) > 1-\varepsilon$。若我们选取 x_i使得 $M_X(x,x_i,t) > 1-\varepsilon$，那么

$$M_Y(y, y_i, t) = M(y,y_i,t) \geq M(x,y,t)*M(x,x_i,t)*M(x_i,y_i,t) > (1-\varepsilon)*(1-\varepsilon)*(1-\varepsilon$$

这就证明了 这一结论。现在，(a)由以下事实可得：对于每个 $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$，我们有 e

$$M_X(x_i,x_j,t) = M(x_i,x_j,t) \geq M(x_i,y_i,t) * M(y_i,y_j,t) * M(x_j,y_j,t)$$

$$> M_Y(y_i,y_j,t) * (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon).$$

类似于前面的论证可得(b)。 □

注4.7。 注意，由于它是 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 中的一个 $(t,\ \varepsilon)$-网，因此它也是一个 $(t,\ \varepsilon*\varepsilon*\varepsilon)$-网。

定义4.8。 设 $(X,\ M_X,\ *)$ 是一个模糊度量空间。对于每个 $t>0,\ t$-直径 X 定义为

$$\operatorname{diam}_t(X) = \inf\{M_X(x,y,t) : x,y \in X\}.$$

若 $(X,\ d)$ 是一个紧度量空间，并考虑模糊度量空间 $(X,\ M_d,\ \cdot)$，其中 M_d 是与 $(X,\ d)$ 相关联的标准度量，则易于验证，对所有 $t>0$,

$$\operatorname{diam}_t(X) = \frac{t}{t+\operatorname{diam}(X)}$$

其中 $\operatorname{diam}(X)$ 表示度量空间 $(X,\ d)$ 的直径。然而，不难找到一些紧致模糊度量空间 $(X,\ M,\ *)$ 的例子，使得对无限多个 t （甚至对所有 $t>0$），$\operatorname{diam}_t(X) = 0$。

假设 $(M,\ *)$ 是 X 上的平稳模糊度量。那么，t-直径不依赖于 $t>0$，因此记作

$$\operatorname{diam}(X) = \inf\{M_X(x,y) : x,y \in X\}.$$

引理 4.9。 设$(X, M_X, *)$ 和$(Y, M_Y, *)$ 是两个模糊度量空间，并假设存在一个非递减左连续函数 $C\colon [0,+\infty) \to [0,1]$，满足

$$C(s) \leq \min\{\operatorname{diam}_s(X),\ \operatorname{diam}_s(Y)\} \quad \textit{for all } s>0.$$

则不交并 $X \sqcup Y$ 上的模糊集 M 定义如下：

(1) 对所有 $x, y \in X \sqcup Y,\ M(x, y, 0) = 0$; *(2)* 对所有 $x, x' \in X,\ M(x, x', s) = M_X(x, x', s)$; *(3)* 对所有 $y, y' \in Y,\ M(y, y', s) = M_Y(y, y', s)$; *(4)* 对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y,\ M(x, y, s) = M(y, x, s) = C(s)$,

是 $X \sqcup Y$ 上的可容许的非阿基米德模糊度量。

证明。 显然，性质 (KM1)、(KM2)、(KM3)、(KM5) 和 (NA2) 均成立。因此，我们只需证明性质 (NA1)。为此，若 $x, x' \in X, y, y' \in Y$and $s>0$，则上述定义中的条件 (2) 和 (3) 表明，我们只需考虑以下情形：

$$(a)\ M(x,x',s) \geq C(s) \geq C(s) * C(s) = M(x,y,s) * M(x',y,s).$$

$$(b)\ M(y,y',s) \geq C(s) \geq C(s) * C(s) = M(x,y,s) * M(x,y's).$$

$$(c)\ M(x,y,s) = C(s) \geq M(x,x',s) * C(s) = M(x,x',s) * M(x',y,s).$$

$$(d)\ M(x,y,s) = C(s) \geq C(s) * M(y,y',s) = M(x,y',s) * M(y',y,s).$$

□

注4.10。 值得注意的是，对于所有 $s>0$， $C(s)=0$ 满足引理 4.9。在这种情况下，前一个引理中定义的模糊度量 M 始终是 $X \sqcup Y$ 上的可容许的非阿基米德模糊度量。

例4.11。 设 (X,d_X)、(Y,d_Y) 是两个紧致度量空间，并考虑模糊度量空间 $(X,M_{d_X},\cdot)$ 和 $(Y,M_{d_Y},\cdot)$。若 K 是一个实数，且 $K \geq \max\{\mathrm{diam}(X),\mathrm{diam}(Y)\}$，则定义的函数 $C(s)=\frac{s}{s+K}$ 对所有 $s>0$ 均满足前一引理中的要求条件。

引理 4.12。 设 $(X,M_X,*)$ 和 $(Y,M_Y,*)$ 是两个紧致模糊度量空间，并且对某些 $x,x' \in X$, $y,y' \in Y$, $t>0$ 和 $0<\varepsilon<1$，满足

(a) $M_X(x,x',t) \geq M_Y(y,y',t) * (1-\varepsilon)$,

(b) $M_Y(y,y',t) \geq M_X(x,x',t) * (1-\varepsilon)$。

那么，存在 $\delta>0$，使得对于每个 $t-\delta \leq s \leq t$，性质（a）和（b）都成立。

证明。 取 $0<\eta<\min\{M_X(x,\ x',\ t)\ M_Y(y,\ y',\ t)\}$，并利用模糊度量 M_X 和 M_Y的性质（KM5），找到 $\delta>0$，使得对于所有 $t-\delta \leq s \leq t$，有

$$M_X(x,x',t) - M_X(x,x',s) < \eta \quad \text{and} \quad M_Y(y,y',t) - M_X(y,y',s) < \eta.$$

那么，对于这样的 s，我们得到

(a) $M_X(x,x',s) \geq M_X(x,x',t) - \eta > M_Y(y,y',t) * (1-\varepsilon) - \eta \geq M_Y(y,y',s) * (1-\varepsilon) - \eta$,

(b) $M_Y(y,y',s) \geq M_Y(y,y',t) - \eta > M_X(x,x',t) * (1-\varepsilon) - \eta \geq M_X(x,x',s) * (1-\varepsilon) - \eta$,

对于每个这样的 $\eta>0$。因此，我们有

(a) $M_X(x,\ x',\ s) \geq M_Y(y,\ y',\ s) * (1-\varepsilon)$,

(b) $M_Y(y,\ y',\ s) \geq M_X(x,\ x',\ s) * (1-\varepsilon)$。

□

命题4.6给出了得到 $M_{GH}(X,\ Y,\ t) > 1-\varepsilon$的必要条件。下面的结果表明，它也是充分条件的一部分。

命题4.13。 设$(X,M_X,*)$和$(Y,M_Y,*)$是两个满足以下性质的紧致模糊度量空间:

(1) 存在一个非递减左连续函数 $C:\ [0,+\infty) \to [0,1]$，满足

$$C(s) \leq \min\{diam_s(X),\ diam_s(Y)\} \quad for\ all\ s>0.$$

(2) 假设存在 $t > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$，使得我们可以找到 $n \in \mathbb{N}$ 以及两个 (t, ε)-网 $\{x_i\}_{i=1}^n$、$\{y_i\}_{i=1}^n$，分别属于 X 和 Y，并且满足：对所有 $s \geq t$ 以及对所有i、$j = 1$、...、n，

(a) $M_X(x_i, x_j, s) \geq M_Y(y_i, y_j, s) * (1 - \varepsilon)$,
(b) $M_Y(y_i, y_j, s) \geq M_X(x_i, x_j, s) * (1 - \varepsilon)$。

那么，存在一个定义在 $X \sqcup Y$ 上的可容许的非阿基米德模糊度量 M，满足 $H_M(X, Y, t) > (1 - \varepsilon) * (1 - \varepsilon)$。因此，$M_{GH}(X, Y, t) > (1 - \varepsilon) * (1 - \varepsilon)$。

证明。取满足条件 (2) 的两个（t, ε）-网 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^n$。应用引理 4.12，我们得到 $\delta > 0$，使得对于 $t - \delta \leq s \leq t$ 以及所有 i, j，我们还有：

(a) $M_X(x_i, x_j, s) \geq M_Y(y_i, y_j, s) * (1 - \varepsilon)$。
(b) $M_Y(y_i, y_j, s) \geq M_X(x_i, x_j, s) * (1 - \varepsilon)$。

令 M_δ： $X \times X \times [0, +\infty) \to [0, 1]$ 定义为

(1) 对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$, $M_\delta(x, y, 0) = M_\delta(y, x, 0) = 0$。
(2) 对所有 $s \geq 0$ 和 $x, x' \in X$, $M_\delta(x, x', s) = M_X(x, x', s)$。
(3) 对所有 $s \geq 0$ 和 $y, y' \in Y$, $M_\delta(y, y', s) = M_Y(y, y', s)$。
(4) 对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$，以及所有 $s > 0$,

$$M_\delta(x, y, s) = M_\delta(y, x, s) = \begin{cases} C(s) * C(s) * (1 - \varepsilon), & \text{if } 0 < s \leq t - \delta, \\ \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left\{ M_X(x, x_j, s) * M_Y(y, y_j, s) \right\} * (1 - \varepsilon), & \text{if } s > t - \delta. \end{cases}$$

为了证明 M_δ 是一个非阿基米德模糊度量，我们需要检验定义 2.1 中的性质 (KM1)、(KM2)、(KM3)、(KM5) 和 (NA)。(KM1)、(KM2)、(KM3) 显然成立。我们通过验证性质 (NA1) 和 (NA2) 来证明条件 (NA)。

显然，性质 (NA2) 成立，因为对于所有 $x \in X$、$y \in Y$ 和 $j = 1$、.....、n、$M_X(x, x_j,)$ 和 $M_Y(y, - y_j,)$ 都是非递减函数。

对于性质 (NA1)，我们需要根据值 $s > 0$ 所处的位置考虑两种可能性。首先，固定 $s > t - \delta$ 并考虑以下情形：

Case 1: $M_\delta(x, x', s) \geq M_\delta(x, y, s) * M_\delta(x', y, s)$, $x, x' \in X$, $y \in Y$。对于，选择 j和 k，使得

$$M_\delta(x, y, s) = M_X(x, x_j, s) * M_Y(y, y_j, s) * (1 - \varepsilon) \text{ and}$$
$$M_\delta(x', y, s) = M_X(x', x_k, s) * M_Y(y, y_k, s) * (1 - \varepsilon)$$

那么，

$$\begin{aligned}
M(x,x',s) = M_X(x,x',s) &\geq M_X(x,x_j,s) * M_X(x_j,x_k,s) * M_X(x_k,x',s) \\
&\geq M_X(x,x_j,s) * M_Y(y_j,y_k,s) * (1-\varepsilon) * M_X(x_k,x',s) \\
&\geq M_X(x,x_j,s) * M_Y(y,y_j,s) * M_Y(y,y_k,s) * (1-\varepsilon) * M_X(x_k,x',s) \\
&= M_\delta(x,y,s) * M_Y(y,y_k,s) * M_X(x_k,x',s) \\
&\geq M_\delta(x,y,s) * M_Y(y,y_k,s) * M_X(x_k,x',s) * (1-\varepsilon) \\
&= M(x,y,s) * M(x',y,s)
\end{aligned}$$

Case 2: $M_\delta(y,\ y',\ s) \geq M_\delta(x,\ y,\ s) * M_\delta(x,\ y',\ s)$, $x \in X$, $y,\ y' \in Y$。与前一个类似，但使用性质 (b)而不是性质 (a)。

Case 3: $M_\delta(x,\ y,\ s) \geq M_\delta(x,\ x',\ s) * M_\delta(x',\ y,\ s)$, $x,\ x' \in X$, $y \in Y$。

对于，选择 $1 \leq k \leq n$ 使得

$$M_\delta(x,y,s) = M_X(x,x_k,s) * M_Y(y,y_k,s) * (1-\varepsilon)$$

于是，

$$\begin{aligned}
M_\delta(x,y,s) &\geq M_X(x,x_k,s) * M_Y(y,y_k,s) * (1-\varepsilon) \\
&\geq M_X(x,x',s) * M_X(x',x_k,s) * M_Y(y,y_k,s) * (1-\varepsilon) \\
&= M_\delta(x,x',s) * M_\delta(x',y,s)
\end{aligned}$$

Case 4: $M_\delta(x,\ y,\ s) \geq M_\delta(x,\ y',\ s) * M_\delta(y',\ y,\ s)$, $x \in X$, $y,\ y' \in Y$。与前一种情况类似。

注意到，M_δ 的定义中的条件 (2) 和 (3) 对其他情形给出了性质 (NA1)。因此，性质 (NA1) 对 $s > t - \delta$ 成立。

否则，若 $0 < s \leq t - \delta$，则可如引理 4.9 中那样证明该性质，因为 $C(s) * C(s) * (1-\varepsilon) \leq C(s) \leq \min\{diam_s(X),\ diam_s(Y)\}$。

条件 (KM5) 由以下事实得出：$C(s)$ 是左连续的，且由命题 2.6] 得出。

最后，我们需要证明 $H_M(X,Y,t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon)$。为此，任取 $x \in X$，并在 X 中的 (t,ε)-网中找到 x_j，使得 $M(x,x_j,t) = M_X(x,x_j,t) > 1-\varepsilon$。于是得到

$$M(x,y_j,t) \geq M_X(x,x_j,t) * M_Y(y_j,y_j,t) * (1-\varepsilon) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon).$$

类似地，给定任意 $y \in Y$，我们可以找到 y_j，使得 $M(y,y_j,t) > (1-\varepsilon)$；因此

$$M(y,x_j,t) \geq M_X(x_j,x_j,t) * M_Y(y,y_j,t) * (1-\varepsilon) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon).$$

于是，$M_{GH}(X,\ Y,\ t) \geq H_M(X,\ Y,\ t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon)$，证毕。 □

因此，为了证明两个紧空间在格罗莫夫-豪斯多夫模糊度量下彼此接近，我们需要找到满足前一个命题中条件（2）的 $(t,\ \varepsilon)$-网。

我们将使用满足以下性质的连续 t-范数 $*$:

(TN1) $a - a * b \geq a * (1 - b), \quad$ for every $a, b \in [0, 1]$.

乘积 t-范数和 Lukasiewicz t-范数是这类连续 t-范数的例子。相反，最小值 t-范数不满足性质 (TN1)。但值得一提的是，采用最小值 t-范数 $\wedge$ 的模糊度量空间可能不是非阿基米德的。

引理4.14。 设$(X, M_X, *)$是一个满足性质(TN1)的 t-范数 $*$模糊度量空间。设 a和 b是(0,1) 中的两个数，并假设 $0 < K <$最小值$\{a, b\} < 1$。令$0 < \varepsilon < 1$。若 $|a - b| < K * \varepsilon$，则 $a \geq b * (1 - \varepsilon)$ 且 $b \geq a * (1 - \varepsilon)$。

证明。 当 $a = b$ 该性质显然成立。我们不妨假设 $a > b$。于是

$$a > b \geq b * (1 - \varepsilon)$$

此外， $|a - b| = a - b < K * \varepsilon$ 于是

$$b > a - K * \varepsilon \geq a - a * \varepsilon \geq a * (1 - \varepsilon)$$

□

值得指出的是，若 $a \neq b$，则可得到严格不等式

$$a > b * (1 - \varepsilon) \text{ and } b > a * (1 - \varepsilon)$$

在某些 条件下，以下结果表明存在一个柯西子序列 .

定理4.15。 设 $\{(X_n, M_n, *)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个满足以下条件的非空紧模糊度量空间序列:

(1) t-范数 $*$满足性质 *(TN1)*。*(2) Th*
ere 存在一个非递减左连续函数 $C : (0, +\infty) \to (0, 1]$, *wit* h

$$0 < C(s) \leq diam_s(X_n), \quad for\ all\ s > 0\ and\ for\ all\ n \in \mathbb{N}.$$

(3) 对每个 $t > 0$和 $0 < \varepsilon < 1$，都存在一个自然数 $N(\varepsilon, t)$ 使得$Cov(X_n, \varepsilon, t) \leq N(\varepsilon, t)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$.

(4) 对每个 $t > 0$和 $0 < \varepsilon < 1$，考虑条件（3）中的 $N = N(\varepsilon, t)$。假设存在一个序列 $\{\{x_i^n\}_{i=1}^N\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\{x_i^n\}_{i=1}^N$是 X_n 中的一个 (t, ε)-网，使得对每个$n, m \in \mathbb{N}$，满足以下性质：对所有 $s > t$ 以及每个 $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$，如果 $M_n(x_i^n, x_j^n, s) < M_m(x_i^m, x_j^m, s)$，那么

$$\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, s)}{M_m(x_i^m, x_j^m, s) * (1 - \varepsilon)} \geq \frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{M_m(x_i^m, x_j^m, t) * (1 - \varepsilon)}.$$

那么，存在一个子序列 $\{(X_{n_k}, M_{n_k}, *)\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$M_{GH}(X_{n_j}, X_{n_k}, t) > (1 - \varepsilon) * (1 - \varepsilon),$$

对所有 $j, k \in \mathbb{N}$。

证明。设定 $t > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，取由 (4) 给出的 X_n 中的 (t, ε)-网，记作 $\{x_i^n\}_{i=1}^N$。由于对每个 $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$，条件 (2) 告诉我们，$M_n(x_i^n, x_j^n, t) \geq C(t)$，因此我们有

$$1 \leq \frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{C(t) * \varepsilon} \leq \frac{1}{C(t) * \varepsilon}.$$

前面的不等式与我们对 n 的选择无关，因此整数部分构成的矩阵

$$A_{ij}^n = \left[\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{C(t) * \varepsilon}\right]$$

只能取有限多个值。因此，其中某一行 A_{ij}^n 会无限次重复。于是，我们可以找到一个子序列 $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$A_{ij}^{n_k} = A_{ij}^{n_p} \text{ for all } k, p.$$

将该子序列重新记为 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 后，我们刚刚证明了，对于任意 n, m 以及任意 i, j,

$$\left[\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{C(t) * \varepsilon}\right] = \left[\frac{M_m(x_i^m, x_j^m, t)}{C(t) * \varepsilon}\right],$$

从而

$$\left|\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{C(t) * \varepsilon} - \frac{M_m(x_i^m, x_j^m, t)}{C(t) * \varepsilon}\right| < 1$$

或者等价地,

$$\left|M_n(x_i^n, x_j^n, t) - M_m(x_i^m, x_j^m, t)\right| < C(t) * \varepsilon.$$

应用引理4.14，我们得到，对于每个 i 和 j,

$$\begin{array}{lll} (a) & M_n(x_i^n, x_j^n, t) & > M_m(x_i^m, x_j^m, t) * (1 - \varepsilon), \\ (b) & M_m(x_i^m, x_j^m, t) & > M_n(x_i^n, x_j^n, t) * (1 - \varepsilon). \end{array} \tag{4.1}$$

现在取 $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$，并固定 $n, m \in \mathbb{N}$。我们将证明命题4.13的条件（2）也成立。固定 $s > t$。

若 $M_n(x_i^n, x_j^n, s) \geq M_m(x_i^m, x_j^m, s)$，则 $M_n(x_i^n, x_j^n, s) > M_m(x_i^m, x_j^m, s) * (1 - \varepsilon)$。此外，若 $M_n(x_i^n, x_j^n, s) < M_m(x_i^m, x_j^m, s)$，则应用条件（4）和等式(4.1)(a)，可得

$$\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, s)}{M_m(x_i^m, x_j^m, s) * (1 - \varepsilon)} \geq \frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{M_m(x_i^m, x_j^m, t) * (1 - \varepsilon)} > 1 \tag{4.2}$$

这意味着 $M_n(x_i^n, x_j^n, s) > M_m(x_i^m, x_j^m, s) * (1 - \varepsilon)$。

因此，我们有

$$M_n(x_i^n, x_j^n, s) \geq M_m(x_i^m, x_j^m, s) * (1 - \varepsilon),$$

对所有 $s \geq t$均成立。类似于前面的论证可得

$$M_m(x_i^m, x_j^m, s) \geq M_n(x_i^n, x_j^n, s) * (1 - \varepsilon),$$

对所有 $s \geq t$。

现在，由命题4.13可得，在 $X_n \sqcup X_m$ 上存在一个可容许模糊度量 M，使得

$$H_M(X_n, X_m, t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon),$$

由此得到 $M_{GH}(X_n,\ X_m,\ t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon)$。证明至此完成。 □

根据前面的结果和注4.3，我们得到

推论4.16。 如果 $\{(X_n, M_n, *)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个满足前一定理条件的非空紧模糊度量空间序列，那么它有一个柯西子序列。

利用乘积 t-范数，我们可以给出一个略有改进的版本。注意，乘积 t-范数满足性质 **(TN1)**。此外，我们可以重新表述条件（4），因为上面证明中的不等式（4.2）等价于

$$\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, s)}{M_m(x_i^m, x_j^m, s)} \geq \frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{M_m(x_i^m, x_j^m, t)} > (1-\varepsilon).$$

考虑到这些注释，我们可以证明

定理4.17. 设 $\{(X_n, M_n, \cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足以下条件的非空紧模糊度量空间序列：

(1) 存在一个非递减左连续函数 $C : (0, +\infty) \to (0, 1]$, 满足

$$0 < C(s) \leq diam_s(X_n), \quad for\ all\ s > 0\ and\ for\ all\ n \in \mathbb{N}.$$

(2) 对每个 $t > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$，都存在一个自然数 $N(\varepsilon, t)$，使得对所有$n \in \mathbb{N}$，覆盖数

$$Cov(X_n, t, \varepsilon) \leq N(\varepsilon, t).$$

(3) 对每个 $t > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$，考虑 $N = N(\varepsilon, t)$。假设存在一个序列 $\{\{x_i^n\}_{i=1}^N\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\{x_i^n\}_{i=1}^N$ 是 X_n 中的一个 (t, ε)-网，且对每个 $n, m \in \mathbb{N}$，都满足以下性质：对于所有 $s > t$ 和每个 $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$，若 $M_n(x_i^n, x_j^n, s) < M_m(x_i^m, x_j^m, s)$，则

$$\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, s)}{M_m(x_i^m, x_j^m, s)} \geq \frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{M_m(x_i^m, x_j^m, t)}.$$

那么，给定 $t > 0$和 $0 < \varepsilon < 1$，存在一个子序列 $\{(X_{n_k}, M_{n_k}, \cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$M_{GH}(X_{n_j}, X_{n_k}, t) > (1-\varepsilon) \cdot (1-\varepsilon),$$

for 对所有 $j, k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此， $\{(X_n, M_n, \cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个柯西子序列。

我们将在下一个例子中看到，上述定理中的条件（3）不能省略。

例 4.18。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $X_n = \{x_1^n, x_2^n\}$ 为一个赋予度量d_n 的度量空间，其定义如下：

$$d_n(x_1^n, x_2^n) = d_n(x_2^n, x_1^n) = n \quad \text{and} \quad d_n(x_i^n, x_i^n) = 0,\ i = 1, 2.$$

现在考虑紧致模糊度量空间的序列 $\{(X_n,\ M_n,\ \cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $M_n(x_i^n,\ x_j^n,\ 0)=0$，并且对于所有 $n=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ i,\ j=1,\ 2$ 以及 $t>0$

$$M_n(x_i^n,x_j^n,t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{if } t\le d_n(x_i^n,x_j^n)\\ 1 & \text{if } t>d_n(x_i^n,x_j^n)\end{cases}\qquad \text{if } n \text{ is even,}$$

$$M_n(x_i^n,x_j^n,t)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \text{if } t\le d_n(x_i^n,x_j^n)\\ 1 & \text{if } t>d_n(x_i^n,x_j^n)\end{cases}\qquad \text{if } n \text{ is odd.}$$

这些模糊度量是非阿基米德的（见例2.3）。

该序列满足上述定理中的条件（1）。事实上，对于偶数 $n\in\mathbb{N}$，$diam_s(X_n)=\frac{1}{2}$；对于奇数 $n\in\mathbb{N}$，$diam_s(X_n)=\frac{1}{3}$。因此，对于每个 $s>0$，我们可以取 $C(s)=\frac{1}{3}$。取 $N(\varepsilon,\ t)=2$，对每个 $0<\varepsilon<1$ 和 $t>0$，条件（2）也显然成立。下面来看条件（3）不成立。为此，考虑对每个 $n\in\mathbb{N}$ 的 $t=\frac{1}{2}<n=d_n(x_1^n,\ x_2^n)$，取任意 $m\in\mathbb{N}$，$n=2m$，并固定 $n>s>m$。那么

$$M_n(x_1^n,x_2^n,s)=\frac{1}{2}<1=M_m(x_1^m,x_2^m,s)$$

and

$$\frac{M_n(x_1^n,x_2^n,s)}{M_m(x_1^m,x_2^m,s)}=\frac{\frac{1}{2}}{1}<\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{M_n(x_1^n,x_j^n,t)}{M_m(x_i^m,x_j^m,t)}\quad \text{if } m \text{ is even,}$$

or

$$\frac{M_n(x_1^n,x_2^n,s)}{M_m(x_1^m,x_2^m,s)}=\frac{\frac{1}{2}}{1}<\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{M_n(x_1^n,x_j^n,t)}{M_m(x_i^m,x_j^m,t)}\quad \text{if } m \text{ is odd.}$$

最后，我们来证明紧致模糊度量空间序列 $\{(X_n,\ M_n,\ \cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 没有任何柯西子序列。反设存在一个柯西子序列，并将其重新记为 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。那么，对于 $t=\frac{1}{2}$ 和 $\varepsilon=\frac{1}{10}$，存在 n_0 使得 $M_{GH}(X_n,\ X_m,\ 12)>1-\frac{1}{10}$，对所有 $n,\ m\ge n_0$ 均成立。取 $2m+1>2m\ge n_0$。由于每个 X_n 中唯一的（$\overline{12}$，110）-网是 $\{x_1^n,x_2^n\}$，由命题4.6可得，在 $X_{2m}\sqcup X_{2m+1}$ 上存在一个容许度量 M，使得

$$M\left(x_1^{2m},x_2^{2m},\frac{1}{2}\right)\ge M\left(x_1^{2m+1},x_2^{2m+1},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2,$$
$$M\left(x_1^{2m+1},x_2^{2m+1},\frac{1}{2}\right)\ge M\left(x_1^{2m},x_2^{2m},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

这就得到了 $\frac{1}{3}\ge\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2$，这是一个矛盾。

接下来，我们将看到，定理4.17 中对所有 $s>0$ 都有 $C(s)>0$ 这一条件同样不能放宽。

例4.19。考虑与上面例子中相同的空间（$X_n,\ d_n$）、$n\in\mathbb{N}$，其中模糊度量现在由标准模糊度量给出

$$M_{d_n}(x_i^n,x_j^n,t)=\frac{t}{t+d_n(x_i^n,x_j^n)}$$

对所有 $t \geq 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$。我们将看到，紧致非阿基米德模糊度量空间的序列 $\{X_n, M_{d_n}, \cdot\}$ 没有柯西子列。

显然，对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $C(s) \leq \frac{s}{s+n}$，因此对于所有 $s > 0$， $C(s) = 0$。

假设存在一个 M_{GH}-柯西子序列，记为 $(X_{n_k}, M_{d_{n_k}}, \cdot)$， $k \in \mathbb{N}$。由 [21,引理4.16],，这也给出一个 d_{GH}-柯西序列 $\{(X_{n_k}, d_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$，且 $\mathbf{diam}(X_{n_k}) = n_k$。但这是不可能的。事实上， [5, 习题7.3.14] 表明，对于任意度量空间 X 和Y，有

$$d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2}\Big|\mathrm{diam}(X) - \mathrm{diam}(Y)\Big|.$$

对于平稳度量，我们可以陈述如下结果。

定理4.20。 若非空紧模糊度量空间的序列 $\{(X_n, M_n, *)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足以下三个条件:

(1) t*-*范数 $*$ 满足性质 *(TN1)*，且对于所有$n \in \mathbb{N}$，$(M_n, *)$ 都是平稳模糊度量。*(2)* 存在一个常数 $C > 0$，使得

$$0 < C \leq diam_s(X_n) = diam(X_n), \ for\ all\ n \in \mathbb{N}.$$

(3) 对每个 $0 < \varepsilon < 1$，存在一个自然数 $N(\varepsilon)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，覆盖数 $Cov(X_n, \varepsilon) \leq N(\varepsilon)$,

那么，给定 $0 < \varepsilon < 1$，存在一个子序列 $\{(X_{n_k}, M_{n_k}, *)\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$M_{GH}(X_{n_j}, X_{n_k}) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon),$$

对所有 $j, k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此， $\{(X_n, M_n, *)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个柯西子序列。

证明。 取 $0 < \varepsilon < 1$，并在每个空间 X_n 中固定一个 ε-网。对所有 $n \in \mathbb{N}$，考虑 $N = N(\varepsilon) \geq Cov(X_n, \varepsilon)$，并假设这些 ε- 网中的每一个都由 $\{x_k^n\}_{k=1}^N$, $n \in \mathbb{N}$ 给出。按照定理 4.15 的证明进行，得到一个子序列，记为 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ 以及每个 $n, m \in \mathbb{N}$，都有:

$$\Big|M_n(x_i^n, x_j^n, t) - M_m(x_i^m, x_j^m, t)\Big| < C * \varepsilon.$$

现在，应用引理4.14可得，对于每个 i 和 j,

$$\begin{aligned} (a) \quad M_n(x_i^n, x_j^n, t) &> M_m(x_i^m, x_j^m, t) * (1-\varepsilon), \\ (b) \quad M_m(x_i^m, x_j^m, t) &> M_n(x_i^n, x_j^n, t) * (1-\varepsilon), \end{aligned}$$

这对每个 $t > 0$都成立，因为所有 $(M_n, *)$ 都是平稳模糊度量。

命题 4.13 使我们能够在 $X_n \sqcup X_m$ 上得到一个可容许模糊度量 M，使得

$$H_M(X_n, X_m, t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon),$$

由此得到 $M_{GH}(X_n, X_m, t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon)$。因此，给定 $0 < \varepsilon < 1$，我们找到了一个子序列，记为 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足对于所有 $n, m \in \mathbb{N}$,

$$M_{GH}(X_n, X_m, t) > (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon),$$

对于所有 $t > 0$，因此，根据注4.3，存在一个柯西子序列。 □

现在我们可以陈述 Gromov–Hausdorff 紧致性定理的一个模糊版本。回顾一下，如果 $\mathcal{M} = \{(X_j,\ M_{X_j},\ *) :\ j \in J\}$ 是紧致非阿基米德模糊度量空间的集合，那么我们用 $\mathcal{I}(\mathcal{M})$表示 $\mathcal{M}$中所有元素的等距类的集合。 $\mathcal{I}(\mathcal{M})$是一个配备非阿基米德格罗莫夫-豪斯多夫模糊度量的度量空间。

定理4.21。 设 $\mathcal{M}$为一族非空紧致的非阿基米德模糊度量空间。假设这些模糊度量所对应的 t-范数具有性质 ***(TN1)***，并且

(1) 存在一个非递减左连续函数 $C : (0, +\infty) \to (0, 1]$, ，满足

$$0 < C(s) \leq diam_s(X), \quad for\ all\ s > 0\ and\ for\ all\ X \in \mathcal{M}.$$

(2) 对于每个 $t > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$，都存在一个数 $N(t, \varepsilon)$，使得对于所有 $X \in \mathcal{M}$,$Cov(X, t, \varepsilon) \leq N(t, \varepsilon)$。***(3)*** $\mathcal{M}$ 中的每个序列都满足定理***4.15***中的条件（***4***）。

于是，$(\mathcal{I}(\mathcal{M})\ M_{GH}, *)$ 是一个紧空间。

证明。 由定理4.15可知， $\mathcal{M}$中的每个序列都有一个柯西子序列，这意味着 $\mathcal{I}(\mathcal{M})$是一个预紧空间。在 [21] 中，作者已证明该空间也是完备的。因此，$(\mathcal{I}(\mathcal{M})\ M_{GH}, *)$是一个紧空间。 □

注4.22。 值得注意的是，上述定理中的条件（3）不能去掉，因为可以取一个紧致非阿基米德模糊度量空间族 $\mathcal{M}$，使其包含例 4.18 中的序列，因此 $\mathcal{I}(\mathcal{M})$不可能是紧空间。

现在，根据前面的结果，我们可以推出度量空间的经典 Gromov–Hausdorff 紧致性定理。首先需要以下结果。

定理4.23。 设 $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足以下条件的非空紧度量空间序列：

(1) 存在一个常数 $K > 0$，使得

$$diam(X_n) \leq K, \quad for\ all\ n \in \mathbb{N}.$$

(2) 对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个数 $N(\varepsilon)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，覆盖数

$$Cov(X_n, \varepsilon) \leq N(\varepsilon).$$

那么，序列$\{X_n, M_{d_n}, \cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定理***4.17***中的条件，因此它有一个柯西子序列。

证明。 由于 $diam(X_n) \leq K$，因此，对于每个 $s > 0$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $diam_s(X_n) \geq \frac{s}{s+K} = C(s) > 0$，结果这是一个连续且非递减的函数。

另一方面，给定 $0 < \varepsilon < 1$ 和 $t > 0$，我们有

$$Cov(X_n, \frac{\varepsilon t}{1-\varepsilon}) \leq N(\frac{\varepsilon t}{1-\varepsilon}) = N(\varepsilon, t)$$

因此，对于所有 n，我们有

$$Cov(X_n, \varepsilon, t) \leq N(\varepsilon, t).$$

最后，给定 $t > 0$和 $0 < \varepsilon < 1$, $n, m \in \mathbb{N}$以及 $N = N(\varepsilon, t)$，分别取 X_n 和 X_m 中的任意两个 (t, ε)-网 $\{x_i^n\}_{i=1}^N$ 和 $\{x_i^m\}_{i=1}^N$。设 $s > t$ 已给定，并假设$M_n(x_i^n, x_j^n, s) < M_m(x_i^m, x_j^m, s)$。那么 $d_m(x_i^m, x_j^m) < d_n(x_i^n, x_j^n)$，并且

$$\begin{aligned}\frac{M_n(x_i^n, x_j^n, s)}{M_m(x_i^m, x_j^m, s)} &= \frac{s + d_m(x_i^m, x_j^m)}{s + d_n(x_i^n, x_j^n)} = 1 - \frac{d_n(x_i^n, x_j^n) - d_m(x_i^m, x_j^m)}{s + d_n(x_i^n, x_j^n)} \\ &\geq 1 - \frac{d_n(x_i^n, x_j^n) - d_m(x_i^m, x_j^m)}{t + d_n(x_i^n, x_j^n)} = \frac{t + d_m(x_i^m, x_j^m)}{t + d_n(x_i^n, x_j^n)} \\ &= \frac{M_n(x_i^n, x_j^n, t)}{M_m(x_i^m, x_j^m, t)}.\end{aligned}$$

因此，定理4.17中的三个条件均已满足，我们得到所需结论。 □

定理4.24. 设 $\mathcal{M}$是一个非空紧度量空间族，满足

(1) 存在一个常数 $K > 0$ ，使得

$$diam(X) \leq K, \quad for\ all\ X \in \mathcal{M}.$$

(2) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个数 $N(\varepsilon)$ ，使得对于所有 $X \in \mathcal{M}$，覆盖数

$$Cov(X, \varepsilon) \leq N(\varepsilon).$$

那么， $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ 赋予*Gromov–Hausdorff*度量后是一个紧空间。

证明。我们知道，$(\mathcal{I}(\mathcal{M}), d_{GH})$ 是一个完备度量空间 [25, 命题 6]。取 $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的任意序列。根据定理4.23，我们知道 $\{(X_n, M_{d_n}, \cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个 M_{GH}-柯西子序列。应用 [21, 引理 4.16] 可知，它也是一个 d_{GH}-柯西子序列，因此 $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ 是一个预紧空间。因此，$(\mathcal{I}(\mathcal{M}), d_{GH})$ 是一个紧度量空间。

□

5. Conclusion

本文提出了格罗莫夫预紧性定理的一个模糊版本，借助与度量空间相关联的标准模糊度量，可以由此推出度量空间的经典定理。正如预期的那样，要得到这一结果必须施加一些额外条件；我们还证明了这些条件不可省略。考虑到格罗莫夫经典紧性定理的应用，我们的结果为模糊数学各领域的未来应用带来了可能。

References

[1] M. Abouzaid, N. Bottman, 范畴辛几何中的函子性, 《澳大利亚数学学会通报》 (N.S.)4 (2024) 61 (2024), 525–608.[2] A. Ahumada, M.Che, 度量对与度量元组的 *Gromov–Hausdorff*收敛, 《微分几何杂志》 Appl. **94** (2024), Paper No. 102135, 29 pp.[3] M.T. Anderson, 黎曼度量空间的轨形紧性及其应用, Math. Ann. **331**(2005), no. 4, 739–778.

[4] S.I. Bogataya, S.A. Bogatyy, V.V. Redkozubov, A.A. Tuzhilin, Gromov–Hausdorff类中的云：其完备性与中心, 《Topology and its Applications》, 329, (2023), Paper No. 108374, 14 pp.[5] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, 《度量几何教程》, 《数学研究生教程》, vol. 33. 美国数学学会, Providence, RI, 2001.[6] K. Fukaya, 有界曲率与直径的黎曼流形集合的边界, 《微分几何杂志》 28 (1988), no. 1, 1–21.[7] A. George, P. Veeramani, 关于模糊度量空间的一些结果, 《模糊集与系统》 64 (1994), no. 3, 395–399.[8] R.E. Greene, P.V. Petersen, 小拓扑，大体积, 《杜克数学杂志》 67 (1992), no. 2, 273–290.[9] V. Gregori,S. Ro maguera, 模糊度量空间的一些性质, 《模糊集与系统》 115 (2000), no. 3, 485–489.[10] V. Gregori, S. Romaguera, 模糊度量空间的完备化, 《模糊集与系统》 130 (2002), 399–404.[11] V. Gregori, S. Romaguera, 可完备化模糊度量空间的刻画, 《模糊集与系统》 144 (2004), 411–420.[12] V. Gregori, S. Morillas, A. Sapena, 一类可完备化模糊度量空间, 《模糊集与系统》 161 (2010), no. 16, 2193–2205.[13] M. Gromov, 多项式增长群与扩张映射, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 53 (1981年), 183–215.[14] M. Gromov, 辛流形中的伪全纯曲线, Invent. Math. 2 (1985), 307–347.[15] C. Hummel, 伪全纯曲线的格罗莫夫紧致性定理, Springer Basel AG, 1997.[16] V. Istr˘at¸escu, 《概率度量空间理论导论及其应用》, Ed. Tehnic˘ a Bucure¸sti, 1974（罗马尼亚语）。[17] I. Kramosil, J. Mich´alek, 模糊度量与统计度量空间, 《控制论》（布拉格）11 (1975), no. 5, 336–344.[18] J. Lee, 黎曼流形：曲率导论, Springer, 1997.[19] H. Lee, M. Chung, H. Kang, B. Kim, D. Lee. 使用图过滤和Gromov–Hausdorff度量计算脑网络形状, 威斯康星大学, 麦迪逊, WI 53705, USA, 2011.[20]A. L´opez-Crevill´en, 模糊度量。图像过滤中的应用, 博士论文（Ph.D.）– Universitat Polit`ecnica de Val`encia, 2010, 134 pp.（西班牙语）。[21] S. Macario, M. Sanchis, 非阿基米德模糊度量空间的Gromov–Hausdorff收敛, 《模糊集与系统》, 267 (2015), 62–85.[22] F. Memoli, Gromov–Hausdorff距离在形状比较中的应用, Eurographics基于点的图形学研讨会, 斯坦福, CA, USA, 2007.[23] A. Ott, 辛涡旋的奇点消除与Gromov紧致性, 《辛几何杂志》 12 (2014), no. 2, 257—311.[24] S-H. Paeng, 渐近欧几里得流形的刚性, 《澳大利亚数学学会通报》 60 (1999), no. 3, 521–528.[25] P.V. Petersen, 度量空间的Gromov–Hausdorff收敛, 微分几何：黎曼几何（洛杉矶, CA, 1990）, 489–504, 《纯数学专题讨论会论文集》, 54, Part 3, 美国数学学会 , Providence, RI, 1993.[26] J. Rodr´ıguez-L´opez, S. Romaguera, J.M. S´anchez-´ Alvarez, Hausdorff模糊拟度量, 《模糊集与系统》 161 (2010), no. 8, 1078–1096.[27] B. Schweizer, A. Sklar, 统计度量空间, 《太平洋数学杂志》 10 (1960), 313–334.[28] P. Veeramani, 模糊度量空间中的最佳逼近, 《模糊数学杂志》 9 (2001), 75–80.[29] A. Vikhrov, Gromov–Hausdorff类中一般位置度量空间的稠密性, 《Topology and its Applications》, 342, (2024), Paper No. 108771, 11 pp.

[30] S. Weinberger, Z. Xie, G.Yu, 关于正标量曲率的格罗莫夫紧致性问题, Ann.K-Theory **9** (2024),no.4,583-–612.[31] T. Yu, 非阿基米德解析几何中的*Gromov*紧致性, J.ReineAngew. Math. **741**(2018),179–210.