合并树之间的局部正确交错

Thijs Beurskens
数学与计算机科学系，埃因霍温理工大学，荷兰

Tim Ophelders
乌得勒支大学信息与计算机科学系，荷兰；埃因霍温理工大学数学与计算机科学系，荷兰

Bettina Speckmann
埃因霍温理工大学数学与计算机科学系，荷兰

Kevin Verbeek
埃因霍温理工大学数学与计算机科学系，荷兰

arXiv:2512.16474v1 [cs.CG] 18 Dec 2025

摘要

地形的时间序列出现在各种应用领域。为了高效地分析这些序列，通常需要对数据进行适当抽象，并找到一种方法来比较和匹配不同时刻的数据。本文将合并树作为地形的拓扑描述符，并采用交错距离来匹配和比较合并树。两个合并树之间的交错 由两个映射组成，分别指向对方。这些映射必须满足祖先关系，因此会在点与其像之间引入“位移”。最优交错会使最大位移最小；交错距离就是该位移的值。然而，要研究合并树随时间的演变，我们需要的不仅是一个数值，还需要两个树之间有意义的匹配。最优交错的两个映射会导出一种匹配，但由于交错距离具有瓶颈性质，这种匹配无法捕捉树之间的局部相似性。因此，本文提出交错的局部最优性概念。为此，我们定义残余交错距离，它是交错距离的一种推广，允许对映射施加额外约束。由此，我们得以定义局部正确交错，其在两个合并树之间采用一系列位移，能够良好地反映局部相似性。我们给出了构造性证明，证明局部正确交错总是存在。

2012 年 ACM 学科分类计算理论 → 计算几何

关键词和短语交错距离、合并树、局部正确性、匹配

资助 *Thijs Beurskens*：获荷兰研究理事会（NWO）项目编号 OCENW.M20.089。
Tim Ophelders：获荷兰研究理事会（NWO）项目编号 VI.Veni.212.260 资助。

致谢特别感谢 Willem Sonke 就本文主题展开富有帮助的讨论，并制作了图 1。

1 引言

随时间变化的地形是多种应用领域中的常见数据类型，例如科学计算或地理信息科学。这类数据集通常规模很大；若要高效分析，往往需要一种能够捕捉显著特征的紧凑抽象表示。拓扑数据分析（TDA）提供了多种拓扑描述符 [15]，例如持久图、Reeb 图和 Morse-Smale 复形，可作为二维、三维或更高维地形的抽象表示。本文特别关注合并树，这类基于图的描述符能够编码地形的次水平集或超水平集的连通分量随时间的演变（见图 1）。

为了分析合并树的时间序列，不仅需要紧凑的表示方法，还需要高效的方法来比较和匹配它们随时间的变化。对于合并树，

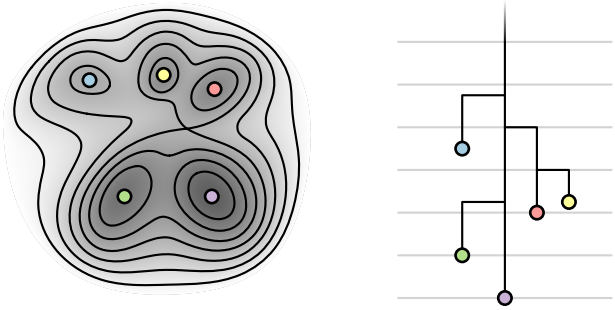

图 1 地形及其合并树；叶节点和内部顶点分别表示极小值和鞍点。

尤其是，人们提出了多种距离度量，包括编辑距离 [12],Wasserstein 距离 [10], 和交错距离 [7]。然而，距离度量只会返回一个数值，用来量化两棵合并树 T_1 和 T_2的相似性。在许多应用场景中，我们还希望追踪合并树随时间的变化，因此需要了解 T_1 中的哪些部分与 T_2中的哪些部分最为对应。也就是说，我们关注的是 T_1 与 T_2之间的匹配。

事实上，交错距离依赖于两棵树之间的一种匹配，即所谓的交错。交错是一对祖先保持映射，一个从 T_1映射到 T_2 ，另一个从 T_2 映射到 T_1，且它们的复合映射会将点映射到祖先：若 T_1 中的点 x被映射到 T_2中的点 y ，那么 y 必须被映射到 x的某个祖先，反之亦然。交错距离 是所有树之间的交错中最大位移（即点与其像之间的距离）的最小值。我们将在第 2 节和第 3 节给出交错距离和交错的精确定义。

两棵合并树通常存在许多最优交错。交错距离是一种瓶颈度量，因此给定的最优交错在局部可能相当“松散”：最优位移可能超过实际所需，从而无法体现树之间的局部相似性；见图 2。受曲线局部正确 Fréchet 匹配这一概念的启发 [3], ，我们将在下文提出局部最优交错的概念，以区分“紧密”和“松散”的最优交错。

贡献。 局部正确的弗雷歇匹配即使在考察任意两条匹配子曲线时也是最优的。这是一项理想的性质，但无法直接通过交错复现。首先， T_1 与 T_2中的点之间甚至可能不存在一一对应。此外，不同子树对之间的两个最优交错，不一定能组合成两个完整

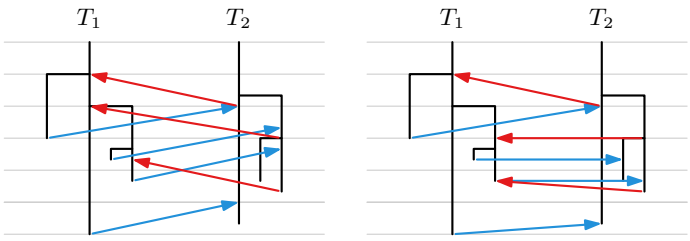

图 2 合并树 T_1 与 T_2之间的两种最优交错。直观而言，右侧交错所诱导的匹配比左侧交错更紧密，也更有意义。

树之间的最优交错。因此，作为第一步，我们引入交错距离的一种新型推广，使其能够处理映射上的附加约束。具体而言，我们希望使用约束，强制将点 x 映射到另一棵树中某个特定点 y 的祖先。对于满足这些约束的交错，我们希望最小化所有点 x 的最大位移，其中这些点要么不受约束，要么被映射到对应点 y的严格祖先。我们将由此得到的距离称为残余交错距离。在第3节中，我们给出正式定义，并证明对于任意约束，都存在最优交错。

在第4节中，我们基于残余交错距离提出局部正确交错的定义。具体而言，我们将交错 $\mathcal{I} = (\alpha, \beta)$对两个子集 S_1 of T_1 和 S_2 of T_2 的限制定义为：将 α 限制到 S_1，并将 β 限制到 S_2。如果$\mathcal{I}$ 相对于其任意限制都能使残余交错距离最小，我们就称其为局部正确。我们通过构造性证明表明，局部正确交错总是存在的。

相关工作。 Morozov等人 [7] 将合并树之间的交错距离定义为研究合并树稳定性的工具。Agarwal等人 [1] 建立了交错距离与 Gromov-Hausdorff 距离之间的联系，并指出，将交错距离近似到因子 3 以内是 NP难的。他们还给出了一种$\mathcal{O}(\min(n, \sqrt{rn}))$-近似算法，其中 n 是树的总规模，r是最长边与最短边的长度之比。Touli 和 Wang [13] 给出了基于单个映射的交错距离等价定义，并利用这一刻画设计了一种用于精确计算交错距离的固定参数可处理算法。最近，Gasparovic等人 [5] 表明，交错距离可以用一种相关度量 [8] 来表示，该度量适用于带标签的合并树（也称为系统发育树）。

人们已经尝试开发可用于实际应用的交错距离变体。特别是，Gasparovic等人 [5] 的研究催生了用于计算交错距离 [4] 以及比较地形 [14, 16]的启发式算法。Pegoraro [9] 则采用了另一种交错距离的重述方式，以耦合为基础，通过线性整数规划启发式地计算距离。最后，Beurskens等人 [2] 提出了一种交错距离变体，该变体为合并树施加全序，并可通过与一维曲线之间的 Fréchet 距离建立联系来高效计算。

2 预备知识

合并树 是一个二元组 (T, f)，其中 T是一棵有限有根树，而 $f\colon T \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 是定义在 T 上的连续高度函数，该函数沿朝向根的方向严格递增，且根的高度为 ∞。我们将 T 与其拓扑实现视为同一对象：这是一个拓扑空间，其中 T 的每条边都表示为单位线段，各部分按照 T的邻接关系连接。我们区分拓扑实现 T中的元素（称为 T上的点 ）与组合树的顶点；后者记作 $V(T)$。若上下文明确，我们就用 T指代二元组 (T, f)。

对于 x_1, x_2 中的两个点 T，如果存在一条从 x_1 到 x_2 的 f-单调递增路径，则称 x_1 是 x_2 的 后代，记作 $x_1 \preceq x_2$。此外，如果 $x_1 \neq x_2$，则称 x_1 是 x_2 的严格后代 。如果 x_1 是 x_2 的（严格）后代，则称 x_2 是 x_1 的 （严格）祖先 。最后，对于点 x 和高度值 $h \geq f(x)$，我们用 $x|^h$ 表示 x 在高度 $f(x|^h)$ 处的唯一祖先 $= h$ （见图 3 左图）。

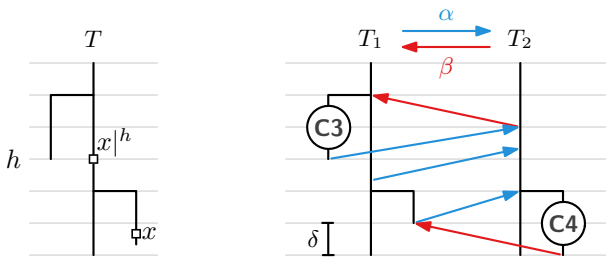

图 3 左：一棵合并树 T；点 $x|^h$ 是高度为 h处的 x 的祖先。右：一对 δ-相容映射的部分。

相容映射。 Morozov 等 [7] 给出了两个合并树（T_1, f_1）和（T_2, f_2）之间交错距离的原始定义。

▶ **定义 1** (Morozov 等人 [7])。 固定一个值 $\delta \geq 0$。如果对于所有 $x \in T_1$ 和所有 $y \in T_2$，都有：则称 α: $T_1 \to T_2$和 β: $T_2 \to T_1$ 是 T_1 与 T_2 之间的 δ-相容 映射。

(C1) $f_2(\alpha(x)) = f_1(x) + \delta$， **(C3)** $\beta(\alpha(x)) = x|^{f_1(x)+2\delta}$，且**(C2)** $f_1(\beta(y)) = f_2(y) + \delta$， **(C4)** $\alpha(\beta(y)) = y|^{f_2(y)+2\delta}$。

树 T_1 与 T_2 之间的交错距离 $d(T_1, T_2)$ 是满足存在 δ-相容映射的 δ 的下确界（见图 *3* 右）。

临界值。 Agarwal等人 [1] 以及 Touli 和 Wang [13] 均已证明，任意两棵合并树之间的交错距离都取自一个临界值集合。具体而言，令 $\Delta := \Delta(T_1, T_2)$ 为三个集合 Δ_1、Δ_2 和 Δ_3 的并集，其中

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \{|f_1(v) - f_2(w)| : v \in V(T_1), w \in V(T_2)\}, \\ \Delta_2 &:= \{\tfrac{1}{2}|f_1(v_1) - f_1(v_2)| : v_1, v_2 \in V(T_1)\}, \\ \Delta_3 &:= \{\tfrac{1}{2}|f_2(w_1) - f_2(w_2)| : w_1, w_2 \in V(T_2)\}. \end{aligned} \tag{1}$$

▶ **引理 2** （[1, 13]）。 对于任意两棵合并树 T_1 和 T_2，有 $d(T_1, T_2) \in \Delta(T_1, T_2)$.

3 交错距离的推广

交错距离基于一对映射。正如 Agarwal等人 [1], 所指出的，我们可以放宽对这些映射的要求，允许点与其像之间的高度差发生变化。基于这一放宽后的定义，我们引入交错距离的一个推广版本，以纳入对所考虑映射的约束。具体而言，每个约束都规定，点 x 必须映射到另一棵树中特定点 y的一个祖先。我们的目标是找到一对最优映射，使其能够“扩展”给定的一组约束。我们将相应的距离称为残余交错距离。为对其进行形式化定义，我们先引入部分向上映射，用以表示两棵合并树之间允许的映射。在第 3.1 节中，我们使用部分向上映射放宽定义 1。随后在第 3.2 节中，我们给出残余交错距离的形式化定义。

部分上映射。 设 (T_1, f_1) 和 (T_2, f_2) 是两棵合并树。从 T_1 到 T_2 的一个箭头 是点对 $(x, y) \in T_1 \times T_2$，满足 $f_1(x) \leq f_2(y)$。箭头 (x, y) 的位移 是 x 与 y之间的高度差，记为 $\sigma(x, y) := f_2(y) - f_1(x)$。考虑点的一个子集

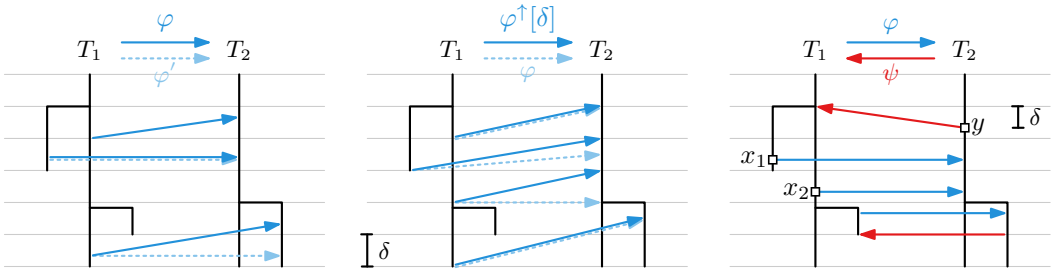

图 4 左：部分上映射 φ 扩展了另一个部分上映射 φ'。中：部分上映射 φ 及其对应的映射 $\varphi^{\uparrow}[\delta]$；每个非虚线箭头的位移至少为 δ。右：位移为 δ的部分交错；注意， $\psi(y)$ 是 x_1 和 x_2的祖先。

$S \subseteq T_1$。映射 $\varphi\colon S \to T_2$ 是从 S 到 T_2 的部分上映射，当且仅当：(i) 对于 S 的所有点 x， $f_2(\varphi(x)) \geq f_1(x)$；(ii) 它保持祖先关系，即对于 S 中的所有点 x_1、x_2， $x_1 \preceq x_2$ 蕴含 $\varphi(x_1) \preceq \varphi(x_2)$。我们用 $\mathrm{dom}(\varphi) := S$ 表示 φ 的定义域。对于 S 的每个点 x，点对 $(x, \varphi(x))$ 是一个箭头。我们将 φ 的箭头集合记为 $A_\varphi := \{(x, \varphi(x)) : x \in S\}$。我们将部分上映射 φ 的位移定义为 φ 的所有箭头上的上确界位移：

$$\sigma(\varphi) := \sup\{\sigma(a) : a \in A_\varphi\}. \tag{2}$$

给定一个从 S到 T_2的箭头 (x, y)，若 $\varphi(x) \succeq y$，则称 φ 扩展了 (x, y)；若 $\varphi(x) = y$，则称 φ使用了 (x, y)。类似地，对于子集 $S' \subseteq S$ 以及从 S' 到 T_2的部分上映射 φ'，若 φ 分别扩展或使用了 φ' 的所有箭头（图 4 左），则称 φ 扩展了 或 使用了 φ'。

对于任意 $\delta \geq 0$，我们可以定义一个从 S 到 T_2 的部分上映射 $\varphi^{\uparrow}[\delta]$，它扩展 φ，且每个箭头的位移至少为 δ。具体而言，对于 S中的每个点 x，令 $h_x := \max(f_1(x) + \delta, f_2(\varphi(x)))$，并定义 $\varphi^{\uparrow}[\delta](x) := \varphi(x)|^{h_x}$（见图 4 中）。

▶ **引理 3.** 对于任意 $\delta \geq 0$，映射 $\varphi^{\uparrow}[\delta]$ 是一个部分上映射，它扩展了 φ。

证明。令 $\varphi' := \varphi^{\uparrow}[\delta]$。根据构造，我们有 $f_2(\varphi'(x)) \geq f_1(x)$。为证明 φ' 保持祖先关系，取 S 中的两个点 x_1, x_2，使得 x_2 是 x_1的祖先。由于 φ 保持祖先关系， $\varphi(x_2)$ 是 $\varphi(x_1)$ 的祖先。若 $\varphi'(x_1) = \varphi(x_1)$，则得到 $\varphi'(x_1) \preceq \varphi(x_2) \preceq \varphi'(x_2)$。否则， $\varphi'(x_1)$ 是 $\varphi(x_1)$ 的严格祖先。根据构造， $f_2(\varphi'(x_1)) = f_1(x_1) + \delta \leq f_1(x_2) + \delta \leq f_2(\varphi'(x_2))$。 $\varphi'(x_1)$ 和 $\varphi'(x_2)$ 都是 $\varphi(x_1)$ 的祖先，因此 $\varphi'(x_2)$ 是 $\varphi'(x_1)$ 的祖先。所以 φ' 是一个部分上映射，并且根据构造，它也扩展了 φ。◀

我们以对称的方式定义从子集 S 到 T_2 的箭头和上映射。

部分交错。固定两个子集 $S_1 \subseteq T_1$ 和 $S_2 \subseteq T_2$。S_1与 S_2之间的部分交错 P 是一对部分上映射 $\varphi\colon S_1 \to T_2$和 $\psi\colon S_2 \to T_1$，满足：对于 S_1 中的所有点 x 以及 S_2 中的所有点 y，如果 $\varphi(x) \preceq y$，则 $\psi(y) \succeq x$；如果 $\psi(y) \preceq x$，则 $\varphi(x) \succeq y$（右图 4）。P 的位移记为 $\sigma(\mathrm{P})$，定义为 φ 的位移与 ψ的位移中的最大值。我们将 P 的箭头定义为 φ 的箭头与 ψ的箭头的并，记为 $A_\mathcal{P} := A_\varphi \cup A_\psi$。给定另一个部分交错 $\mathrm{P}' = (\varphi', \psi')$，如果 φ 扩展了 φ' 且 ψ 扩展了 ψ'，则称 P 扩展了 P'。类似地，如果 φ 使用了 φ'且 ψ 使用了 ψ'，则称 P 使用了 P'。对于任意 $\delta \geq 0$，有序对 $(\varphi^{\uparrow}[\delta], \psi^{\uparrow}[\delta])$ 是一个部分交错。

▶ **引理 4.** 对于任意 $\delta \geq 0$，配对 $(\varphi^{\uparrow}[\delta], \psi^{\uparrow}[\delta])$ 是一个扩展了 (φ, ψ) 的部分交错 .

证明。 记 $\varphi' := \varphi^{\uparrow}[\delta]$ 和 $\psi' := \psi^{\uparrow}[\delta]$。根据引理 3，映射 φ' 和 ψ' 是分别延拓 φ 和 ψ的部分上映射。因此，只需证明这一对 (φ', ψ')

是一个部分交错。设 x 是 S_1 中的一个点， y 是 S_2 中的一个点，且满足 $\varphi'(x) \preceq y$。根据构造，点 $\varphi'(x)$ 是 $\varphi(x)$的祖先，因此 y 也是 $\varphi(x)$的祖先。由于 (φ, ψ) 是一个部分交错，点 $\psi(y)$ 必须是 x的祖先。由于 $\psi'(y)$ 是 $\psi(y)$的祖先，我们得到 $\psi'(y) \succeq x$。对称地，若 $\psi'(y) \preceq x$ ，则 $\varphi'(x) \succeq y$。◀

对于部分交错 $\mathcal{P} = (\varphi, \psi)$，我们使用 $\mathcal{P}.\varphi$ 和 $\mathcal{P}.\psi$ 分别表示 φ 和 ψ。 y.

3.1 完全交错

若 $S_1 = T_1$，我们称部分上映射 α：从 T_1 到 T_2的完全上映射，或简称上映射。对称地，若 $S_2 = T_2$，我们称部分上映映射 β：从 T_2 到 T_1的（完全）上映映射。相应地，若 $S_1 = T_1$ 且 $S_2 = T_2$，我们称部分交错 (α, β) 为（完全）交错。于是，完全交错的定义性质变为：对于所有 $x \in T_1$ ，都有 $\beta(\alpha(x)) \succeq x$ ；对于所有 $y \in T_2$ ，都有 $\alpha(\beta(y)) \succeq x$。在引理 7中，我们证明交错距离等于满足以下条件的 δ 的下确界： T_1 和 T_2 存在位移为 δ 的交错。首先，不难看出，任意一对 δ-相容映射都构成一个位移为 δ的交错。

▶观察 *5. </style}*任意一对 δ-相容映射都是位移为 δ 的交错。

反过来，对于位移为 δ 的完全交错 (α, β)，我们证明总是存在一对 δ-相容映射。特别地，映射对 $(\alpha^{\uparrow}[\delta], \beta^{\uparrow}[\delta])$ 是 δ-相容的。

▶ **引理 6.** 对于任意位移为 δ 的交错 (α, β) ， $\alpha^{\uparrow}[\delta]$ 和 $\beta^{\uparrow}[\delta]$ 是 δ-相容映射。

证明。记 $\alpha' := \alpha^{\uparrow}[\delta]$ 和 $\beta' := \beta^{\uparrow}[\delta]$。我们先证明 α' 连续；证明 β' 连续的方法类似。设 x 是 T_1 中的一个点，并考虑 x 的一个小邻域 X，其中每个点 x' 都可通过一条 f_1-单调路径从 x 到达。为了证明 α' 在 x处连续，我们证明 $\alpha'(x)$ 与 $\alpha'(x')$ 之间存在一条 f_2-单调路径，并且 $\alpha'(x)$ 与 $\alpha'(x')$ 之间的高度差有界。根据构造以及对 δ 的选取可知， α' 将 T_1 中的每个点映射到 T_2 中恰好高出 δ 的一个点。特别地，我们得到 $|f_2(\alpha'(x')) - f_2(\alpha'(x))| = |f_1(x') - f_1(x)|$。由于 α' 是一个上映射，我们知道 $x \preceq x'$ 蕴含 $\alpha'(x) \preceq \alpha'(x')$，且 $x' \preceq x$ 蕴含 $\alpha'(x') \preceq \alpha'(x)$。换言之， $\alpha'(x)$ 与 $\alpha'(x')$ 之间存在一条 f_2-单调路径。因此 α' 连续。

最后，由于 (α', β') 是一个交错，且每个箭头的位移恰好为 δ，因此对所有 $x \in T_1$，都有 $\beta'(\alpha'(x)) = x|^{f_1(x)+2\delta}$ ；对所有 $y \in T_2$，都有 $\alpha'(\beta'(y)) = y|^{f_2(y)+2\delta}$。◀

结合观察 5 和引理 6，我们得到引理 7。

▶ **引理 7**。 $d(T_1, T_2) = \inf\{\delta :$ T_1 和 T_2 存在一个位移为 δ 的完全交错*}*。

最优交错。交错距离定义为下确界，但 Gasparovic 等人 [6] 和 Pegoraro [9] 证明，下确界可以替换为最小值：总存在一个位移为 $d(T_1, T_2)$ 的交错（定理 9）。我们将实现交错距离的交错称为最优交错。这两种证明都依赖于交错距离的其他定义，即通过标记 [6] 和耦合 [9]来定义。现在我们给出定理 9 的一个更直接的证明。为此，我们首先证明，对于一个位移不等于临界值的交错，存在一个位移严格更小的交错。

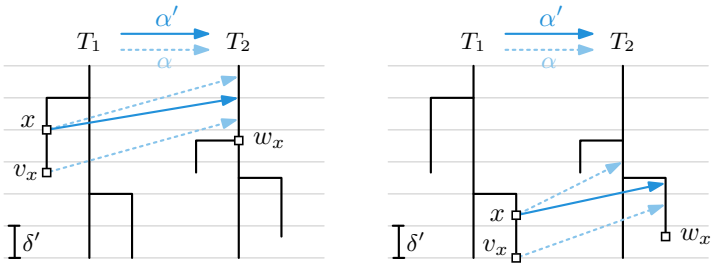

图5 映射 α'的示意图。每个点 x 的像都会被“向下推”到正确的高度。左侧只有一种选择，而右侧则需要选择正确的子树。

▶ **引理 8.** 对于任意完全交错 $I = (\alpha, \beta)$，其位移为 $\delta \notin \Delta$，都存在另一个交错 I'，其位移等于一个严格小于 δ的临界值。

证明。令 δ' 为满足 $\delta' \leq \delta$的 $\Delta(T_1, T_2)$ 中的最大值。由于临界值只有有限多个，这样的值 δ' 必然存在。不失一般性，我们假设 I 的所有箭头的位移至少为 δ'。否则，我们可以分别将 α 和 β 替换为 $\alpha^{\uparrow}[\delta']$ 和 $\beta^{\uparrow}[\delta']$。对于 T_1中的每个点 x，令 $v_x \in V(T_1)$ 为包含 x的边的下端点；若 x 是顶点，则 $v_x = x$。此外，令 w_x 为包含 $\alpha(v_x)$ 的边的下端点。值 $f_2(w_x) - f_1(v_x)$ 是一个临界值，因此根据 δ' 的选取，我们知道 $f_2(w_x) - f_1(v_x) \leq \delta'$。换言之，$f_2(w_x) \leq f_1(x) + \delta'$。因此，我们可以放心地定义 $\alpha'(x) = w_x|^{f_1(x)+\delta'}$。我们对称地定义从 T_2 到 T_1 的映射 β'。见图5。

我们首先证明 α' 是一个上映射；对于 β' 的证明是类似的。设 x_1 和 x_2 是 T_1 中的点，满足 $x_1 \preceq x_2$。若 $v_{x_1} = v_{x_2}$，则可直接得到 $\alpha'(x_1) \preceq \alpha'(x_2)$。否则，必有 $v_{x_1} \preceq x_1 \preceq v_{x_2}$。由于 α 保持祖先关系，因此可得 $\alpha(v_{x_1}) \preceq \alpha(v_{x_2})$，从而 $w_{x_1} \preceq w_{x_2}$。根据构造，可得 $\alpha'(x_1) \preceq \alpha'(x_2)$。因此，$\alpha'$ 确实保持祖先关系。我们还声称，对所有 x，都有 $\alpha'(x) \preceq \alpha(x)$。我们知道 $\alpha(x) \succeq \alpha(v_x) \succeq w_x$，因此点 w_x 是 $\alpha(x)$和 $\alpha'(x)$二者的后代。根据构造，有 $f_2(\alpha'(x)) \leq \delta' \leq f_2(\alpha(x))$。由此即可得出我们的结论。

剩下需要证明 (α', β') 是一个交错。我们先证明，对于 T_1 的所有顶点 v，都有 $\beta'(\alpha'(v)) \succeq v$。令 v' 为包含 $\beta(\alpha(v))$ 的边的下端点。于是我们知道，值 $\delta^* := \frac{1}{2}(f_1(v') - f_1(v))$ 是满足 $\delta^* \leq \delta$ 的临界值。根据 δ' 的选取，可得 $\delta^* \leq \delta'$。令 $x \in T_1$。对于 T_2 的所有点 y，都有 $\beta'(y) \preceq \beta(y)$。取 $y = \alpha'(x)$，得到 $\beta'(\alpha'(x)) \preceq \beta(\alpha'(x))$。类似地，有 $\alpha'(x) \preceq \alpha(x)$。由于 β 保持祖先关系，因此可得 $\beta(\alpha'(x)) \preceq \beta(\alpha(x))$。综合以上结果，对于所有 $x \in T_1$，有 $\beta'(\alpha'(x)) \preceq \beta(\alpha(x))$。特别地，对于 $x = v$，可得 $\beta'(\alpha'(v)) \preceq \beta(\alpha(v))$。此外，根据构造可知，$\beta'(\alpha'(v))$ 的高度恰为 $f_1(v) + 2\delta' \geq f_1(v) + 2\delta^*$。因此，$\beta'(\alpha'(v))$ 是 v' 的祖先，因而也是 v 的祖先。现在，任取 T_1 中的一点 x，考虑包含 x 的边的下端点 v_x。α' 和 β' 均保持祖先关系，因此有 $\beta'(\alpha'(x)) \succeq \beta'(\alpha'(v_x)) \succeq v_x$。由此可得 $\beta'(\alpha'(x)) \succeq x$。类似的论证表明，对于所有 $y \in T_2$，都有 $\alpha'(\beta'(y)) \succeq y$。◀

现在我们论证最优交错总是存在。设 $\delta = d(T_1, T_2)$，并设 $\delta_1, \delta_2 \in \Delta(T_1, T_2)$ 分别为满足 $\delta_1 \leq \delta$ 的最大值和满足 $\delta_2 > \delta$ 的最小值。根据引理 7，我们知道，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在位移为 $\delta + \varepsilon$ 的交错。特别地，当 ε 足够小时，存在一个位移为 $\delta + \varepsilon \in [\delta_1, \delta_2]$ 的交错 $\mathcal{I}$。如果 $\mathcal{I}$ 是最优交错，则结论成立。否则，根据引理 8 可知，存在一个位移至多为 δ_1 的交错，这意味着 $\delta_1 = \delta$。定理 9 直接得证。

▶**定理 9**。任意两个合并树 T_1 和 T_2 都存在一个最优交错。

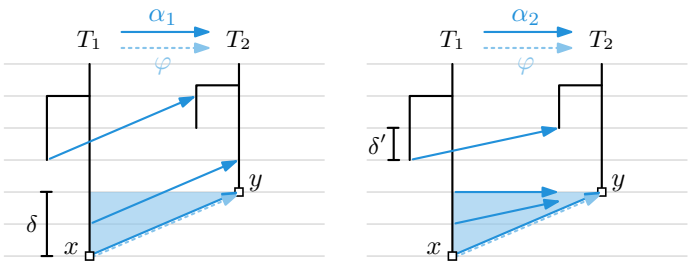

图6 剩余位移示意图。扇 $F[(x,\ y)]$（由阴影区域表示）内的箭头位移不予考虑，因此，φ-位移 α_2 小于 φ-位移 α_1。

3.2 剩余交错距离

固定一个部分交错 $\mathcal{P} = (\varphi,\ \psi)$。我们将扩展 $\mathcal{P}$ 的（部分）交错称为（部分）$\mathcal{P}$-扩展。首先注意，总是存在一个完全的 $\mathcal{P}$-扩展。事实上，将 T_1 中的每个点映射到 T_2的无穷远根，并将 T_2 中的每个点映射到 T_1 的根 ∞ 的映射，构成了一个扩展 $\mathcal{P}$的完全交错。

▶**观察10**。 任意部分交错 P 都有一个完全 P-扩展。

我们的目标是找到“尽可能紧”的完全 $\mathcal{P}$-扩展，即一种扩展 $\mathcal{P}$ 并使其余箭头的位移最小的交错。为获得直观理解，请考虑图6中的示例。映射 φ 由单个箭头 $(x,\ y)$ 组成。直观地说，与映射 α_1相比，映射 α_2描述了 φ 的一个“更紧”的扩展。然而，如果我们只忽略箭头 $(x,\ y)$ 的位移，则 α_1 其余箭头的位移等于 α_2其余箭头的（上确界）位移。箭头 $(x,\ y)$ 隐式地诱导出一个箭头“扇”，所有有效的上映射都必须扩展该扇。具体而言，x 的任意祖先都需要映射到 y的一个祖先。为了区分映射 α_1 和 α_2，因此我们不仅忽略 $(x,\ y)$ 的位移，还忽略任何被这样一个扇“包含”的箭头的位移。

形式化地，我们将箭头 $(x,\ y)$ 的扇定义为所有箭头 $(x',\ y)$ 的集合，其中 x' 是 x 的祖先，且其高度不超过 y 的高度，记作：

$$F[(x,y)] \coloneqq \{(x',y) : x' \in T_1 \text{ such that } x' \succeq x \text{ and } f_1(x') \leq f_2(y)\}.$$

箭头集合 A 的扇（记为 $F[A]$）是所有 $a \in A$ 对应的扇 $F[a]$ 的并集。

我们利用扇来定义 φ-剩余位移，简称 φ-位移。回顾一下，我们用 A_φ 表示所有箭头 $(x,\ \varphi(x))$ 的集合。对于从 T_1 到 T_2 的箭头 a，a 的 φ-剩余位移（记为 $\sigma_\varphi(a)$）在 a 位于 $F[A_\varphi]$ 内时为零，否则为 $\sigma(a)$。与式 2 中位移的定义类似，我们将上映射 φ' 的 φ-剩余位移（记为 $\sigma_\varphi(\varphi')$）定义为 φ' 中所有箭头的 φ-剩余位移的上确界。也就是说：

$$\sigma_\varphi(x,y) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } (x,y) \in F[A_\varphi], \\ \sigma(x,y) & \text{else,} \end{cases} \qquad \sigma_\varphi(\varphi') \coloneqq \sup\{\sigma_\varphi(a) : a \in A_{\varphi'}\}.$$

再次考虑图6中的示例。我们忽略扇 $F[(x,\ y)]$ 内所有箭头的位移。因此，φ-位移的 α_2 是 δ'，而 φ-位移的 α_1 是 δ。

我们对部分上映射 ψ-（剩余）位移 ψ' 进行对称定义。最后，对于部分交错 $\mathcal{P}' = (\varphi',\ \psi')$，我们将 $\mathcal{P}$-剩余 位移，或称 $\mathcal{P}$-位移，定义为 $\mathcal{P}'$ 的 φ-位移 φ' 与 ψ-位移 ψ' 中的最大值，记作 $\sigma_\mathcal{P}(\mathcal{P}')$。

▶**定义 11.** T_1 与 T_2 之间的 P-残余交错距离 $d_\mathcal{P}(T_1, T_2)$ 是下确界 δ，使得存在一个完全 P-扩展，其 P-残余平移为 δ。

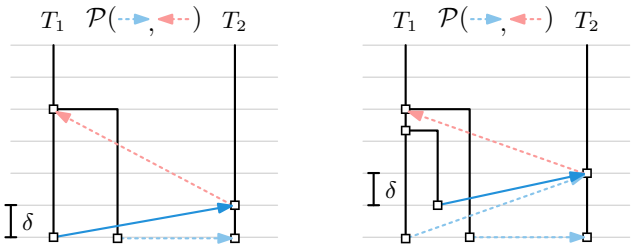

图 7 在这两个例子中，$\mathcal{P}$-残余交错距离由非虚线的深蓝色箭头决定。这些箭头的位移等于 δ，而在这两种情况下，它都不是 T_1 和 T_2的临界值。不过，在这两种情况下，δ 都是一个$\mathcal{P}$-临界值。所有临界点均已标出。

当上下文足以明确时，我们省略参数 T_1 和 T_2，并简记为 $d_{\mathcal{P}}$，表示 T_1 与 T_2之间的$\mathcal{P}$-残余交错距离。如果某个扩展的剩余位移等于残余交错距离，我们就称该扩展为最优的 。

临界值与临界对。 在本节余下部分，我们假设$\mathcal{P}$ 是有限的：$\mathrm{dom}(\varphi)$ 和 $\mathrm{dom}(\psi)$ 都由有限多个点组成。回顾第 2 节，非残余交错距离总会在临界值集合 $\Delta := \Delta(T_1, T_2)$ 中取值。对于残余交错距离，该集合 Δ并不总是足够（见图 7）。因此，我们将 Δ扩展为一个$\mathcal{P}$-临界值集合。具体而言，我们将 T_1 和 T_2的所有顶点，以及 T_1 中出现在$\mathcal{P}$的箭头 (x, y) 或 (y, x) 中的所有点 x 和 T_2 中的所有点 y 都“标记”出来。我们称它们为 T_1 和 T_2的$\mathcal{P}$-临界点，分别记作 $C_1[\mathcal{P}]$和 $C_2[\mathcal{P}]$（见图 7）。由于$\mathcal{P}$ 是有限的，因此临界点只有有限多个。我们定义集合 $\Delta_1[\mathcal{P}]$，其中包含临界点之间的所有高度差：

$$\Delta_1[\mathcal{P}] := \{|f_1(v) - f_2(w)| : v \in C_1[\mathcal{P}], w \in C_2[\mathcal{P}]\}.$$

我们将$\mathcal{P}$-临界值 定义为集合 $\Delta[\mathcal{P}](T_1, T_2) := \Delta_1[\mathcal{P}] \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$。根据上下文可以明确判断时，我们简写为 $\Delta[\mathcal{P}]$。每个临界值对应一对临界点；我们称这样的一对为 b $\mathcal{P}$-临界对。我们区分两种类型；见图 8。

- 如果对于一个点 $v \in C_1[\mathcal{P}]$ 和一个点 $w \in C_2[\mathcal{P}]$,，有 $b = (v, w)$，那么 b 就是一个箭头临界对，对应于临界值 $\sigma(v, w)$。我们称部分交错 (φ, ψ) 使用 b，如果 $\varphi(v) = w$。 $b = (w, v)$ 的情形是对称的。

- 对于 $V(T_1)$ 中的两个顶点 v_1, v_2，若 $b = (v_1, v_2)$，则 b是一个之字形临界对，对应于临界值 $\frac{1}{2}(f_1(v_2) - f_1(v_1))$。我们称部分交错 (φ, ψ) 使用了 b，如果存在一个点 $y \in T_2$，使得 $f_2(y) = f_1(v_1) + \frac{1}{2}(f_1(v_2) - f_1(v_1))$，且 $\varphi(v_1) = y$以及 $\psi(y) = v_2$。对于 $V(T_2)$ 中的两个顶点 w_1, w_2，若 $b = (w_1, w_2)$，则情形与此对称。

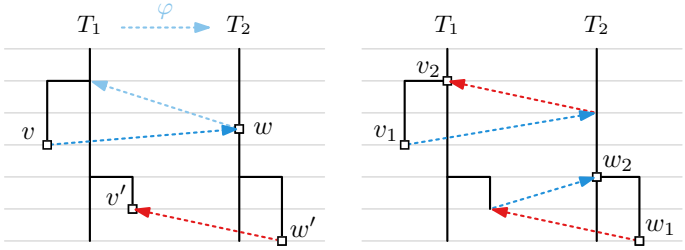

图 8 临界对有两种类型：箭头临界对 (v, w) 和 (w', v')（左），以及之字形临界对 (v_1, v_2) 和 (w_1, w_2)（右）。

10 局部正确的合并树交错

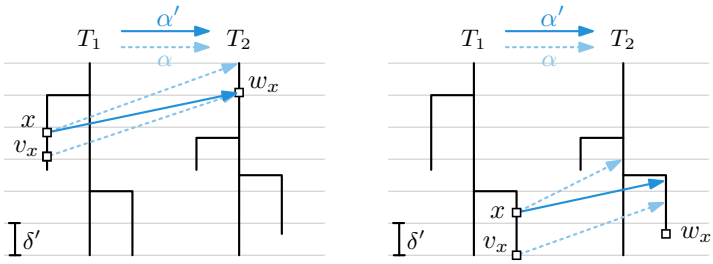

图 9 构造 α'；我们需要谨慎处理临界点 临界点 v_x 和 w_x。

与引理 2 类似，我们证明，$\mathcal{P}$-残余交错距离总能取到$\mathcal{P}$-临界值集合中的一个值。我们还证明，总存在一个最优$\mathcal{P}$-扩展，并且任何此类扩展都会使用一个实现临界对：即对应于交错距离的临界对。我们首先证明引理 8 的一个推广：

▶**引理 12.** 设 P 是一个有限交错。对于任意 P-位移为 δ 的完全 P-扩展，若其不使用对应于 δ 的临界对，则存在另一个 P-扩展，其 P-位移等于一个严格小于 δ 的 P-临界值。

证明。考虑一个 P-位移为 δ 的 P-扩展 $\mathrm{I} = (\alpha, \beta)$，并假设 P 不使用对应于 δ 的临界对。我们将 I 修改为扩展 $\mathrm{I}' = (\alpha', \beta')$，使其 P-位移等于一个严格小于 δ 的 P-临界值。令 $\delta' \in \Delta[\mathrm{P}]$ 为满足 $\delta' < \delta$ 的最大值。我们描述 α'的构造； β' 的构造是对称的。

不失一般性，我们假设 α 的每个箭头的位移至少为 δ'。否则，我们将 α 替换为 $\alpha^{\uparrow}[\delta']$。由于箭头的剩余位移不超过其位移，且由于 $\delta' < \delta$， $\alpha^{\uparrow}[\delta']$ 的 φ-剩余位移不超过 δ。对于 $x \in T_1$，令 $v_x \in C_1[\mathcal{P}]$ 为 x 的最高后代临界点；若 $x \in C_1[\mathcal{P}],$ ，则 $v_x = x$。此外，令 $w_x \in C_2[\mathcal{P}]$ 为 $\alpha(v_x)$ 的最高后代临界点。令 $h_x := \max(f_1(x) + \delta', f_2(w_x))$。我们将 $\alpha'(x)$ 定义为 w_x 在高度 h_x 处的祖先，即 $\alpha'(x) := w_x|^{h_x}$。

属性 α'。对于每个点 $x \in T_1$，我们有以下三个性质：

(i) $\alpha'(x)$ 的高度至少为 $f_1(x) + \delta'$，(ii) $\alpha'(x)$ 是 w_x 的祖先，(iii) $\alpha'(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的后代。为了证明性质 (iii) 成立，注意到由于 x 是 v_x 的祖先，点 $\alpha(x)$ 必定是 $\alpha(v_x)$ 的祖先，因此也是 w_x 的祖先。如果 $h_x = f_2(w_x)$，则 $\alpha'(x) = w_x$ ，性质成立。否则，如果 $h_x = f_1(x) + \delta'$，那么由于 $\alpha(x)$ 的高度至少为 $f_1(x) + \delta'$，该性质同样成立。我们证明 α' 是一个扩展 φ 的上映射。

α' 是一个上映射。根据性质（i），我们立即知道每个点 x 的像的高度至少与 x的高度相同。为证明 α' 保留祖先关系，取满足 $x_1 \preceq x_2$的 $x_1, x_2 \in T_1$。若 $v_{x_1} = v_{x_2}$，则可得 $w_{x_1} = w_{x_2}$。性质（ii）告诉我们， $\alpha'(x_1)$ 和 $\alpha'(x_2)$ 都是 w_{x_2}的祖先，因此，由于 $f_1(x_1) \leq f_1(x_2)$，我们推知 $\alpha'(x_1) \preceq \alpha'(x_2)$。反之，若 $v_{x_1} \neq v_{x_2}$，则必有 $v_{x_1} \preceq x_1 \preceq v_{x_2}$。由于 α 保留祖先关系，我们知道 $\alpha(v_{x_1})$ 是 $\alpha(v_{x_2})$ 的后代，因此 w_{x_1} 也是 w_{x_2}的后代。同样，$\alpha'(x_1)$ 和 $\alpha'(x_2)$ 都是 w_{x_1}的祖先，所以 $\alpha'(x_1) \preceq \alpha'(x_2)$。

接下来，为了证明 α' 扩展了 φ，令 $x \in \mathrm{dom}(\varphi)$。点 x 是 T_1的临界点，因此 $v_x = x$。类似地，点 $\varphi(x)$ 是 T_2的临界点。由于 α 扩展了 φ，

点 $\alpha(x)$ 是 $\varphi(x)$的祖先，因此 w_x 要么等于 $\varphi(x)$，要么是其祖先。无论哪种情况，根据性质 **(ii)** 可知 $\alpha'(x)$ 是 $\varphi(x)$的祖先。

最后，我们证明 φ-位移 α' 为 δ'。考虑一个箭头（$x, \alpha'(x)$），其位移严格大于 δ'。我们论证（$x, \alpha'(x)$）属于 φ的扇；这直接意味着 φ-位移 α' 为 δ'。根据构造，必有 $h_x = f_2(w_x) > f_1(x) + \delta'$。换言之，成立的是 $\sigma(x, w_x) > \delta'$。点 v_x 是 x 的后代，因此 $f_1(v_x) \leq f_1(x)$。于是，我们得到 $\sigma(v_x, w_x) \geq \sigma(x, w_x) > \delta'$。由于 v_x 和 w_x 都是临界点，值 $\delta^* := \sigma(v_x, w_x)$ 是临界值。根据 δ' 的选取，我们因此知道 $\delta^* \geq \delta$。我们声称 $\sigma(v_x, \alpha(v_x)) > \delta$。若 $\delta^* = \delta$，则由于我们假设 I 没有使用与 δ对应的临界对，必有 $\alpha(v_x) \succ w_x$。由此可得该结论。否则，若 $\delta^* > \delta$，则由于 $\alpha(v_x) \succeq w_x$，我们立即得到 $\sigma(v_x, \alpha(v_x)) > \delta$。因此，我们的声称成立。

由于 α 的 φ-位移至多为 δ，我们知道 $\sigma_{\mathcal{P}}(v_x, \alpha(v_x)) = 0$。这意味着箭头 $(v_x, \alpha(v_x))$ 位于 φ 的扇中。换言之，存在 v_x 的一个后代 v'，使得 $v' \in \mathrm{dom}(\varphi)$ 且 $\varphi(v') = w_x$。因此，点 $\alpha(v_x)$ 是 T_2 的临界点，所以 $\alpha(v_x) = w_x$。此外，由于 $h_x = f_2(w_x)$，我们知道 $\alpha'(x) = w_x$。因此，数对 $(x, \alpha'(x))$ 也位于 φ 的扇中。所以，α' 的 φ-位移为 δ。

I′ 是一个交错。利用类似的论证，映射 β' 是一个上映射，它扩展了 ψ，且具有 ψ-位移 δ。还需证明 (α', β') 是一个交错，即对所有 $x \in T_1$，$\beta'(\alpha'(x)) \succeq x$，并且对所有 $y \in T_2$，$\alpha'(\beta'(y)) \succeq y$。我们证明该结论对所有 $x \in T_1$ 都成立；对称情形可用类似论证证明。我们先证明该结论对 T_1 的所有顶点成立。令 $v \in V(T_1)$。根据性质（i），我们知道 $\beta'(\alpha'(v))$ 的高度至少为 $f_1(v) + 2\delta'$。此外，由于 I 是一个交错，我们知道 $\beta(\alpha(v)) \succeq v$ 成立。因此，只需证明 $\beta'(\alpha'(v))$ 和 $\beta(\alpha(v))$ 位于 T_1 的同一条边上。在下文中，我们使用 $y := \alpha(v)$ 和 $y' := \alpha'(v)$。

情形 $\sigma(v, y) > \delta$。α 中每个箭头的 φ-位移至多为 δ。这意味着，如果 $\sigma(v, y) > \delta$，那么箭头 (v, y) 必须位于 φ的扇中。特别地，这意味着存在一个点 $u \in \mathrm{dom}(\varphi)$，使得 $\varphi(u) = y$。因此，点 y 是 T_2的临界点。顶点 v本身也是一个临界点，因此可得 $w_v = y$ 和 $h_v = f_2(y)$。根据 α'的构造，我们便有 $y' = y$。类似地，y 的最高后代临界点就是点 y本身。设 $v_y \in C_1[\mathrm{P}]$ 为 $\beta(y)$的最高后代临界点。由于 T_1的所有顶点都是临界点，点 $\beta(y)$ 必须与 v_y 位于同一条边上。根据 β'的构造，我们知道 $\beta'(y)$ 是 v_y的祖先。结合性质 **(iii)**，可得点 $\beta'(y') = \beta'(y)$ 和 $\beta(y)$ 位于同一条边上。

情况 $\sigma(v, y) \leq \delta$。回忆一下，w_v 是 y的最高后代临界点。令 $w_{y'}$ 表示 y'的最高后代临界点。我们声称 $w_{y'} = w_v$。由性质（ii）可知，$w_{y'}$ 是 w_v的祖先。另一方面，由性质（iii）可知，y'是 y的后代。因此，点 y' 要么是 w_v 的后代，要么位于 w_v 和 y之间的一条边上。两种情况下，我们都必须有 $w_{y'} \preceq w_v$。综合起来，我们得到 $w_v \preceq w_{y'} \preceq w_v$，这意味着我们的断言成立。我们再区分另外两种情况。

- 首先考虑 $\sigma(y, \beta(y)) > \delta$ 的情形。β 的 ψ-位移至多为 δ，因此箭头 $(y, \beta(y))$ 必须位于 ψ 的扇中。特别地，这意味着存在点 $y^* \in \mathrm{dom}(\psi)$，它是 y 的后代，并满足 $\psi(y^*) = \beta(y)$。此外，我们知道点 $\beta(y)$ 是一个临界点。点 y^* 是 T_2 的一个临界点，因此 y^* 必须是 w_v 的后代。由于 $w_{y'} = w_v$，可知 y^* 也是 $w_{y'}$ 的后代。

根据性质 (ii)，可得 $\beta'(y')$ 是 $\beta(y)$的祖先。综合以上结果，得到 $\beta'(y') \succeq \beta(y) \succeq v$。

- 最后，我们考虑 $\sigma(y,\beta(y)) \leq \delta$ 的情形。令 $v^* \in V(T_1)$ 为包含 $\beta(y)$ 的边的下端点。v 和 v^* 都是顶点，因此值 $\delta^* := \frac{1}{2}(f_1(v^*) - f_1(v))$ 是一个临界值。由于 $\beta(\bar{y}) \succeq v^*$，我们得到 $\delta^* \leq \frac{1}{2}(\sigma(v,y) + \sigma(y,\beta(y)))$。在当前情形中，我们假设两个加数都不大于 δ，因此可得 $\delta^* \leq \delta$。我们声称 $\delta^* < \delta$。否则，若 $\delta^* = \delta$，则 $\sigma(v,y)$ 和 $\sigma(y,\beta(y))$ 都必须等于 δ，于是得到 $\beta(y) = v^*$。然而，我们假设 I 不使用任何对应于 δ 的临界对。因此，$\delta^* < \delta$ 成立。根据 δ' 的选取，我们由此有 $\delta^* \leq \delta'$。由映射 β' 的性质（iii），可得 $\beta'(y') \preceq \beta(y')$。类似地，由映射 α' 的性质（iii），可得 $y' \preceq y$。由于 β 保持祖先关系，因此 $\beta(y') \preceq \beta(y)$。综合起来，我们得到 $\beta'(y') \preceq \beta(y') \preceq \beta(y)$。最后，由性质（i）可知，$\beta'(y')$ 的高度至少为 $f_1(v) + 2\delta'$。因此，点 $\beta'(y')$ 位于点 v^* 和 $\beta(y)$ 之间。特别地，这意味着 $\beta(y)$ 和 $\beta'(y')$ 位于同一条边上。由此得出，$\beta'(y')$ 必定是 v 的祖先。

这表明 $\beta'(\alpha'(v))$ 是 v 的祖先。为完成证明，考虑 T_1 上的一个点 x，并令 $v_x \in V(T_1)$ 为包含 x 的边的下端点。由于 α' 保持祖先关系，我们得到 $\alpha'(x) \succeq \alpha'(v_x)$。类似地，由于 β' 保持祖先关系，我们得到 $\beta'(\alpha'(x)) \succeq \beta'(\alpha'(v_x))$。由于 v_x 是一个顶点，我们知道 $\beta'(\alpha'(v_x)) \succeq v_x$。综合以上结果，得到 $\beta'(\alpha'(x)) \succeq v_x$。最后，我们知道 $x \succeq v_x$，因此可得 $\beta'(\alpha'(x)) \succeq x$。◀

由此直接可知，$\mathcal{P}$-残余交错距离由一个实现该距离的临界对确定，且$\mathcal{P}$-残余交错距离会取到一个$\mathcal{P}$-临界值。

▶推论 *13. </style}*如果 *P* 有限，那么任意最优 *P*-扩展都会使用实现临界对。

▶ **推论 14. </style}如果 P 有限，那么 (**T_1, T_2**) ∈** $\Delta[P](T_1, T_2)$*</style}*。

令 $\delta_1 \in \Delta[\mathcal{P}]$ 为满足 $\delta_1 \leq d_{\mathcal{P}}$ 的最大值，并令 $\delta_2 \in \Delta[\mathcal{P}]$ 为满足 $\delta_2 > d_{\mathcal{P}}$ 的最小值。根据 $d_{\mathcal{P}}$ 的定义，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个 P-扩展，其 P-位移为 $d_{\mathcal{P}} + \varepsilon$。特别地，当 ε 足够小时，存在一个 P-扩展 $\mathcal{I}$，其 P-位移为 $\delta_1 < \sigma_{\mathcal{P}}(\mathcal{I}) < \delta_2$。换言之，不存在与 $\sigma_{\mathcal{P}}(\mathcal{I})$ 对应的临界对。这意味着$\mathcal{I}$ 不能使用与 $\mathcal{I}$ 的 P-位移对应的临界对。根据引理 12，可知存在一个 P-扩展，其 P-位移为 $\delta_1 = d_{\mathcal{P}}$。

▶**定理 15**。 任意两个合并树 T_1 和 T_2之间的任意有限偏交错 *P*，都存在一个最优 *P*-扩展。

孤立扩张。 我们在本节最后论证，始终存在“孤立”的最优扩张，即满足两种有限性性质的扩张。具体而言，这在推理“最大”位移和“最高”祖先时很有用。形式上，假设$\mathcal{P}$-残余交错距离严格为正，即 $d_{\mathcal{P}} > 0$。若一个最优$\mathcal{P}$-扩展$\mathcal{I}$ 满足以下条件，我们称其为孤立的：(1) 只有有限多个$\mathcal{I}$ 中的箭头的$\mathcal{P}$-位移等于 $d_{\mathcal{P}}$；(2) 存在某个 $\varepsilon > 0$，使得对于$\mathcal{I}$中每个$\mathcal{P}$-位移至少为 $d_{\mathcal{P}} - \varepsilon$的箭头 (x, y)，都存在 x的一个后代 x'，使得 (x', y) 是$\mathcal{I}$ 中的一个箭头，其目标相同，且$\mathcal{P}$-位移为 $d_{\mathcal{P}}$。我们证明，始终存在一个孤立的$\mathcal{P}$-扩展。

▶ **引理 16**。 如果 *P* 是有限的且 $d_{\mathcal{P}} > 0$，则存在一个孤立的 *P*-扩展。

证明。 根据定理 15，存在一个最优的 $\mathcal{P}$-扩张 $\mathcal{I} = (\alpha, \beta)$。我们使用 $\mathcal{I}$ 来构造一个孤立的 $\mathcal{P}$-扩张 $\mathcal{I}' = (\alpha', \beta')$。我们描述从 α'到 T_1 的映射 T_2的构造；从 β' 到 T_2 的映射 T_1 的构造是对称的。

令 $X := C_1[\mathcal{P}] \cup \beta(C_2[\mathcal{P}])$，且 $Y := C_2[\mathcal{P}] \cup \alpha(C_1[\mathcal{P}])$。$T_1$ 和 T_2都只有有限多个临界点，因此集合 X 和 Y 都是有限的。由于每个叶节点都是临界点，T_1 中的每个点 x 在 X中都有一个后代；由有限性可知，它在 X中有一个最高后代，我们将其记为 v_x。令 $h_x := \max(f_1(x)\ f_2(\alpha(v_x)))$。我们定义 $\alpha'(x) = \alpha(v_x)|^{h_x}$。

α' 是一个位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$ 的 φ-上映射。令 $x \in T_1$。我们有 $h_x \geq f_1(x)$，因此根据构造，$f_2(\alpha'(x)) \geq f_1(x)$。为证明 α' 保持祖先关系，令 x_1 和 x_2 为 T_1 中的点，并假设 x_2 是 x_1 的祖先。那么 v_{x_2} 是 v_{x_1} 的祖先。根据构造，由此可知 $\alpha'(x_2)$ 是 $\alpha(v_{x_2})$ 的祖先，因而也是 $\alpha(v_{x_1})$ 的祖先。此外，由于 $f_1(x_2) \geq f_1(x_1)$，可知 $h_{x_2} \geq h_{x_1}$。由此我们得出，$\alpha'(x_2)$ 必定是 $\alpha'(x_1)$ 的祖先。因此，α' 是一个上映射。

接下来，我们证明 α' 扩展了 φ。令 $x \in$属于 dom(φ)。那么 x 是 T_1 的临界点，因此 $x \in X$ 和 $v_x = x$。根据构造，$\alpha'(v_x) = \alpha(v_x)$，且由于 α 扩展了 φ，可知 $\alpha'(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的祖先。因此，α' 确实扩展了 φ。最后，要证明 α' 的 φ-位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$，只需证明对于所有点 x，$\alpha'(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的后代。如果 $h_x = f_1(x)$，则可立即得出结论。否则，$h_x = f_2(\alpha(v_x))$，并且我们知道 $\alpha'(x) = \alpha(v_x)$。映射 α 保持祖先关系；由于 v_x 是 x 的后代，可知点 $\alpha'(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的后代。由于 I 是一个最优交错，我们得出 α' 的 P- 位移有上界 $d_{\mathcal{P}}$。

I′ 是一个交错。对于任意顶点 v，它在集合 X中的最高后代就是 v 自身。因此，根据构造，我们有 $\alpha'(v) = \alpha(v)$。此外，由于顶点 v 是一个临界点，$\alpha(v)$属于集合 Y。因此，根据 β'的构造，我们有 $\beta'(\alpha'(v)) = \beta(\alpha(v))$。所以，由于 I 是一个交错，$\beta'(\alpha'(v))$ 是 v的祖先。现在，对于任意点 $x \in T_1$，设 $v \in V(T_1)$为包含 x的边的下端点。如上所述，点 $\beta'(\alpha'(v))$ 是 v的祖先。此外，由于 α' 保持祖先关系，$\alpha'(x)$ 是 $\alpha'(v)$的祖先。类似地，由于 β' 保持祖先关系，$\beta'(\alpha'(x))$ 是 $\beta'(\alpha'(v))$的祖先。综上可得，$\beta'(\alpha'(x))$ 是 v的祖先。由于 x 是 v的祖先，且 $f_1(\beta'(\alpha'(x)) \geq f_1(x)$，我们得到 $\beta'(\alpha'(x))$ 是 x的祖先。因此 I′ 是一个交错。

I′ 是孤立的。为证明性质 (1) 成立，我们希望界定 P-位移为 $d_{\mathcal{P}}$ 的箭头数量。令 $x \in T_1$。根据构造，点 $\alpha'(x)$ 满足以下条件之一：(a) $f_2(\alpha'(x)) = f_1(x)$，或 (b) $\alpha'(x) = \alpha(v_x)$。在情况 (a) 中，箭头 $(x, \alpha'(x))$ 的 P-位移为 0，因此只需界定情况 (b)。根据定义，v_x 是一个临界点。由于 P 是有限的，临界点也只有有限个。因此，只有有限个 T_2 中的点 y 能满足 $y = \alpha'(x)$。对于任何这样的点 y，T_1 的每条边至多包含一个对应箭头位移为 $d_{\mathcal{P}}$ 的点。因此，P-位移为 $d_{\mathcal{P}}$ 的 α' 箭头只有有限个。类似地，P-位移为 $d_{\mathcal{P}}$ 的 β' 箭头也只有有限个。

最后，我们证明性质 (2) 成立。设 $\varepsilon > 0$ 满足：不存在点 $v \in X$ 使得 $d_{\mathcal{P}} - \varepsilon < f_2(\alpha(v)) - f_1(v) < d_{\mathcal{P}}$，且 $d_{\mathcal{P}} - \varepsilon > 0$。由于 X 中只有有限多个点，这样的 ε 必然存在。考虑 I′ 中一个 P-位移至少为 $d_{\mathcal{P}} - \varepsilon$ 的箭头 a。不失一般性，假设对于某个 $x \in T_1$，有 $a = (x, \alpha'(x))$。由于 a 的 P-位移为正，我们有 $h_x = f_2(\alpha(v_x))$。换言之，我们有 $\alpha'(x) = \alpha(v_x)$。由于 v_x 是 x 的后代，因此有 $f_2(\alpha'(x)) - f_1(v_x) > f_2(\alpha'(x)) - f_1(x)$。此外，根据构造，我们有 $\alpha'(v_x) = \alpha(v_x)$，因此 $\alpha'(v_x) = \alpha'(x)$。由于 $v_x \in X$，根据我们对 ε 的选择，$(v_x, \alpha'(v_x))$ 的位移等于 $d_{\mathcal{P}}$。由此可知，性质 (2) 成立。◀

4 局部正确的交错

交错距离是一种瓶颈距离：它给出一个单一数值，用以量化两棵合并树之间的最大差异。这个全局数值有助于进行比较，但我们关注的是实现该距离的实际交错。重要的是，我们寻找的不仅是全局最优的交错，也是在局部上具有意义的交错。具体而言，如果交错的一部分已固定，我们希望其余部分相对于这部分达到最优。为了形式化这一局部最优性概念，我们以上一节介绍的残余交错距离为基础。

设 (T_1, f_1) 和 (T_2, f_2) 是两棵合并树，并固定一个部分交错 $\mathrm{P} = (\varphi, \psi)$。对于 φdom(φ) 的子集 $S_1 \subseteq$，我们将 φ 到 S_1 的限制定义为映射 $\varphi|_{S_1}\colon S_1 \to T_2$，其定义为 $\varphi|_{S_1}(x) := \varphi(x)$，对 S_1 中的所有点 x 均成立。φ 的任何限制都是部分上映射，并且 φ 扩展了它的所有限制。对 ψ 在子集 $S_2 \subseteq T_2$ 上的限制作对称定义。最后，配对 $\mathrm{R} = (\varphi|_{S_1}, \psi|_{S_2})$ 是一个部分交错，且 P 扩展 R。我们称 R 为 P 的一个限制。若对 I 的所有限制 R，I 的 R-残余位移都等于 R-残余交错距离，则完全交错 I 是局部正确的。

▶ **定义 17。** 完全交错 $I = (\alpha, \beta)$ 是局部正确的，当且仅当对于所有 $S_1 \subseteq T_1$ 和 $S_2 \subseteq T_2$，限制 $R = (\alpha|_{S_1}, \beta|_{S_2})$ 满足

$$d_{\mathcal{R}}(T_1, T_2) = \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{I}). \tag{3}$$

图 10 展示了一些局部正确或不局部正确的交错示例。

令 $\mathcal{I}$ 为任意一个不一定局部正确的交错。对于 $\mathcal{I}$ 的任意限制$\mathcal{R}$，我们知道$\mathcal{I}$ 扩展了$\mathcal{R}$。因此，<style id='R'>R-残余交错距离至多为$\mathcal{I}$的<style id='R'>R-位移。要证明交错$\mathcal{I}$ 是局部正确的，只需证明对于$\mathcal{I}$ 的所有限制$\mathcal{R}$，都有 $d_{\mathcal{R}}(T_1, T_2) \geq \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{I})$。

▶ **观察 18。** 对于 I 的任意限制 R，都有 $d_{\mathcal{R}}(T_1, T_2) \leq \sigma_{\mathcal{R}}(I)$。

假设$\mathcal{I}$ 是局部正确的。取$\mathcal{R}$ 为空限制，我们看到$\mathcal{I}$ 满足 $d(T_1, T_2) = \sigma(\mathcal{I})$。换言之，任何局部正确交错都是最优交错。反之则不一定成立；并非每个最优交错都是局部正确的（见图 2）。这就引出了一个问题：局部正确交错是否总是存在？在本节余下部分，我们将对此问题给出肯定的回答。

▶**定理 19.** 任意两个合并树 T_1 和 T_2 都存在局部正确交错。

证明概述。 为证明定理 19，我们给出一个局部正确交错的显式构造。具体而言，我们通过以下方式逐步构建部分交错 $\mathcal{P}$：

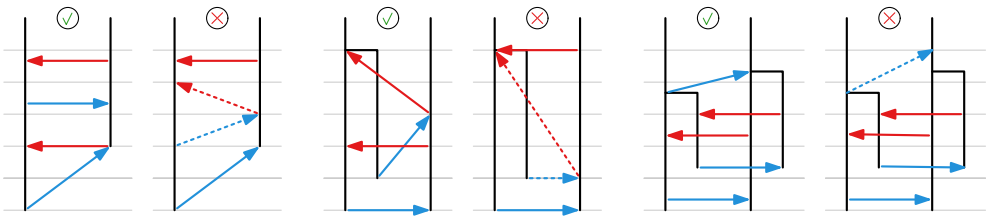

图 10 T_1 和 T_2 的三个实例，共同展示了所有类型的临界对。对于每个实例，我们展示一个局部正确的交错（✓），以及一个不局部正确的交错（⊗）。各个情形中的非虚线箭头构成了使等式 (3) 不成⊗的限制。

用“瓶颈”箭头对其进行增广。我们证明，每次增广后，$\mathcal{P}$-残余交错距离都会严格减小，直至经过有限次迭代后变为零。最后，为了完成证明，我们证明任何扩展所得部分交错 $\mathcal{P}$ 的完全交错都是局部正确的。

4.1 瓶颈

交错距离由最优交错中所有箭头的最大位移决定。在局部范围内，我们或许可以通过“向下推”某些箭头来改进这样的交错，从而减小它们的位移。然而，我们无法对所有箭头都这样做；否则，就会得到一个位移严格小于交错距离的交错。我们关注的是一种瓶颈：一组无法“向下推”的箭头。在本节中，我们将给出这种瓶颈的刻画，并说明在一些温和的假设下，瓶颈中的所有箭头都对应于实现临界对。

我们首先定义两个不一定相关的部分上映射 φ和 φ'之间的相对差 。具体而言，考虑这样一组点：对于这些点， φ 有定义而 φ' 没有定义，或者二者都有定义但取值不一致：

$$S \coloneqq \operatorname{dom}(\varphi) \setminus \{x \in \operatorname{dom}(\varphi) \cap \operatorname{dom}(\varphi') : \varphi(x) = \varphi'(x)\}.$$

φ 与 φ' 的相对差定义为将 φ 限制到 S所得的结果，记作 $\varphi \setminus \varphi' \coloneqq \varphi|_S$。类似地，对于两个部分交错 $\mathcal{P} = (\varphi, \psi)$ 和 $\mathcal{P}' = (\varphi', \psi')$，我们将其相对差 $relativedifference\, \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ 定义为这两个相对差组成的有序对 $(\varphi \setminus \varphi', \psi \setminus \psi')$。所得的有序对是 $\mathcal{P}$ 的一个限制，因此可直接得出，任意相对差都是一个部分交错。

增广。 固定一个部分交错 $\mathcal{P} = (\varphi, \psi)$。在本节余下部分中，我们假设 $\mathcal{P}$ 是有限的，且 $\mathcal{P}$-残余交错距离严格为正，即 $d_{\mathcal{P}} > 0$。若 $\mathcal{Q}$ 是一个 $\mathcal{P}$-扩张，则称其为 $\mathcal{P}$-增广 ，如果 (i) $\mathcal{Q}$ 的 $\mathcal{P}$-残余位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$，即 $\sigma_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \leq d_{\mathcal{P}}$，且 (ii) $\mathcal{Q}$-残余交错距离严格小于 $d_{\mathcal{P}}$，即 $d_{\mathcal{Q}} < d_{\mathcal{P}}$。若 $\mathcal{Q}$ 不扩张任何其他 $\mathcal{P}$-增广，则称其为极小的 。

▶**引理 20.** 任何与 $d_{\mathcal{P}} > 0$ 交错的有限 P 都存在一个有限最小 P-增广。

证明。根据引理 16，存在一个孤立的 P-扩展。设 I 为这样的扩展。那么在 I 中，P 的 P-位移为 $d_{\mathcal{P}}$ 的箭头只有有限多个。令 Q 为由 P 的箭头以及 I 中 P-位移为 $d_{\mathcal{P}}$ 的箭头组成的部分交错。若 x 的一个点 T_1出现在两个箭头 (x, y_1) 和 (x, y_2) 中，且 $f_2(y_1) \leq f_2(y_2)$，则取箭头 (x, y_2)。若 T_2 的一个点出现在两个箭头中，我们也对称地选择箭头。由于 I 扩展了 P，显然 Q 也扩展了 P。

现在我们证明$\mathcal{Q}$ 是一个增广。根据构造，$\mathcal{Q}$ 的每个箭头的$\mathcal{P}$-位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$，因此性质（i）成立。为证明性质（ii）成立，注意到$\mathcal{I}$ 是一个$\mathcal{Q}$-扩展。由于$\mathcal{I}$ 是孤立的，存在一个 $\varepsilon > 0$ ，使得对于每个 $\mathcal{P}$- 位移至少为 $d_{\mathcal{P}} - \varepsilon$ 的 $\mathcal{I}$ 箭头 (x, y)，都存在 x 的一个后代 x'，使得 (x', y) 是$\mathcal{I}$的一条箭头。根据构造，箭头 (x', y) 是$\mathcal{Q}$的一条箭头。换言之，箭头 (x, y) 的 $\mathcal{Q}$-位移为 0。此外，$\mathcal{P}$的每条箭头的$\mathcal{Q}$-位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$。综合可得，$\mathcal{I}$ 中所有位移至少为 $d_{\mathcal{P}} - \varepsilon$ 的箭头，其$\mathcal{Q}$-位移均为 0。因此，$\mathcal{Q}$-残余交错距离至多为 $d_{\mathcal{P}} - \varepsilon < d_{\mathcal{P}}$。由此得出，$\mathcal{Q}$ 是一个含有有限条箭头的增广，这意味着存在一个有限最小增广。◀

设$\mathcal{Q}$ 是一个极小$\mathcal{P}$-增广。我们将相对差$\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ 称为$\mathcal{P}$-瓶颈。直观来说，瓶颈刻画了为降低残余交错距离而需要“添加”的最小箭头集合。图11展示了一个示例。

16 合并树之间的局部正确交错

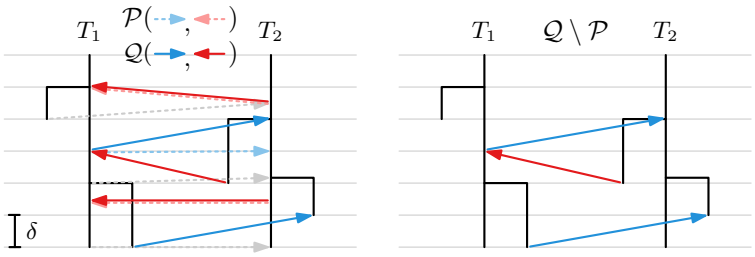

图11 一个带有 $d_{\mathcal{P}} = \delta$ 的部分交错 $\mathcal{P}$，以及一个带有 $d_{\mathcal{Q}} < \delta$ 的最小增广 $\mathcal{Q}$；灰色虚线箭头展示了一个最优的 $\mathcal{Q}$-扩展（左）。瓶颈 $\mathcal{Q}\setminus\mathcal{P}$（右）。

回顾引理 12（的证明）。如果我们将该引理应用于给定的$\mathcal{P}$-扩张$\mathcal{I}$，且该扩张不使用实现临界对，就可以构造出另一个$\mathcal{P}$-扩张$\mathcal{I}'$，其位移严格更小。完全相同的证明对于一个稍强的命题仍然成立：只需假设相对差$\mathcal{I}\setminus\mathcal{P}$不使用实现临界对。

▶ **观察 21.** 设 P 是一个有限交错，I 是一个 P-扩展。若 $I \mid P$ 不使用实现临界对，则存在一个 P-扩展 I' *with* $\sigma_{\mathcal{P}}(I') < \sigma_{\mathcal{P}}(I)$。

我们利用这一观察证明以下引理。

▶ **引理22.** 若 P 有限且 $d_{\mathcal{P}} > 0$，则任何 P-瓶颈 $Q \mid P$ 都使用实现临界对 .

证明。设 I 是一个最优 Q-扩张。由于 Q 扩张 P，I 也扩张 P。此外，由于 I 是最优的，I 的 Q-移位等于 Q-剩余交错距离，即 $\sigma_{\mathcal{Q}}(\mathrm{I}) = d_{\mathcal{Q}}$。由于 Q 是一个增广，$\mathrm{Q}\setminus\mathrm{P}$ 中所有箭头的位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$，且 $d_{\mathcal{Q}} < d_{\mathcal{P}}$。综合可得 $\sigma_{\mathcal{P}}(\mathrm{I}) \leq d_{\mathcal{P}}$。换言之，I 是一个最优 P-扩展。由观察 21 可知，$\mathrm{I}\setminus\mathrm{P}$ 使用实现临界对 b。由于 $d_{\mathcal{Q}} < d_{\mathcal{P}}$，对应于 b 的箭头的 Q-移位必须为 0。换言之，$\mathrm{Q}\setminus\mathrm{P}$ 使用 b。◀

引理22的一个直接推论是：对于给定的$\mathcal{P}$-扩展$\mathcal{Q}$，如果相对差$\mathcal{Q}\setminus\mathcal{P}$不包含实现临界对，那么$\mathcal{Q}$就不可能是$\mathcal{P}$-增广。换言之，如果$\mathcal{Q}$中每个箭头的$\mathcal{P}$-位移都严格小于$\mathcal{P}$-残余交错距离，那么$\mathcal{Q}$-残余交错距离就不可能小于$d_{\mathcal{P}}$。

▶ **推论 23.** 设 P 是一个满足 $d_{\mathcal{P}} > 0$的有限交错，Q 是 P-扩展。如果对于所有箭头 $a \in A_{\mathcal{Q}}$，$\sigma_{\mathcal{P}}(a) < d_{\mathcal{P}}(T_1, T_2)$，那么 $d_{\mathcal{Q}}(T_1, T_2) \geq d_{\mathcal{P}}(T_1, T_2)$。

支配匹配。 如果$\mathcal{P}$中每个箭头的位移都严格大于$d_{\mathcal{P}}$，我们就称$\mathcal{P}$是主导的。如果$\mathcal{P}$是主导的，我们就可以刻画任意最小增广$\mathcal{Q}$。回忆一下，若$\mathcal{Q}$与$\mathcal{P}$在$\mathcal{P}.\varphi$和$\mathcal{P}.\psi$的定义域上完全一致，我们就称$\mathcal{Q}$使用$\mathcal{P}$。

▶ **引理 24.** 设 P 是一个满足 $d_{\mathcal{P}} > 0$ 的主导有限交错。对于任意极小值 P-增广 Q，(*i*) Q 使用 P；(*ii*) 对于 $Q \mid P$ 中的每个箭头 a，都有 $\sigma(a) = d_{\mathcal{P}}$。

证明。我们先证明（i）。反设 P 中的一个箭头 a 未被 Q 使用。由于 P 是主导的，a 的位移至少为 $d_{\mathcal{P}}$。此外，由于 Q 扩展了 P，存在一个箭头 a' 扩展 a。因此，箭头 a' 不在 P 的扇中，所以 a' 的 P-位移等于 a' 的位移。我们得到 $\sigma_{\mathcal{P}}(\mathrm{Q}) \geq \sigma_{\mathcal{P}}(a') > \sigma(a) \geq d_{\mathcal{P}}$。然而，Q 是一个增广：这就产生了矛盾。性质（i）得证。

接下来，我们证明 (ii)。根据定义，a 的位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$，也就是说，$\sigma(a) \leq d_{\mathcal{P}}$。反设 a的位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$，也就是说，$\sigma(a) < d_{\mathcal{P}}$。在

这种情况下，考虑从 $\mathcal{Q}$ 中移除 a 后得到的部分交错 $\mathcal{Q}'$。由于 a 的位移小于 $d_{\mathcal{P}}$，它不是 $\mathcal{P}$ 的一条箭头。因此，$\mathcal{Q}'$ 扩展了 $\mathcal{P}$。最后，任意（完整的）$\mathcal{Q}'$-扩展 $\mathcal{I}$ 显然也同时是一个 $\mathcal{Q}'$-扩展。由于 $\sigma(a) < d_{\mathcal{P}}$，我们便知道 $\sigma_{\mathcal{Q}'}(\mathcal{I}) = \max(\sigma(a)\ \sigma_{\mathcal{Q}}(\mathcal{I})) \leq d_{\mathcal{P}}$。但这样一来，$\mathcal{Q}$ 就不是最小增广。◀

▶**引理 25.** 设 P 是一个主导的有限交错，且满足 $d_{\mathcal{P}} > 0$。对于任意有限最小 P-增广 Q，$Q \setminus P$ 只使用实现临界对的箭头。

证明。反设 Q \ P 使用了一个箭头 $a = (x, y)$，而该箭头并不对应任何临界对。由引理 24 可知，a 的位移恰为 $d_{\mathcal{P}}$。令 Q′为从 Q 中移除 a 后得到的部分交错。根据构造，Q 是 Q′的扩展。我们证明 Q′ 是一个增广，从而与 Q 的极小性矛盾。不失一般性，假设 $x \in T_1$ 和 $y \in T_2$。令 I $= (\alpha, \beta)$ 为一个最优 Q-扩展。由于 Q 是 P-增广，因此 I 也是一个最优 P-扩展。

若 I 对某个后代 $x' \preceq x$ 使用箭头 (x', y)，则 $\sigma(x', y) > \sigma(x, y) = d_{\mathcal{P}}$。由于 I 是最优 Q-扩展，I 的 Q-移位严格小于 $d_{\mathcal{P}}$，因此 (x', y) 的 Q-移位必为 0。换言之，箭头 (x', y) 位于 Q.φ 的扇中，也就是说，存在 x' 的一个后代 x''，使得 Q 使用箭头 (x'', y)。根据构造，Q′ 也使用箭头 (x'', y)。但这样一来，点 x'' 就是 x 的后代，因此 (x, y) 的 Q′-位移也等于 0。于是，I 是一个 Q′-扩张，其 Q′-位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。这意味着 Q′ 是一个 P-增广，从而得到矛盾。接下来，我们假设对于 x 的所有严格后代 x'，点 $\alpha(x')$ 都是 y 的严格后代。

▷ 断言 26. 对于某个 $\varepsilon > 0$，x 的每个严格后代 x' 都满足 $f_2(\alpha(x')) < f_2(y) - \varepsilon$。

证明。由于 Q 是 P-增广，因此有 $d_{\mathcal{Q}} < d_{\mathcal{P}}$。此外，由于 Q 是有限的，Q-临界值只有有限多个。根据推论 14，$d_{\mathcal{P}}$ 和 $d_{\mathcal{Q}}$ 都等于 Q-临界值。因此，存在一个 $\varepsilon' > 0$ 使得 $d_{\mathcal{Q}} + \varepsilon' < d_{\mathcal{P}}$。如果不存在满足 $f_2(\alpha(x')) \geq f_2(y) - \varepsilon'$的 x 的严格后代 x'，那么取 $\varepsilon = \varepsilon'$即可立即得到我们的断言。否则，令 $y' = \alpha(x')$；我们假设 $y' \neq y$。由此可知，箭头 (x', y') 满足 $\sigma(x', y') > d_{\mathcal{Q}}$。由于 I 是最优 Q-扩展，我们必须有 $\sigma_{\mathcal{Q}}(x', y') \leq d_{\mathcal{Q}}$；由此得到 $\sigma_{\mathcal{Q}}(x', y') = 0$。因此，箭头 (x', y') 位于 Q.φ的扇中。换言之，存在 x' 的一个后代 x''，使得箭头 (x'', y') 被 Q 使用。现在，点 y' 和 y 是两个不同的 Q-临界点。Q-临界点只有有限多个，因此存在 ε'' 使得 $f_2(y') + \varepsilon'' < f_2(y)$。◁

断言 26 的一个直接推论是，如果 x 不是叶节点，那么点 y 必有一个后代。如果 x 是叶节点，那么 y 不可能是叶节点，否则，数对 (x, y) 就是一个箭头临界对。无论哪种情况，y 都不可能是叶节点。我们构造一对不使用 a 的 $\mathcal{I}' = (\alpha', \beta')$。对于 $\varepsilon > 0$，我们用 X^{ε} 表示 x 中满足 $f_1(x') - f_1(x) < \varepsilon$ 的祖先 x' 的集合，并用 Y_{ε} 表示 y 中满足 $f_2(y) - f_2(y') < \varepsilon$ 的后代 y' 的集合。

情况 1：y 是一个临界点。如果 y 是一个顶点，那么对于 T_1的任意临界点 v，对 (v, y) 都对应一个临界对。特别地，这意味着 x 不可能是临界点。根据断言 26，我们知道存在一个 $\varepsilon_1 > 0$，使得 (i) x的所有后代 x' 都满足 $f_2(\alpha(x')) < f_2(y) - \varepsilon_1$。由于 x 不是临界点，因此它不可能是叶节点。因此，点 x 有一个严格后代 x'，这意味着在高度为 $f_2(y^*) = f_1(y) - \varepsilon_1$ 处，y必定存在一个严格后代 y^*，且对所有 x'，它都满足 $y^* \succeq \alpha(x')$。此外，令 $\varepsilon_2 > 0$ 为这样的

使得 (ii) X^{ε_2}中不存在 $\mathcal{Q}$-临界点。最后，令 $\varepsilon_3 > 0$ 满足 (iii) $d_{\mathcal{Q}} + 2\varepsilon_3 < d_{\mathcal{P}}$。设 $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$。对于 $x' \in T_1$ 和 $y' \in T_2$，我们定义映射 α' 和 β' 如下：

$$\alpha'(x') := \begin{cases} y^*|^{\max(f_1(x'), f_2(y)-\varepsilon)}, & \text{if } x' \in X^{\varepsilon}, \\ \alpha(x') & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \beta'(y') := \begin{cases} x|^{f_1(x)+\varepsilon}, & \text{if } \beta(y') \in X^{\varepsilon}, \\ \beta(y') & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $f_2(y^*) = f_2(y) - \varepsilon_1 \leq f_2(y) - \varepsilon$ 以及 $f_1(x) \leq f_1(x) + \varepsilon$，$\alpha'$ 和 β' 均定义良好 .

我们首先论证 α' 是一个上映射。根据构造，对于 T_1 的所有 x'，都有 $f_2(\alpha(x')) \geq f_1(x')$。为证明 α' 保持祖先关系，设 $x_1 \preceq x_2$ 是 T_1 中的两个点。如果 x_1 和 x_2 均位于 X^{ε} 内，或均位于 X^{ε} 外，那么我们立即得到 $\alpha'(x_1) \preceq \alpha'(x_2)$。如果 x_1 位于 X^{ε} 内而 x_2 位于 X^{ε} 外，则有 $\alpha'(x_1) \preceq \alpha(x_1)$ 以及 $\alpha'(x_2) = \alpha(x_2)$。由于 α 保持祖先关系，我们得到 $\alpha'(x_1) \preceq \alpha'(x_2)$。否则，如果 x_1 位于 X^{ε} 外而 x_2 位于 X^{ε} 内，那么根据 y^* 的选取，我们知道 $\alpha'(x_1)$ 是 y^* 的一个（严格）后代。由此直接得到 $\alpha'(x_1) = \alpha(x_1) \preceq \alpha'(x_2)$。根据性质（ii），其中不存在 Q-临界点，因此 X^{ε} 内也不存在 P-临界点。因此，α' 可以平凡地扩展 $\mathrm{P}.\varphi$。根据构造，α' 的 $\mathrm{Q}'.\varphi$- 位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。

接下来，我们证明 β' 是一个上映射。令 $y' \in T_2$。注意，根据构造，我们有 $\beta'(y')$ 是 $\beta(y')$ 的祖先。这直接意味着 β' 扩展了 $\mathrm{P}.\psi$，并且 $f_1(\beta'(y')) \geq f_2(y')$。为说明 β' 保持祖先关系，考虑 T_2 中的两个点 $y_1 \preceq y_2$。唯一非平凡的情况是 $\beta(y_1) \in X^{\varepsilon}$ 且 $\beta(y_2) \notin X^{\varepsilon}$。那么，点 $\beta'(y_2) = \beta(y_2)$ 必定是 X^{ε} 中每个点的祖先。特别地，这意味着 $\beta'(y_2) \succeq x|^{f_1(x)+\varepsilon} = \beta'(y_1)$。因此，$\beta'$ 是一个上映射。最后，我们证明 β' 的 $\mathrm{P}.\psi$-位移有界于 $d_{\mathcal{P}}$。令 $y' \in T_2$。如果 $\beta(y') \notin X$，那么我们直接得到 $\sigma_{\mathcal{P}.\psi}(y, \beta'(y)) = \sigma_{\mathcal{P}.\psi}(y, \beta(y)) \leq d_{\mathcal{P}}$。否则，如果 $\beta(y') \in X^{\varepsilon}$，那么我们得到 $f_1(\beta'(y')) = f_1(x) + \varepsilon$。$X^{\varepsilon}$ 中没有临界点，因此必有 $\sigma(y', \beta(y')) < d_{\mathcal{Q}}$。所以，根据性质 (iii)，可得 $\sigma(y', \beta'(y')) \leq \sigma(y', \beta(y')) + \varepsilon < d_{\mathcal{Q}} + \varepsilon < d_{\mathcal{P}}$。因此，$\beta'$ 的 $\mathrm{Q}'.\psi$-位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。

最后，我们证明 I' 是一个交错。令 $x' \in T_1$。若 $x' \notin X^{\varepsilon}$，则得到 $\beta'(\alpha'(x')) = \beta'(\alpha(x')) \succeq \beta(\alpha(x')) \succeq x'$。否则，若 $x' \in X^{\varepsilon}$，则令 v 为包含 x' 的边的下端点。我们知道 v 不在 X^{ε} 内，因此 $\beta'(\alpha'(v))$ 是 v 的祖先。由于 α' 是一个上映射，我们得到 $\alpha'(x')$ 是 $\alpha'(v)$ 的祖先。同理，由于 β' 是一个上映射，我们得到 $\beta'(\alpha(x'))$ 是 $\beta'(\alpha'(v))$ 的祖先。因此，$\beta'(\alpha'(x'))$ 是 v 的祖先；由此可知，它也是 x' 的祖先。最后，令 $y' \in T_2$。若 $\beta(y') \notin X^{\varepsilon}$，则得到 $\alpha'(\beta'(y')) = \alpha(\beta(y')) \succeq y'$。否则，若 $\beta(y') \in X^{\varepsilon}$，则得到 $\beta'(y') = x|^{f_1(x)+\varepsilon} \succeq \beta(y')$。点 $\beta(y')$ 不在 X^{ε} 内，因此由于 α' 保持祖先关系，$\alpha'(\beta(y'))$ 是 y' 的祖先。因此，$\alpha'(\beta'(y'))$ 是 y' 的祖先。因此，I' 是一个交错。此外，I' 的 Q'- 位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。

情形 2：y 不是临界点。我们按如下方式选择 ε。首先，令 y^* 为 y的最高临界后代；它是 y的严格后代。令 $\varepsilon_1 > 0$ 满足 (i) $f_2(y^*) \leq f_2(y) - \varepsilon_1$。其次，令 $\varepsilon_2 > 0$ 满足 (ii) 集合 X^{ε_2}中没有 Q-临界点（可能包括点 x 本身）。这样的值存在，因为 Q-临界点只有有限个。第三，令 $\varepsilon_3 > 0$ 满足：对于 x的所有严格后代 x'，都有 $f_2(\alpha(x')) < f_2(y) - \varepsilon_3$。根据断言 26，这样的值 ε_3 存在。注意，x 不一定有严格后代；在这种情况下，任意 $\varepsilon_3 > 0$ 均可。最后，令 $\varepsilon_4 > 0$ 满足 $d_{\mathcal{Q}} + \varepsilon < d_{\mathcal{P}}$。令 $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$。对于 $x' \in T_1$，我们按如下方式定义映射 α'：

$$\alpha'(x') := \begin{cases} y^*|^{\max(f_1(x'), f_2(y)-\varepsilon)}, & \text{if } x' \in X^{\varepsilon}, \\ \alpha(x') & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意到 $f_2(y^*) \leq f_2(y) - \varepsilon_1 \leq f_2(y) - \varepsilon$。因此，映射 α' 定义良好。现在证明 α' 是一个扩展 $\mathcal{P}.\varphi$ 的上映射。

设 x' 是 T_1中的一个点。根据构造，我们可直接得到 $f_1(\alpha'(x')) \geq f_1(x')$。为说明 α' 保持祖先关系，注意到 $\alpha'(x')$ 总是与 $\alpha(x')$ 位于同一条边上。此外，根据 ε_3的选取，点 y^* 是 x所有后代的祖先。因此， α' 保持祖先关系。接下来，为说明 α' 扩展 $\mathrm{P}.\varphi$，设 $x' \in \mathrm{dom}(\mathrm{P}.\varphi)$。若 $x' \notin X^\varepsilon$，则有 $\alpha'(x') = \alpha(x') \succeq \mathrm{P}.\varphi(x')$。否则，根据 ε的选取，必有 $x' = x$。由于 y^* 是 y的最高后代临界点，点 $\mathrm{P}.\varphi(x)$ 必定是 y^*的后代。因此，根据构造，我们确实得到 $\alpha'(x) \succeq y^* \succeq \mathrm{P}.\varphi(x)$。最后，根据构造， α' 的 $\mathrm{Q}'.\varphi$-位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。

为定义映射 β'，我们还要考虑另外两种情形。

情形 2a： x **不是叶节点**。如果 x 不是叶节点，我们令 $\beta' = \beta$。显然， β' 是一个上映射，它扩展了 $\mathcal{P}.\psi$ ，且其 $\mathcal{Q}'.\psi$-位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。接下来只需证明这对 (α', β') 构成交错。

设 $x' \in T_1$。如果 $x' \notin X^\varepsilon$，则有 $\beta'(\alpha'(x')) = \beta(\alpha(x))$，这直接意味着 $\beta'(\alpha'(x'))$ 是 x 的祖先。否则，有 $x' \in X^\varepsilon$。由于 x 不是叶节点，因此必定存在 x 的一个后代 x'' 。特别地，根据 ε 的选取，有 $\alpha'(x'') = \alpha(x'')$ 是 $\alpha'(x')$ 的严格后代。点 x'' 不位于 X^ε 内，因此有 $\beta'(\alpha'(x''))$ 是 x'' 的祖先。由于 β' 保持祖先关系，且 $\alpha'(x')$ 是 $\alpha'(x'')$ 的祖先，因此可得 $\beta'(\alpha'(x'))$ 是 x'' 的祖先。由此可知， $\beta'(\alpha'(x'))$ 是 x' 的祖先。最后，设 $y' \in T_2$；我们有 $\beta'(y') = \beta(y')$。此外，根据构造，点 $\alpha'(\beta(y'))$ 和 $\alpha(\beta(y'))$ 位于同一条边上。由于 I 是一个交错，直接可得 $\alpha'(\beta'(y'))$ 是 y' 的祖先。

情况 2b： x **是一个叶节点**。如果 x 是一个叶节点，我们还会修改 β。具体来说，我们用 Y_ε 表示后代的集合 y'，它们是 y 的高度为 $f_2(y) - f_2(y') < \varepsilon$。对于 $y' \in T_2$，我们定义 β' 如下：

$$\beta'(y') \coloneqq \begin{cases} \beta(y), & \text{if } y' \in Y_\varepsilon, \\ \beta(y') & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们论证 β' 是一个扩展 $\mathcal{P}.\psi$ 的上映射。令 $y' \in T_2$。根据构造，我们得到 $f_1(\beta'(y')) \geq f_1(\beta(y')) \geq f_2(y')$。此外，如果 $y' \in Y_\varepsilon$，其像 $\beta'(y')$ 等于其不属于 Y_ε 的最低祖先的像；由此可直接推出， β' 保持祖先关系。同样地，由于 $\beta'(y')$ 是 $\beta(y')$ 的祖先，因此如果 $y' \in \mathrm{dom}(\mathcal{P}.\psi)$，我们有 $\beta'(y')$ 是 $\mathcal{P}.\psi(y')$ 的祖先。因此， β' 是一个扩展 $\mathcal{P}.\psi$ 的上映射。

接下来，我们证明 β' 的 $\mathrm{Q}'.\psi$-移位严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。由于 I 是一个最优的 Q-扩张，I 中每个箭头的 Q-移位都不超过 $d_{\mathcal{Q}}$。令 $y' \in T_2$。根据构造，$\mathrm{Q}'.\psi$ 等于 $\mathrm{Q}.\psi$。如果 y' 不位于 Y_ε 内，则 $(y', \beta'(y'))$ 的 $\mathrm{Q}'.\psi$- 移位不超过 $d_{\mathcal{Q}}$，而这严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。否则，我们有 $y' \in Y_\varepsilon$。箭头 $(y, \beta(y))$ 的 Q-移位不超过 $d_{\mathcal{Q}}$。这意味着以下情况之一成立：(a) $\sigma(y, \beta(y)) \leq d_{\mathcal{Q}}$；或 (b) 箭头 $(y, \beta(y))$ 位于 $\mathrm{Q}.\psi$ 的扇内。在情况 (a) 中，根据 ε_4 的选取，可得 $\sigma(y', \beta(y)) \leq d_{\mathcal{Q}} + \varepsilon < d_{\mathcal{P}}$。在情况 (b) 中，存在 y 的一个后代 y'' ，使得 $y'' \in \mathrm{dom}(\mathrm{Q}.\psi)$ 且 $\mathrm{Q}.\psi(y'') = \beta(y)$。点 y'' 是一个 Q-临界点，因此它必定是 y^* 的后代。根据 ε_1 的选取，可得 y'' 是 y' 的后代。因此，箭头 $(y', \beta'(y')) = (y', \beta(y))$ 位于 $\mathrm{dom}(\mathrm{Q}'.\varphi)$ 的扇内。在这两种情况下，$(y', \beta'(y'))$ 的 Q′-移位都严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。因此， β' 的 Q′-移位严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。

接下来只需证明 (α', β') 是一个交错。注意，对于所有 $y' \in T_2$，点 $\beta'(y')$ 都是 $\beta(y')$ 的祖先。令 $x' \in T_1$。若 $\alpha'(x') = \alpha(x')$，则可得 $\beta'(\alpha'(x')) = \beta'(\alpha(x')) \succeq \beta(\alpha(x'))$。由于$\mathcal{I}$ 是一个交错，因此 $\beta'(\alpha'(x'))$ 是 x' 的祖先。否则，若 $\alpha'(x') \neq \alpha(x')$，则根据构造，点 $\alpha'(x')$ 是 y^* 的祖先。

特别地，这意味着 $\beta'(\alpha'(x'))$ 是 $\beta(y)$ 的祖先。由于 I 是一个最优 Q-扩展，我们知道 $\alpha(x) = y$。此外，必有 $\beta(y)$ 是 x 的祖先。因此， $\beta'(\alpha'(x'))$ 也是 x 的祖先，因而也是 x' 的祖先。最后，令 $y' \in T_2$。注意，对于所有 $x' \in T_1$，点 $\alpha'(x')$ 与 $\alpha(x')$ 位于同一条边上。若 $\beta'(y') = \beta'(y)$，则点 $\alpha'(\beta'(y')) = \alpha'(\beta(y'))$ 与 $\alpha(\beta(y')$ 位于同一条边上。由于 I 是一个交错，因此 $\alpha'(\beta'(y'))$ 是 y' 的祖先。否则， $\beta'(y')$ 是 $\beta(y')$ 的祖先。由于 α' 保持祖先关系，我们得到 $\alpha'(\beta'(y'))$ 是 $\alpha'(\beta(y'))$ 的祖先。点 $\alpha'(\beta(y'))$ 与 $\alpha(\beta(y'))$ 位于同一条边上，因此同样由于 I 是一个交错，可得 $\alpha'(\beta(y'))$ 是 y' 的祖先。因此，点 $\alpha'(\beta'(y'))$ 也是 y' 的祖先。

证明结束。在所有情况下，我们都能得到一个交错$\mathcal{I}'$ ，其$\mathcal{Q}'$-位移严格小于 $d_{\mathcal{P}}$。换言之，$\mathcal{Q}'$ 是一个$\mathcal{P}$-增广，因此我们得出矛盾。◀

4.2 构造局部正确交错

我们通过逐步构造来证明局部正确交错总是存在的。具体而言，我们迭代地将$\mathcal{P}$ 替换为有限的极小$\mathcal{P}$-增广，并证明经过有限次迭代后，$\mathcal{P}$-残余交错距离变为零，此时我们停止迭代。最后，我们证明，对于所得的部分交错$\mathcal{P}$，任意最优$\mathcal{P}$-扩展都是局部正确的。为此，在整个构造过程中，我们始终保持$\mathcal{P}$ “部分地”局部正确。此外，我们证明，构造的每一步之后，$\mathcal{P}$ 都会“指定”输入合并树中至少一个额外的顶点。由于每个顶点至多只能被指定一次，因此该构造必定终止。

最小增广。 形式化地，设 $\mathcal{P}$ 为一个部分交错，并假设 $d_{\mathcal{P}} > 0$。设 $\mathcal{Q}$ 为一个有限最小 $\mathcal{P}$-增广。根据定义， $d_{\mathcal{Q}} < d_{\mathcal{P}}$。如果对于 $\mathcal{P}$ 的所有限制 $\mathcal{R}$，都有 $d_{\mathcal{R}} \geq \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})$，则称$\mathcal{P}$ 是局部正确的。注意，对于完全交错，这一定义等价于定义 17（由观察 18 可知）。

▶**引理 27**。 设 P 是一个有限交错，并假设 $d_{\mathcal{P}} > 0$。设 Q 是一个有限最小 P-增广。如果 P 是主导且局部正确的，那么 Q 也如此。

证明。 我们首先说明 $\mathcal{Q}$ 是主导的。设 a 是 $\mathcal{Q}$ 的一支箭头。若 a 也是 $\mathcal{P}$ 的一支箭头，那么由P 是主导的这一事实可知 $\sigma(a) > d_{\mathcal{P}} > d_{\mathcal{Q}}$。否则， a 必须是瓶颈 $\mathcal{Q}\backslash\mathcal{P}$中的一支箭头。根据引理 25，可直接推出 $\sigma(a) = d_{\mathcal{P}} > d_{\mathcal{Q}}$。

接下来，我们证明 Q 是局部正确的。考虑 Q 的一个限制 R；我们需要证明 $d_{\mathcal{R}} \geq \sigma_{\mathcal{R}}$(Q)。如果 R $=$ Q，我们立即得到 $\sigma_{\mathcal{R}}$(Q) $= 0 \leq d_{\mathcal{R}}$。否则，令 R′ 为 R 在 P.φ 和 P.ψ的定义域上的限制。由于 Q 使用 P，因此 R′ 使用 P，故也是 P 的一个限制。如果 R′ $=$ P，那么根据增广的定义，我们知道 Q 中任意箭头的 R′-位移都是 $d_{\mathcal{P}}$。由此得到 $\sigma_{\mathcal{R}'}$(Q) $= d_{\mathcal{P}}$。此外，由于 R $\neq$ Q，Q \ P 中至少有一个箭头的 R-位移非零。由此得到 $\sigma_{\mathcal{R}}$(Q) $= \sigma_{\mathcal{R}'}$(Q) $= d_{\mathcal{P}}$。由于 Q 是一个最小增广且扩展了 R，我们知道 R 不可能是 P 的增广。因此 $d_{\mathcal{R}} \geq d_{\mathcal{P}}$。综合起来，我们得到 $d_{\mathcal{R}} = \sigma_{\mathcal{R}}$(Q)。

最后，如果 $\mathcal{R}' \neq \mathcal{P}$，那么由于 $\mathcal{P}$ 局部正确，且 $\mathcal{R}'$ 是 $\mathcal{P}$ 的限制，我们有

$$d_{\mathcal{R}'} \geq \sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}). \tag{4}$$

我们首先证明 $\sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}) \geq \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$。首先，$\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$ 中的箭头都不是$\mathcal{P}$中的箭头，因此 $\sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}) = \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})$。其次，$\mathcal{Q}$ 的$\mathcal{R}$-剩余位移是$\mathcal{P}$ 和$\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$的$\mathcal{R}$-剩余位移中的最大值。由于$\mathcal{P}$ 是主导的，我们知道 $\mathcal{P}$ 中任意箭头的位移都严格

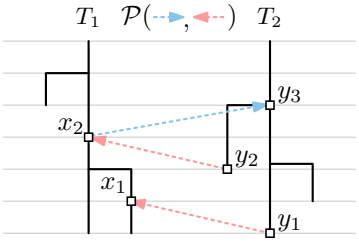

图12 点 x_1、 x_2、 y_1、 y_2 和 y_3 均为临界点，但只有 x_2、 y_1 和 y_2 是已指定的。

大于 $d_{\mathcal{P}}$。由于$\mathcal{P}\setminus\mathcal{R}$非空，因此 $\sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}) > d_{\mathcal{P}}$。另一方面，根据增广的定义，我们知道$\mathcal{Q}\setminus\mathcal{P}$中任意箭头的位移至多为 $d_{\mathcal{P}}$。因此，我们得到 $\sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) = \max(\sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})\ \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}\setminus\mathcal{P})) = \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})$。综合起来，可得 $\sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}) \geq \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$。

接下来，我们论证 $d_{\mathcal{R}} \geq d_{\mathcal{R}'}$。根据构造，$\mathcal{R}$ 扩展了$\mathcal{R}'$。如前所述，我们有 $\sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}) = \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}) > d_{\mathcal{P}}$。结合公式（4），可得 $d_{\mathcal{R}'} \geq \sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}) > d_{\mathcal{P}}$。设 a 是$\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}'$的一条箭头。那么 a 是瓶颈$\mathcal{Q}\setminus\mathcal{P}$的一条箭头，因此 a 的位移恰为 $d_{\mathcal{P}}$。换言之， $\sigma_{\mathcal{R}'}(a) = d_{\mathcal{P}} < d_{\mathcal{R}'}$。这意味着我们可以对有限交错$\mathcal{R}'$ 和$\mathcal{R}'$-扩展$\mathcal{R}$应用推论 23，从而得到 $d_{\mathcal{R}} \geq d_{\mathcal{R}'}$。

因此， $d_{\mathcal{R}} \geq d_{\mathcal{R}'} \geq \sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}) = \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$，证明至此结束。 ◀

回想一下，对于$\mathcal{P}$中的每个箭头（x， y），其中 $x \in T_1$ 和 $y \in T_2$， x 和 y 都是临界点。然而，只有点 x 在另一棵树中有一个“已指定”的目标。如果 $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{P}.\varphi)$ 或 $y \in \mathrm{dom}(\mathcal{P}.\psi)$ 分别成立（见图 12），我们就称点 $x \in T_1$或 $y \in T_2$ 由$\mathcal{P}$已指定。我们要说明，如果$\mathcal{P}$ 指定了所有不是顶点的临界点，即 $C_1[\mathcal{P}]\setminus V(T_1) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{P}.\varphi)$ 且 $C_2[\mathcal{P}]\setminus V(T_2) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{P}.\psi)$，那么任何最小增广也会如此。

▶**引理28**。 设 P 是一个有限交错，且假设 $d_{\mathcal{P}} > 0$。设 Q 是一个有限的最小 P-增广。如果 P 是主导的，并且指定了所有不是顶点的临界点，那么 Q 也如此。此外，Q 至少指定了一个 P 未指定的顶点。

证明。由引理 25 可知，瓶颈 Q \ P 仅使用 P-临界对。考虑这样一个临界对 b。若 b 是箭头临界对，则不失一般性，设 $b = (x, y)$，其中 $x \in T_1$ 和 $y \in T_2$是两个点；情形 $b = (y, x)$ 与此对称。根据箭头临界对的定义， x 和 y 都是 P-临界点。因此，临界对 b 不会产生任何额外的 Q-临界点。由于 P 已指定了所有非顶点的临界点，且 Q 使用 P，我们知道 x 必定是一个顶点。由于 P 是主导的，P 的任意箭头的位移都严格大于 $d_{\mathcal{P}}$。此外，Q \ P 的任意箭头的位移恰为 $d_{\mathcal{P}}$。因此，顶点 x 不可能由 P 指定：至少有一个新顶点被指定。

若 b 是之字形临界对，则不失一般性，设 $b = (x_1,\ x_2)$，其中 x_1 和 x_2 是 T_1的两个点；若它是一对 T_2 的点，论证类似。根据之字形临界对的定义，我们知道 $x_1 \in V(T_1)$ 和 $x_2 \in V(T_1)$。此外，存在一个点 $y \in T_2$，使得 $Q.\varphi(x_1) = y$ 且 $Q.\psi(y) = x_2$。因此， x_1 是一个由$\mathcal{Q}$指定、但未由$\mathcal{P}$指定的顶点。最后， b 产生一个单独的$\mathcal{Q}$-临界点 y，并且该点会立即被指定。◀

定理 19 的证明至此完成。 令 $\mathcal{P}$ 为空交错。显然，$\mathcal{P}$ 是主导且局部正确的。此外，不存在不是顶点的（未指定）临界点。现在，我们迭代地将$\mathcal{P}$ 替换为有限的极小$\mathcal{P}$-增广，直到$\mathcal{P}$-残余交错距离变为零。通过归纳应用引理27和引理28，我们始终保持$\mathcal{P}$ 是主导且局部正确的，并且已指定所有不是顶点的临界点。此外，根据引理28，每次迭代至少会额外指定一个顶点。

因此，经过 i 次迭代后，至少有 i 个顶点已被指定，而迭代总次数至多为 $|V(T_1)| + |V(T_2)|$。此后，残余交错距离为零。引理 29 保证存在局部正确交错；其证明与引理 27 的证明相似。

▶ **引理 29.** 设 P 是一个局部正确的部分交错，且满足 $d_{\mathcal{P}} = 0$。任意最优 $\mathcal{P}$-扩展都是局部正确的。

证明. 固定一个限制 $\mathcal{R}$，它来自 $\mathcal{I}$。根据观察 18，只需证明 $d_{\mathcal{R}} \geq \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{I})$。如果 $\mathcal{R}$ 使用 $\mathcal{P}$，那么我们立即得到 $d_{\mathcal{R}} = 0 = \sigma_{\mathcal{R}}(\mathcal{I})$。否则，令 $\mathcal{R}'$ 为将 $\mathcal{R}$ 限制到 $\mathcal{P}.\varphi$ 和 $\mathcal{P}.\psi$的定义域上所得的限制。注意，$\mathcal{R}'$ 也是 $\mathcal{P}$的一个限制。由于 $\mathcal{P}$ 是局部正确的，我们得到

$$d_{\mathcal{R}'} \geq \sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}). \tag{5}$$

由于$\mathcal{R}$ 没有使用$\mathcal{P}$，$\mathcal{R}'$也没有使用它。这意味着$\mathcal{P}$ 中至少有一个箭头不属于$\mathcal{R}'$。我们知道$\mathcal{P}$ 是主导的，因此任何此类箭头的位移都严格大于 0。因此，我们有 $\sigma_{\mathcal{R}'}(\mathcal{P}) > 0$。

令 $a = (x, y)$ 为 R \ R′ 中的一条箭头。不失一般性，假设 $x \in T_1$ 且 $y \in T_2$；对称情形的论证类似。由于 I 是 P 的一个最优扩展，我们有 $\sigma_{\mathcal{P}}(a) = 0$。换言之，我们有 $\sigma(a) = 0$ 或 $a \in F[A_{\mathcal{P}}]$。我们证明这两种情况下都有 $\sigma_{\mathcal{R}'}(a) < \sigma_{\mathcal{R}'}$(P)。若 $\sigma(a) = 0$，则可直接得到 $\sigma_{\mathcal{R}'}(a) = 0 < \sigma_{\mathcal{R}'}$(P)。否则，若 $a \in F[A_{\mathcal{P}}]$，则存在一条箭头 $a' = (x', y) \in A_{\mathcal{P}}$，使得 x' 是 x 的严格后代。这意味着 a' 的位移严格大于 a 的位移。我们分两种情况讨论。首先，若 $a' \in A_{\mathcal{R}'}$，则 a 属于 $A_{\mathcal{R}'}$ 的扇，从而得到 $\sigma_{\mathcal{R}'}(a) = 0 < \sigma_{\mathcal{R}'}$(P)。否则，若 $a' \notin A_{\mathcal{R}'}$，则 $\sigma_{\mathcal{R}'}(a') = \sigma(a')$。因此，我们得到 $\sigma_{\mathcal{R}'}$(P) $\geq \sigma(a') > \sigma(a) \geq \sigma_{\mathcal{R}'}(a)$。在所有情况下，我们都得到 $\sigma_{R'}(a) < \sigma_{\mathcal{R}'}$(P)。结合公式（5），得到 $\sigma_{\mathcal{R}'}(a) < d_{\mathcal{R}'}$。根据推论 23，进而可得 $d_{\mathcal{R}} \geq d_{\mathcal{R}'}$。

还需证明 $\sigma_{\mathcal{R}'}$(P) $\geq \sigma_{\mathcal{R}}$(I)。由于 R \ R′ 中的任何箭头都不是 P 的箭头，因此有 $\sigma_{\mathcal{R}'}$(P) $= \sigma_{\mathcal{R}}$(P)。考虑 I 中的一个箭头 $a = (x, y)$。同样，不失一般性，假设 $x \in T_1$ 且 $y \in T_2$；对称情形的论证类似。任意箭头 a 的 P-位移为 0，因此要么 $\sigma(a) = 0$，要么 $a \in F[A_{\mathcal{P}}]$。在第一种情形下，我们得到 $\sigma_{\mathcal{R}}(a) = 0 < \sigma_{\mathcal{R}}$(P)。在第二种情形下，P 中必定存在一个箭头 $a' = (x', y)$，满足 $x' \preceq x$。由此可知，a' 的位移至少与 a 的位移一样大，因此 $\sigma_{\mathcal{R}}(a) \leq \sigma_{\mathcal{R}}(a') \leq \sigma_{\mathcal{R}}$(P)。由于这对 I 的所有箭头都成立，我们得到 $\sigma_{\mathcal{R}}(I) \leq \sigma_{\mathcal{R}}$(P) $\leq \sigma_{\mathcal{R}'}$(P)。证明至此完成。◀

4.3 计算局部正确交错

我们概述如何将定理 19 的证明转化为一种增量算法，用于计算局部正确交错。为了计算残余交错距离，我们修改 Touli 和 Wang 的动态规划 [13]，使其也纳入由部分交错所诱导的约束。我们利用输出提取出一组有限的临界对，对应于一个增广。随后，我们反复调用修改后的动态规划，迭代地缩减这组临界对，直至得到一个（有限的）最小增广。这个最小增广又会降低残余交错距离；我们持续迭代，直到该距离降为零。为了得到完整的局部正确交错，我们从修改后的动态规划所填充的表中选取合适的条目。

5 结论

我们引入了合并树之间的局部正确交错，即“紧”的最优交错。为此，我们引入了残余交错距离：一种广义的

交错距离，它能够容纳对交错的约束。我们给出了一个构造性证明，证明局部正确交错总是存在。

我们计划进一步研究计算局部正确交错的复杂度。具体而言，我们将研究部分交错对修改后动态规划运行时间的影响。此外，我们还将探讨用近似算法 [1] 或其变体之一或启发式方法替代动态规划所产生的影响。此外，研究交错的其他（局部）判据也颇有意义。由于局部正确交错不一定唯一，我们可以在适当定义总位移的前提下，最小化其总位移。此外，我们还可以考虑受字典序弗雷歇匹配 [11]启发的字典序优化。最后，我们希望探究如何将局部正确交错转化为地形之间有意义的匹配。

参考文献

1 P.K. Agarwal、K. Fox、A. Nath、A. Sidiropoulos 和 Y. Wang。度量树的 Gromov-Hausdorff 距离计算。ACM算法汇刊，14(2):1–20，2018年。doi:10.1145/3185466。2 T. Beurskens、T. Ophelders、B. Speckmann 和 K. Verbeek。通过有序合并树关联交错距离与 Fréchet 距离。载于：ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA25）论文集，第5027–5050页。工业与应用数学学会，2025年。 doi:10.1137/1.9781611978322.170。3 K. Buchin、M. Buchin、W. Meulemans 和 B. Speckmann。局部正确弗雷歇匹配。计算几何，76(1):1–18，2019年。 doi:10.1016/j.comgeo.2018.09.002。4 J. Curry、H. Hang、W. Mio、T. Needham 和 O. B. Okutan。用于持久拓扑的装饰合并树。应用与计算拓扑学杂志，6(3):371–428，2022年2月。 doi:10.1007/s41468-022-00089-3。5 E. Gasparovic、E. Munch、S. Oudot、K. Turner、B. Wang 和 Y. Wang。合并树的内禀交错距离。La Matematica，4(1):40–65，2025年。 doi:10.1007/s44007-024-00143-9。6 E. Gasparovich、E. Munch、S. Oudot、K. Turner、B. Wang 和 Y. Wang。合并树的内禀交错距离。 arXiv:1908.00063。7 D. Morozov、K. Beketayev 和 G. Weber。合并树之间的交错距离。手稿（访问于 06-03-2025），2013年。网址： https://mrzv.org/publications/interleaving-distance-merge-trees/manuscript/。8 E. Munch 和 A. Stefanou。用于系统发育树的 ℓ^∞-Cophenetic 度量作为交错距离。载于《数据科学研究》，《女性数学协会丛书》第17卷，第109–127页。施普林格国际出版，2019年。 doi:10.1007/978-3-030-11566-1_5。9 M. Pegoraro。合并树之间交错距离的图匹配形式。AIMS数学，10(6):13025–13081，2025年。 doi:10.3934/math.2025586。10 M. Pont、J. Vidal、J. Delon 和 J. Tierny。合并树的 Wasserstein 距离、测地线与重心。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，28(1):291–301，2022年1月。 doi:10.1109/TVCG.2021.3114839。11 G. Rote。字典序弗雷歇匹配。载于：第30届欧洲计算几何研讨会（EuroCG'14）论文集，2014年。 doi:http://dx.doi.org/10.17169/refubium-19845。12 R. Sridharamurthy、T. B. Masood、A. Kamakshidasan 和 V. Natarajan。合并树之间的编辑距离。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，26(3):1518–1531，2020年。 doi:10.1109/TVCG.2018.2873612。13 E.F. Touli 和 Y. Wang。用于计算树之间 Gromov-Hausdorff 距离和交错距离的固定参数可处理算法。计算几何学杂志，13:89–124，2022年。 doi:10.20382/jocg.v13i1a4。

14 L. Yan、T. B. Masood、F. Rasheed、I. Hotz 和 B. Wang。利用交错距离比较时变数据的几何感知合并树。*IEEE*可视化与计算机图形学汇刊，29(8):3489–3506，2022年。 doi:10.1109/TVCG.2022.3163349。15 L. Yan、T. B. Masood、R. Sridharamurthy、F. Rasheed、V. Natarajan、I. Hotz 和 B. Wang。利用拓扑描述符比较标量场：科学可视化中的性质与应用。计算机图形论坛，40(3):599–633，2021年。 doi:10.1111/cgf.14331。16 L. Yan、Y. Wang、E. Munch、E. Gasparovich 和 B. Wang。用于不确定性可视化的带标签合并树结构平均。*IEEE*可视化与计算机图形学汇刊，26(1):832–842，2020年。 doi:10.1109/TVCG.2019.2934242。