arXiv:2512.16524v1 [math.OA] 18 Dec 2025

离散群上的 Fell 丛的 W*-可和性

ALCIDES BUSS 和 DAMIÁN FERRARO

摘要。我们研究离散群 G 上 W*-Fell 丛的可 amen 性，重点关注如何通过逼近性质和条件期望对其进行刻画。基于 W*-可和性的概念，我们构造了一个扩大的 W*-Fell 丛，它类似于群作用 G 在冯·诺依曼代数 M 上的 $\ell^\infty(G, M)$，并将可 amen 性与丛层面及交叉积层面存在适当的条件期望联系起来。我们的结果统一并拓展了非交换动力系统中关于可 amen 性的若干研究途径。

作为这些方法的应用，我们证明 Fell 丛的可 amen 性在限制到子群后仍然成立；此外，群 G 上的 Fell 丛是可 amen 的，当且仅当它在正规子群 $H \trianglelefteq G$ 上的限制以及相应的、定义在 G/H 上的商 Fell 丛都是可 amen 的。这为结构分析提供了一种强有力的工具，将群可和性的经典遗传结果拓展到了 W*-Fell 丛以及 C*-代数 Fell 丛的情形。我们还讨论 Fell 丛及其可 amen 性如何与 C^*-代数和冯·诺依曼代数上的群余作用相互作用。

1. 引言

算子代数语境下的可 amen 性研究催生了一个丰富的理论，并与逼近性质、条件期望和动力系统有着深刻联系。对于离散群上的 Fell 丛，核心概念是*Exel* 的逼近性质（AP） [15]。该性质蕴含弱包含性质，即该丛的完整截面 C* 代数与约化截面 C* 代数相等，并且与核性密切相关：如果单位纤维具有核性，那么截面 C* 代数的核性等价于底层 Fell 丛具有 AP。目前，一个重要的开放问题是：一般而言，AP 是否等价于弱包含性质。

理解这一性质的一个基础性步骤是以下在 [2] 中证明的观察：Fell 丛$\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ 具有 AP，当且仅当其双对偶 W*-Fell 丛$\mathcal{M} = \{M_t\}_{t\in G}$（其中$M_t = B_t''$）具有 W*-逼近性质（W*AP）。因此，冯·诺伊曼丛$\mathcal{M}$ 并不只是$\mathcal{B}$的技术性扩张，而是研究逼近性质的自然框架。这正是本文工作的主要动机：我们发展 W*-Fell 丛的可 amen 性系统理论，旨在理解并推广 C*-Fell 丛的逼近性质。

对于离散群在冯·诺依曼代数上的作用，Anantharaman-Delaroche [4] 经典地将可 amen 性定义为存在一个 G等变条件期望

$$P\colon \ell^\infty(G, M) \to M,$$

其中， G在 $\ell^\infty(G,\ M)$上的提升作用 $\tilde{\gamma}$由 $\tilde{\gamma}_r(f)(s) = \gamma_r(f(r^{-1}s))$给出。这一概念有若干等价刻画，包括中心逼近性质和拟中心逼近性质 [6, 10]。文献 [2], 引入的 Fell 丛的 W*逼近性质，将这一图景从群作用推广到了更一般的 W*-Fell 丛框架。

我们的第一个主要贡献是用条件期望刻画 W*-Fell 丛的可 amen 性。我们为给定的 W*-Fell 丛构造一个典范扩张——在群作用的情形下，它类似于 $\ell^\infty(G,\ M)$——并证明，从这个扩张后的丛到原丛存在一个 G等变条件期望，当且仅当 W*逼近性质成立。这将可 amen 性的逼近论观点与范畴论观点联系起来，并与对偶余作用理论相衔接。

定理 A. 对于 W*-Fell 丛 $\mathcal{M} = \{M_t\}_{t\in G}$，以下陈述等价 t.
(a) $\mathcal{M}$是 W*-可 amenable 的。(b) 存在一个条件期望 $P\colon \ell^\infty(G,$
$\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$.(c) 存在一个条件期望 $Q\colon \mathrm{k_{w^*}}(\mathcal{M}) \to W^*{}_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$.

日期：2025年12月19日。

这里，$\ell^\infty(G,\ \mathcal{M}) := \{\ell^\infty(G,\ M_t)\}_{t\in G}$ 表示一个 W^*-Fell 丛的典范扩张，将在第 2.3 节中介绍；$W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$ 表示 W*-交叉截面代数，而 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 表示$\mathcal{M}$的核的 W*-代数。

在本文的第二部分，我们建立了结构性保持结果。我们证明，可 amen 性在限制到子群时得以保持，并且可以通过正规子群的扩张来判定。这些结果将关于可 amen 群的经典保持定理推广到了 Fell 丛的情形，并且同样适用于 C* 和 W* 情形。在这一方向上，我们的主要结果可概括如下：

定理 B。设 $\mathcal{M} = \{M_t\}_{t\in G}$ 是离散群G上的 W*-Fell 丛或 C*-代数 Fell 丛，且 $H \le G$ 是一个子群。若 $\mathcal{M}$ 是可 amen 的（即在冯·诺依曼意义下 C*-可 amen，或在 C*情形下具有逼近性质），则限制丛 $\mathcal{M}|_H$ 也是可 amen 的。

此外，若 $H \trianglelefteq G$ 是一个正规子群，则 $\mathcal{M}$ 是可 amen 的，当且仅当其限制丛$\mathcal{M}|_H$ 以及与之相关的、定义在 G/H 上的商 Fell 丛都是可 amen 的。

最后，为了展示我们方法的适用范围，我们重新考察一类具体的例子：Green 扭曲作用。我们证明，这类作用的可 amen 性等价于其在 B''中心上的诱导作用具有 W*-可 amen 性。这将我们的一般理论与交叉积理论中的经典构造联系起来，并展示了 W*-丛方法如何自然地涵盖并拓展已有结果。

论文提纲。在第 2 节中，我们回顾 C*-和 W*-Fell 丛的基础理论，并具体描述相关的核代数以及约化截面 W*-代数。在第 2.3 节中，对于给定的、定义在 G上的 W*-Fell 丛$\mathcal{M}$，我们构造扩大的丛 $\ell^\infty(G, \mathcal{M})$，并证明其约化截面 W*-代数与核代数 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$的 W*-代数一致。在第 2 节的最后部分，我们利用正规子群 $H \trianglelefteq G$ 构造一个定义在 $G = G/H$ 上的 W*-Fell 丛$\dot{\mathcal{M}}$，使得 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$同构于 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 在 G的典范作用限制到 H 后所得的不动点代数。此外，我们的同构将 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$映到 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$上。第 3 节阐述 W*逼近性质的条件期望刻画，并证明相应的保性结果。第 4 节讨论余作用的作用，并将我们的构造与对偶理论联系起来。最后，在第 5 节中，我们将结果推广到 C*-情形，并以 Green 扭曲作用的案例研究作结。

记号与约定。对于一个 C^*-代数 B，我们用 $\mathcal{M}(B)$ 表示其乘子 C^*-代数，并用$U\mathcal{M}(B)$ 表示其酉元群。C^*-代数 B 的中心记作 $Z(B)$。

所有内积均对第二个变量线性，包括希尔伯特空间上的内积。

对于希尔伯特空间或希尔伯特 B-模 X，我们用 $\mathrm{B}(X)$ 表示所有可伴随算子所构成的 C^*-代数 B-线性算子在 X 上的代数。注意，若将 B 视为希尔伯特 B-模，则 $\mathcal{M}(B) \cong \mathrm{B}(B)$。

2. 离散群上的 W*-Fell 丛

我们采用 [2] 中关于离散群上的 W*-Fell 丛的定义，以及所有相关概念与构造（W*-可 amen 性、W*AP、W* 交叉积、核的 W*-代数等）。

注记 2.1. 在 [2] 这些概念中，曾通过添加前缀“AD”（代表“Anantharaman– Delaroche”）来表示——例如，*AD*-可 *amen* 性 或*W*AD*-可 *amen* 性等——以强调它们与 Anantharaman–Delaroche 引入的逼近性质之间的联系。本文中，我们简化了记号，省略此前缀，直接写作“C*-可 amen”和“W*-可 amen”等，同时保留相同的底层定义。

取一个 W*-Fell 丛 $\mathrm{M} = \{M_t\}_{t\in G}$ 以及一个含幺表示 $\pi\colon \mathrm{M} \to \mathrm{B}(X)$，其作用在希尔伯特空间$X$ 上，并满足对于所有 $t \in G$，$M_t \to \mathrm{B}(X)$ $m \mapsto \pi(m)$ 都是等距的且 w*–连续。Krein-Smulian 定理 [12, 推论 12.6] 蕴含 $\pi(M_t)$ 是 w*-闭的。此外，$M_t \to \pi(M_t)$，$m \mapsto \pi(m)$ 是一个 w*-同胚。这是因为，给定巴拿赫空间 U 和 V 以及一个线性映射$T\colon U^* \to V^*$，其在闭单位球 U_1^*上的限制是 w*-连续的，当且仅当 $T = S^*$ 对某个线性有界 $S\colon V \to U$ 成立。特别地，T 是 w*-连续的，当且仅当 $T|_{U_1^*}$ 是 w*-连续的。

群 G 的左正则表示和右正则表示分别记为 $\lambda\colon G \to \mathrm{B}(\ell^2(G))$ 和 $\rho\colon G \to \mathrm{B}(\ell^2(G))$，。若需明确指定群，则记为 λ^G 和 ρ^G。对于任意希尔伯特空间 X，我们以典范方式将 $X \otimes \ell^2(G)$ 与 $\ell^2(G,\ X)$ 等同起来。

2.1. **核的 W*-代数的具体描述**。M 上的一个核是一个函数k: $G\times G\to\mathcal{M}$，满足 $k(r,\ s)\in M_{rs^{-1}}$，对所有 $r,\ s\in G$均成立。有限支撑的核构成一个赋范
$*$-代数 $\mathrm{k}_c(\mathcal{M})$及其运算

$$h*k(r,s):=\sum_{t\in G}h(r,t)k(t,s),\qquad h^*(r,s):=h(s,r)^*,\qquad \|h\|_2:=\Big(\sum_{r,s\in G}\|h(r,s)\|^2\Big)^{1/2}.$$

由 G 的有限子集组成的集合 F，在通常的包含序下是有向的： $F_1\le F_2\Leftrightarrow F_1\subseteq F_2$。对于每个 $F=\{t_1,\dots,t_n\}\in\mathrm{F}$，支集包含于 $F\times F$ 的核所组成的集合 $\mathrm{k}_F(\mathrm{M})$ 与 C^*-代数 $\mathrm{M}_{\mathfrak{t}}(\mathrm{M})$ [3, 引理 2.8], 中的核 $=(t_1^{-1},\dots,t_n^{-1})$ 在 $*$-同构意义下同构。因此，$\mathrm{k}_F(\mathrm{M})$ 是一个 C^*-代数，并且其 C^*-范数等价于 $\|\ \|_2$。注意，$\mathrm{k}_c(\mathrm{M})$ 是 C^*-代数 $\{\mathrm{k}_F(\mathrm{M}):\ F\in\mathrm{F}\}$ 的并，而核的 C^*-代数 $\mathrm{k}(\mathrm{M})$ 是 $\{\mathrm{k}_F(\mathrm{M})\}_{F\in\mathcal{F}}$ 的归纳极限，或者说是 $\mathrm{k}_c(\mathrm{M})$ 关于其唯一的 C^*-范数的完备化。

与之前一样，我们固定一个含单位元的、等距的 w*-连续表示 $\pi\colon\ \mathcal{M}\ \to \mathrm{B}(X)$。每个 $T\in\mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$ 关于标准基 $(\delta_s)_{s\in G}\subseteq\ell^2(G)$ 都有一个矩阵表示 $(T_{r,s})_{r,s\in G}$；其元素 $T_{r,s}\in\mathrm{B}(X)$ 由恒等式 $\langle T_{r,s}x,y\rangle=\langle T(x\otimes\delta_s)\ y\otimes\delta_r\rangle$ 确定。与 π 相关联的核的具体 W*-代数为

$$\Bbbk^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M}):=\left\{T\in\mathbb{B}(X\otimes\ell^2(G))\colon T_{r,s}\in\pi(M_{rs^{-1}})\ \forall\ r,s\in G\right\}.$$

对于每个 $F\in\mathcal{F}$，我们将 $\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*F}(\mathcal{M})$ 定义为满足条件 $T_{r,s}=0$ if $(r,s)\notin F\times F$ 的算子 $T\in\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 的集合。于是，$\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*F}(\mathcal{M})$ 是一个与 $\mathrm{k}_F(\mathcal{M})$ C^*-同构的冯·诺依曼代数。 $\cup\{\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*F}(\mathcal{M}):\ F\in\mathcal{F}\}$ 的范数闭包记为 $\mathrm{k}^{\pi}(\mathcal{M})$，它与核的 C^*-代数 $\mathrm{k}(\mathcal{M})$ C^*-同构；而 $\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 是由 $\cup\{\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*F}(\mathcal{M}):\ F\in\mathcal{F}\}$ 生成的冯·诺依曼代数，也就是说，

$$\Bbbk^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})=\overline{\Bbbk^{\pi}(\mathcal{M})}^{\mathtt{wot}},$$

其中 $\mathtt{wot}$ 表示弱算子拓扑。空间 $\mathrm{k}(\mathcal{M})$ 上 G 的自然作用 β 由 b 确定 y

$$\beta_t(k)(r,s)=k(rt,st),\quad k\in\Bbbk_c(\mathcal{M})$$

并由 $\mathrm{Ad}(1\otimes\rho)$ 实现。因此，$\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{k}^{\pi}(\mathcal{M})$ 都是 $\mathrm{Ad}(1\otimes\rho)$-不变的。

以下注记将被多次使用而不再特别说明，尤其是在 X 是希尔伯特空间、 $Y=X\otimes\ell^2(G)$ 和 $Y_0=$ 张成$\{x\otimes\delta_r\colon\ r\in G,\ x\in X\}=C_c(G,X)$. 的情形下。

注记 2.2。给定希尔伯特空间 Y、稠密子空间 $Y_0\subseteq Y$ 和半双线性函数 $\sigma\colon\ Y_0\times Y_0\to\mathrm{C}$；存在一个算子 $T\in\mathrm{B}(Y)$，使得 $\sigma(x,y)=\langle Tx,y\rangle$ 对于 $x,y\in Y_0$ 成立，当且仅当存在常数 $C>0$ 使得 $|\sigma(x,y)|\le C\|x\|\|y\|$ 对所有 $x,y\in Y_0$ 都成立。

回顾 [2]，右 M_e-希尔伯特模 $\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ 由满足 $\{\sum_{t\in F}f(t)^*f(t)\}_{F\in\mathrm{F}}$ 有界的截面 $f\colon\ G\to\mathrm{M}$ 构成。$f,g\in\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ 的内积是 $\{\sum_{t\in F}f(t)^*g(t)\}_{F\in\mathrm{F}}$ 的 w*-极限 $f,g\equiv\sum_{t\in G}f(t)^*g(t)$，而 $m\in M_e$ 在 f 上的作用给出元素 $fm\in\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$，满足 $fm(t)=f(t)m$。

模 $\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ 可通过 $\pi^2\colon\ \ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})\to\mathrm{B}(X,X\otimes\ell^2(G))$ 忠实地表示为一个 $\mathtt{wot}$-闭的算子三元环（见 [21]），其中 $(\pi^2(f)x)(t):=\pi(f(t))x$。因此，$\mathrm{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$ 是一个 W*-代数，且有界网 $\{T_i\}_{i\in I}\subset\mathrm{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$ 关于 w*收敛到 $T\in\mathrm{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$，当且仅当对于所有 $f,g\in\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$，$\mathrm{w}^*\lim_i T_if,g=Tf,g$；这等价于说， $\mathtt{wot}\lim_i\pi(T_if,g)=\pi(Tf,g)$。

注意， $\ell^2(\mathrm{M})$ 是有限支撑截面 $C_c(\mathrm{M})$ 在 $\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ 中的闭包，它是 $\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ 的一个 w*-稠密子模。回忆一下，典范 *-同态 $\Phi\colon\mathrm{k}(\mathrm{M})\to\mathrm{B}(\ell^2(\mathrm{M}))$ [1]由 $\Phi(k)f(r)=\sum_{s\in G}k(r,s)f(r)$ (k和 f具有有限支撑) 给出。表示 π^2诱导出 $\Phi^{\pi}\colon\mathrm{k}(\mathrm{M})\to\mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$, $\Phi^{\pi}(k)\xi(r)=\sum_{s\in G}\pi(k(r,s))\xi(r)$，其意义是 $\Phi^{\pi}(k)\pi^2(f)=\pi^2(\Phi(k)f)$。事实上，$\Phi^{\pi}|_{\Bbbk_c}(\mathrm{M})$ 是忠实的，并且对所有 $F\in\mathrm{F}$， $\Phi^{\pi}(\mathrm{k}_F(\mathrm{M}))=\mathrm{k}^{\pi}_F(\mathrm{M})$。因此，$\Phi(\mathrm{k}(\mathrm{M}))=\mathrm{k}^{\pi}(\mathrm{M})$，且 Φ 是等距映射，因为每个限制 $\Phi^{\pi}|_{\Bbbk_F}(\mathrm{M})$ 都是等距映射。由于 $\pi^2(\ell^2(\mathrm{M}))$ 在 $\pi^2(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$ 中 $\mathtt{wot}$-稠密， $\Phi^{\pi}(\mathrm{k}(\mathrm{M}))\pi^2(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))\subset\pi^2(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$，由此可知 Φ 可延拓为一个 *-同态 $\mathrm{k}(\mathrm{M})\to\mathrm{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$，我们仍将其记作 Φ，并称之为从 $\mathrm{k}(\mathrm{M})$ 到 $\mathrm{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$ 的典范 $*$-同态。

引理 2.3。存在一个正规 $*$-同态 $\Psi\colon\Bbbk^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(M)\to\mathbb{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(M))$ 使得 $\Psi\circ\ \Phi^{\pi}=\Phi$。换言之，若我们将 $\Bbbk(M)=\Bbbk^{\pi}(M)$视为同一对象，则 Ψ 是 Φ 的 w*-连续延拓。

证明。由于 $\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})\pi^2(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))\subset\pi^2(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M}))$；只需定义 Ψ by $\Psi(T)f:=(\pi^2)^{-1}(T\pi^2(f))$ ($T\in\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ and $f\in\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$)。形式上，对于每个 $T\in\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$，这只定义了一个函数$\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})\to\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$。它是一个可伴随算子，因为对于所有 $f,g\in\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$，我们可以利用如下事实： $\pi(f,g)=\pi^2(f)^*\pi^2(g)$，从而得到 $\pi(\Psi(T)f,g)=\pi^2(\Psi(T)f)^*\pi^2(g)=(T\pi^2(f))^*\pi^2(g)=$

$\pi^2(f)^*T^*\pi^2(g) = \pi(\langle f, \Psi(T)^* g\rangle)$，由此可知 $\Psi(T)$ 是可伴随的，其伴随为 $\Psi(T^*)$。证明的其余部分留给读者。□

定理 2.4. 存在一个 *W**代数之间的同构 $\kappa^\pi\colon \Bbbk_{\mathrm{w}^*}(M) \to \Bbbk^\pi_{\mathrm{w}^*}(M)$，它将群 G 在 $\Bbbk_{\mathrm{w}^*}(M)$ *[2,* 第 *5* 节中的典范作用 β^{w^*} 转化为 $\mathrm{Ad}(1\otimes\rho)$。

证明。根据构造，$\mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})$ 是 $\kappa\colon \mathsf{k}(\mathsf{M}) \to \ell^\infty(G, \mathsf{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M}))$,$\kappa(f)(r) = \Psi(\beta_t^{-1}(f))$ 的像的 w^*–闭包。κ 的唯一 w^*-连续延拓是 $\kappa^\pi\colon \mathsf{k}^\pi_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M}) \to \ell^\infty(G, \mathsf{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M}))$,$\kappa^\pi(T)(t) = \Psi((1\otimes\rho_{t^{-1}})T(1\otimes\rho_t))$。显然，$\kappa^\pi(\mathsf{k}^\pi_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})) = \mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})$，并且由于 β^{w^*} 由 $\ell^\infty(G, \mathsf{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})))$ 上的平移实现，κ^π 是 $\mathrm{Ad}(1\otimes\rho)$ 等变的。

剩下要证明的只有 κ^π 是忠实的；假设 $\kappa^\pi(T) = 0.$。由引理 2.3 的证明可知，对于所有 r、s、$t \in G$；$a \in M_r$；$b \in M_s$ 和 x，$y \in X$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \pi(\langle \Psi((1\otimes\rho_{t^{-1}})T(1\otimes\rho_t)))a\delta_r, b\delta_s\rangle)x, y\rangle = \langle x\otimes_\pi b\delta_s, (1\otimes\rho_{t^{-1}})T(1\otimes\rho_t)(y\otimes_\pi a\delta_r)\rangle \\ &= \langle \pi(b)x\otimes\delta_s, (1\otimes\rho_{t^{-1}})T(1\otimes\rho_t)(\pi(a)y\otimes\delta_r)\rangle = \langle \pi(b)x\otimes\delta_{st^{-1}}, T(\delta_{rt^{-1}}\otimes\pi(a)y)\rangle \\ &= \langle \pi(b)x, T_{st^{-1},rt^{-1}}\pi(a)y\rangle = \langle x, \pi(b^*k_T(st^{-1}, rt^{-1})a)y\rangle. \end{aligned}$$

若取 $r = e$ 和 a 为 M_e 的单位元，则可得，对于所有 s、$t \in G$ 和 $b \in M_{s\cdot}$，$b^*k(st^{-1}, t^{-1}) = 0$。因此，对于所有 r、$s \in G$ 和 $b \in M_{rs^{-1}\cdot}$，$b^*k_T(r,s) = 0$。特别地，我们可以取 $b = k_T(r,s)$，由此可得 $k_T = 0.$。因此，$(T_{r,s})_{r,s\in G} = (\pi(k_T(r,s)))_{r,s\in G}$ 的所有项均为零，这意味着

$T = 0.$ □

2.2. 约化截面 W*代数。 根据 [2, 定理 5.7]，，W* 交叉积$W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$ 同构于

$$W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathcal{M}) = \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\pi(m)\otimes\lambda_t\colon t\in G,\ m\in M_t\} \subseteq \mathbb{B}(X\otimes\ell^2(G)) \tag{2.5}$$

且 $\pi\lambda\colon \mathcal{M} \to \mathsf{B}(X\otimes\ell^2(G))$，定义为 $\pi\lambda(m) := \pi(m)\otimes\lambda_t$，对于 $m \in M_t$，这是一个 *-表示（在每个纤维上等距且 w^* 连续）。注意，$W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathcal{M}) \subseteq \mathsf{k}^\pi_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$，因为对于 $m \in M_t$，$\pi\lambda(m)$ 是与核 $k_m\colon G\times G \to \mathcal{M}$，$(r,\ s)$ 对应的算子 $\mapsto m\delta_t(rs^{-1})$。

用矩阵形式表示，对于所有 $t \in G$ 和 $T \in \mathsf{B}(X\otimes\ell^2(G))$，$\mathrm{Ad}(1\otimes\rho_t)((T_{r,s})_{r,s\in G}) = (T_{rt,st})_{r,s\in G}$。由于 $k_m(rt, st) = k_m(r,s)$ $W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathsf{M})$ 包含于由 $\mathrm{Ad}(1\otimes\rho)|_{\Bbbk^\pi}$ $\mathrm{w}^*(\mathsf{M})$ 的不动点构成的 W*-代数中，$\mathsf{k}^\pi_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})^G$.。为证明反向包含关系，取 $T \in \mathsf{k}^\pi_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})^G$和 $\xi_1, \ldots, \xi_n \in C_c(G, X)$。令 k_T为与 $T(\forall r, s \in G\ T_{r,s} = \pi(k(r,s))$ 对应的 M 的核，则 $k(rt, st) = k(r,s) = k(rs^{-1}, e))$。设 $F := \cup_{i=1}^n \mathrm{supp}(\xi_i)$，且 $S := \sum_{t\in FF^{-1}} \pi(k(t,e))\otimes\lambda_t \in W^*\mathsf{r}_\pi(\mathsf{M})$。

集合 $F_{i,j} := \{(r,t)\colon [\pi\lambda(k(t,e))\xi_i](r)\ \xi_j(r) \neq 0\}$ 是有限的，因为若 $(r,t) \in F_{i,j}$，则 $0 \neq [\pi\lambda(k(t,e))\xi_i](r)$ $\xi_j(r) = \pi(k(t,e))\xi_i(t^{-1}r)$ $\xi_j(r)$，由此可得 $r, t^{-1}r \in F$；这推出 $(r,t) \in F\times(FF^{-1})$。对于所有 $i, j = 1, \ldots, n$，以下各和都是有限的，并且可通过在 $G\times G$ 中换元或利用 $F_{i,j} \subseteq G\times(FF^{-1})$ 相互转化：

$$\begin{aligned} \langle T\xi_i, \xi_j\rangle &= \sum_{r,s\in G}\langle \pi(k_T(r,s))\xi_i(s), \xi_j(r)\rangle = \sum_{r,s\in G}\langle \pi(k_T(rs^{-1}, e))\xi_i(s), \xi_j(r)\rangle \\ &= \sum_{r,s\in G}\langle \pi(k_T(rs^{-1}, e))(\lambda_{rs^{-1}}\xi_i)(r), \xi_j(r)\rangle = \sum_{r,s\in G}\langle [\pi\lambda(k_T(rs^{-1}, e))\xi_i](r), \xi_j(r)\rangle \\ &= \sum_{r,t\in G}\langle [\pi\lambda(k_T(t,e))\xi_i](r), \xi_j(r)\rangle = \sum_{t\in FF^{-1}}\langle \pi\lambda(k_T(t,e))\xi_i, \xi_j\rangle = \langle S\xi_i, \xi_j\rangle. \end{aligned}$$

回想一下，$W^*{}_{\mathrm{r}\pi}(\mathcal{M})$ 是 wot-闭的，由此可得 $T \in W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathcal{M})$。

将定理 2.4 纳入前面的讨论，可得

定理 2.6. 代数 $W^*_{\mathrm{r}\pi}(M)$ 由满足以下条件的 $T \in \Bbbk^\pi_{\mathrm{w}^*}(M)$ 中的元素构成：对所有 $r \in G$,$s \mapsto T_{rs,s}$ 都是常数。换言之，$W^*_{\mathrm{r}}(M)$ 是 β^{w^*} 的不动点集合$\Bbbk_{\mathrm{w}^*}(M)^G$。

注 2.7. 若 $\mathsf{N} = \{N_t\}_{t\in G}$ 是 M 的 W*-Fell 子丛，则称 N 为 M 的 W*-Fell 子丛；若每个纤维 N_t 都是相应纤维 M_t 的 w^*-闭子空间，且 N 对 M 的 $*$-代数运算封闭。将 $\mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{N})$ 和 $\mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})$ 的元素视为矩阵，可知 $\mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{N})$ 是 $\mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})$ 的冯·诺伊曼子代数，且这一包含关系给出 $W^*\mathsf{r}(\mathsf{N}) \subset W^*_{\mathrm{r}}(\mathsf{M})$。此外，若 $\mathsf{N}\,\mathsf{M}\mathsf{N} \subset \mathsf{N}$，此时称 N 在 M 中是遗传的，则 $\mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{N})$ 和 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathsf{N})$ 分别是 $\mathsf{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathsf{M})$ 和 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathsf{M})$ 中的遗传子代数。

推论 2.8。 如果 M 是半直积丛 a W^*-动力系统 (M, G, γ)，那么 $\Bbbk_{\mathrm{w}^*}(M)$与冯·诺伊曼张量积 W^*-同构于 $\mathbb{B}(\ell^2(G))\bar{\otimes}M$。此外，可以建立这样的同构，使得 $W^*_{\mathrm{r}}(M)$ 映射到冯 · 诺伊曼张量积 $M\bar{\rtimes}_\gamma G$。

证明。设 γ 由酉表示 $U\colon G\to \mathrm{B}(X)$ 实现，其中 M 是包含单位元的 $\mathrm{B}(X)$ 的一个 w*-子代数。于是 $\pi\colon \mathrm{M}\to \mathrm{B}(X)$ $m\delta_t\mapsto mU_t$ 是一个逐纤维正规且等距的表示，我们可以利用它得到 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})\cong \mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})\subset \mathrm{B}(X\otimes \ell^2(G))$。根据定义，$T\in \mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ 当且仅当存在一个函数 $k_T\colon G\times G\to M$，使得 $T_{r,s}=k_T(r,s)U_{rs^{-1}}$；这可以写成 $T_{r,s}=U_r\gamma_{r^{-1}}(k_T(r,s))U_{s^{-1}}$。因此，对于满足 $V(x\otimes\delta_r)=U_rx\otimes\delta_r$ 的算子酉算子 $V\in \mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$，我们有 $V(\mathrm{B}(X)\bar{\otimes}M)V^*=\mathrm{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})\cong \mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$。此外，如果像 [4], 中所做的那样考虑 $M\bar{\rtimes}_{\gamma}G\subset \mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$，那么 $V(M\bar{\rtimes}_{\gamma}G)V^*=W^*_{\mathrm{r}}(\mathrm{M})$，因为 $V^*(mU_t\otimes\lambda_t)V=\Pi(m)(1\otimes\lambda_t)$，其中 $\Pi(m)\xi(r)=\gamma_{r^{-1}}(m)\xi(r)$。□

2.3. 核的 W*-代数作为约化截面 W*代数。我们旨在赋予$\ell^\infty(G,\mathrm{M}):=\{\ell^\infty(G,M_t)\}_{t\in G}$ W*-Fell 丛的结构。自然地，$f\in\ell^\infty(G,M_r)$ 的范数定义为 $\|f\|:=\sup\{\|f(t)\|\colon t\in G\}$。注意，如果 M_{t*}是 M_t的预对偶，那么 $\ell^\infty(G,M_t)$ 就是 $\ell^1(G,M_{t*})$ 的对偶空间。$f\in\ell^\infty(G,M_r)$ 和 $g\in\ell^\infty(G,M_s)$ 的乘积与对合定义为 $(fg)(t):=f(t)g(r^{-1}t)$ 和 $f^*(t):=f(rt)^*$。

例 2.9. 若$\mathcal{M}$ 是一个 W*-动力系统 (M,G,γ) 的半直积丛，那么$\ell^\infty(G,\mathcal{M})$ 就是系统 $(\ell^\infty(G,M)\ G,\tilde{\gamma})$ 的半直积丛，其中 $\tilde{\gamma}_t(f)(r)=\gamma_t(f(t^{-1}r))$。

注 2.10. 此时我们尚不清楚 $\ell^\infty(G,\mathrm{M})$ 是否为 W*-Fell 丛。可以直接验证这一点，或者按照定理 2.11 的证明，利用 π 构造函数 $\pi^\infty\colon \ell^\infty(G,\mathrm{M})\to \mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$。该函数恰好是逐纤维线性的、等距的，并且在有界集上 $\mathrm{w}^*-\mathtt{wot}$ 连续。此外，它还是乘法性的且为对合的。利用 π^∞ 可以证明 $\ell^\infty(G,\mathrm{M})$ 是一个 W*-Fell 丛。例如，取 $f,g,h\in\ell^\infty(G,\mathrm{M})$。由于 $(fg)h$ 和 $f(gh)$ 位于同一纤维中，且 $\pi^\infty((fg)h)=\pi^\infty(f)\pi^\infty(g)\pi^\infty(h)=\pi^\infty(f(gh))$，因此有 $(fg)h=f(gh)$。

我们通过将 $m\in M_r$ 识别为常值函数 $(t\mapsto m)\in\ell^\infty(G,M_r)$，将$\mathcal{M}$ 视为 $\ell^\infty(G,\mathcal{M})$ 的 W*-Fell 子丛。根据注 2.7，$W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$ 是 $W^*_{\mathrm{r}}(\ell^\infty(G,\mathcal{M}))$ 的 W*-子代数。另一方面，$W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$ 也是 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 的 W*-子代数（定理 2.6）。

定理 2.11 (参见 [4, 引理 3.10])。存在一个同构 Ω: $W^*_{\mathrm{r}}(\ell^\infty(G,\mathrm{M}))\to\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(M)$，其在 $W^*_{\mathrm{r}}(M)$ 上的限制是恒等映射。

证明。利用 $\pi\lambda\colon \mathrm{M}\to\mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$、$\pi\lambda(m\in M_t)=\pi(m)\otimes\lambda_t$ 和定理 2.4，我们得到 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})=\mathrm{k}^{\pi\lambda}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})\subseteq\mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(G))$。我们的下一个目标是将 $W^*_{\mathrm{r}}(\ell^\infty(G,\mathrm{M}))$ 识别为 $\mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(G))$ 的一个冯·诺伊曼子代数。为此，我们构造一个 *-表示 $\pi^\infty\colon \ell^\infty(G,\mathrm{M})\to\mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$。对于 $f\in\ell^\infty(G,M_r)$，我们定义 $\pi^\infty(f)$，使得对所有 $s\in G$，以及 $\xi\in\ell^2(G,X)=X\otimes\ell^2(G)$，有 $(\pi^\infty(f)\xi)(s)=\pi(f(s))\xi(r^{-1}s)$。于是 $\pi^\infty(f)(x\otimes\delta_s)=\pi(f(rs))x\otimes\delta_{rs}$，并且对于 $g\in\ell^\infty(G,M_t)$，

$$\pi^\infty(f)\pi^\infty(g)(x\otimes\delta_s)=\pi(f(rts))\pi(g(ts))x\otimes\delta_{rts}=\pi(fg(rts))x\otimes\delta_{rts}=\pi^\infty(fg)(x\otimes\delta_t).$$

那么 $\pi^\infty(f)\pi^\infty(g)=\pi^\infty(fg)$。此外，$\pi^\infty(f^*)=\pi^\infty(f)^*$因为对所有 $\eta\in\ell^2(G,\ X)$，我们都有

$$\begin{aligned}\langle\pi^\infty(f)(x\otimes\delta_s),y\otimes\delta_t\rangle&=\langle\pi(f(rs))x,y\rangle\langle\delta_{rs},\delta_t\rangle=\langle x\otimes\delta_s,\pi(f(t)^*)y\otimes\delta_{r^{-1}t}\rangle\\&=\langle x\otimes\delta_s,\pi(f^*(r^{-1}t))y\otimes\delta_{r^{-1}t}\rangle=\langle x\otimes\delta_s,\pi^\infty(f^*)(y\otimes\delta_t)\rangle.\end{aligned}$$

恒等式 $\langle\pi^\infty(f)\xi,\eta\rangle=\sum_{s\in G}\langle\pi(f(s))\xi(r^{-1}s)\ \eta(s)\rangle$ 可用于证明 π^∞ 在每个纤维上都是等距的，并且限制在有界集上时是 $\mathrm{w}^*-\mathtt{wot}$ 连续的。于是，π^∞ 是 w^* 连续的，我们可以将 $W^*_{\mathrm{r}}(\ell^\infty(G,M))$ 视为

$$W^*_{\mathrm{r}\pi^\infty}(\ell^\infty(G,M))=\overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\pi^\infty(f)\otimes\lambda_t\colon t\in G,\ f\in\ell^\infty(G,M_t)\}\subseteq\mathbb{B}(X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(G)).$$

令 $U\colon X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(G)\to X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(G)$ 为满足 $U(x\otimes\delta_q\otimes\delta_s)=x\otimes\delta_{qs^{-1}q}\otimes\delta_q$ 的有界算子。则 U 是酉算子，且 $U^*(x\otimes\delta_q\otimes\delta_s)=x\otimes\delta_s\otimes\delta_{sq^{-1}s}$.。我们断言：

$$UW^*_{\mathrm{r}\pi^\infty}(\ell^\infty(G,M))U^*=\mathbb{k}^{\pi\lambda}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M}).\tag{2.12}$$

为证明包含关系 $\subseteq$，取 $T \in W^*_{\mathrm{r}\pi^\infty}(\ell^\infty(G,\ M))$，并令 f_T 为 $\ell^\infty(G,\ \mathcal{M})$ 的截面，使得 $T_{r,\ s} = \pi^\infty(f_T(rs^{-1}))$。对于所有 $r,\ s,\ p,\ q \in G$ 以及 $x,\ y \in X$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle (UTU^*)_{r,s}(y\otimes\delta_q), x\otimes\delta_p\rangle &= \langle UTU^*(y\otimes\delta_q\otimes\delta_s), x\otimes\delta_p\otimes\delta_r\rangle \\
&= \langle T(y\otimes\delta_s\otimes\delta_{sq^{-1}s}), x\otimes\delta_r\otimes\delta_{rp^{-1}r}\rangle \\
&= \langle T_{rp^{-1}r,sq^{-1}s}(y\otimes\delta_s), x\otimes\delta_r\rangle \\
&= \langle \pi^\infty(f_T(rp^{-1}rs^{-1}qs^{-1}))(y\otimes\delta_s), x\otimes\delta_r\rangle \\
&= \langle \pi(f_T(rp^{-1}rs^{-1}qs^{-1})(rp^{-1}rs^{-1}q))y\otimes\delta_{rp^{-1}rs^{-1}q}, x\otimes\delta_r\rangle \\
&= \langle \pi(f_T(rp^{-1}rs^{-1}qs^{-1})(rp^{-1}rs^{-1}q))y, x\rangle\langle\delta_{rp^{-1}rs^{-1}q}, \delta_r\rangle \\
&= \langle \pi(f_T(rs^{-1})(r))y, x\rangle\langle\delta_{p^{-1}rs^{-1}q}, \delta_e\rangle \\
&= \langle \pi(f_T(rs^{-1})(r))y, x\rangle\langle\lambda_{rs^{-1}}\delta_q, \delta_p\rangle \\
&= \langle [\pi(f_T(rs^{-1})(r))\otimes\lambda_{rs^{-1}}](y\otimes\delta_q), x\otimes\delta_p\rangle \\
&= \langle \pi\lambda(f_T(rs^{-1})(r))(\delta_q\otimes y), \delta_p\otimes x\rangle.
\end{aligned}$$

于是 $(UTU^*)_{r,\ s} = \pi\lambda(f_T(rs^{-1})(r))$，由此可得 $UTU^* \in \mathrm{k}^{\pi\lambda}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$。

给定 $k \in \mathrm{k}_c(\mathrm{M})$，定义截面 $f\colon G \to \ell^\infty(G, \mathrm{M})$，使得 $f(z)(w) = k(w, z^{-1}w)$。于是f具有有限支撑，并且对于 $T := \sum_{t\in G}\pi^\infty(f(t))\otimes\lambda_t$，有 $f = f_T$。此外，$(UTU^*)_{r,s} = \pi\lambda(f(rs^{-1})(r)) = \pi\lambda(k(r,s))$，由此可得 $\mathrm{k}^{\pi\lambda}(\mathrm{M}) \subseteq UW^*\mathrm{r}_{\pi^\infty}(\ell^\infty(G,M))U^*$。回想 $\mathrm{k}^{\pi\lambda}(\mathrm{M})$ 在 $\mathrm{k}^{\pi\lambda}_{\mathrm{w}^*}(\mathrm{M})$ 中 w*-稠密，我们得到 (2.12)。

假设 $T \in W^*\mathrm{r}(\mathrm{M}) \subseteq W^*\mathrm{r}_{\pi^\infty}(\ell^\infty(G,M))$，也就是说，对于所有 $t \in G$, $f_T(t) \in \ell^\infty(G, M_t)$ 都是常数。于是 $(UTU^*)_{rt,st} = \pi\lambda(f_T(rt(st)^{-1})(rt)) = \pi\lambda(f_T(rs^{-1})(r)) = (UTU^*)_{r,s}$。特别地，对于 $t \in G$ 和 $m \in M_t$, $U(\pi^\infty(m)\otimes\lambda_t) = \pi\lambda(m)\otimes\lambda_t$，由此可知，在忠实正规表示下，我们可以将 Ω 定义为由 U. □

进行共轭

2.4. **W*-部分截面 Fell 丛**。众所周知，给定一个群 G 和一个正规子群 $H \trianglelefteq G$, G 是可 amenable 的，当且仅当 H 和 G/H 都是可 amenable 的。我们希望为 W*-Fell 丛得到一个类似的结果。更确切地说，我们希望构造一个定义在 $G := G/H$ 上的 W*-Fell 丛$\mathcal{M}$，使得$\mathcal{M}$ 是 W*-可 amenable 的，当且仅当$\mathcal{M}$ 和约化$\mathcal{M}_H := \{M_t\}_{t\in H}$都是 W*-可 amenable 的（$\mathcal{M}_H$ 是一个 W*-Fell 丛，其结构继承自$\mathcal{M}$）。对于 $t \in G$，我们令$\dot{t} \equiv tH$.

固定一个子群 $H \subseteq G$，并定义自然映射 $\lambda^{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \to W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$，使其满足：若按照 (2.5) 将 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M}) = W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathcal{M})$ 识别，则对 $m \in M_t$ 有 $\lambda^{\mathcal{M}}(m) = \pi(m)\otimes\lambda_t$。

命题 2.13. 存在一个 *-同态 $\mu\colon W^*_{\mathrm{r}}(M_H) \to W^*_{\mathrm{r}}(M)$，使得 $\mu\circ\lambda^{\mathcal{M}_H} = \lambda^{\mathcal{M}}|_{\mathcal{M}_H}$。此外，$\mu(W^*_{\mathrm{r}}(M_H))$ 是一个 *W*-* 子代数，且 μ 是其像上的 W*- 同构。

证明。我们有 $W^*\mathrm{r}(\mathrm{M}) = W^*\mathrm{r}_\pi(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(G,X))$，且 $W^*\mathrm{r}(\mathrm{M}_H) = W^*\mathrm{r}_{\pi|_{\mathcal{M}_H}}(\mathrm{M}_H) \subseteq \mathrm{B}(X\otimes\ell^2(H))$。取陪集的一个完备代表系 $\{z_{\dot{u}}\}_{\dot{u}\in\dot{G}}$，使得 $z_H = e$。对每个 $u \in G$，存在一个酉算子 $V_u\colon X\otimes\ell^2(H) \to X\otimes\ell^2(u) \subseteq X\otimes\ell^2(G)$，使得 $V_u\xi(sr_u) = \xi(s)$。利用分解 $X\otimes\ell^2(G) = \bigoplus_{\dot{u}\in\dot{G}} X\otimes\ell^2(u)$，我们可以定义一个忠实正规映射

$$\kappa\colon \mathbb{B}(X\otimes\ell^2(H)) \to \mathbb{B}(X\otimes\ell^2(G)) \qquad\qquad T \mapsto \bigoplus_{\dot{u}\in\dot{G}} V_u T V_u^*.$$

只需令 $\mu := \kappa|_{W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M}_H)}$，因为对所有 $t \in H$ 和 $m \in M_t$, $\kappa(\pi(M)\otimes\lambda^H_t) = \pi(m)\otimes\lambda^G_t$。 □

从现在起，我们通过上述命题给出的映射 μ来视 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M}_H) \subseteq W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$。按照这一约定，对于每个陪集 $\dot{u} \in G$，定义.....并无问题，

$$\dot{M}_u \equiv W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M}_u) := \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\lambda^{\mathcal{M}}(m)\colon t \in u, m \in M_t\} \subseteq W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M}).$$

命题 2.14。若 H 是 G中的正规子群，则 $\dot{M} := \{M_{\dot{u}}\}_{\dot{u}\in\dot{G}}$ 是一个 *W*-Fell* 丛，其结构（范数、乘积、对合以及 w*-拓扑）继承自 $W^*_{\mathrm{r}}(M)$。

证明。基本上，只需证明对所有 $u,\ v \in G$, $M^*_u \subseteq M_{u^{-1}}$和 $M_uM_v \subseteq M_{uv}$。 □

定义 2.15（参见 [17, VIII 6]）。对于正规子群 $H \trianglelefteq G$，由 $\mathcal{M}$ 导出的、在 G 上的 W*-部分截面丛为 $\mathcal{M}$。

定理 2.16（参见定理 2.6）。设 H 是群 G 的正规子群，并记 $\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(M)^H$ 为 $\beta^{\mathrm{w}^*}|_H$ 的不动点 W*-代数。那么存在一个 W*-同构

$$\mu\colon \mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\dot{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})^H$$

使得 $\mu(W^*_{\mathrm{r}}(M)) = W^*{}_{\mathrm{r}}(M)$。

证明。我们认为 $W^*{}_{\mathrm{r}}(\mathcal{M}) = W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$，这给出了一个典范表示 $\iota\colon \dot{\mathcal{M}} \to \mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$ $\iota(f) = f$. 于是

$$\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\dot{\mathcal{M}}) = \mathbb{k}^{\iota}_{\mathrm{w}^*}(\dot{\mathcal{M}}) \subseteq \mathbb{B}(X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(\dot{G})).$$

对于每个 $u\in\dot{G}$，我们令 $p_u \in \mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$ 为像为 $X\otimes\ell^2(u)$ 的正交投影。定义 $U\colon$ $X\otimes\ell^2(G) \to X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(\dot{G})$，使得 $U\xi = \sum_{u\in\dot{G}} p_u\xi\otimes\delta_u$. 在识别 $X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(\dot{G}) = \ell^2(\dot{G}, X\otimes\ell^2(G))$ $U^*\eta = \sum_{u\in\dot{G}} p_u\eta(u)$ 后。因此，$UU^*\eta = \sum_{v\in\dot{G}} p_v(\sum_{u\in\dot{G}} p_u\eta(u))\otimes\delta_v = \sum_{v\in\dot{G}} p_v\eta(v)\otimes\delta_v$.

只需证明

$$\mu\colon \mathbb{k}^{\iota}_{\mathrm{w}^*}(\dot{\mathcal{M}}) \to \mathbb{B}(X\otimes\ell^2(G)), \qquad \mu(T) = U^*TU$$

是一个忠实 *-同态，其像为 $\mathbb{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})^H$。

显然，μ 是线性的，并且保持伴随运算。要证明 μ 是乘法性的，只需证明对所有 $T\in\mathbb{k}^{\iota}_{\mathrm{w}^*}(\dot{\mathcal{M}})$，都有 $UU^*TU = TU$。对所有 $\xi\in X\otimes\ell^2(G)$和 $\eta\in X\otimes\ell^2(G)\otimes\ell^2(\dot{G})$

$$\langle UU^*TU\xi,\eta\rangle = \langle TU\xi, UU^*\eta\rangle = \sum_{u,v\in\dot{G}} \langle T(p_v\xi\otimes\delta_v), p_u\eta(u)\otimes\delta_u\rangle = \sum_{u,v\in\dot{G}} \langle p_uT_{u,v}p_v\xi, \eta(u)\rangle$$

我们断言 $p_uT_{u,v}p_v\xi,\eta(u) = T_{u,v}p_v\xi,\eta(u)$。事实上，根据构造，$T_{u,v}\in\iota(M_{uv^{-1}}) \subseteq W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathrm{M})$，于是存在 M 的一个截面 $a^T_{u,v}$，使得 $T_{u,v} = (\pi(a^T_{u,v}(rs^{-1})))_{r,s\in G}$，并且 $a^T_{u,v}(t) = 0$，若 $t\notin uv^{-1}$.。我们有 $p_uT_{u,v}p_v\xi,\eta(u) = \sum_{r\in u,s\in v}\pi(a^T_{u,v}(rs^{-1}))\xi(s)\ \eta(r)$。若 $s\in v$ 且 $r\notin u$，则 $a^T_{u,v}(rs^{-1}) = 0$，因为否则 $rs^{-1}\in uv^{-1}$，这将推出 $r\in u$.。因此，

$$\langle p_uT_{u,v}p_v\xi,\eta\rangle = \sum_{r\in G, s\in v} \langle \pi(a^T_{u,v}(rs^{-1}))\xi(s),\eta(r)\rangle = \langle T_{u,v}p_v\xi,\eta(r)\rangle$$

并且我们得到 $\langle UU^*TU\xi,\ \eta\rangle = \sum_{u\in\dot{G}}\sum_{v\in\dot{G}}\langle T_{u,\ v}p_v\xi,\ \eta(u)\rangle = \langle T(\sum_{v\in\dot{G}} p_v\xi\otimes\delta_v)\ \eta\rangle = \langle TU\xi,\ \eta\rangle$。因此，对于所有 $S,\ T\in\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ $\mu(S)\mu(T) = U^*SUU^*TU = USTU^* = \mu(ST)$。

At t此时我们知道 μ 是一个 w*-连续的 *-同态。为证明 $\mu(T)\in\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})^H$ an d that μ i 是忠实的，我们计算 $\mu(T)_{r,\ s}$. 对于 $\xi,\ \eta\in X$ 以及 $r,\ s\in G$

$$\langle\mu(T)_{r,s}\xi,\eta\rangle = \langle\mu(T)(\xi\otimes\delta_s),\eta\otimes\delta_r\rangle = \langle T(\xi\otimes\delta_s\otimes\delta_{sH}),\eta\otimes\delta_r\otimes\delta_{rH}\rangle = \langle T_{rH,sH}(\xi\otimes\delta_s),\eta\otimes\delta_r\rangle$$

假设 $\mu(T) = 0$ 并固定 $u,\ v\in G$。对于所有 $r,\ s\in G$ 和 $x,\ y\in X$，我们有

$$\langle T_{u,v}(y\otimes\delta_s), x\otimes\delta_r\rangle = \langle\pi(a^T_{u,v}(rs^{-1}))y, x\rangle.$$

若 $rs^{-1}\notin uv^{-1}$，则 $a^T_{u,v}(rs^{-1}) = 0$ 且 $T_{u,v}(y\otimes\delta_s)\ x\otimes\delta_r = 0$。若 $rs^{-1}\in uv^{-1}$，则 $rs^{-1} = pq^{-1}$，其中某个 $p\in u$ 和 $q\in v$. 满足此条件。在这种情况下，$T_{u,v}(y\otimes\delta_s)\ x\otimes\delta_r = \pi(a^T_{u,v}(pq^{-1}))y, x = T_{u,v}(y\otimes\delta_q)\ x\otimes\delta_p = \mu(T)_{p,q}$ $(y\otimes\delta_q)\ x\otimes\delta_p = 0$.。于是，对于所有 $u,v\in G;\ r,s\in G$ 和 $x,y\in X$，$T_{u,v}(y\otimes\delta_s)\ x\otimes\delta_r = 0$，因此 $T = 0$。

对于所有 $r,\ s\in G$ 和 $t\in H$，我们有

$$\begin{aligned}\langle\mu(T)_{rt,st}\xi,\eta\rangle &= \langle T_{rtH,stH}(\xi\otimes\delta_{st}),\eta\otimes\delta_{rt}\rangle = \langle T_{rH,sH}(\xi\otimes\delta_{st}),\eta\otimes\delta_{rt}\rangle = \langle\pi(a^T_{rH,sH}(rt(st)^{-1}))\xi,\eta\rangle\\ &= \langle\pi(a^T_{rH,sH}(rs^{-1}))\xi,\eta\rangle = \langle\mu(T_{r,s}\xi,\eta\rangle.\end{aligned}$$

因此，$\mu(T)_{rt,\ st} = \mu(T)_{r,\ s}$，由此可得 $\mu(T)\in\mathbb{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})^H$。

最后一步是证明 μ 是满射。为此，我们取一个核为 k 的 $T\in\mathbb{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})^H$：$G\times G\to\mathcal{M}$，并构造 $S\in\mathbb{k}^{\iota}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$，使得 $\mu(S) = T$.。取一个完备代表系 $\{p_u\}_{u\in\dot{G}}$.。我们声称，对于每个 $(u,\ v)\in G\times G$，都存在一个函数

$$k_{u,v}\colon G\times G\to\mathcal{M} \qquad k_{u,v}(r,s) = \begin{cases} k(p_uh,p_vk) \text{ if } (r,s) = (p_uht,p_vkt) \text{ for some } h,k\in H,\ t\in G\\ 0\in M_{rs^{-1}} \text{ otherwise}\end{cases}.$$

为了证明 k 有定义，我们假设 $(p_uh_1t_1,p_vk_1t_1) = (p_uh_2t_2,p_vk_2t_2)$，其中 $h_1,h_2,k_1,k_2\in H$ 且 $t_1,t_2\in G$.。那么 $h_1{}^{-1}h_2 = k_1{}^{-1}k_2 = t_1t_2^{-1}\in H$，并且根据 T 是一个 $\beta^{\mathrm{w}^*}|_H$-不动点这一事实可得

$$k_{u,v}(p_uh_1,p_vk_1) = k_{u,v}(p_uh_1t_1t_2{}^{-1},p_vk_1t_1t_2{}^{-1}) = k(p_uh_2,p_vk_2)\in M_{(p_uh_2t_2)(p_vk_2t_2)^{-1}} = M_{rs^{-1}},$$

因此 k 有定义，且它是一个核。

为证明存在一个核为 $k_{u,v}$ 的算子 $S_{u,v} \in \mathbf{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$，只需证明对所有$\xi, \eta \in C_c$，$(G, X)$,

$$|\sum_{r,s\in G} \langle \pi(k_{u,v}(r,s))\xi(s), \eta(r)\rangle| \leq \|T\|\|\xi\|\|\eta\|.$$

为消去上述和中的零项，我们只考虑满足$h, k \in H$ 的配对 $(r, s) = (p_u ht, p_v kt)$，并且 $t \in G.$。为避免重复，对于 $w \in \dot{G}.$，我们令 $t = p_w$。定义 $\eta_{u,w} \in X \otimes \ell^2(u)$ 为$\eta_{u,v}(z) = \eta(zp_w)$，得到

$$\begin{aligned}\sum_{r,s\in G} \langle \pi(k_{u,v}(r,s))\xi(s), \eta(r)\rangle &= \sum_{w\in\dot{G}} \sum_{h,k\in H} \langle T_{p_u h, p_v k}\xi(p_v k p_w), \eta(p_u h p_w)\rangle \\ &= \sum_{w\in\dot{G}} \langle T\xi_{v,w}, \eta_{u,w}\rangle.\end{aligned}$$

利用 事实，即 $X \otimes \ell^2(G)$ 是正交族 $\{\ell^2(u) \otimes X\colon\ u \in \dot{G}\}$ 的直和，我们得到 in

$$\begin{aligned}|\sum_{r,s\in G} \langle \pi(k_{u,v}(r,s))\xi(s), \eta(r)\rangle| &\leq \|T\|(\sum_{w\in\dot{G}} \|\xi_{v,w}\|^2)^{1/2}(\sum_{w\in\dot{G}} \|\eta_{v,w}\|^2)^{1/2} \\ &\leq \|T\|(\sum_{w\in\dot{G}} \sum_{h\in H} \|\xi(p_u h p_w)\|^2)^{1/2}(\sum_{w\in\dot{G}} \|\eta_{v,w}\|^2)^{1/2} \\ &\leq \|T\|(\sum_{t\in G} \|\xi(p_u t)\|^2)^{1/2}(\sum_{w\in\dot{G}} \|\eta_{v,w}\|^2)^{1/2} \leq \|T\|\|\xi\|\|\eta\|.\end{aligned}$$

为证明 $S_{u,v} \in W^*_{\mathrm{r}\pi}(\mathbf{M})$，我们利用 $W^*\mathbf{r}_\pi(\mathbf{M})$ 的刻画：它是 $\mathbf{k}^{\pi}_{\mathrm{w}^*}(\mathbf{M})$ 在 $G.$ 的典范作用下的不动点。若 $(r, s) = (p_u hl, p_v kl)$ 且 $h, k \in H$，并且 $l \in G$，则对所有 $t \in G$，都有 $(rt, st) = (p_u hlt, p_v klt)$，且 $k_{u,v}(rt, st) = k(p_u h, p_v k) = k_{u,v}(r, s)$。若 $k_{u,v}(r, s) = 0$，则不可能有 $k_{u,v}(rt, st) \neq 0$；因为在这种情况下，前一句中证明的内容将意味着 $0 \neq k_{u,v}(rt, st) = k_{u,v}(rtt^{-1}, stt^{-1}) = k_{u,v}(r, s)$。

现在证明存在一个算子 $S \in \mathbf{k}^{\iota}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$，其核为 $(r, s) \mapsto S_{u,v}$. 根据构造，$\langle S_{u,v}\xi, \eta\rangle = \sum_{w\in\dot{G}} \langle T\xi_{v,w}, \eta_{u,v}\rangle$。 </style>对于所有 , $\eta \in X \otimes \ell^2(G) \otimes \ell^2(\dot{G})$，我们有

$$\begin{aligned}|\sum_{u,v\in\dot{G}} \langle S_{u,v}\xi(v), \eta(u)\rangle| &= |\sum_{u,v,w\in\dot{G}} \langle T(\xi(v))_{v,w}, (\eta(u))_{u,w}\rangle| \\ &= |\sum_{w\in\dot{G}} \langle T \sum_{v\in\dot{G}} (\xi(v))_{v,w}, \sum_{u\in\dot{G}} (\eta(u))_{u,w}\rangle| \\ &\leq \|T\| \left(\sum_{w\in\dot{G}} \|\sum_{v\in\dot{G}} (\xi(v))_{v,w}\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{w\in\dot{G}} \|\sum_{u\in\dot{G}} (\eta(u))_{u,w}\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \|T\| \left(\sum_{w\in\dot{G}} \sum_{v\in\dot{G}} \|(\xi(v))_{v,w}\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{w\in\dot{G}} \sum_{u\in\dot{G}} \|(\eta(u))_{u,w}\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \|T\| \left(\sum_{w\in\dot{G}} \sum_{v\in\dot{G}} \sum_{h\in H} \|\xi(v)(p_v h p_w)\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{w\in\dot{G}} \sum_{u\in\dot{G}} \|(\eta(u))_{u,w}\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \|T\| \left(\sum_{v\in\dot{G}} \|\xi(v)\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{u\in\dot{G}} \|\eta(u)\|^2\right)^{1/2} = \|T\|\|\xi\|\|\eta\|.\end{aligned}$$

这意味着存在算子 $S \in \mathbf{k}^{\iota}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$，其矩阵为 $(S_{u,v})_{u,v\in\dot{G}}$.

Supp 要证明 $T \in W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$，只需证明对于所有 $S \in W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$ $u, v, w \in G, k_{uw,vw} = k_u$ v.

取 $r,\ \ s \in G.$ 若 $k_{u,v}(r, s) \neq 0$，则存在 $h, k \in H$和 $t \in G$，使得 $(r, s) = (p_u ht, p_v kt$).

因此,

$$\begin{aligned}(r,s) &= (p_u p_w {p_w}^{-1} h p_w {p_w}^{-1} t, p_v p_w {p_w}^{-1} k p_w {p_w}^{-1} t)\\ &= (p_{uw} \underbrace{{p_{uw}}^{-1} p_u p_w}_{\in H} \underbrace{{p_w}^{-1} h p_w}_{\in H} {p_w}^{-1} t, p_{vw} \underbrace{{p_{vw}}^{-1} p_v p_w}_{\in H} \underbrace{{p_w}^{-1} k p_w}_{\in H} {p_w}^{-1} t)\end{aligned}$$

以及 $k_{uw,vw}(r,s) = k(p_u h p_w, p_v k p_w) = k(p_u h, p_w k) = k_{u,v}(r,s)$。条件 $k_{u,v}(r,s) = 0$ 意味着$k_{uw,vw}(r,s) = 0$；否则，我们刚刚证明的结果意味着 $0 = k_{u,v}(r,s) = k_{uww^{-1},vww^{-1}}(r,s) = k_{uw,vw}(r,s) \neq 0.$

证明的最后一部分在于证明 $\mu(S) = T$. 根据构造,

$$\begin{aligned}\langle \mu(S)(\xi \otimes \delta_r), \eta \otimes \delta_s \rangle &= \langle (S_{sH,rH})_{s,r}\xi, \eta \rangle = \langle \pi(k_{sH,rH}(r,s))\xi, \eta \rangle = \langle \pi(k(r,s))\xi, \eta \rangle\\ &= \langle T(\xi \otimes \delta_r), \eta \otimes \delta_s \rangle,\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由以下事实推出：$(r,\ s) = (p_{rH} {p_{rH}}^{-1} r,\ p_{sH} {p_{sH}}^{-1} s)$ 且${p_{rH}}^{-1} r,\ {p_{sH}}^{-1} s \in H$。□

2.4.1. 一个例子：半直积丛。取一个 W*动力系统 $(M,\ G,\ \gamma)$、一个正规子群 $H \trianglelefteq G$，并令 $\mathcal{M} = \{M\delta_t\}_{t\in G}$ 为 γ的半直积丛。约化 $\mathcal{M}_H$是 $\gamma|_H$ 的半直积，而冯·诺依曼交叉积 $M \bar{\rtimes}_{\gamma|_H} H$ 是 $\mathcal{M}$ 的

. . H 纤维。尽管 $\mathcal{M}$ 不是某个作用的半直积，但它在$Z(M \bar{\rtimes}_{\gamma|_H} H)$上诱导了一个 δ 对 G 的作用，并且$\dot{\mathcal{M}}$ 具有 W*-可和性，当且仅当 δ 具有 W*-可和性 [2]。

据我们所知，尚未证明 γ 是 W*-可 amenable，当且仅当 δ 和$\gamma|_H$ 是可 amenable（这是定理 3.7 的推论）。最接近的结果是 [5, 命题 2.8], ，它意味着：如果 $\gamma|_H$ 是 W*-可 amenable，且 G是可 amenable，那么 γ 是 W*-可 amenable。

3. 可 amen 性、不动点与条件期望

本节继续研究第 2 节中的丛 M 和表示 π，并加入一个子群 $H \subseteq G$。由 M 诱导的 G 在 $Z := Z(M_e)$上的中心部分作用 $\sigma = (\{Z_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\}_{t\in G})$，定义于 [2]。回顾一下，$Z_t = Z(\text{span}^{\text{w}^*}(M_t M_{t^{-1}}))$，并且对于所有 $t \in G$、$m \in M_t$ 和 $n \in Z_{t^{-1}}$，$\sigma_t(n)m = mn.$。根据定理 5.14], σ 的 W*-包络作用同构于$\beta^{\text{w}^*}|_{Z(\mathbb{k}_{\text{w}^*}(\text{M}))}$ [2,。根据定义，M 是 W*-可 amenable，当且仅当$\beta^{\text{w}^*}|_{Z(\mathbb{k}_{\text{w}^*}(\text{M}))}$ 是 W*-可 amenable（即σ 是 W*-可 amenable）。

定理 3.1。 如果约化 $M_H = \{M_t\}_{t\in H}$ 是 *W*-可 amenable* 的，则存在一个从 $\mathbb{k}_{\text{w}^*}(M)$ 到 $\mathbb{k}_{\text{w}^*}(M)^H$.的条件期望

证明。显然，σ的限制 $\sigma|_H := (\{Z_t\}_{t\in H}, \{\sigma_t\}_{t\in H})$ 是 M_H的中心部分作用。令τ 和 N 分别为 σ的 W*-包络作用和代数，参见 [2]的命题 2.7 和备注˜2.9。我们将 Z 视为 N 的 W*-理想，并将 Z. 的单位元记为 p。* 理想 $\sum_{t\in H} \tau_t(Z)$ 的 w*-闭包 Z 是 N不变的，因此 $\tilde{\tau} := \tau|_H|_{\tilde{Z}}$是 H的全局 W*-作用。此外，$\tilde{\tau}$是 $\sigma|_H$ 的 W*-包络作用，因为，对于所有 $t \in H$ 和 $z \in Z_{t^{-1}}$，都有 $Z \cap \tilde{\tau}_t(Z) = Z \cap \tau_t(Z) = Z_t$˜以及 $\tilde{\tau}_t(z) = \tau_t(z) = \sigma_t(z)$。此外，$\sum_{t\in H} \tilde{\tau}_t(Z) = \sum_{t\in H} \tau_t(Z)$ 的 w*-闭包为 Z。Z 的单位元记为 $\tilde{p}$.

根据 [2, 定义 5.16], $\tilde{\tau}$ 是可 amenable 的，而 [5, 定理 3.3] 给出了一个有限支集˜函数的网 $\{f_i\colon H \to Z\}_{i\in H}$，满足：(a) 对所有 $i \in I$, $\sum_{t\in H} f_i(t)^* f_i(t) \leq \tilde{p}$；以及 (b) 对所有 $s \in G$，$\text{w}^*\text{-}\lim_i \sum_{t\in G} f_i(t)\tilde{\tau}_s(f_i(s^{-1}t)) = \tilde{p}$。此外，[6, 引理 3.2] 表明，我们可以假设所有的 f_i 都取正值。

˙选取一组完备代表系 $\{q_u\}_{u\in\dot{G}}$，对应于 G 的陪集。对于 $t \in G$，我们设 $q_t := q_{tH}$ 并且 $q_t^{-1} \equiv q_{tH}^{-1}$。我们声称存在一个线性且 ccp 的函数（我们将其写成矩阵形式）

$$P_i\colon \mathbb{B}(X \otimes \ell^2(G)) \to \mathbb{B}(X \otimes \ell^2(G)) \tag{3.2}$$

$$(T_{r,s})_{r,s\in G} \mapsto \left({}_iT_{r,s} := \sum_{h\in H} \pi(p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^*) T_{rh,sh} \pi(\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p) \right)_{r,s\in G}. \tag{3.3}$$

为证明这一点，我们对每个 $h \in H$，定义线性算子 $V_h\colon C_c(G,\ X) \to C_c(G,\ X)$，其定义为 $V_h\xi(r) = \pi(\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}r))p)\xi(rh^{-1})$。由于 $\|f_i(q_r^{-1}r)\| \leq \|\sum_{k\in H} f_i(k)^* f_i(k)\|^{1/2} \leq \|p\|$，$V_h$ 是一个线性压缩。

记 1_N 为 N的单位元，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{h\in H}\|V_h\xi\|^2 &= \sum_{h\in H}\sum_{r\in G}\langle\pi(\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}r))p)\xi(rh^{-1}),\pi(\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}r))p)\xi(rh^{-1})\rangle\\ &= \sum_{h\in H}\sum_{r\in G}\langle\pi(\tau_{q_{rh}}(f_i(q_{rh}^{-1}rh))p)\xi(r),\pi(\tau_{q_{rh}}(f_i(q_{rh}^{-1}rh))p)\xi(r)\rangle\\ &= \sum_{r\in G}\sum_{h\in H}\langle\pi(\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))p)\xi(r),\pi(\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))p)\xi(r)\rangle\\ &= \sum_{r\in G}\sum_{h\in H}\langle\pi(p\tau_{q_r}(f_i(h)^*f_i(h))p)\xi(r),\xi(r)\rangle\\ &\le \sum_{r\in G}\langle\pi(p\tau_{q_r}(\tilde{p})p)\xi(r),\xi(r)\rangle \le \sum_{r\in G}\langle\pi(p1_Np)\xi(r),\xi(r)\rangle = \|\xi\|^2.\end{aligned}$$

对于所有 $\xi,\ \eta\in C_c(G,\ X)$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{r,s\in G}\langle {}_iT_{r,s}\xi(s),\eta(r)\rangle &= \sum_{h\in H}\sum_{r,s\in G}\langle\pi(p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^*)T_{rh,sh}\pi(\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p)\xi(s),\eta(r)\rangle\\ &= \sum_{h\in H}\sum_{r,s\in G}\langle\pi(p\tau_{q_{rh^{-1}}}(f_i(q_{rh^{-1}}^{-1}r))^*)T_{r,s}\pi(\tau_{q_{sh^{-1}}}(f_i(q_{sh^{-1}}^{-1}s))p)\xi(sh^{-1}),\eta(rh^{-1})\rangle\\ &= \sum_{h\in H}\sum_{r,s\in G}\langle T_{r,s}\pi(\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}s))p)\xi(sh^{-1}),\pi(\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}r))p)\eta(rh^{-1})\rangle\\ &= \sum_{h\in H}\sum_{r,s\in G}\langle T_{r,s}V_h\xi(s),V_h\eta(r)\rangle = \sum_{h\in H}\langle TV_h\xi,V_h\eta\rangle \le \|T\|\sum_{h\in H}\|V_h\xi\|\|V_h\eta\|\\ &\le \|T\|\left(\sum_{h\in H}\|V_h\xi\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{h\in H}\|V_h\eta\|^2\right)^{1/2} \le \|T\|\|\xi\|\|\eta\|.\end{aligned}$$

在第一个不等式中，我们隐含地指出，$h\mapsto TV_h\xi,V_h\eta$ 关于计数测度是可积的，因为 $|TV_h\xi,V_h\eta|\le\|T\|\|V_h\xi\|\|V_h\eta\|$ 且 $\sum_{h\in H}\|V_h\xi\|^2+\sum_{h\in H}\|V_h\eta\|^2\le\|\xi\|^2+\|\eta\|^2$。上述所有计算都意味着存在满足（3.3）的（3.2）的线性压缩 P_i。此外，$P_i(T)\xi,\eta=\sum_{h\in H}TV_h\xi,V_h\eta\ (\xi,\eta\in C_c(G,X))$，而 P_i 的完全正性则由以下事实得出：对于所有 T_1，.....，$T_n\in\mathrm{B}(X\otimes\ell^2(G))$ 以及 ξ_1，.....，$\xi_n\in C_c(G,X)$

$$\sum_{j,k=1}^n\langle P_i(T_j{}^*T_k)\xi_k,\xi_j\rangle=\sum_{h\in H}\sum_{j,k=1}^n\langle T_j{}^*T_kV_h\xi_k,V_h\xi_j\rangle=\sum_{h\in H}\langle\sum_{k=1}^nT_kV_h\xi_k,\sum_{j=1}^nT_jV_h\xi_j\rangle\ge0.$$

Take $T\in\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}^{\pi}(\mathcal{M})$，并将 k_T记为 T 的核，即 $T_{r,s}=\pi(k_T(r,s))$. 对所有 $r,s\in G$，我们有

$$P_i(T)_{r,s}=\pi\left(\sum_{h\in H}p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^*k_T(r,s)\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p\right).$$

由于 $\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p\in M_e$ 且 $k_T(r,s)\in M_{rs^{-1}}$，我们有

$$\sum_{h\in H}p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^*k_T(r,s)\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p\in M_{rs^{-1}}$$

并且可得 $P_i(T)_{r,s}\in\pi(M_{rs^{-1}})$。因此，$P_i(T)\in\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}^{\pi}(\mathcal{M})$，而且我们还有 $P_i(T)\in\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}^{\pi}(\mathcal{M})^H$，因为对所有 $r,s\in G$ 和 $k\in H,$，结合 H 的计数测度的左不变性与 $q_{rk}\equiv q_{rkH}=q_{rK}\equiv q_r$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}P_i(T)_{rk,sk} &= \sum_{h\in H}\pi(p\tau_{q_{rk}}(f_i(q_{rk}^{-1}rkh))^*)T_{rkh,skh}\pi(\tau_{q_{sk}}(f_i(q_{sk}^{-1}skh))p)\\ &= \sum_{h\in H}\pi(p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^*)T_{rh,sh}\pi(\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p)=P_i(T)_{r,s}.\end{aligned}$$

我们声称，若 $T\in\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}^{\pi}$ 由于该网有界，那么需证明对所有 $r,s\in G$ 和 $x,y\in X$，$\lim_i\langle P_i(T)_{r,s}x,y\rangle=\langle T_{r,s}x,y\rangle$。

在构造中，Z_t 是由 $M_tM_t{}^*$ 和 $\sigma_t(a)m=m$生成的 M_e 的 W*-理想的中心，a 对所有 $t\in G,\ m\in M_t$ 并且 $a\in Z_{t^{-1}}$. 注意到，p 是 Z 的单位元，且 $Z_t=Z\cap\tau_t(Z)$，因为 τ

是 σ的包络作用。因此， $p\tau_t(p)$是 Z_t的单位元。记 k 为 T的核，则对于所有 $h \in H$，有$k(rh,\ sh) = k(r,\ s)$。利用这些性质以及 N是阿贝尔的这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
P_i(T)_{r,s} &= \sum_{h\in H} \pi(p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^* k_T(rh, sh)\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p) \\
&= \pi\left(\sum_{h\in H} p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^* k_T(r,s)\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p\right) \\
&= \pi\left(\sum_{h\in H} p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^* k_T(r,s)p\tau_{s^{-1}r}(p)\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))p\right) \\
&= \pi\left(\sum_{h\in H} p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^* \sigma_{rs^{-1}}[p\tau_{s^{-1}r}(p)\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))]k_T(r,s)\right) \\
&= \pi\left(\sum_{h\in H} p\tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^* \tau_{rs^{-1}}[p\tau_{s^{-1}r}(p)\tau_{q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))]\right)\pi(k_T(r,s)) \\
&= \pi\left(p\tau_{rs^{-1}}(p)\sum_{h\in H} \tau_{q_r}(f_i(q_r^{-1}rh))^* \tau_{rs^{-1}q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))\right)\pi(k_T(r,s)) \\
&= \pi\left(p\tau_{rs^{-1}}(p)\tau_{q_r}\left[\sum_{h\in H} f_i(q_r^{-1}rh)^* \tau_{q_r^{-1}rs^{-1}q_s}(f_i(q_s^{-1}sh))\right]\right)\pi(k_T(r,s)) \\
&= \pi\left(p\tau_{rs^{-1}}(p)\tau_{q_r}\left[\sum_{h\in H} f_i(h)^* \tau_{q_r^{-1}rs^{-1}q_s}(f_i(q_s^{-1}sr^{-1}q_rh))\right]\right)\pi(k_T(r,s)).
\end{aligned}$$

注意， $k := q_r^{-1}rs^{-1}q_s \in H$。回想一下，$\{f_i\}_{i\in I}$ 是见证 τ 可 amen 性的一个网，我们得到在弱算子拓扑下

$$\begin{aligned}
\lim_i P_i(T)_{r,s} &= \lim_i \pi\left(p\tau_{rs^{-1}}(p)\tau_{q_r}\left[\sum_{h\in H} f_i(h)^* \tau_k(f_i(k^{-1}h))\right]\right)\pi(k_T(r,s)) \\
&= \pi\left(p\tau_{rs^{-1}}(p)\right)\pi(k_T(r,s)) = \pi(p\tau_{rs^{-1}}(p)k_T(r,s)) = \pi(k_T(r,s)) = T_{r,s}.
\end{aligned}$$

从 B($X \otimes \ell^2(G)$) 到 B($X \otimes \ell^2(G)$) 的完全正压缩映射构成一个紧拓扑空间，其拓扑为逐点 w*-收敛，因此 $\{P_i\}_{i\in I}$ 的一个子网收敛到极限 P。由于对所有 $i \in I$,$P_i(\mathrm{k_{w^*}(M)}) \subseteq \mathrm{k_{w^*}(M)}^H$，且 $\mathrm{k_{w^*}(M)}$ 和 $\mathrm{k_{w^*}(M)}^H$ 在 w*-拓扑下都是闭集，故 $P(\mathrm{k_{w^*}(M)}) \subseteq \mathrm{k_{w^*}(M)}^H$。此外，对所有 $T \in \mathrm{k_{w^*}(M)}^H$, $T = \lim_i P_i(T) = P(T)$。根据 Tomiyama 定理，$\mathrm{k_{w^*}(M)} \to \mathrm{k_{w^*}(M)}^H$, $T \mapsto P(T)$ 是一个条件期望。□

命题 3.4。 *W*-Fell 丛 $\ell^\infty(G, M)$ 是 W*-可 amenable 的。*

证明。 W*-代数 $\ell^\infty(G)$ $\tau_s(f)(t) = f(s^{-1}t)$ 上的作用 τ 是 W*-可 amenable 的，因为函数 P: $\ell^\infty(G, \ell^\infty(G)) \to \ell^\infty(G)$, $P(f)(t) = f(t)(t)$, 是一个等变条件期望。

令 $\sigma = (\{Z_t\}_{t\in G}, \{\sigma_t\})$ 为 M 的中心部分作用， σ^e 为其包络作用，包络代数为 Z^e. 。 $\ell^\infty(G, M_e)$ 的中心为 $\ell^\infty(G, Z)$，我们断言，由 $\ell^\infty(G, \mathrm{M})$ 定义的 G 在 $\ell^\infty(G, Z)$ 上的部分作用为 $\tau\otimes\sigma = (\{\ell^\infty(G, Z_t)\}_{t\in G}, \{\tau_t\otimes\sigma_t\}_{t\in G})$，且对所有 s、$t \in G$ 和 $f \in \ell^\infty(G, Z_{t^{-1}})$，有 $\tau_t\otimes\sigma_t(f)(s) = \sigma_t(f(t^{-1}s))$。为证明这一点，我们需要确定由 $\ell^\infty(G, M_t)^*\ell^\infty(G, M_t)$ 生成的 $\ell^\infty(G, M_e)$ 的 W*-理想。对所有 f、$g \in \ell^\infty(G, M_t)$ 以及 $s \in G$、 $f^*g(s)$, $= f^*(s)g(ts) = f(ts)^*g(ts)$。这些乘积 W*-生成 $\ell^\infty(G, \mathrm{span}^{w^*} M_t^* M_t)$，其中心为 $\ell^\infty(G, Z_{t^{-1}})$，因为根据定义，$Z_{t^{-1}} = \mathrm{span}^{w^*} M_t^* M_t$. 。对于 $f \in \ell^\infty(G, M_t)$、 $g \in \ell^\infty(G, Z_{t^{-1}})$ 和 $s \in G$，我们有， $fg(s) = f(s)g(t^{-1}s) = \sigma_t(g(t^{-1}s))f(s) = [\tau_t\otimes\sigma_t(g)f](s)$。于是， $\tau\otimes\sigma$ 是由 $\ell^\infty(G, \mathrm{M})$ 定义的 G-在 $Z(\ell^\infty(G, M_e))$ 上的 W*-偏作用。

注意， $\tau\otimes\sigma^e$是 $\tau\otimes\sigma$的 W*-包络作用，而 $\tau\otimes\sigma^e$根据 [5,命题 3.9]是 W*-可 amenable。因此， $\ell^\infty(G, \mathcal{M})$是 W*-可 amenable。□

Fell 丛之间，尤其是 W*-Fell 丛之间的条件期望的定义由 Exel 在 [16,定义 21.19]中提出。我们采用该定义，但不要求 w*-连续性。

下面的定理受到 [4], 的启发，具体来说是定义 3.4 和命题 4.1（参见推论 2.8 和例2.9），并从 W*AP 的角度补充了 W*-可 amen 性的刻画，参见 [2, 定理 6.7]。

定理 3.5。 对于每个 *W*-Fell* 丛 $M = \{M_t\}_{t\in G}$，以下命题等价。
(a) M 是 *W**-可 *amenable* 的。*(b)* 存在一个条件期望 $P\colon\ \ell^\infty(G, M) \to M$。*(c)* 存在一个条件期望 $Q\colon\ \mathbb{k}_{w^*}(M) \to W^*_r(M)$。

证明。利用命题 3.4 和 [2, 定理 6.7 与推论 7.9]，我们得到 (b) ⇒ (a)。结合定理 3.1 和 2.6，我们得到 (a) ⇒ (c)。为完成证明，我们假设 (c)，并证明 (b) 成立。为了针对每个 $t \in G$ 构造一个类似于 [16, 引理 17.8] 中的映射 $E_t\colon W^*_r(M) \to M_t$，方便起见，我们将 $W^*_r(M) \equiv W^*\mathrm{r}_\pi(M)$ 视为同一对象，并通过将 $m = \pi(m)$ 视为空间 X 的子集，将每个纤维 M_t 视为 B(*X*) 的子集。我们定义 $E_t\colon W^*_r(M) \to M_t$，使其满足 $E_t(T) = T_{t,e}$。注意，E_t 是一个线性压缩，并且 $E_t(T)^* = (T_{t,e})^* = T^*_{e,t} = T^*_{t^{-1},e} = E_{t^{-1}}(T^*)$。因此，$E_t(T)^* = E_{t^{-1}}(T^*)$。

设 $Q\colon \mathbb{k}_{w^*}(M) \to W^*\mathrm{r}(M)$ 是一个条件期望。利用定理 2.11，我们将其视为条件期望 $Q\colon W^*\mathrm{r}(\ell^\infty(G, M)) \to W^*\mathrm{r}(M)$。定义 $P\colon \ell^\infty(G, M) \to M$ 为如下映射：将 $f \in \ell^\infty(G, M_t)$ 映射到 $E_t(Q(f))$。换言之，P 是族 $\{E_t \circ Q\colon \ell^\infty(G, M_t) \to M_t\}_{t\in G}$ 的不交并。现在我们只需检查 P 是否满足 [16, 定义 21.19] 中所述的条件。

显然，对于所有 $t \in G.$，$E_t \circ Q$ 都是幂等线性压缩。此外，$E_e \circ Q\colon \ell^\infty(G, M_e) \to M_e$ 是通常意义下的条件期望。对于每个 $b \in \ell^\infty(G, M_t)$，我们有 $(E_t \circ Q(b))^* = E_{t^{-1}}(Q(b)^*) = E_{t^{-1}}(Q(b^*)) = E_{t^{-1}} \circ Q(b^*)$。若 $a \in M_s$，则

$$E_{ts} \circ Q(ba) = (Q(ba))_{ts,e} = (Q(b)a)_{ts,e} = \sum_{r\in G} Q(b)_{ts,r}(\lambda_s \otimes a)_{r,e} = Q(b)_{ts,s}a$$
$$= Q(b)_{t,e}a = E_t \circ Q(b)a$$

由此可得 $E_{ts} \circ Q(ba) = E_t \circ Q(b)a.$ 因此，

$$E_{st} \circ Q(ab) = (E_{t^{-1}s^{-1}} \circ Q(b^*a^*))^* = (E_{t^{-1}} \circ Q(b^*)a^*)^* = aE_t \circ Q(b),$$

这就完成了对 [16, 定义 21.19] 的验证。 □

仿照 [4, 推论 4.2]，我们得到

推论 3.6 (部分内容见 [2,命题 7.1])。 以下各项等价：
(1) M_e 内射，且 *M* 是 *W**-可 *amenable*。
(2) $W^*_r(M)$ 是内射的。

证明。假设第一个条件成立。正如 [2, 命题 7.1], 的证明中所指出的，$\mathbb{k}_{w^*}(M)$ 是内射的，而定理 3.5 给出了一个条件期望 $Q\colon \mathbb{k}_{w^*}(M) \to W^*\mathrm{r}(M)$，因此 $W^*\mathrm{r}(M)$ 是内射的。反过来，若 $W^*_r(M)$ 是内射的，则 M_e 是内射的，因为存在一个典范条件期望 $W^*_r(M) \to M_e$。。利用 $\pi\colon M \to B(X)$，我们可以将 $W^*_r(M) \equiv W^*\mathrm{r}_\pi(M) \subseteq \mathbb{k}^\pi_{w^*}(M) \equiv \mathbb{k}_{w^*}(M) \subseteq B(\ell^2(G, X))$ 视为其中的算子代数。由于 $W^*_r(M)$ 是内射的，存在一个条件期望 $B(X \otimes \ell^2(G)) \to W^*_r(M)$，将其限制后便得到一个条件期望 $\mathbb{k}_{w^*}(M) \to W^*\mathrm{r}(M)$。于是，定理 3.5 蕴含 M 是 W*-可 amenable。□

定理 3.7。 若 H 是 G的正规子群，则以下命题等价
(1) M 是 *W**-可 *amenable*。*(2)* M_H 和 *M* 是 *W**-可 *amenable*。

证明。假设 M 是可 amenable 的。在 [2, pp 199] 中已证明 M_H 是 W*-可 amenable 的。论证如下。令 Z、Z、N、σ、$\tilde{\tau}$ 和 τ 与定理 3.1 的证明中相同。根据 [2, 定义 5.16]，τ 是可 amenable 的，而 [5, 命题 2.6] 蕴含 $\tau|_H$ 是可 amenable 的。利用 Z 的单位元 $\tilde{p}$，我们可以构造一个 H-等变条件期望 $P\colon N \to Z$，$P(n) = \tilde{p}n$；并且可以用 [4, 命题 3.8] 推得 $\tilde{\tau}$ 是可 amenable 的。由于这个最后的作用是由 M_H 定义的 H 在 $Z(M_e)$ 上的 W*-偏作用的 W*-包络作用，因此 M_H 是 W*-可 amenable 的（按定义）。

定理 3.5 给出了一个条件期望 $Q\colon \mathbb{k}_{w^*}(\mathcal{M}) \to W^*_r(\mathcal{M})$，我们可以对其加以限制，从而得到一个条件期望 $Q^H\colon \mathbb{k}_{w^*}(\mathcal{M})^H \to W^*_r(\mathcal{M})$。利用 命题 2.16 的同构对 Q^H 进行共轭，我们得到一个条件期望 $\mathbb{k}_{w^*}(\mathcal{M}) \to W^*_r(\mathcal{M})$。因此，定理 3.5 蕴含 $\mathcal{M}$ 是 W*-可 amenable。

为证明逆命题，我们结合定理 3.1、命题 2.16 和定理 3.5，得到条件期望 $P\colon \mathbb{k}_{w^*}(\mathcal{M}) \to \mathbb{k}_{w^*}(\mathcal{M})^H$ 以及 $Q\colon \mathbb{k}_{w^*}(\mathcal{M})^H \to W^*_r(\mathcal{M})$，它们给出一个条件期望 $Q \circ P\colon \mathbb{k}_{w^*}(\mathcal{M}) \to W^*_r(\mathcal{M})$。□

4. Fell 丛与群余作用

本节中，我们通过考察 Fell 丛与相应群余作用之间的关系，在群余作用框架下重新诠释我们的结果。尽管这种联系在 C*-代数的情形下已广为人知，但我们旨在将这些思路拓展到冯·诺依曼代数的背景中。

Let G 是离散群。[1] 回顾一下， G 在 C*-代数 A 上的余作用是一个 $*$-同态

$$\delta\colon A \to A \otimes C^*(G)$$

满足 $(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes \delta_G) \circ \delta$，其中 $\delta_G\colon C^*(G) \to C^*(G) \otimes C^*(G)$ 是通常的余乘法：$\delta_G(t) = t \otimes t$ 对于 $t \in G$。此外，和通常一样，我们假设 δ 是非退化的，即 $\operatorname{span} \delta(A)(1 \otimes C^*(G)) = A \otimes C^*(G)$。这等价于 $(\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = \mathrm{id}_A$，其中 $\epsilon\colon C^*(G) \to \mathbb{C}$ 是平凡表示：$\epsilon(t) = 1$ 对所有 $t \in G$。特别地，每个余作用都自动是单射同态。

The 余作用 δ 称为正规的，当且仅当 $\delta^\lambda := (\mathrm{id} \otimes \lambda) \circ \delta\colon A \to A \otimes C^*_{\mathrm{r}}(G)$ 是内射的。在这种情况下 δ^λ 可以 视为 G的“约化余作用”，参见 [13] 及其中的参考文献。

给定余作用 $\delta\colon A \to A \otimes C^*(G)$，其交叉积定义为

$$A \rtimes_\delta \widehat{G} := \overline{\operatorname{span}}\, \delta^\lambda(A)(1 \otimes M(C_0(G))) \subseteq \mathbb{B}(A \otimes \mathbb{K}(\ell^2(G))) = \mathbb{B}(A \otimes \ell^2(G)),$$

其中 $M\colon C_0(G) \to \mathbb{B}(\ell^2(G))$ 表示由乘法算子给出的表示：$M_f(\xi) = f \cdot \xi$。

交叉积 $A \rtimes_\delta \widehat{G}$ 带有一个典范的 G作用，称为对偶作用，记作 $\widehat{\delta}$；它在生成元上的定义为 $\widehat{\delta}_t(\delta^\lambda(a)(1 \otimes M_f)) = \delta^\lambda(a)(1 \otimes M_{\mathrm{rt}_t(f)})$，其中 $\mathrm{rt}_t(f)(s) := f(st)$表示作用于 $C_0(G)$的右平移 G作用。

余作用 δ 称为极大的，若典范同态

$$\Phi_\delta\colon A \rtimes_\delta \widehat{G} \rtimes_{\widehat{\delta}} G \twoheadrightarrow A \otimes \mathbb{K}(\ell^2(G))$$

是内射的（因而是一个同构）。等价地，δ 是极大的，当且仅当它可提升为一个（必然是）内射的同态 $\delta_{\max}\colon A \to A \otimes_{\max} C^*(G)$，参见 [9, 定理 5.1]。

给定余作用 $\delta\colon A \to A \otimes C^*(G)$，其谱子空间

$$A_t := \{a \in A : \delta(a) = a \otimes t\}$$

构成一个 Fell 丛 $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$，它在 A 中有具体表示。我们称 $\mathcal{A}$ 为 δ 的谱 ***Fell*** 丛。此外，代数直和 $\oplus^{\mathrm{alg}}_{t \in G} A_t$ 是 A 的一个（范数）稠密 $*$-子代数，它与由有限支撑截面 $G \to \mathcal{A}$组成的截面 $*$-代数 $C_c(\mathcal{A})$ 典范同构。

因此， G 在 A 上的每个余作用 δ 都为 C*-代数 A 导出一个 G-分次。这是一个拓扑分次，具体而言，我们有投影 $E_t\colon A \to A_t$；它们由 $E_t(a) := (\mathrm{id} \otimes \varphi_t)(\delta(a))$ 给出，其中 $\varphi_t\colon C^*(G) \to \mathbb{C}$ 是由 $\varphi_t(s) = \delta_{s,t}$（对 $s, t \in G$）指定的有界线性泛函。注意， φ_e 正是 $C^*(G)$ 上的典范迹。泛函 φ_t 由 $\varphi_t(x) = \varphi_e(t^{-1}x)$ 给出。泛函 φ_t 经由 $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ 分解，在其中成为向量泛函 $x \mapsto \delta_t \,|\, x(\delta_e)$。

以下结果众所周知：

定理 4.1。 给定一个 ***Fell*** 丛 $\mathcal{A} = (A_t)_{t \in G}$，其上的 G的完整截面C*-代数 $C^*(\mathcal{A})$***carries a*** 极大余作用 $\delta_{\mathcal{A}}\colon C^*(\mathcal{A}) \to C^*(\mathcal{A}) \otimes C^*(G)$，满足 $\delta_{\mathcal{A}}(a_t) = a_t \otimes t$，其中 $a_t \in A_t$。$\delta_{\mathcal{A}}$ 的谱 ***Fell*** 丛与 $\mathcal{A}$ 自然同构。每个极大余作用都与这种形式的余作用同构，且对应的 ***Fell*** 丛在本质上唯一，即该余作用的谱 ***Fell*** 丛。

约化截面C*-代数 $C^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{A})$ 带有一个正规余作用 $\delta^{\mathrm{r}}_{\mathcal{A}}\colon C^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{A}) \to C^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{A}) \otimes C^*(G)$，满足 $\delta^{\mathrm{r}}_{\mathcal{A}}(a_t) = a_t \otimes t$，其中 $a_t \in A_t$。每个正规余作用都通过其关联的谱 ***Fell*** 丛与这种形式的余作用同构。

上述结果给出了 G 上的 Fell 丛范畴（其态射为通常的 G上的 Fell 丛态射）与 G的极大（分别为正规）余作用范畴之间的等价。两个 G余作用（A，δ）和（A'，δ'）之间的态射只是一个 $*$同态 $\pi\colon A \to A'$，它关于这些余作用是等变的，也就是说，对所有 $a \in A$，都有 $\delta'(\pi(a)) = (\pi \otimes \mathrm{id})(\delta(a))$。

[1] The 群余作用理论自然地扩展到局部紧群，参见 [13]。由于我们只使用离散 te 群， 本文中，我们仅考虑这种情形，以避免复杂问题。

4.1. 冯·诺依曼代数上的余作用与 W*-Fell 丛。接下来我们考虑冯·诺依曼代数上的余作用：回忆一下，群 G 在冯·诺依曼代数 N 上的余作用是一个内射、正规且保单位的 $*$同态 $\delta\colon\ M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$，满足余作用恒等式（$\delta\otimes\mathrm{id}$）$\circ\delta = (\mathrm{id}\otimes\Delta_G)\circ\ \delta$；其中，$\Delta_G$ 表示群冯·诺依曼代数$W^*_{\mathrm{r}}(G) = C^*_{\mathrm{r}}(G)'' \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(G))$上的余乘法。因此，冯·诺依曼代数上的余作用类似于约化 C*余作用。

注 4.2。对于如上所述的余作用 $\delta\colon\ M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$，形如 $\delta(m)(1\otimes\lambda_t)$ 的元素的线性张成，其中 $m \in M$ 且 $t \in G$，在 $M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 中是弱*稠密的。对于 C*-代数上的余作用，这一点已在 [7, Corollaire 7.15] 中得到证明；对于冯·诺依曼代数上的余作用，类似的证明同样适用。

下面的结论可能已广为人知，但我们找不到相关参考文献，因此补充一个证明 f.

命题 4.3。 给定如上所述的一个 W*-余作用 $\delta\colon\ \ M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$，其谱 ***Fell*** 丛是一个W*-***Fell*** 丛 $\boldsymbol{M} = (M_t)_{t\in G}$，它为冯·诺依曼代数 M 提供一个 G-分次结构，即代数直和 $\oplus^{\mathrm{alg}}_{t\in G}M_t$ 在 M 中是弱*稠密的。

证明。由于 δ 是正规的，显然 M_t 是 M 的弱*闭子空间，因此 $\mathrm{M} = (M_t)_{t\in G}$ 是一个 W*-Fell 丛。为了说明 $\oplus^{\mathrm{alg}}_{t\in G}M_t$ 在 M 中弱*稠密，只需证明：若 $\omega \in M_*$ 满足对所有 $t \in G$ 都有 $\omega(M_t) = 0$，则 $\omega = 0$。固定具有此性质的 ω。于是对所有 $m \in M$ 和 $t \in G$，都有 $\omega(E_t(m)) = 0$。回忆 $E_t(m) = (\mathrm{id}\otimes\varphi_t)(\delta(m))$，其中 $\varphi_t \in W^*_{\mathrm{r}}(G)_* = A(G)$（傅里叶代数）是由 $\varphi_t(x) = \delta_t\,|\,x(\delta_e)$（对于 $x \in W^*_{\mathrm{r}}(G)$）给出的向量泛函。这些泛函可以分离点：如果对所有 $t \in G$ 都有 $\varphi_t(x) = 0$，那么 $x = 0$。但是，如果对于所有 $t \in G$ 和 $m \in M$ 都有 $\omega(E_t(m)) = 0$，那么对所有 $t \in G$，我们得到 $\varphi_t((\omega\otimes\mathrm{id})(\delta(m))) = 0$，因此对于所有 $m \in M$，都有 $(\omega\otimes\mathrm{id})(\delta(m)) = 0$。由此可知，对于所有 $m \in M$ 和 $t \in G$，都有 $(\omega\otimes\mathrm{id})(\delta(m(1\otimes\lambda_t))) = 0$，而注 4.2 于是推出 $\omega = 0$，如所欲证。□

下述结果是定理 4.1 的 W*-类比，并给出了 G 上 W*-Fell 丛范畴与 G 的 W*-余作用范畴之间的等价。

定理 4.4。 给定一个 W*-***Fell*** 丛 $\boldsymbol{M} = (M_t)_{t\in G}$，其截面 W*-代数 $W^*_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{M})$ 带有一个余作用

$$\delta_{\mathcal{M}}\colon W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M}) \to W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$$

满足 $\delta_{\mathcal{M}}(m_t) = m_t\otimes\lambda_t$，对所有 $t \in G$ 和 $m_t \in M_t$ 均成立。$\delta_{\mathcal{M}}$ 的谱 W*-***Fell*** 丛与 $\boldsymbol{M}$ 有典范同构。此外，每个 G 的 W*-余作用都可由某个唯一的 W*-***Fell*** 丛按此形式给出（相差一个自然同构），即其谱 ***Fell*** 丛。

证明。余作用 $\delta_{\mathcal{M}}$ 的构造已在 [2, 第 5 节5]中给出。其基本思路与（约化）离散群余作用的情形相同。下面给出一些主要细节。余作用 $\delta_{\mathcal{M}}$ 具有如下典范的“酉实现”：考虑 Hilbert M_e-模$\ell^2_{\mathrm{w}*}(\mathcal{M}\times G) \cong \ell^2_{\mathrm{w}*}(\mathcal{M})\otimes\ell^2(G)$，其中 $\mathcal{M}\times G$ 表示通过第一坐标投影拉回 $\mathcal{M}$ 而得到的 $G\times G$ 上的 W*-Fell 丛。我们根据公式在 $\ell^2_{\mathrm{w}*}(\mathcal{M}\times G)$ 上定义一个酉算子 U

$$U(\zeta)(s,t) := \zeta(s,s^{-1}t)$$

对于一个 ℓ^2-截面 ζ of M $\times\, G$ and $s,t \in G$。不难看出，W 确实是一个酉算子，且$U^*(\zeta)(s,t) = \zeta(s,st)$。此外，利用 W^*r (M) $\bar{\otimes}W^*$r (G) 的典范（正规）表示，将其视为作用于 $\ell^2_{\mathrm{w}*}$(M $\times\, G$) 上的算子，直接计算可得 $U(m_t\otimes 1)U^* = m_t\otimes\lambda_t$，因此正规同态 $m \mapsto U(m\otimes 1)U^*$yields 给出了所需的余作用 $\delta_{\mathcal{M}}$，如陈述中所述。$\delta_{\mathcal{M}}$ 的谱 Fell 丛分解与原 Fell 丛 M 典范同构，因为按照构造，M_t 典范地嵌入 t-谱子空间 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathrm{M})_t$ 中，而投影 E_t 给出了逆映射。

反过来，从 W*-余作用 $\delta\colon\ M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 出发，其谱 Fell 丛 $\mathrm{M} = (M_t)_{t\in G}$是一个 W*-Fell 丛。注意，$E := E_e = (\mathrm{id}\otimes\varphi_e)\circ\ \delta\colon\ M \twoheadrightarrow M_e$是一个忠实正规条件期望。由 E 可得一个 W*-Hilbert M_e-模 $\ell^2_E(M)$，它定义为M的自对偶完备化，并赋予 M_e值内积 $m\,|\,n_E := E(m^*n)$。又由于 E是忠实的，典范表示 $\pi\colon\ M \to \mathrm{B}(\ell^2_E(M))$ 也是忠实的。现在注意，典范代数同构$\oplus^{\mathrm{alg}}_{t\in G}M_t \to C_c$(M) 可扩张为 W*-Hilbert M_e-模 $\ell^2_E(M) \cong \ell^2_{\mathrm{w}*}$(M) 之间的同构；这可由以下计算得出

$$\langle m_s\,|\,m_t\rangle_E = E(m_s^*m_t) = \langle m_s\,|\,m_t\rangle_{M_e}$$

对于 $m_s \in M_s$ 和 $m_t \in Mt$。事实上，除非 $s=t$，上述内积均为零；若 $s=t$，它们则等于 $m_s^* m_t$，因为 E 只是 M_e上的恒等映射。于是，表示 π 给出一个含单位的正规内射 $*$-同态，将 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$ 映入 $\mathrm{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M}) \otimes \ell^2(G)) \cong \mathrm{B}(\ell^2_E(M) \otimes \ell^2(G))$，并将$m_t \in M_t$ 映至 $m_t \otimes \lambda_t$。这正是余作用 $\delta_{\mathcal{M}}$的一种体现。另一方面，δ 将M 与其在 $M \otimes W^*_{\mathrm{r}}(G) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2_E(\mathcal{M}) \otimes \ell^2(G))$ 中的像相识别。这意味着代数同构$\oplus^{\mathrm{alg}}_{t\in G} M_t \to C_c(\mathcal{M})$ 可扩张为 W*-代数 $M \cong W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})$ 之间的同构。□

回顾一下，余作用 $\delta\colon M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 的 W*-交叉积定义为

$$M \rtimes_\delta G := \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\delta(a)(1\otimes f) : a \in M, f \in C_0(G)\} \subseteq M\bar{\otimes}\mathbb{B}(\ell^2(G)),$$

这里，我们将 $M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 视为 $M\bar{\otimes}\mathrm{B}(\ell^2(G))$ 的 C*-子代数，并通过乘法算子表示，将 $C_0(G)$ 嵌入 $\to \mathrm{B}(\ell^2(G))$。

我们还回顾一下文献 [2]中的命题5.28和推论5.29：

命题 4.5。给定一个定义在 G 上的W*-*Fell* 丛 $\boldsymbol{M}$，存在一个典范的 G-等变同构

$$\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M}) \cong W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})\bar{\rtimes}_{\delta_{\mathcal{M}}} G$$

它将形如 $\delta_{\mathcal{M}}(a)(1\otimes f) \in W^*_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{M})\bar{\rtimes}_{\delta_{\mathcal{M}}}G$ 的元素与核 $k_{a,f}(s,t) := a(st^{-1})f(t)$ 对应起来，并且该元素属于 $\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\boldsymbol{M})$。取W*-交叉积后，这将诱导出一个同构：

$$\mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})\bar{\rtimes}_{\beta^{\mathrm{w}^*}} G \cong W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})\bar{\otimes}\mathbb{B}(\ell^2(G)).$$

接下来，我们考虑正规子群 $H \trianglelefteq G$，并讨论从 G 到 G的限制余作用。在量子群的一般情形下，可以将每个余作用限制到一个量子子群，参见 [20]。[2]对于 W*-余作用 $\delta\colon M \to M \otimes W^*_{\mathrm{r}}(G)$，这相当于将 δ从 G限制为一个余作用

$$\dot{\delta}\colon M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(\dot{G})$$

商群 $\dot{G} := G/H$，其中 $H \trianglelefteq G$是一个正规子群。更确切地说，这是满足以下条件的 G 上唯一的 W*-余作用

$$(\dot{\delta}\otimes \mathrm{id})\circ\delta = (\mathrm{id}\otimes\dot{\delta}_G)\circ\delta,$$

其中 $\dot{\delta}_G\colon W^*_{\mathrm{r}}(G) \to W^*_{\mathrm{r}}(G)\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(\dot{G})$ 是余乘法 $\delta_G\colon W^*_{\mathrm{r}}(G) \to W^*_{\mathrm{r}}(G)\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 的“限制”。它满足

$$\dot{\delta}_G(\lambda_t) = \lambda_t \otimes \dot{\lambda}_{\dot{t}},$$

其中 $\dot{\lambda}\colon \dot{G} \to \mathrm{B}(\ell^2(\dot{G}))$ 表示 $\dot{G}$ 的左正则表示，而 $\dot{t} := tH$ 表示 $t \in G$ 在 G 中的等价类。于是，限制余作用 $\dot{\delta}$ 必然满足

$$\dot{\delta}(m) = m \otimes \dot{\lambda}_{\dot{t}} \quad \text{for all } t \in G, m \in M_t.$$

下面说明如何通过酉算子实现，更明确地得到限制余作用 $\dot{\delta}$：我们考虑 δ的谱 Fell 丛 $\mathcal{M}$，并考察定义在 $G\times G$ 上的 Fell 丛 $\mathcal{M}\times G$，它是沿第一坐标投影 $G\times G \twoheadrightarrow G$对 $\mathcal{M}$ 作拉回得到的。接着，如同构造余作用 $\delta \cong \delta_{\mathcal{M}}$时那样，我们可以通过公式，在 $\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M}\times\dot{G}) \cong \ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M}) \otimes \ell^2(\dot{G})$ 上构造酉算子 $\dot{U}$：

$$\dot{U}(\zeta)(s,\dot{t}) := \zeta(s, s^{-1}\dot{t}). \tag{4.6}$$

当然，这里我们使用 $G = G$上的 G 的典范左平移作用。直接计算可得，若 $m \in M_t$，则 $U(m\otimes 1)U^* = m\otimes\lambda_{\dot{t}}$。由此可知，映射$\dot{\delta}\colon M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(\dot{G}) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M}\times\dot{G}))$定义为

$$\dot{\delta}(m) := \dot{U}(x\otimes 1)\dot{U}^*$$

得到所需的受限 W*-余作用 $\dot{\delta}\colon M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(\dot{G})$。

现在，我们用余作用的谱分解来描述余作用的限制。

命题 4.7。每个余作用 $\delta\colon M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 都“限制”为一个余作用 $\dot{\delta}\colon M \to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(\dot{G})$，使得 $a \in M_t = \{a \in M\colon \delta(a) = a\otimes\lambda_t\}$ 被映射为 $\delta(a) = a\otimes\lambda_{\dot{t}}$ 对每个 $t \in G$ 都成立。此外，若 $\boldsymbol{M}$ 表示 δ 的谱 *Fell* 丛，则 $\dot{\delta}$ 的谱 *Fell* 丛与 $\boldsymbol{M}/H$ 的 W*-部分截面 *Fell* 丛在规范意义下同构（如定义 *2.15* 中所述）。

[2]我们谨此感谢 Stefaan Vaes 指出这一点。

证明。 设 $\mathcal{M}=(M_t)_{t\in G}$（分别地，$\mathcal{M}=(M_{\dot t})_{\dot t\in \dot G}$）为 δ（分别为 δ）的谱 Fell 丛。按照定理 4.4 中的方式将 $M\cong W_{\mathrm{r}}^*(\mathcal{M})$ 进行辨识，并利用 $\mathcal{M}/H$ 的构造（见定义 2.15 之前的讨论），则 $\mathcal{M}/H$ 在 $\dot t\in\dot G$ 处的纤维可辨识为子空间

$$W_{\mathrm{r}}^*(\mathcal{M}_u)=\overline{\operatorname{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\delta(m)=m\otimes s : s\in u, m\in M_s\}\subseteq M\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(G)).$$

由于 δ 是到其像上的同构，我们还可以将其识别为由 M_s 生成的 $s\in G$ 所在的同一类别中的 w*-闭子空间 M，即 $\dot s=\dot t$。因此，我们只需证明：

$$\dot M_{\dot t}=\overline{\operatorname{span}}^{\mathrm{w}^*}\{m\in M_s : s\in G, \dot s=\dot t\}.$$

包含关系“ $\supseteq$ ”显然成立，因为余作用 δ 满足：对于所有 $t\in G$， $\delta(m)=m\otimes\lambda_t$。为证明包含关系“ $\subseteq$ ”，我们利用 $M_{\dot t}=E_{\dot t}(M)$，其中 $E\colon M\twoheadrightarrow M_{\dot t}$ 表示谱投影。不过，由于对于 $s\in G$，子空间 M_s 生成了 M 的 W*-稠密子空间，且 E 是 W*-连续的，只需注意：若 $m\in M_s$，则

$$\dot E_{\dot t}(m)=(\mathrm{id}\otimes\dot\varphi_{\dot t})(\dot\delta(m))=(\mathrm{id}\otimes\dot\varphi_{\dot t})(m\otimes\dot\lambda_{\dot s})=m\in M_s$$

如果 $\dot s=\dot t$，否则它为零。 □

上述结果为定理 2.16 中部分陈述提供了另一种证明。为了用余作用的语言为完整陈述提供另一种证明，我们要证明：

定理 4.8。 设 $\delta\colon M\to M\bar\otimes W_{\mathrm{r}}^*(G)$ 是一个 *W**-余作用，设 $H\trianglelefteq G$ 是一个正规子群，其对应的商群为 $G=G/H$。考虑赋予对偶 $\widehat{\ }$ *W**-作用 $\delta\colon G\curvearrowright M\bar\rtimes_\delta G$ 的 *W** 交叉积 $M\bar\rtimes_\delta G$。则 H-不动点代数（即对 H 的限制作用的不动点代数）与下列对象典范同构：

$$(M\bar\rtimes_\delta G)^H\cong M\bar\rtimes_{\dot\delta}\dot G,$$

限制余作用的 *W** 交叉积 $\dot\delta\colon M\to M\bar\otimes W_{\mathrm{r}}^*(\dot G)$。

证明。 根据定义，W* 交叉积 $M\bar\rtimes_{\dot\delta}\dot G$ 是形如以下元素的 w*-闭包张成的空间

$$\dot\delta(m)(1\otimes f)\in M\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(\dot G))$$

其中 $m\in M$ 且 $f\in\ell^\infty(G)$。由于 M 由谱子空间 M_t 和 $\delta(m)=m\otimes\lambda_t$（ $m\in M_t$）生成，我们也可以将 $M\rtimes_{\dot\delta}G$ 视为形如 $m\otimes\lambda_t f$ 的元素的 w*-闭包张成的空间，其中 $m\in M_t$、 $t\in G$ 以及 $f\in\ell^\infty(G)$。应用 $\delta\otimes\mathrm{id}$，我们还可以进一步确定

$$M\rtimes_{\dot\delta}\dot G\cong\overline{\operatorname{span}}^{\mathrm{w}^*}\{m\otimes\lambda_t\otimes\dot\lambda_{\dot t} : m\in M_t, t\in G, f\in\ell^\infty(\dot G)\}\subseteq M\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(G))\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(\dot G)).$$

我们 现在考虑酉算子 $\dot U\in\mathrm{B}(\ell^2(G\times\dot G))$，它由与 (4.6) 中相同的公式给出。一个简单的 le 计算 表明

$$(1\otimes f)U=U\dot\Delta(f)\quad\forall f\in\ell^\infty(\dot G),$$

其中 $\dot\Delta\colon\ \ell^\infty(\dot G)\to\ell^\infty(G\times\dot G)$ 由 $\dot\Delta(f)(s,\ \dot t):=f(s\dot t)$ 定义。这里我们将 $\ell^\infty(\dot G)$ 视为定义在 G 上的函数，这些函数在侧类 tH 上为常值。此外，我们还将 $\ell^\infty(G\times G)$ 表示为作用在 $\ell^2(G\times\dot G)$ 上的乘法算子。应用 $\mathrm{Ad}_{1\otimes U^*}$，我们便得到一个同构

$$M\rtimes_{\dot\delta}\dot G\cong\overline{\operatorname{span}}^{\mathrm{w}^*}\{m\otimes(\lambda_t\otimes 1)\dot\Delta(f) : m\in M_t, t\in G, f\in\ell^\infty(\dot G)\}\subseteq M\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(G))\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(\dot G)).$$

注意到

$$\overline{\operatorname{span}}^{\mathrm{w}^*}\{(\lambda_t\otimes 1)\dot\Delta(f) : t\in G, f\in\ell^\infty(\dot G)\}$$

可视为关于 $\ell^\infty(\dot G)$ 上规范平移 G-作用 $\dot\tau$ 的 W*-交叉积 $G\ltimes_{\dot\tau}\ell^\infty(G)$。这可规范地视为作用在 $\ell^2(G\times G)$ 上的算子的 W*-子代数，由形如 $(\lambda_t\otimes)\Delta(f)$ 的元素生成，其中 $t\in G$ 且 $f\in\ell^2(\dot G)$；这里 $\Delta(f)(s,\ t):=f(st)$ 现在被视为作用在 $\ell^2(G\times G)=\ell^2(G)\otimes\ell^2(G)$ 上的乘法算子。由此可得

$$M\rtimes_{\dot\delta}\dot G\cong\overline{\operatorname{span}}^{\mathrm{w}^*}\{m\otimes(\lambda_t\otimes 1)\Delta(f) : m\in M_t, t\in G, f\in\ell^\infty(\dot G)\}\subseteq M\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(G))\bar\otimes\mathbb{B}(\ell^2(G)).$$

另一方面，使用类似的论证，W*-交叉积 $M\rtimes_\delta G$ 上的对偶 G-作用，以及因而其在 H 上的限制，都是可积的（参见 [19, 命题 2.5]）。这意味着不动点代数 $(M\rtimes_\delta G)^H$ 等于

$$(M\rtimes_\delta G)^H=\overline{\operatorname{span}}^{\mathrm{w}^*}\{\delta(m)(1\otimes f) : m\in M, f\in\ell^\infty(\dot G)\}.$$

这是因为，形如 $\delta(m)(1\otimes f)$ 且满足 $f\in C_c(G)$ 的元素构成了可积元素的一个 w*-稠密子集，其沿作用的积分为 $\delta(m)(1\otimes E(f))$，其中 $E(f)=\sum\tau_t(f)$，而 τ 表示（右）平移 G-作用。但这些元素的 w*-闭线性包

等于 $\ell^\infty(G)^H = \ell^\infty(\dot{G})$。与之前类似的论证（使用映射 $\delta\otimes$id 以及与酉算子 $1\otimes U^*$ 的共轭，其中 $U\zeta(s,\ t) = \zeta(s,\ s^{-1}t)$）表明

$$(M \rtimes_\delta G)^H \cong \overline{\mathrm{span}}^{\mathrm{w}^*}\{m\otimes(\lambda_t\otimes 1)\Delta(f) : m\in M_t, t\in G, f\in\ell^\infty(\dot{G})\} \cong M\rtimes_{\dot{\delta}}\dot{G},$$

完成定理的证明。 □

4.2. **用余作用表述逼近性质**。由于群 G 的余作用范畴与空间 X 上 Fell 丛的范畴等价，因此自然会问：Fell 丛的逼近性质如何转化为余作用的语言。

定义 4.9。如果存在一个范数为一的投影（自动为条件期望） $M\rtimes_\delta G\twoheadrightarrow M$，我们就称 W*-余作用 δ: $M\to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 是余可和的。

例4.10。从冯·诺依曼代数 N 上群 G 的作用 σ 出发，并考虑其在 $M = N\bar{\rtimes}_\sigma G$ 上的群 G 对偶余作用 $\delta = \widehat{\sigma}$。那么， δ 余可和，当且仅当 σ 按 Anantharaman-Delaroche 的意义是可 amenable 的。事实上，根据 W*-作用的 W* 交叉积对偶性，我们有

$$M\bar{\rtimes}_\delta G \cong N\bar{\rtimes}_\sigma G\bar{\rtimes}_{\widehat{\sigma}}G \cong N\bar{\otimes}\mathbb{B}(\ell^2(G)).$$

该结果由 [4, 命题 4.1]得出。或者，也可以由我们的下一个结果得出。

定理 4.11. *-余作用 δ: $M\to M\bar{\otimes}W^*_{\mathrm{r}}(G)$ 是余 *amenable* 的，当且仅当 G 在 $M\bar{\rtimes}_\delta G$ 上的对偶作用 δ 是 *W*-amenable* 的；这又当且仅当 δ 的谱 W*-*Fell* 丛具有 *W*AP*。

证明。这是我们前述结果的推论：由定理 4.4 和命题 4.5，我们有一个等变同构 $M\bar{\rtimes}_\delta G\cong \mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$，其中 $\mathcal{M}$ 表示 δ 的谱 Fell 丛。根据定理 3.5，$\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 上的（对偶） G-作用是可 amenable 的，当且仅当存在一个范数为一的投影（条件期望）

$$M\bar{\rtimes}_\delta G\cong \mathbb{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})\twoheadrightarrow W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{M})\cong M.$$

根据 [2, 定理 6.8], $\mathcal{M}$ 具有 W*AP，当且仅当 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{M})$ 上的对偶作用 δ 是可 amenable 的。 □

注记 4.12。还可以进一步考虑 C*-余作用的余可 amen 性概念——也就是说，群 G 在 C*-代数 A上的余作用。最直接的做法是说，若余作用δ: $A\to A\otimes C^*(G)$ 的对偶作用 δ（由 G作用在交叉积 $A\rtimes_\delta G$ 上）是可 amenable 的，则称该余作用为余可 *amen* 的（就 C*-余作用而言）。若$\mathcal{A}$ 表示与 δ相关联的谱 Fell 丛，则 $A\rtimes_\delta G$可识别为核 $\mathrm{k}(\mathcal{A})$ 的 C*-代数，而对偶作用对应于 G 在 $\mathrm{k}(\mathcal{A})$ 上的典范（右）平移作用。因此， δ 是余可 amen 的，当且仅当 Fell 丛$\mathcal{A}$ 具有逼近性质。

定义 C*-余作用的可 amen 性的另一种方法，是将给定的余作用 δ: $A\to A\otimes C^*(G)$ 与一个 W*-余作用联系起来。虽然本文不详细探讨这一方向，但基本思路如下：不直接取 A 的双对偶，而是先考虑交叉积 $A\rtimes_\delta G$，再取其双对偶 W*-代数 $(A\rtimes_\delta G)''$。在其中，找出由 A 在 $\mathcal{M}(A\rtimes_\delta G)\subseteq(A\rtimes_\delta G)''$中的像生成的冯·诺依曼代数 M。这一构造应当给出 G在 M上的 W*-余作用，对应于 $W^*_{\mathrm{r}}(\mathcal{A}'')$ 上的对偶余作用，其中 $\mathcal{A}$是 δ的谱 Fell 丛。这一观点与 [10], 中所述的群作用的类似构造相一致，并且与 [2, 定理 5.23]中建立的同构 $\mathrm{k}_{\mathrm{w}^*}(\mathcal{A}'')\cong\mathrm{k}(\mathcal{A})''$ 相容。

5. Fell 丛的约化与商

本节证明离散群上的 Fell 丛对应的定理 3.7。我们先构造该定理陈述中涉及的对象。

令$\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in G}$ 为离散群 G上的 Fell 丛，并令 $H\trianglelefteq G$ 为正规子群。自然嵌入 $\iota_{\mathcal{B}}$: $\mathcal{B}\to C^*(\mathcal{B})$ 将 $b\in B_t$ 映为这样的截面：在 t 处取值 b，在其他地方取值 0。对每个 $u\in G/H =: \dot{G}$，令 B_u 为 $\sum_{t\in u}\iota_{\mathcal{B}}(B_t)$ 在 $C^*(\mathcal{B})$ 中的范数闭包。注意，$\iota_{\mathcal{B}}$ 在 $C^*(\mathcal{B})$ 上诱导了一个以 G为底的分级，我们称之为由$\mathcal{B}$诱导的 $C^*(\mathcal{B})$ 的典范 G-分级。

命题 5.1 (参见命题 2.14)。存在唯一的内射 $*$-同态 h: $C^*(B_H)\to C^*(\mathcal{B})$ 满足 $h\circ\iota_{\mathcal{B}_H} = \iota_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}_H}$。因此， $h(C^*(B_H))$ 与 B_H C^*-同构。关于范数和. .

$*$-运算继承自 $C^*(\mathcal{B})$，$\mathcal{B} := \{B_u\}_{u\in\dot{G}}$ 是一个 *Fell* 丛。此外，$\mathcal{B}$ 和 $\iota\cdot\mathcal{B}$ 在 $C^*(\mathcal{B})$ 上诱导出一个以 G 为底、纤维为 $\{B_t\}_{t\in G}$ 的分级：对于每个 $t\in G$， B_t 都与 $\iota\cdot\mathcal{B}(\iota\mathcal{B}(B_t))\subseteq C^*(\mathcal{B})$ 线性且等距地等同。存在一个 $*$-同构 k: $C^*(\mathcal{B})\to C^*(\mathcal{B})$，它在每个纤维 B_t 上都限制为恒等映射。

证明。B 在希尔伯特空间上的每个 $*$-表示，限制后都是 B_H 的一个 $*$-表示。将其转为积分形式，得到一个 $*$-同态 $h\colon C^*(\mathrm{B}_H)\to C^*(\mathrm{B})$，满足 $h\circ\iota_{\mathcal{B}_H}=\iota_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}_H}$。为证明 h 忠实，取 B_H 的一个非退化 $*$-表示 T，其积分形式 $\tilde{T}\colon C^*(\mathrm{B}_H)\to\mathrm{B}(X)$ 忠实。根据 [18, 定理 2.1]，T 是 B-正的，并可通过 [17, 第 XI 章]所述过程诱导出一个 $*$-表示$S\colon \mathrm{B}\to\mathrm{B}(Y)$。由于 G 是离散的，[17, XI 14.21] 表明 T 是 $S|_{\mathcal{B}_H}$的一个 $\tilde{}$ $\tilde{}$子表示。因此，$T\circ h=S$ 是忠实的，且 h 是内射的。

由 $(B_u)^*=B_{u^{-1}}$ 以及对所有u, $v\in G$成立的 $B_uB_v\subseteq B_{uv}$ 可立即得出$\mathcal{B}$ 是一个 Fell 丛。

给定任意一个 $*$-表示 $T\colon C^*(\mathrm{B})\to\mathrm{B}(X)$，存在唯一的 $*$-表示 $T'\colon C^*(\mathrm{B})\to\mathrm{B}(X)$，使得对所有 $b\in\mathrm{B}$，$T'\circ\iota_{\mathcal{B}}(b)=T\circ\iota_{\mathcal{B}}(b)$。这定义了一个保持 G-分次的 $*$-同态 $k\colon C^*(\mathrm{B})\to C^*(\mathrm{B})$，因此它是满射。若 T 是 $C^*(\mathrm{B})$的一个忠实 $*$-表示，则 $T\circ\iota_{\mathcal{B}}\colon \mathrm{B}\to\mathrm{B}(X)$可积为一个表示 T，满足 $T\circ k=T$。因此 k 是内射的。□

定理 5.2。设 B 是群 G 上的 *Fell* 丛。那么，B 是 C^*-可 *amenable* 的，当且仅当 B_H 和 B 都是 C^*-可 *amenable* 的。

证明。“$\mathcal{B}$ 是 C*-可 amenable 的 $\Rightarrow\mathcal{B}_H$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 C*-可 amenable 的”这一蕴含关系（对一般局部紧群）已在 [11,命题 4.10] 中证明。

反过来，假设 $\mathcal{B}_H$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 C*-可 amenable 的。根据 [2, 定义 5.16], $\mathcal{B}$ 是 C*-可 amenable 的，当且仅当双对偶丛 $\mathcal{B}''=\{B_t''\}_{t\in G}=:\mathcal{M}$ 是 W*-可 amenable 的。注意，$\mathcal{M}_H=(\mathcal{B}_H)''$。于是，定理 3.7 表明，$\mathcal{B}$ 是 C*-可 amenable 的，当且仅当$\mathcal{B}_H$ 是 C*-可 amenable 的，且 $\mathcal{M}$是 W*-可 amenable 的。

令 $\pi\colon C^*(\mathrm{B})\to\mathrm{B}(X)$ 为泛表示，$\pi''\colon C^*(\mathrm{B})''\to\mathrm{B}(X)$ 为其正规延拓。由于 $C^*(\mathrm{B})=C^*(\mathrm{B})$，我们可以将 $(B_u)''$ 视为 $C^*(\mathrm{B})''$ 中 $\sum_{t\in u}B_t$ 的 wot-闭包，而 π'' 限制为表示 $T\colon(\mathrm{B})''\to\mathrm{B}(X)$。为构造 M，我们需要 $W_{\mathrm{r}}^*(\mathrm{M})$ 的一个忠实表示。双对偶 B_t''是 $C^*(\mathrm{B})''$ 中 B_t 的 wot-闭包，从而得到一个 $*$-表示 $T\colon\mathrm{M}\to\mathrm{B}(X)$，由 $T_m=\pi''(m)$ 定义，并且在 B_e'' 上忠实。利用忠实表示 $\lambda\otimes T\colon W_{\mathrm{r}}^*(\mathrm{M})\to\mathrm{B}(\ell^2(G)\otimes X)$，可知，对每个 $u\in G$，$W_{\mathrm{r}}^*(\mathrm{M}_u)$ 同构于 $\sum_{t\in u}\lambda_t\otimes T(B_t)$ 的 wot-闭包。此外，$\lambda\otimes T|_{\mathcal{B}}\colon\mathrm{B}\to\mathrm{B}(\ell^2(G)\otimes X)$ 积分为 $\lambda\pi\colon C^*(\mathrm{B})\to\mathrm{B}(\ell^2(G)\otimes X)$，其正规延拓 $(\lambda\pi)''$ 满足 $(\lambda\pi)''(b)=\lambda_t\otimes T_b$，其中 $b\in B_t$。因此，$(\lambda\pi)''((B_u)'')=W_{\mathrm{r}}^*(\mathrm{M}_u)$，从而得到一个乘法的、对合的、逐纤维正规的、压缩的且满射的映射 $\mu\colon(\mathrm{B})''\to\mathrm{M}$。

回顾一下，对于 W*-Fell 丛，W*-可 amen 性等价于 W*逼近性质。给定一个由有限支集函数组成的网 $\{\xi_i\colon G\to(B_H)''\}_{i\in I}$，它见证了 $(\mathcal{B})''$ 的 W*逼近性质，则网 $\{\mu\circ\xi_i\}_{i\in I}$ 见证了M 的 W*逼近性质。□

注 5.3. 蕴含关系“$\mathcal{B}$ C*-可 amenable $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_H$ C*-可 amenable”回答了 Echterhoff 和 Quigg [14,在定理 6.5]之前的评注中提出的一个问题。

蕴含关系“$\mathcal{B}$ 是 C*-可 amenable $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_H$ 且 $\mathcal{B}$ 是 C*-可 amenable”已在 [11] 中证明，所用方法是采用 Bédos 和 Conti 提出的逼近性质刻画（BCAP） [8]。为求完整起见，我们在此回顾这一联系，因为此前的论述已隐含地用到了它。

定理 5.4 (第 3 节 [11])。对于局部紧群上的 *Fell* 丛，*Bédos–Conti* 逼近性质（*BCAP*）等价于 *Exel–Ng* 逼近性质。

由此定理和 [2,定理 6.10], 可知，对于离散群上的 Fell 丛，BCAP 刻画了 C*-可 amen 性。BCAP 在离散情形下的一个优点是，它以映射 Φ 的形式表述：$\mathcal{B}\to\mathcal{B}$，这些映射是完全正压缩映射$\tilde{\Phi}\colon C^*(\mathcal{B})\to C^*(\mathcal{B})$的限制，并保持由 $\iota_{\mathcal{B}}\colon\mathcal{B}\to C^*(\mathcal{B})$ [8, 定理 3.11] 所诱导的 G-分次。这样的映射 Φ 也保持经由 $\iota_{\mathcal{B}}$在 $C^*(\mathcal{B})$上诱导的 G-分次；将其 Φ 限制到 $\Phi\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}$，便会把 BCAP 从 $\mathcal{B}$ 传递到$\mathcal{B}$。

6. Amenability for Green twisted actions

设 (B,G,N,α,τ) 是离散群 G 上的 Green 扭曲作用，即 $\alpha\colon G\to\mathrm{Aut}(B)$ 是由 C*-自同构构成的作用，而 $\tau\colon N\to U\mathcal{M}(B)$ 是满足以下条件的同态

$$\alpha_s(\tau_n)=\tau_{sns^{-1}}\quad\text{and}\quad\alpha_n=\mathrm{Ad}(\tau_n)\qquad(s\in G,\ n\in N).$$

详情请参见 [14, 定义 5.3] 。

考虑通常的半直积 Fell 束 $B\times G\to G$，其运算为 $(b,\ s)(c,\ t)=(b\,\alpha_s(c)\ st)$ 和 $(b,\ s)^*=(\alpha_{s^{-1}}(b^*)\ s^{-1})$。群 N的右作用定义如下：

$$(b,s)\cdot n:=(b\,\tau_n,\ n^{-1}s),\qquad n\in N.$$

该扭曲半直积 *Fell* 丛于是就是轨道丛

$$B \times_N G := (B \times G)/N \;\longrightarrow\; G/N, \qquad [b,s] \longmapsto sN.$$

特别地， sN 上的纤维是 $(B \times_N G)_{sN} = \{[b,s] : b \in B\}$ [14, 定义 5.3]。扭曲交叉积（全交叉积和约化交叉积）分别与 $B \times_N G$ 的全截面 C* 代数和约化截面 C* 代数一致。此外，半直积丛 $B \times G \to G$ 与商映射 $q\colon G \to G/N$ 下的拉回 $q^*(B \times_N G)$ 同构，具体而言，

$$(b,s) \longmapsto ([b,s],s)$$

是 Fell 丛 [14, 的一个同构。定理 5.6]。

$B \times_N G$ 的每个纤维都与 B 典范同构。事实上，对于 $sN \in G/N$，映射

$$B \longrightarrow (B \times_N G)_{sN}, \qquad b \mapsto [b,s],$$

是一个双射。单射性由 $[b,s] = [b',s]$ 推出，因为对于某个 $n \in N$，有 $(b',s) = (b\tau_n, n^{-1}s)$，因此$n = e$ 且 $b' = b$; 满射性则由以下事实得出：将任意代表元 (c,t) 写成满足 $t = n^{-1}s$ 的形式，并注意到 $(c,t) = (c\tau_{n^{-1}}, s)\cdot n$。

定义 6.1. 如果相应的 Fell 丛 $\mathcal{D} := B \times_N G \to G/N$ 具有逼近性质（AP），则称 Green 扭曲作用 (B, G, N, α, τ) 是可 *amenable* 的。

注记 6.2. 通过识别 $B \cong (\mathcal{D})_N$, $b \leftrightarrow [b,e]$，AP 转化为存在由有限支撑函数组成的有界网 $\{a_i : G/N \to B\}_{i\in I} \subset L^2(G/N, B)$，使得对所有 $(s,b) \in G \times B$,

$$\lim_i \Big\| b - \sum_{u \in G/N} a_i(sNu)^*\, b\, \alpha_s(a_i(u)) \Big\| = 0.$$

如果 Green 扭曲作用 (B, G, N, α, τ) 是可 amenable 的，那么它满足弱包含性质，因此

$$B \rtimes_{\alpha,\tau} G \;\cong\; B \rtimes_{\alpha,\tau,r} G.$$

命题 6.3. 设(B, G, N, α, τ) 是一个 *Green* 扭曲作用，且 $\mathcal{D} = B \times_N G \to G/N$ 是相应的扭曲半直积 *Fell* 丛。那么，$\mathcal{D}$ 具有逼近性质，当且仅当诱导作用

$$G/N \curvearrowright Z(B''), \qquad sN \cdot z = \alpha''_s(z), \tag{6.4}$$

是 *W**-可 *amenable* 的。

证明。 根据 [2, 定理 6.10], , Fell 丛具有逼近性质，当且仅当其单位纤维的二重对偶的中心上的相应部分作用是 W*-可 amenable 的。由于 $\mathcal{D}$ 是饱和的，且每个纤维都同构于 B，相应的部分作用便约化为 θ 在 $Z(B'')$ 上的整体作用。

更确切地说，固定 $s \in G$，并将纤维 $\mathcal{D}_{sN}$ 视为一个 B–B 印迹双模。右侧的B作用是通常的作用，而左侧作用由 α_s 给出。取二重对偶后，$\mathcal{D}''_{sN}$ 成为一个B''–B'' 等价双模，其左侧作用为 $b \cdot x = \alpha''_s(b)\, x$。根据 [2, 备注 4.5], , 这样的双模确定一个同构 $\pi_s\colon Z(B'') \to Z(B'')$，满足对所有 $x \in \mathcal{D}''_{sN}$ 和 $a \in Z(B'')$，均有 $xa = \pi_s(a)x$ 。由于左侧作用为 α''_s，可验证 $\pi_s = \alpha''_{s^{-1}}|_{Z(B'')}$。因此，由纤维 sN 实现的自同构为 $\theta_{sN} = (\pi_s)^{-1} = \alpha''_s|_{Z(B'')}$，从而得到 (6.4) 中的整体作用。□

上述证明展示了将 C*-作用、W*-作用、Fell 丛和 W*-Fell 丛这几种情形下的可 amen 性理论联系起来后所产生的推理方式。在这里，Anantharaman-Delaroche 的经典可 amen 性概念 [4–6] 通过 Fell 丛及其 W* 对应物这一统一框架，扩展到了 Green 扭曲作用。

这些联系并非偶然。在 [2], W*-可 amen 性 W*-Fell 丛的定义中，采用了与每个丛自然关联的部分或全局 W*-作用的可 amen 性来表述，并证明其等价于 W*-逼近性质（W*逼近性质）。如果一个 Fell 丛的双对偶 W*-Fell 丛是 W*-可 amen 的，则称该 Fell 丛是 C*-可 amen 的；而逼近性质刻画了 C*-可 amen 性 [2, 定理 6.10]。根据这些定义，一个 W* （分别为 C*）作用在 Anantharaman-Delaroche 意义下是可 amen 的，当且仅当其半直积丛是 W*-（分别为 C*-）可 amen 的。

参考文献

[1] Fernando Abadie。《部分作用的包络作用与高井对偶》。《泛函分析杂志》，197(1):14–67，2003。[2] Fernando Abadie、Alcides Buss 和 Damián Ferraro。《部分作用与 Fell 丛的可 amen 性及逼近性质》。《巴西数学学会公报（新系列）》，53(1):173–227，2022。[3] Fernando Abadie 和 Damián Ferraro。《群上的 Fell 丛的等价性》。《算子理论杂志》，81 319，2019 2 273( ): – 。[4] C. Anantharaman-Delaroche。《局部紧群在 von Neumann 代数上的可均作用》。《斯堪的纳维亚数学杂志》，45(2):289–304，1979。[5] C. Anantharaman-Delaroche。《局部紧群在 von Neumann 代数上的可均作用 II》。《斯堪的纳维亚数学杂志》，50(2):251–268，1982。[6] Claire Anantharaman-Delaroche。《非交换动力系统与可均性》。《数学年刊》，279(2):297–315，1987。[7] Saad Baaj 和 Georges Skandalis。《 C^* K 2 6 683 721, - 1989

Hopf 代数与 Kasparov 等变理论》。《算子理论》，( ): – 。[8] Erik Bédos 和 Roberto Conti。《离散群上的正定性与 Fell 丛》。《数学杂志》，311，2025。[9] Alcides Buss 和 Siegfried Echterhoff。《Fell 丛截面 C^*-代数上的对偶余作用的极大性及其应用》。《数学研究》，229(3):233–262，2015。[10] Alcides Buss、Siegfried Echterhoff 和 Rufus Willett。《局部紧群在 C^*-代数上的作用的可 amen 性与弱包含》。《美国数学会回忆录》，301(1513):v+88，2024。[11] Alcides Buss 和 Damian Ferraro。《非交换动力系统与 Fell 丛的可和性刻画》 arXiv 预印本，2025。[12] John B. Conway。《泛函分析教程》，《数学研究生教材》第 96 卷。施普林格出版社，纽约，1985。[13] Siegfried Echterhoff、Steve Kaliszewski、John Quigg 和 Iain Raeburn。《 C^*-动力系统不可约性定理的范畴论方法》。美国数学会，2006。[14] Siegfried Echterhoff 和 John Quigg。《离散群在 C^*-代数上的诱导余作用》。《加拿大数学杂志》，51(4):745–770，1999。[15] Ruy Exel。《Fell 丛的可 amen 性》。《纯粹与应用数学杂志》，492:41–73，1997。[16] Ruy Exel。《部分动力系统、Fell 丛及其应用》，《数学调查与专著》第 224 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017。[17] J. M. G. Fell 和 R. S. Doran。《 *-代数、局部紧群与 Banach $*$-代数丛的表示》，《纯粹与应用数学》第 125–126 卷。学术出版社，马萨诸塞州波士顿，1988。[18] Damián Ferraro。《与子群相关的截面 C*-代数》。《加拿大数学杂志》，页 1–26，2024。[19] Stefaan Vaes。《局部紧量子群作用的酉实现》。《泛函分析杂志》，180(2):426–480，2001。[20] Stefaan Vaes。《一种新的诱导与不可约性结果方法》。《泛函分析杂志》，229(2):317–374，2005。[21] Heinrich Zettl。《算子三元环的刻画》。《数学进展》，48(2):117–143，1983。