关于 Erd˝os 和英厄姆的一个问题

Fredy Yip*

arXiv:2512.16528v1 [math.CA] 18 Dec 2025

摘要

我们给出一个简短而初等的辐角，否定地回答了 Erd˝os 和英厄姆提出的问题。

Erd˝os 和英厄姆证明，他们所考虑的一个陶伯型估计等价于：对于任意实数 t 和任意满足 $\sum_k a_k^{-1} < \infty$ 的正整数序列 $1 < a_1 < a_2 < \cdots$，$1 + \sum_k a_k^{-1-it}$ 均不为零。我们推翻了这一结论。事实上，我们证明，对于任意复数 λ 和任意非零实数 t，都存在一个正整数序列 $1 < a_1 < a_2 < \cdots$，使得 $\sum_k a_k^{-1} < \infty$ 且 $\sum_k a_k^{-1-it} = \lambda$。

1 引言

在他们 1964 年关于陶伯型估计的论文中，Erd˝os 和英厄姆 [2] 询问了下列类似 ζ 函数的级数在 $\mathrm{Re} = 1$ 这条直线上是否可能有零点，其中该级数是收敛的。

问题 1.1 (Erd˝os 和英厄姆 [2])。 设 $1 < a_1 < a_2 < \cdots$ 是一个（有限或无限）整数序列，满足 $\sum_k a_k^{-1} < \infty$。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，以下命题是否成立？

$$1 + \sum_k \frac{1}{a_k^{1+it}} \neq 0?$$

此问题被列为 Bloom 的网站 [1]上 Erd˝os 问题集中的第 967 题。Erd˝os 和英厄姆之所以关注问题 1.1，是因为他们证明了它等价于以下陶伯型估计。

定理 1.2 (Erd˝os 和英厄姆 [2], 定理 4)。 设 $1 < a_1 < a_2 < \cdots$ 是一个（有限或无限）整数序列，满足 $\sum_k a_k^{-1} < \infty$。以下命题等价：

1. $1 + \sum_k a_k^{-1-it} \neq 0$ *for all* $t \in \mathbb{R}$.
2. 对于任意非递减的 $f\colon\ \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$，其在 $[0, 1)$ 上为零，

$$f(x) + \sum_k f(x/a_k) \sim \left(1 + \sum_k a_k^{-1}\right) x$$

因为 $x \to \infty$ 意味着 $f(x) \sim x$，当 $x \to \infty$ 时。

我们用一个简短而初等的辐角，对问题 1.1 给出否定回答。事实上，我们证明，对于任意实数 $t \neq 0$ 和任意复数 λ，都存在一个正整数序列 $1 < a_1 < a_2 < \cdots$，使得 $\sum_k a_k^{-1} < \infty$ 且 $\sum_k a_k^{-1-it} = \lambda$。

定理 1.3. 对于任意实数 $t \neq 0$ 和任意复数 λ，存在一个子集 $S \subseteq \mathbb{Z}^{\geq 2}$使得

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} < \infty,$$

*剑桥大学三一学院，英国剑桥大学。电子邮箱：**fy276@cam.ac.uk**。

$$\sum_{n\in S}\frac{1}{n^{1+it}}=\lambda.$$

由定理 1.3 的证明可知，事实上我们可以要求：对于任意正整数N和任意实数 $\delta>0$， S是无限的，$S\subseteq\mathbb{Z}^{\geq N}$且$\sum_{n\in S}\frac{1}{n}\leq|\lambda|+\delta$。

2 证明

为证明定理 1.3，我们将迭代地构造所需的集合 S。在每一步中，我们向 S 中加入有限个元素，使$\sum_{n\in S}\frac{1}{n^{1+it}}$显著接近目标值 λ，同时不过度增大$\sum_{n\in S}\frac{1}{n}$。

实施这一策略的关键在于注意到函数 $\frac{1}{n^{1+it}}$的变化足够缓慢。特别地，当 ϵ较小时，和式 $\sum_{n=x}^{(1+\epsilon)x}\frac{1}{n^{1+it}}$的模为 $\Theta(\epsilon)$，辐角 $\arg(x)$ 为$O(\epsilon)$。我们用下面的引理对这一观察作形式化表述。

引理 2.1。对于任意正整数 N 和任意复数 c，存在一个有限集 $S'\subseteq\mathbb{Z}^{\geq N}$，使得

$$\left|c-\sum_{n\in S'}\frac{1}{n^{1+it}}\right|\leq O\left(|c|^2\right),$$
$$\sum_{n\in S'}\frac{1}{n}\leq|c|,$$

其中隐含常数（可取为 $1+|1+it|$）只取决于 t。

证明。取 $S'=\emptyset$ 足以得到 $c=0$，因此我们假设 $c\neq0$。不失一般性，我们可以假设 $N\geq\max(|c|^{-2},|c|^{-1})$。取 $x\geq N$ 使得 x^{-it} 平行于 c。令$s=\lfloor x|c|\rfloor\geq1$。令 $S'=[x,x+s)\cap\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}^{\geq N}$为一个由 s 个整数构成的集合。我们有

$$\sum_{n\in S'}\frac{1}{n}\leq\frac{|S'|}{x}=\frac{s}{x}\leq|c|.$$

由中值定理，我们有

$$\left|\sum_{n\in S'}\frac{1}{n^{1+it}}-\frac{|S'|}{x^{1+it}}\right|\leq|S'|\max_{n\in S'}\left|\frac{1}{n^{1+it}}-\frac{1}{x^{1+it}}\right|\leq|S'|\max_{n\in S'}|n-x|\sup_{y\in[x,x+s]}\left|\frac{1+it}{y^{2+it}}\right|$$
$$\leq s^2\frac{|1+it|}{x^2}\leq|1+it||c|^2.$$

由于 $\frac{|S'|}{x^{1+it}}$平行于 c，我们有

$$\left|\frac{|S'|}{x^{1+it}}-c\right|=\left|\left|\frac{|S'|}{x^{1+it}}\right|-|c|\right|=\left|\frac{s}{x}-|c|\right|\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{N}\leq|c|^2.$$

因此，

$$\left|c-\sum_{n\in S'}\frac{1}{n^{1+it}}\right|\leq(1+|1+it|)|c|^2.$$

如所愿。 □

定理 *1.3* 的证明。 我们将 S 构造为互不相交的有限集 $S_k \subseteq \mathbb{Z}^{\geq 2}$ 的并，其中 $k \in \mathbb{Z}^+$。我们递归地构造 S_k。令 $r = (2 + 2|1 + it|)^{-1}$。

对于 $k \in \mathbb{Z}^+$，给定 $S_1, \ldots, S_{k-1}$，取一个大于 $S_1, \ldots, S_{k-1}$ 中所有元素的 $N_k \geq 2$。令 $\lambda_k = \lambda - \sum_{n \in S_1 \cup \cdots \cup S_{k-1}} \frac{1}{n^{1+it}}$ 若 $|\lambda_k| \leq r$，令 $c_k = \lambda_k$；否则，令 c_k 平行于 λ_k，且范数为 r。我们用引理 2.1 中的 S' 构造 S_{k+1}，其中取 $N = N_k$ 和 $c = c_k$。

如此得到的整数有限集 S_k 两两不相交，因为 S_k 中的任一元素都大于 $S_1, \ldots, S_{k-1}$中的任一元素。我们取 $S = \cup_k S_k$。

由引理 2.1,

$$\left| c_k - \sum_{n \in S_k} \frac{1}{n^{1+it}} \right| \leq (1 + |1 + it|)|c_k|^2 = \frac{|c_k|^2}{2r} \leq \frac{|c_k|}{2}.$$

因此，注意到 $|\lambda_k - c_k| = |\lambda_k| - |c_k|$，我们有

$$|\lambda_{k+1}| = \left| \lambda_k - \sum_{n \in S_k} \frac{1}{n^{1+it}} \right| \leq |\lambda_k - c_k| + \left| c_k - \sum_{n \in S_k} \frac{1}{n^{1+it}} \right| \leq |\lambda_k| - |c_k|/2.$$

因此，随着 k 增大，$|\lambda_k|$ 递减。若 $|\lambda_k| > r$，则有

$$|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k| - r/2.$$

因此，对于所有 $k \geq 2|\lambda|/r$，$|\lambda_k| \leq r$。而对于 $|\lambda_k| \leq r$，我们有

$$|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k|/2.$$

因此，$\lambda_k \to 0$ 呈指数级。由引理 2.1，$\sum_{n \in S_k} \frac{1}{n} \leq |c_k|$。因此，

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \sum_k \sum_{n \in S_k} \frac{1}{n} \leq \sum_k |c_k| \leq \sum_k |r_k| < \infty,$$

并且级数 $\sum_{n \in S} \frac{1}{n^{1+it}}$ 绝对收敛。因此，要证明级数 $\sum_{n \in S} \frac{1}{n^{1+it}}$ 收敛到 λ，只需考虑子序列

$$\sum_{n \in S_1 \cup \cdots \cup S_k} \frac{1}{n^{1+it}} = \lambda - \lambda_{k+1}$$

部分和，它确实在 $k \to \infty$ 时趋于 λ。 □

3 结束语

我们在此考虑的初等方法不适用于要求 a_k 为有限序列的情形，因为其中会出现许多数论上的微妙问题。

猜想 3.1. 对于任意有限集 $S \subseteq \mathbb{Z}^{\geq 2}$ 以及任意实数 t,

$$1 + \sum_{n \in S} \frac{1}{n^{1+it}} \neq 0.$$

特别地，厄尔德什–斯特劳斯所考虑的特殊情形 $S = \{2, 3, 5\}$ 仍未解决。

问题 3.2 (厄尔德什–斯特劳斯 [2])。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，是否都成立？

$$1 + 2^{-1-it} + 3^{-1-it} + 5^{-1-it} \neq 0?$$

致谢。作者谨向TimothyGowers表示感谢，感谢其对本文呈现方式所提出的宝贵建议和意见。

参考文献

[1] T. F. Bloom。《厄尔多什问题》第967题，2025年。访问日期：2025年12月18日。[2] P. Erd¨ os 和 A. Ingham。算术Tauber定理。《算术学报》，9：341–356，1964年。