arXiv:2512.16535v1 [math.DG] 18 Dec 2025

自旋手术上的非负标量曲率与诺维科夫猜想

JINMIN WANG

Abstract. 设 M 是一个闭非球面流形。假设有理强 Novikov 猜想对 $\pi_1(M)$ 成立。我们证明，在 M 上沿诱导基本群同态为平凡同态的区域进行的任意自旋手术中，每个具有非负标量曲率的完备度量都是里奇平坦的。特别地，在 M 与一个自旋流形的连通和上，任意具有非负标量曲率的完备度量都是里奇平坦的。

1. 引言

数十年来，黎曼流形上标量曲率的研究一直在微分几何和几何拓扑中发挥着核心作用。格罗莫夫和劳森 $[5,6]$, 利用指标理论，舍恩和丘成桐则独立地 $[11,12]$, 利用极小超曲面方法，证明了 n环面不允许存在正标量曲率的黎曼度量。更一般地，格罗莫夫–劳森–罗森伯格猜想认为，没有非球面流形允许存在正标量曲率度量。对于基本群满足有理强 Novikov 猜想 $[10,24]$, 的非球面流形，以及维数至多为五的非球面流形 $[2,7]$，该猜想已得到证明。

正标量曲率度量不存在这一结论，对于更一般的可扩张流形也成立。可扩张流形由格罗莫夫–劳森引入 $[5,6]$, ，其中包括环面与闭自旋流形的连通和。苏–张[15] 运用指标理论方法，针对可扩张流形与非自旋闭流形的连通和，建立了这一障碍的定量版本。随后，Wang– Zhang [20]和苏 [14]证明，可扩张流形与任意自旋流形的连通和不允许具有正标量曲率的度量。通过极小超曲面方法获得的、关于非自旋连通和上正标量曲率不存在的相关结果，见 $[1,2,3]$。

本文将上述正标量曲率度量不存在的结论推广到范围显著更广的一类流形。

定理 1.1. 设 M^n 是一个闭非球面流形， N 是一个自旋流形。假设有理强 *Novikov* 猜想对 $\pi_1(M)$成立。那么连通和 $M\#N$ 不允许存在任何具有正标量曲率的完备度量。此外， $M\#N$ 上的任何具有非负标量曲率的完备度量都是里奇平坦的。

第一作者获得国家自然科学基金项目 12501169 的部分资助。1

我们指出，在定理 1.1 中，流形 N 可以是非紧致的，而且 $M\#N$ 上的度量不要求具有有界几何。$\pi_1(M)$ [10, 中的有理强 Novikov 猜想断言，从 M 的 K-同调到 $\pi_1(M)$ 的群 C^*-代数的 K-理论的组装映射是有理单射；精确表述见猜想 2.4。读者可参阅 [4] ，了解近期进展以及已知满足该猜想的群类综述。迄今尚无有理强 Novikov 猜想的反例。

我们进一步将定理 1.1 推广到非球面流形上的自旋手术。

定理 1.2。 设 M^n 是一个闭非球面流形，且 $\Omega \subset M$ 是一个光滑区域。假设

$$\pi_1(\Omega) \to \pi_1(M) \text{ is the trivial map.}$$

设 N^n 是一个带边界的自旋流形，且 $i\colon \partial N \to \partial\Omega$ 是一个保持自旋结构的微分同胚[1]。令 $Z := (M\backslash\Omega)\cup_{\partial\Omega} N$。若有理强 *Novikov* 猜想对 $\pi_1(M)$成立，则 Z 不具有任何具有正标量曲率的完备度量。此外， Z 上的任何具有非负标量曲率的完备度量都是里奇平坦的。

通过令 Ω 为 M中的一个小球，定理 1.1 是定理 1.2 的一个特例。假设 $\pi_1(\Omega)$ 在 $\pi_1(M)$ 中的映射为平凡映射，这一点至关重要；在例 4.4 中，我们构造了一个闭非球面流形上的自旋手术，当这一条件不成立时，该手术允许存在正标量曲率度量。

我们的证明依赖于狄拉克算子方法。一个基本要素是 Xie 和 Yu [22, 定理 A]提出的关于高阶指标的相对指标定理。受 [15, 16], 中方法的启发，我们构造了相对高指标的一个显式代表元，并在群 C^*-代数的 K-理论中对其进行计算。我们还遵循与 [19]中类似的思想，给出一个基于狄拉克算子的里奇平坦性结论证明。

作为一个直接应用，在定理 1.2 中取 $N = \partial\Omega \times [0, 1)$，我们得到以下推论。

推论 1.3。 设 M^n 是一个闭非球面流形，且$\Omega \subset M$ 是一个光滑区域。假设

$$\pi_1(\Omega) \to \pi_1(M) \text{ is the trivial map,}$$

并且有理强 *Novikov* 猜想对 $\pi_1(M)$成立。那么 $M\backslash\Omega$ 不具有任何标量曲率为正的完备度量。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾高指标和强 Novikov 猜想。第 3 节证明定理 1.2 的一个简化版本，确立自旋手术上不存在一致正标量曲率度量。定理 1.2 的完整证明见第 4 节。

[1]尽管 M 本身不一定是自旋的，但 $\pi_1(\Omega) \to \pi_1(M)$的平凡性意味着，$\Omega$ 和$\backsim\partial\Omega$ 从自旋万有覆盖 M继承了典范自旋结构。

致谢。作者谨向 Zhizhang Xie 致谢，感谢他所进行的有益讨论。

2. Preliminaries on higher indices

本小节回顾椭圆微分算子的高指标理论。更多细节见 [21, 23]。

定义 2.1. 设 X 为一个适当度量空间，且 Γ 在 X 上适当地等距作用。一个 Γ-X-模是一个希尔伯特空间 H，其上配备了一个 $C_0(X)$-作用φ 和一个 Γ-作用 π，使得

$$\pi(\gamma)\big(\varphi(f)\xi\big) = \varphi(f^\gamma)\big(\pi(\gamma)\xi\big), \qquad \forall f \in C_0(X),\ \gamma \in \Gamma,\ \xi \in H,$$

其中 $f^\gamma(x) := f(\gamma^{-1}x) \in C_0(X)$。

若一个 Γ-X-模满足可容许 条件，则称其为

- H 是非退化的，也就是说，表示 φ是非退化的；
- H 是标准的，也就是说， $C_0(X)$ 中没有非零函数作为紧算子作用。

定义 2.2. 设 H 是一个可容许的 Γ–X-模， T 是 H上的有界线性算子。

(1) T 的传播度是

$$\mathrm{prop}(T) = \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in \mathrm{supp}(T)\},$$

其中 $\mathrm{supp}(T)$ 是 $X \times X$ 中集合 x, y的补集；对于该集合中的点，不存在 f_1, $f_2 \in C_0(X)$ 满足 $f_1 T f_2 = 0$ 且 $f_1(x)f_2(y) \neq 0$。(2) 如果对于所有 $f \in C_0(X)$， fT和 Tf都是紧致的，则称 T是局部紧的。(3) 如果对于所有 $\gamma \in \Gamma$， $\gamma T = T\gamma$，则称 T 是 Γ-等变的。

定义 2.3. 设 H 是一个可容许的 Γ-X-模， $B(H)$ 是 H上的有界算子代数。 X 的等变 ***Roe*** 代数记为 $C^*(X)^\Gamma$，是由 $B(H)$中所有局部紧、 Γ-等变且有限传播的算子生成的 C^*-代数。

例如，若 X 是一个完备黎曼流形，且 E 是 Γ-等变$\widetilde{\ }$厄米特丛，定义在 X 上，那么 $L^2(X,\ E)$ 是一个 Γ-M-模。特别地，如果 Γ 还在 X 上余紧地作用，那么我们有 $C^*(X)^\Gamma \cong C_r^*(\Gamma) \otimes \mathcal{K}$，因此

$$K_*(C^*(\widetilde{M})^\Gamma) \cong K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

这里，$C_r^*(\Gamma)$ 表示 Γ 的约化群 C^*-代数，它是由 Γ 生成的，并赋予由 Γ 在 $\ell^2(\Gamma)$ 上的左正则作用所诱导的算子范数。

现在我们来回顾椭圆算子高阶指标的定义。为简单起见，假设$\widetilde{\ }$ M 是一个闭黎曼流形， $\Gamma = \pi_1(M)$且 $X = M$，因此$\widetilde{\ }$ Γ 在 M上余紧地作用。连续函数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 若满足非递减、为奇函数且满足以下条件，则称为归一化函数

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = \pm 1.$$

例如，对于任意 $b>0$， $F(x)=bx/\sqrt{1+b^2x^2}$。

设 E 是 M 上的厄米特丛， D_M 是作用于 E上的一阶自伴椭圆算子。令 $D_{\widetilde{M}}$和 E分别表示它们在 M上的提升。那么 $H=L^2(M,\ E)$ 是一个可容许的 Γ-M-模。

对于 K_0-指标，假设 E 带有一个 $\mathbb{Z}_2$-分次，且 $D_{\widetilde{M}}$ 为奇数：

$$D_{\widetilde{M}}=\begin{pmatrix}0 & D^+_{\widetilde{M}}\\ D^-_{\widetilde{M}} & 0\end{pmatrix}.$$

设 χ 是一个归一化函数。由于 χ 为奇数， $\chi(D_{\widetilde{M}})$ 也为奇数且自伴：

$$F(D_{\widetilde{M}})=\begin{pmatrix}0 & U\\ V & 0\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

定义

$$W=\begin{pmatrix}1 & U\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -V & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & U\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad e_{1,1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

并令

$$P=We_{1,1}W^{-1}=\begin{pmatrix}1-(1-UV)^2 & (2-UV)U(1-VU)\\ V(1-UV) & (1-VU)^2\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

那么， P是 $M_2((C^*_r(\Gamma)\otimes\mathcal{K})^+)$中的一个幂等元，并且$P-e_{1,\,1}\in M_2(C^*_r(\Gamma)\otimes\mathcal{K})$。 $D_{\widetilde{M}}$ 的高阶指标为

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}}):=[P]-[e_{1,1}]\in K_0(C^*(\widetilde{M})^\Gamma)\cong K_0(C^*_r(\Gamma)).$$

对于非分次算子，其 K_1-指标为

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}})=[e^{2\pi i\frac{F(D_{\widetilde{M}})+1}{2}}]\in K_1(C^*(\widetilde{M})^\Gamma)\cong K_1(C^*_r(\Gamma)).$$

令 $K_*(M)^\Gamma$ 表示 M的 Γ-等变 K-同调，它与 $K_*(M)$同构。 $K_*(M)$中的元素由 Dirac 型算子 D_M表示，因此我们得到组装映射

$$\mu=\mathrm{Ind}_\Gamma\colon K_*(M)\to K_*(C^*(\widetilde{M})^\Gamma)\cong K_*(C^*_r(\Gamma)),\qquad [D_M]\mapsto\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}}).$$

猜想 2.4（非球面流形基本群的有理强 Novikov 猜想）。 设 M 是一个闭非球面流形，且 $\Gamma=\pi_1(M)$。那么，如果

$$\mu\colon K_*(M)\otimes\mathbb{Q}\to K_*(C^*_r(\Gamma))\otimes\mathbb{Q}$$

是单射。

关于任意有限表示群的强 Novikov 猜想，读者可参阅 [21] 。

上述映射 $\mu=\mathrm{Ind}_\Gamma$ 确实可分解并经由极大群 C^*-代数$C^*_{\max}(\Gamma)$。根据 [8], 如果下述有理强 Novikov 猜想的极大版本成立，定理 1.1 和定理 1.2 也成立。

猜想 2.5 (非球面流形基本群的极大有理强Novikov猜想)。 设 M 是一个闭非球面流形，且 $\Gamma = \pi_1(M)$。那么，如果满足以下条件， Γ 就满足极大有理强*Novikov*猜想

$$\mu_{\max}\colon K_*(M)\otimes\mathbb{Q}\to K_*(C_r^*(\Gamma))\otimes\mathbb{Q}$$

是单射。

现在设 M 是 M 的正则 Γ-覆盖，它是完备的，但可能不是紧致的。在这种情况下， $C^*(M)^\Gamma$ 不一定与 $C_r^*(\Gamma)$ 一致。设 D_M 是一个 Dirac 型算子， $D_{\widetilde{M}}$ 是它的提升。若 D_M 在一个紧集之外可逆，则 $D_{\widetilde{M}}$ 的高阶指标仍在 $K_*(C_r^*(\Gamma))$ 中有定义。

更确切地说，设 $K\subset M$ 是紧致的， K 是它的提升。假设 $D_{\widetilde{M}}$ 在 K 之外可逆，这意味着存在 $\delta>0$ 使得

$$\int_{\widetilde{M}}|D_{\widetilde{M}}\sigma|^2\geq\delta^2\int_{\widetilde{M}}|\sigma|^2$$

对于所有支集位于 K 之外的光滑截面 σ 。那么，如上所定义的高阶指标类 $\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}})$ 属于

$$K_*\big(C^*(\mathcal{N}_R(\widetilde{K}))^\Gamma\big)\cong K_*(C_r^*(\Gamma)),$$

其中 $\mathcal{N}_R(K)$ 是 K 的某个 R 邻域， $R>0$ 使得 Γ 在其上余紧地作用。精确定义见 [22] 。

3. Non-existence of uniformly positive scalar curvature

本节中，我们证明定理 1.2 的一个简单版本，以说明其关键思想。这个版本可由经典的指标理论工具推出，而完整版本的证明需要额外的新要素，将在下一节给出。

命题 3.1。 设 M^n 是一个闭非球面流形，且 $\Omega\subset M$ 是一个光滑区域。假设

$$\pi_1(\Omega)\to\pi_1(M)\text{ is the trivial map.}$$

设 N^n 是一个带边界的自旋流形，且 $i\colon\partial N\to\partial\Omega$ 是一个保持自旋结构的微分同胚。令 $Z:=(M\backslash\Omega)\cup_{\partial\Omega}N$。若有理强 *Novikov* 猜想对 $\pi_1(M)$ 成立，则 Z 不存在具有一致正标量曲率的完备度量，也就是说，其标量曲率下界为某个正数。

证明。 我们首先说明 Ω 上的自旋结构。记 $\Gamma=\pi_1(M)$，并令 $\widetilde{M}$ 为 M的万有覆盖。由于 M 是可缩的，它自动具有自旋结构。然而， Γ在 M 上的作用可能不保持所选的自旋结构，因为 M 本身可能不具有自旋结构。尽管如此，存在一个 Γ 的二重覆盖 $\widetilde{M}$，其作用于 M 上的保持自旋结构；参见 [10, 第 3 节.B)]。由于映射 $\widetilde{M}\to M$ 的 $\pi_1(\Omega)\to\pi_1(M)$ 是平凡的， Ω 到 M 的提升是不交并 $\Omega:=\Gamma\times\Omega$，

其中 Γ 通过平移作用。由于 Γ的作用保持了$\Gamma \times \Omega \subset M$上的自旋结构，所诱导的 Γ作用也保持该自旋结构。因此，Ω从 M继承了唯一的自旋结构。

设 g 是 Z 上具有一致正标量曲率的黎曼度量，即

$$\mathrm{Sc}_g \geq \delta > 0 \quad \text{on } Z.$$

如上所述，Ω 在 M 中的提升分解为 $\Omega = \Gamma \times \Omega$。

定义 Z 的 Γ-覆盖为

$$\widetilde{Z} = (\widetilde{M} \setminus \widetilde{\Omega}) \cup_{\partial\widetilde{\Omega}} (\Gamma \times N),$$

这是对 M 的一个 Γ-等变自旋手术，其中 $N := \Gamma \times N$ 沿着 $\partial\Omega = \Gamma \times \partial\Omega$。注意，通常 Z 并非 Z 的万有覆盖。

设 $\widetilde{g}$ 为其上的提升度量 $\widetilde{Z}$。根据假设，

$$\mathrm{Sc}_{\widetilde{g}} \geq \delta > 0.$$

首先假设 M 是自旋流形，因此 Γ作用保持 M上的自旋结构，故 Z。记其旋量丛为 $S(TZ)$，相应的狄拉克算子记为 $D_{\widetilde{Z}}$。由Lichnerowicz公式，对于任意 $\sigma \in C_c^\infty(Z,\ S(TZ))$，

$$\int_{\widetilde{Z}} |D_{\widetilde{Z}}\sigma|^2 = \int_{\widetilde{Z}} |\nabla\sigma|^2 + \frac{\mathrm{Sc}_{\widetilde{g}}}{4}|\sigma|^2. \tag{3.1}$$

因此，

$$\|\sigma\|^2 \geq \frac{\delta}{4}\|\sigma\|^2,$$

这表明 $D_{\widetilde{Z}}$ 可逆。

根据上一小节中的构造，由于 $D_{\widetilde{Z}}$ 在一个 Γ-余紧集之外可逆（事实上，该集合为空），它定义了一个高阶指标

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{Z}}) = 0 \in K_n(C_r^*(\Gamma)).$$

Let

$$Z_1 = \Omega \cup_{\partial\Omega} N$$

设其为一个完备自旋流形，带有度量 g_1，满足

$$g_1|_{N_1 \setminus \mathcal{N}_r(\Omega)} = g|_{N \setminus \mathcal{N}_r(\partial N)}$$

对于充分小的 $r > 0$，其中 $\mathcal{N}_r(\cdot)$ 表示 r-邻域。

定义

$$\widehat{Z} = \Gamma \times Z_1,$$

Z_1的等距副本的不交并，配备平移 Γ作用以及 Γ等变度量 $\widehat{g}$。Z 上的自旋结构由 N上的自旋结构和 $\Gamma \times \Omega \subset M$上的自旋结构诱导而来。令 $S(TZ)$表示其旋量丛，$D_{\widehat{Z}}$ 表示其狄拉克算子。由于 g_1 在某个紧致集之外具有一致正标量曲率，它定义了一个指标类

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widehat{Z}}) \in K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

$\widetilde{\quad}$ $\widehat{\quad}$流形 Z 和 Z 在 $\Gamma\times\partial\Omega$的某个邻域之外等距，且$\widetilde{\quad}$移除这些等距部分并将剩余部分粘合起来，便得到 M。因此，根据相对指标定理 [22,定理A],

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{Z}})-\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widehat{Z}})=\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}})\in K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

因此,

$$0=\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}})+\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widehat{Z}})\in K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

$\widehat{\quad}$现在我们证明这个类非零。由于 $Z=\Gamma\times Z_1$ 是一个不交并,

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widehat{Z}})=\mathrm{Ind}(D_{Z_1})\cdot[\mathrm{id}],$$

其中，$\mathrm{Ind}(D_{Z_1})$是 Z_1上狄拉克算子的弗雷德霍姆指标，而 $[\mathrm{id}]$ 是 $K_0(C_r^*(\Gamma))$中恒等元的类。特别地，我们有

$$\mu([1])=[\mathrm{id}],$$

其中， μ 是猜想 2.4 中的组装映射， $[1]$ 表示 $K_*(M)$中的平凡椭圆算子。因此,

$$\mu([D_M]+\mathrm{Ind}(D_{Z_1})\cdot[1])=\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}})+\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widehat{Z}})=0,$$

其中， $[D_M]$是 M上的狄拉克算子的 K-同调类。

Let

$$\mathrm{ch}\colon K_*(M)\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow H_*(M,\mathbb{Q})$$

是有理陈特征；由标准的梅耶–维托里斯论证可知它是一个同构。根据阿蒂亚–辛格指标定理,

$$\begin{cases}\mathrm{ch}([1])=[1]\in H_0(M,\mathbb{Q}),\\ \mathrm{ch}([D_M])=(\hat{A}(TM))^*=[M]+\text{lower degree terms},\end{cases}$$

其中， $*$表示庞加莱对偶， $[M]$是 $H_n(M,\ \mathbb{Q})$中的基本类。在复合映射

$$H_*(M,\mathbb{Q})\xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}}K_*(M)\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{\mu}K_*(C_r^*(\Gamma))\otimes\mathbb{Q},$$

类 $\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}})+\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widehat{Z}})$ 有一个非零原像

$$[M]+\text{lower degree terms}\in H_*(M,\mathbb{Q}).$$

由猜想 2.4 中 μ 的单射性可知,

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widetilde{M}})+\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{\widehat{Z}})\neq 0.$$

这与前面的等式矛盾，证明至此完成。

在一般情形下，当 Γ-平移不保留 M 上的自旋结构$\widetilde{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widehat{\quad}$时，存在一个二重覆盖 Γ，它在 M 上作用，并且 Z 和 Z 保持自旋结构。按照 [10, 第 3.B 节）中的方法计算 C_r^*（Γ）的指标，会得到相同的矛盾。□

4. Non-negative scalar curvature on spin surgeries

本节证明定理 1.2 的其余部分。证明的关键要素是利用 Callias 型算子构造相对指标，以及定量的庞加莱不等式。

为说明主要思想，我们先证明， Z 上任何具有非负标量曲率的完备黎曼度量都必为标量平坦。

定理 *1.2* 的证明：标量平坦部分。设 g 是 Z 上的一个具有非负标量曲率的黎曼度量。我们先证明 g 是标量平坦的。反设 Sc_g 在某处为正，也就是说，

$$\mathrm{Sc}_g \geq 0 \text{ on } Z, \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Sc}_g(y) \geq \delta > 0, \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

对某个 $x \in Z$ 和 $\delta > 0$。

我们采用命题 3.1 证明中的相同记号。设 $\Gamma = \widetilde{\ } \widetilde{\ }\pi_1(M)$，并令 M表示 M的万有覆盖。令 Z为 Γ-$\widetilde{\ }Z$ 的覆盖，它由粘合 M 和 $\Gamma \times N$得到，并赋予提升度量 $\widetilde{g}$。令$Z_1 = \Omega \cup_{\partial\Omega} N$ 为一个配备黎曼度量g_1 的完备自旋流形，使得

$$g_1|_{N_1 \setminus \mathcal{N}_r(\Omega)} = g|_{N \setminus \mathcal{N}_r(\partial N)}.$$

设 $Z = \Gamma \times Z_1$ 为配备 Γ-平移和Γ-等变度量 $\widehat{g}$的自旋流形。为简单起见，我们假设 Γ保持 M 和 Z上的自旋$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$结构。

Set

$$X = \widetilde{Z} \sqcup \widehat{Z}, \qquad g_X = \widetilde{g} \sqcup \widehat{g},$$

并考虑狄拉克算子

$$D_X = D_{\widetilde{Z}} \sqcup (-D_{\widehat{Z}})$$

作用于 $S(TX)$上。

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$分别记 Z 和 Z中 $\Gamma \times N$ 的副本为 N 和 N。令$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }Y = N \sqcup N$。设 $\mathrm{id}: S(TN) \to S(TN)$ 为恒等映射。设 $\rho: N \to [0,1]$为一个光滑函数，使得它在 $N_{2r}(\partial N)$上满足 $\rho \equiv 0$，并在 $N_{3r}(\partial N)$外满足 $\rho \equiv 1$。将其延拓为 Z 和 Z_1上的零函数，并将其提升到 X，仍记为 ρ。

定义算子

$$\Psi := \rho U := \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}$$

作用于 $S(TX)$。更确切地说，设 σ是 $S(TX)$ 的一个光滑截面，并在 Y 上写作 $\rho\sigma = \widetilde{\rho\sigma} \sqcup \widehat{\rho\sigma}$。那么

$$\Psi(\sigma) = \widehat{\rho\sigma} \sqcup -\widetilde{\rho\sigma}.$$

令 $\varepsilon > 0$ 充分小。考虑

$$B = D_X + \varepsilon\Psi.$$

对于任意紧支撑光滑截面 σ ，属于 $S(TX)$,

$$\int_X |B\sigma|^2 = \int_X |D\sigma|^2 + \varepsilon\langle(\Psi D_X + D_X\Psi)\sigma,\sigma\rangle + \varepsilon^2\rho^2|\sigma|^2. \tag{4.1}$$

~ ^在 $Y = N \sqcup N$上，我们有

$$D_Y U + U D_Y = 0,$$

so

$$\Psi D_X + D_X\Psi = -Uc(\nabla\rho) \geq -|\nabla\rho|.$$

设 $m = \sup|\nabla\rho|$。 $\nabla\rho$ 的支集是有限个 Γ-平移的互不相交并，模 Γ紧致。

利用 Lichnerowicz公式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_X |B\sigma|^2 &\geq \int_X \Big(|\nabla\sigma|^2 + \frac{\mathrm{Sc}_{g_X}}{4}|\sigma|^2\Big) + \varepsilon^2\int_{\{\rho=1\}}|\sigma|^2 - \varepsilon m\int_{\{\rho<1\}}|\sigma|^2 \\ &\geq \int_X \Big(|\nabla\sigma|^2 + \frac{\mathrm{Sc}_{g_X}}{4}|\sigma|^2\Big) + \varepsilon^2\|\sigma\|^2 - (\varepsilon^2+\varepsilon m)\int_{\{\rho<1\}}|\sigma|^2.\end{aligned} \tag{4.2}$$

设 $B_\delta(\widetilde{x})$是 $B_\delta(x)$在 X中的提升。利用 $B_\delta(x)$上的 $\mathrm{Sc}_g \geq \delta$ ，

$$\|B\sigma\|^2 \geq \int_X |\nabla\sigma|^2 + \frac{\delta}{4}\int_{B_\delta(\widetilde{x})} |\sigma|^2 + \varepsilon^2\|\sigma\|^2 - (\varepsilon^2+\varepsilon m)\int_{\{\rho<1\}}|\sigma|^2. \tag{4.3}$$

由于 $B_\delta(x)$ 和 $\{\rho<1\}$ 紧致且距离有限，根据 [17, 引理 2.7]，存在常数 $C>0$ ，使得

$$\int_{\{\rho<1\}}|\sigma|^2 \leq C\int_X|\nabla\sigma|^2 + C\int_{B_\delta(\widetilde{x})}|\sigma|^2.$$

将其代入 (4.3)，得到

$$\|B\sigma\|^2 \geq \varepsilon^2\|\sigma\|^2 + (1 - C\varepsilon^2 - Cm\varepsilon)\int_X|\nabla\sigma|^2 + \left(\frac{\delta}{4} - C\varepsilon^2 - Cm\varepsilon\right)\int_{B_\delta(\widetilde{x})}|\sigma|^2.$$

若 $\varepsilon>0$ 足够小，使得两个系数均为正，则

$$\|B\sigma\|^2 \geq \varepsilon^2\|\sigma\|^2,$$

因此 B 可逆。然而，根据下文的引理 4.3， B 在$K_*(C_r^*(\Gamma))$中定义了一个非零类，这就产生了矛盾。至此，标量平坦部分的证明完成。□

下面给出指标类的构造。我们首先为算子 B建立一个估计。

引理 4.1. [18, 引理 2.11] 设 χ 是支集包含于 $\{\rho=1\}$ 中的任意光滑截断函数。则对任意 $\lambda>0$,

$$\big\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\rho\big\| \leq \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2}}.$$

证明。 设 φ是定义在 X 上任意一个光滑且紧支集的自旋旋量，并令

$$\sigma = (1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\varphi.$$

Then

$$\begin{aligned}\int_X \langle (1+\lambda^2+b^2B^2)\sigma,\sigma\rangle &= \int_X \langle (1+\lambda^2+b^2D_X^2+b^2\varepsilon^2\Psi^2+b^2\varepsilon(D_X\Psi+\Psi D_X))\sigma,\sigma\rangle \\ &\geq \int_X \langle (1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2\rho^2-b^2\varepsilon|\nabla\rho|)\sigma,\sigma\rangle.\end{aligned}$$

定义

$$\zeta = \max\{0, 1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2\rho^2-b^2\varepsilon|\nabla\rho|\}.$$

Then

$$\int_X \langle (1+\lambda^2+b^2B^2)\sigma,\sigma\rangle \geq \|\sqrt{\zeta}\,\sigma\|^2.$$

Thus

$$\|\varphi\|^2 \geq \|\sqrt{\zeta}(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\varphi\|^2,$$

因此，算子 $\sqrt{\zeta}(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}$ 的范数至多为 1。在 χ的支集上，$\sqrt{\zeta} = \sqrt{1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2}$，因此

$$\|\rho(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\| = \frac{\|\rho\sqrt{\zeta}(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\|}{\sqrt{1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2}}.$$

证明至此完成。 □

引理 4.2. 设 $F_b = F_b(B)$，其中 $F_b(x) = bx/\sqrt{1+b^2x^2}$。那么对于任意支集包含在 $\{\rho = 1\}$ 中且利普希茨常数为 L的光滑截断函数 χ，有

(1) $\|[F_b,\chi]\| \leq 6\frac{L\sqrt{b}}{\sqrt{\varepsilon}}$, *(2)* $\|(F_b^2-1)\chi\| \leq \frac{1}{b\varepsilon}$。

证明。由于

$$F_b = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{bB}{1+\lambda^2+b^2B^2}\,d\lambda \tag{4.4}$$

在强算子拓扑下，我们计算：

$$[F_b,\chi] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{bB}{1+\lambda^2+b^2B^2},\chi\right]d\lambda.$$

利用恒等元

$$\begin{aligned}\left[\frac{bB}{1+\lambda^2+b^2B^2},\chi\right] &= [bB,\chi](1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1} \\ &\quad - bB(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}(bB[bB,\chi]+[bB,\chi]bB)(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1},\end{aligned}$$

并记

$$[B,\chi] = c(\nabla\chi) = \rho\, c(\nabla\chi)\,\rho,$$

我们使用引理 4.1 来估计每一项。由于 $|\nabla\chi| \leq L$，我们得到

$$\begin{aligned}&\|[bB,\chi](1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}\|\\ \leq& b|\nabla\chi|\cdot\|\rho(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\|\cdot\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\|\\ \leq& bL\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\leq\frac{L\sqrt{b}}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/4}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}b^2B^2[bB,\chi](1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}\|\\ \leq& b|\nabla\chi|\cdot\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}b^2B^2\|\cdot\|\rho(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\|\cdot\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\|\\ \leq&\frac{b}{L}\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\leq\frac{L\sqrt{b}}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/4}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}bB[bB,\chi](1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}bB\|\\ \leq& b|\nabla\chi|\cdot\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1}bB\|\cdot\|\rho(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}\|\cdot\|(1+\lambda^2+b^2B^2)^{-1/2}bB\|\\ \leq& bL\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2+b^2\varepsilon^2}}\cdot1\leq\frac{L\sqrt{b}}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/4}}.\end{aligned}$$

综上，我们得到

$$\left\|\left[\frac{bB}{1+\lambda^2+b^2B^2},\chi\right]\right\|\leq\frac{3L\sqrt{b}}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/4}}$$

对 $\lambda\in[0,\infty)$ 积分即可证明 **(1)**。

对于 **(2)**，注意到:

$$\|(1+b^2B^2)^{-1}(1-\chi)\|\leq\|(1+b^2B^2)^{-1/2}\|\cdot\|(1+b^2B^2)^{-1/2}\rho\|\leq\frac{1}{\sqrt{1+b^2\varepsilon^2}}<\frac{1}{b\varepsilon}.$$

□

引理 4.3. 定理 *1.2* 的证明中的算子 B 定义了一个类 $\mathrm{Ind}_\Gamma(B)\in K_n(C_r^*(\Gamma))$。此外，若有理强 *Novikov* 猜想对$\Gamma=\pi_1(M)$成立，则 $\mathrm{Ind}_\Gamma(B)\neq0$。

证明。 Ind(B) 的构造取决于 M 的维数的奇偶性。**情形 1：** $\dim M$ **是偶数**。

取一个光滑函数 $\chi\colon N\to[0,1]$，使得

- χ 的支集包含于 $\{\rho=1\}$,
- $\chi\equiv1$ 远离 Z 的 M 部分,
- χ 是 L-Lipschitz。

写作

$$F_b=F_b(B)=\frac{bB}{\sqrt{1+b^2B^2}}=\begin{pmatrix}0&U\\V&0\end{pmatrix}$$

按照 $S(TX)$ 上的自然分次。设

$$W=\begin{pmatrix}1 & U\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -V & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & U\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad e_{1,1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

and

$$P=We_{1,1}W^{-1}=\begin{pmatrix}1-(1-UV)^2 & (2-UV)U(1-VU)\\ V(1-UV) & (1-VU)^2\end{pmatrix}.$$

为得到 $C_r^*(\Gamma)$ 中的一个元素，定义

$$\overline{P}=\sqrt{1-\chi}P\sqrt{1-\chi}+\chi e_{1,1}=e_{1,1}+\sqrt{1-\chi}(P-e_{1,1})\sqrt{1-\chi}.$$

于是 $\overline{P}\in M_2((C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K})^+)$ 且 $P-e_{1,1}\in M_2(C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K})$。

在引理 4.2 中取充分大的通用常数 $a>0$，并选取 $b=a/\varepsilon$ 和 $L=\varepsilon/a$，则有 $\|P-P\|<1/200$，从而确保

$$\|\overline{P}\|\le 3,\quad \|\overline{P}^2-\overline{P}\|\le 1/20.$$

因此，P 的谱包含于 $\{z\in\overline{\mathbb{C}}:\ \mathrm{Re}(z)\neq 1/2\}$。令 Θ 为定义在 $\{z\in\mathbb{C}$ 上的全纯函数，满足 $\mathrm{Re}(z)\neq 1/2\}$，其定义为

$$\Theta(z)=\begin{cases}0, & \mathrm{Re}(z)<1/2\\ 1, & \mathrm{Re}(z)>1/2.\end{cases}$$

于是 $\Theta(\overline{P})$ 是 $M_2((C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K})^+)$ 中的一个幂等元，并定义

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(B)=[\Theta(\overline{P})]-[e_{1,1}]\in K_0(C_r^*(\Gamma)).$$

情形 2： 维数 M **为奇数**。

使用与上文相同的截断函数 χ 和数 b，我们定义

$$Q=e^{2\pi i\frac{F_b+1}{2}},$$

and

$$\overline{Q}=\sqrt{1-\chi}Q\sqrt{1-\chi}+\chi\cdot 1=1+\sqrt{1-\chi}(Q-1)\sqrt{1-\chi}.$$

那么 $\overline{Q}\in(C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K})^+$，其中 $\overline{Q}-1\in C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K}$，且 $\overline{Q}$ 可逆。定义

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(B)=[\overline{Q}]\in K_1(C_r^*(\Gamma)).$$

由于有限传播算子在 $C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K}$ 中稠密，存在 $d>0$使得：

- 当 n 为偶数时，存在 $P_{\text{有限传播}}\in M_2((C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K})^+)$，使得 $P_{\text{有限传播}}-\overline{P}\in M_2(C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K})$，$\|P_{\text{有限传播}}-P\|<1/200$，$P_{\text{有限传播}}$ 的传播度不超过 d；
- 当 n 为奇数时，存在 $Q_{\text{fp}}\in(C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K})^+$，使得 $Q_{\text{fp}}-Q\in C_r^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K}$，$\|Q_{\text{fp}}-Q\|<1/200$，$Q_{\text{fp}}$ 的传播度不超过 d；

那么，当我们在定义中将 P 替换为 P_{fp}（分别将 Q 替换为 Q_{fp}）时，上述指标类 $\mathrm{Ind}_\Gamma(B)$ 得以保留。

现在我们证明上述指标类非零。令 $\varepsilon > 0$ 如定理 1.2 的证明中所述，并令 $b,\ L,\ d > 0$ 如上。设 N^+ 为一个带边界 $\partial N^+ = \partial N$ 的紧致自旋流形，使得当限制在 $\{\chi < 1\}$ 的 $2d$-邻域上时，N^+ 与 N 同胚。

置 $Z^+ = (M \backslash \Omega) \cup_{\partial\Omega} N^+$。类似地，我们定义

$$X^+ = \widetilde{Z}^+ \sqcup \widehat{Z}^+ = \big((\widetilde{M} \backslash \widetilde{\Omega}) \cup_{\partial\widetilde{\Omega}} (\Gamma \times N^+)\big) \sqcup (\Gamma \times Z^+),$$

配备一个 Γ-等变度量 g_{X^+}，该度量在 $\mathcal{N}_{2d}(\{\chi < 1\})$ 上与 g_X 重合。注意，Γ 在 X^+ 上等距且余紧地作用。我们考虑作用于 $S(TX^+)$ 上的狄拉克算子 D_{X^+}，并且

$$B_{X^+} = D_{X^+} + \varepsilon\Psi$$

如定理 1.2 的证明中所定义。

如上所述的相同构造和公式定义了算子 $P^+{}_{\mathrm{fp}}$（分别为 $Q^+{}_{\mathrm{fp}}$）以及 $K_*(\overline{C}_r^*(\Gamma))$ 中的类 $\mathrm{Ind}(B_{X^+})$。现在注意到，算子 P_{fp} 和 $P^+{}_{\mathrm{fp}}$（分别为 Q_{fp} 和 $\overline{Q}^+{}_{\mathrm{fp}}$）都作用于 $\{\chi < 1\}$ 上的旋量，且传播度不超过 d，因此它们只取决于 $\{\chi < 1\}$ 的 $2d$-邻域上的几何数据。因此，我们得到

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(B) = \mathrm{Ind}_\Gamma(B_{X^+}) \in K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

注意到 Γ 在 X^+ 上余紧地作用。因此，连接 B_{X^+} 和 D_{X^+} 的显然线性同伦表明

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(B_{X^+}) = \mathrm{Ind}_\Gamma(D_{X^+}) \in K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

现在，采用与命题 3.1 证明中相同的指标理论论证可知，在有理单射

$$H_*(M, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{ch}^{-1}} K_*(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\mathrm{Ind}_\Gamma} K_*(C_r^*(\Gamma)) \otimes \mathbb{Q},$$

指标类 $\mathrm{Ind}_\Gamma(D_{X^+})$ 在 $H_*(M, \mathbb{Q})$ 中有一个非零原像，由下式给出

$$([\hat{A}(TM)^*] + \mathrm{Ind}(D_{\Omega \cup_{\partial\Omega} N^+}) \cdot [1]) = [M] + \text{lower degree terms},$$

其中 $\Omega \cup_{\partial\Omega} N^+$ 是一个闭自旋流形，且 $[1] \in H_0(M, \mathbb{Q})$。至此，证明完成。

□

现在，我们通过证明任何这样的度量都是里奇平坦的，来完成定理 1.2 的证明。经典地，这种里奇平坦性可由 Kazdan 的一个结果推出 [9]；另见 [6]。在此，我们给出一种仅依赖狄拉克算子技术的证明，其灵感来自 [19]。

定理 *1.2* 的证明：里奇平坦部分。设 g 是 Z 上一个具有非负标量曲率的完备度量。由第一部分可知，Z 上的 $\mathrm{Sc}_g = 0$ 。

假设 Ric_g 不恒等于零。那么存在 $\delta > 0$ 和 $x \in Z$，使得

$$|\mathrm{Ric}_g| \geq \delta > 0 \text{ on } B_\delta(x).$$

此外，设 $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ 是 x 附近的局部标准正交基。于是我们可以假设

$$|\mathrm{Ric}_g(e_1)| \geq \delta > 0 \text{ on } B_\delta(x).$$

沿用证明第一部分中的记号。设 ψ 是一个光滑的 Γ-等变截断函数，其支集包含于 $B_\delta(\widetilde{x})$ 中，并且在 $B_{\delta/2}(\widetilde{x})$ 上满足 $\psi \equiv 1$ 。我们仍将其在 $B_\delta(\widetilde{x})$ 上的提升记为 $\{e_i\}$ ，并将旋量联络记为 ∇ 。于是，对于任意光滑的紧支集旋量 σ,

$$\sum_{j=1}^{n} c(e_1)(\nabla_{e_1}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_1} - \nabla_{[e_1,e_j]})\sigma = -\frac{1}{2}c(\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}(e_1))\cdot\sigma.$$

因此,

$$\Big\langle \sum_{j=1}^{n} c(e_1)(\nabla_{e_1}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_1} - \nabla_{[e_1,e_j]})\sigma, -\frac{1}{2}c(\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}(e_1))\cdot\psi\sigma \Big\rangle = \frac{1}{4}\psi|\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}(e_1)|^2|\sigma|^2.$$

在 $B_\delta(\widetilde{x})$ 上积分并应用斯托克斯定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\delta\int_{B_{\delta/2}(\widetilde{x})}|\sigma|^2 \leq \int_{B_\delta(\widetilde{x})}\frac{1}{4}\psi|\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}(e_1)|^2|\sigma|^2\\
=&\sum_{j=1}^{n}\int_{B_\delta(\widetilde{x})}\Big\langle\nabla_{e_j}\sigma, -\frac{1}{2}\nabla_{e_1}\left(c(e_1)c(\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}(e_1))\psi\sigma\right)\Big\rangle - \int_{B_\delta(\widetilde{x})}\Big\langle\nabla_{e_1}\sigma, -\frac{1}{2}\nabla_{e_j}\left(c(e_1)c(\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}(e_1))\psi\sigma\right)\Big\rangle\\
&-\int_{B_\delta(\widetilde{x})}\Big\langle\nabla_{[e_1,e_j]}\sigma, \frac{1}{2}c(\mathrm{Ric}_{\widetilde{g}}(e_1))\psi\sigma\Big\rangle\\
\leq& C_1\int_{B_\delta(\widetilde{x})}\big(|\nabla\sigma|^2 + 2|\langle\nabla\sigma,\sigma\rangle|\big).
\end{aligned}$$

其中某个 $C_1 > 0$ 仅取决于 n ，以及 $B_\delta(x)$ 上的 g 。

根据庞加莱不等式 [17, 引理 2。7], 存在 $C_2 > 0$ 满足 t

$$\int_{B_\delta(\widetilde{x})}|\sigma|^2 \leq C_2\int_{B_\delta(\widetilde{x})}|\nabla\sigma|^2 + C_2\int_{B_{\delta/2}(\widetilde{x})}|\sigma|^2.$$

因此，对于任意 $\alpha > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
\delta^2\cdot\int_{B_{\delta/2}(\widetilde{x})}|\sigma|^2 &\leq C_1\int_{B_\delta(\widetilde{x})}\left(|\nabla\sigma|^2 + \frac{1}{\alpha}|\nabla\sigma|^2 + \alpha|\sigma|^2\right)\\
&\leq \left(C_1 + \frac{1}{\alpha}\right)\int_{B_\delta(\widetilde{x})}|\nabla\sigma|^2 \qquad (4.5)\\
&\quad + \alpha C_1C_2\int_{B_\delta(\widetilde{x})}|\nabla\sigma|^2 + \alpha C_1C_2\int_{B_{\delta/2}(\widetilde{x})}|\nabla\sigma|^2
\end{aligned}$$

取 $\alpha = \delta^2/(2C_1C_2)$，并令

$$C_3 = \frac{2}{\delta^2}\left(C_1 + \frac{1}{\alpha} + \alpha C_1 C_2\right).$$

于是我们得到

$$\int_{B_{\delta/2}(\widetilde{x})} |\sigma|^2 \le C_3 \int_{B_\delta(\widetilde{x})} |\nabla\sigma|^2 \le C_3 \|\nabla\sigma\|^2. \tag{4.6}$$

因此，由式 (4.2) 可得

$$\|B\sigma\|^2 \ge \frac{1}{2}\int_X |\nabla\sigma|^2 + \frac{1}{2C_3}\int_{B_{\delta/2}(\widetilde{x})} |\sigma|^2 + \varepsilon^2\|\sigma\|^2 - (\varepsilon^2 + \varepsilon m)\int_{\{\rho<1\}} |\sigma|^2. \tag{4.7}$$

现在，采用与第一部分相同的证明即可得到矛盾。 □

现在我们给出一个例子，说明定理 1.2 中 $\pi_1(\Omega) \to \pi_1(M)$ 消失这一条件是必要的。

例 4.4. 设 M^n 是一个闭的渐近自旋流形，且满足 $n \ge 5$，例如n维环面。假设 $\pi_1(M)$ 由 M 中有限个两两不交的嵌入圆 S^1 表示，其管状邻域同胚于 $S^1 \times B^{n-1}$。移去这些管状邻域，并粘接上 $B^2 \times S^{n-2}$，得到一个闭流形 M_1。那么 M_1 是单连通的。

最后，令 $Z := M_1 \# M_1$，这是对 M 的一次自旋手术。注意，Z 是单连通的，并且 Z 上的狄拉克算子的 KO-指标为零，因为 Z 是双重流形。因此，Z 具有正标量曲率度量 [13]。

References

[1] Shuli Chen、Jianchun Chu 和 Jintian Zhu，《正标量曲率度量与非渐近分量》，2023 年。arXiv:2312.04698。[2] Otis Chodosh 和 Chao Li，《广义肥皂泡与正标量曲率流形的拓扑》，Ann. of Math. (2) **199** (2024)，第 2 期，707–740。MR4713021[3] Jialong Deng，《可扩张长度结构与标量曲率》，Ann. Global Anal. Geom.**60** (2021)，第 2 期，217–230。MR4291609[4] Sherry Gong、Jianchao Wu 和 Guoliang Yu，《诺维科夫猜想、保体积微分同胚群与希尔伯特–哈达玛空间》，Geom. Funct. Anal. **31**(2021)，第 2 期，206–267。MR4268302[5] Mikhael Gromov 和 H. Blaine Lawson Jr.，《基本群存在时的自旋与标量曲率 I》，Ann. of Math. (2) **111** (1980)，第 2 期，209–230。MR569070[6] ,完备黎曼流形上的正标量曲率与狄拉克算子，Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. **58** (1983), 83–196（1984）。MR720933[7]Misha Gromov，《不存在具有正标量曲率的非渐近 5 维流形》，arXiv:2009.05332（2020）。[8] Hao Guo、Zhizhang Xie 和 Guoliang Yu，《极大 Roe 代数的 Lichnerowicz 消失定理》，Math. Ann. **385**(2023)，第 1–2 期，717–743。MR4542729[9] Jerry L. Kazdan，《完备流形上的正标量曲率变形》，Math. Ann. **261** (1982)，第 2 期，227–234。MR675736[10] Jonathan Rosenberg，C^*-代数、正标量曲率与诺维科夫猜想，Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. **58** (1983)，197–212（1984）。MR720934

[11] R. Schoen 和 S. T. Yau, 《正标量曲率流形的结构》, Manuscripta Math. 28（1979年）, 第 1–3 期, 159–183。MR535700[12] R. Schoen 和 Shing Tung Yau, 《不可压缩极小曲面的存在性与具有非负标量曲率的三维流形的拓扑》, Ann. of Math. (2) 110（1979年）, 第 1 期, 127–142。MR541332[13] Stephan Stolz, 《正标量曲率的单连通流形》, Ann. of Math. (2) 136（1992年）, 第 3 期, 511–540。MR1189863[14] Guangxiang Su, 《关于可扩张流形的一点注记》, 2025年。arXiv:2510.18329。[15] Guangxiang Su 和 Weiping Zhang, 《正标量曲率与连通和》, 2017年。arXiv:1705.00553。[16] Jinmin Wang 和 Zhizhang Xie, 《删去子集的球面及其度量的标量曲率刚性》, 2024 年。arXiv:2407.21312。[17] ,《退化扭曲积空间的标量曲率刚性》, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 12（2025年）, 1–37。MR4853305[18] Jinmin Wang、Zhizhang Xie、Guoliang Yu 和 Bo Zhu, 《粗可嵌入空间的粗 Baum-Connes 猜想》, 2024 年。arXiv:2411.15070。[19] Jinmin Wang 和 Bo Zhu, 《底谱的精确估计与标量曲率刚性》, 2024 年。arXiv:2408.08245。[20] Xiangsheng Wang 和 Weiping Zhang, 《关于完备自旋流形上的广义 Geroch 猜想》, Chinese Ann. Math. Ser. B 43（2022）, 第 6 期, 1143–1146。MR4519608[21] Rufus Willett 和 Guoliang Yu, 《高指标理论》, 第 189 卷, 剑桥大学出版社, 2020年。[22] Zhizhang Xie 和 Guoliang Yu, 《相对高指标定理、微分同胚与正标量曲率》, Adv. Math. 250（2014）, 35–73。MR3122162[23] Guoliang Yu, 《局部化代数与粗 Baum-Connes 猜想》, K理论 11（1997）, 第 4 期, 307–318。MR1451759[24] ,《有限渐近维数群的诺维科夫猜想》, Ann. of Math. (2) 147（1998）, 第 2 期, 325–355。MR1626745

(王晋民) State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences电子邮箱地址: jinmin@amss.ac.cn