arXiv:2512.16593v1 [physics.atom-ph] 18 Dec 2025

利用幻数原子核μ子原子的光谱学，对超越标准模型玻色子给出自洽界限

K. A. Beyer[1], * 和 N. S. Oreshkina[1]1 *Max-Planck-Institut für Kernphysik, Saupfercheckweg 1, 69117 Heidelberg, Germany*

迄今为止，μ子原子的光谱学是提取核电荷密度参数最精确的技术。μ子波函数与原子核的大范围重叠，使μ子原子对核参数具有极高的灵敏度；也正因如此，它们成为检验超越标准模型（BSM）物理学的理想体系。这引发了关于自洽性的担忧，因为同一组数据既用于提取核参数，也用于检验其与BSM模型的一致性。我们将这两个步骤结合起来，自洽地提取核参数和BSM参数。我们表明，数据与BSM耦合为零相符，并得到了稳健的排除界限。我们还指出，这些BSM耦合会影响参数拟合，使核参数发生变化，并将其与仅基于量子电动力学（QED）的拟合结果进行比较。

引言： μ子原子光谱学是一种成熟的方法，可用于提取原子核性质，例如均方根（rms）电荷半径 [1–3]。与电子相比，束缚μ子的质量更大，因此其波函数与原子核的重叠显著增加，从而对核结构更加敏感。核结构参数的提取依赖于将最先进的量子电动力学计算与实验数据进行拟合 [4]。然而，对 $\mu-^{208}$铅 [5, 6] 的光谱学测量显示，其结果与理论预测之间存在显著差异；同样的问题也存在于 $\mu-^{90}$锆 [7] 和 $\mu-^{120}$锡 [8]中。由于这一谜题，此后人们投入了大量精力来改进量子电动力学计算。从历史上看，理论不确定度中最大的贡献，因此也被推测为造成这一差异的原因，来自核极化；近期对其开展的研究 [9]发现，核极化不足以弥合这一差异。其他量子电动力学效应，例如μ子自能修正和相对论反冲效应，分别在 [10]和 [11], 中得到改进。理论研究的进展近期与对实验数据的全面重新评估相呼应，由此对这些元素进行了新的拟合，并解决了 ^{90}锆 [12, 13]中的异常。

魔幻核 $\mu-^{90}$锆、 $\mu-^{120}$锡和$\mu-^{208}$铅的能谱尤其值得关注，因为量子电动力学计算所需的核性质完全由核电荷密度 $\rho_C(\mathbf{r})$所表征。由于核基态自旋为 0，因此不存在与核自旋相关的效应，核电荷密度呈球对称 $\rho_C(\mathbf{r}) = \rho_C(r)$，使其能谱相比其他μ子原子 [3, 14]相对简单。原则上，可以从电子散射实验中提取电荷分布的径向形状；然而实际上，可探测的动量转移范围有限，因此其形状存在相当大的不确定性 [15]。在下文中，我们将假设核电荷密度服从归一化的费

核电荷密度的归一化费米分布

$$\rho_C(\mathbf{r}) = \frac{1}{-8\pi a^3 \mathrm{Li}_3\left(-\exp\left(\frac{c}{a}\right)\right)} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{r-c}{a}\right)} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$为多对数函数。参数 c 和 a 是通过对谱数据进行拟合而确定的自由参数。这些参数确定均方根电荷半径，其定义为

$$r_{\mathrm{rms}}^2 = \int d^3r r^2 \rho_C(\mathbf{r}) = 12a^2 \frac{\mathrm{Li}_5\left(-\exp\left(\frac{c}{a}\right)\right)}{\mathrm{Li}_3\left(-\exp\left(\frac{c}{a}\right)\right)}. \tag{2}$$

高精度以及μ子波函数与核波函数之间较大的重叠，为检验超越标准模型（BSM）物理学提供了理想条件。尽管粒子物理标准模型取得了诸多成功，但众所周知它并不完备。或许其最著名的缺陷是宇宙中的暗物质成分，但重子不对称性等其他现象也无法在标准模型中得到解释 [16]。然而，存在大量旨在解决这些缺陷的扩展标准模型理论，需要检验的参数空间十分庞大。在高精度前沿寻找超出标准模型物理，传统上需要选定一个具体的超出标准模型模型，计算其对某个可观测量的影响，然后将其与测量结果进行比较。一般而言，这种比较需要了解QED参数；在当前情况下，例如均方根电荷半径，这些参数通常是通过对同一组实验数据进行单独拟合得到的：这里的数据是$\mu-^{90}$锆、 $\mu-^{120}$锡或 $\mu-^{208}$铅 [17]的谱。这引发了对自洽性的担忧 [18]。因此，本文旨在提取出若干现象学超出标准模型模型的自洽界限，同时通过将数据直接拟合为“QED + BSM”，研究这些模型对量子电动力学参数提取的影响。

超出标准模型的贡献： 我们在此考虑的超出标准模型模型纯属现象学模型；关于具体模型，请读者参阅其他地方的大量文献。在标准模型中加入一种与μ子和至少一种核子耦合的玻色子，会产生一种作用于束缚μ子 [19]的额外力，因此影响原子能谱。拉格朗日量密度

* 联系作者

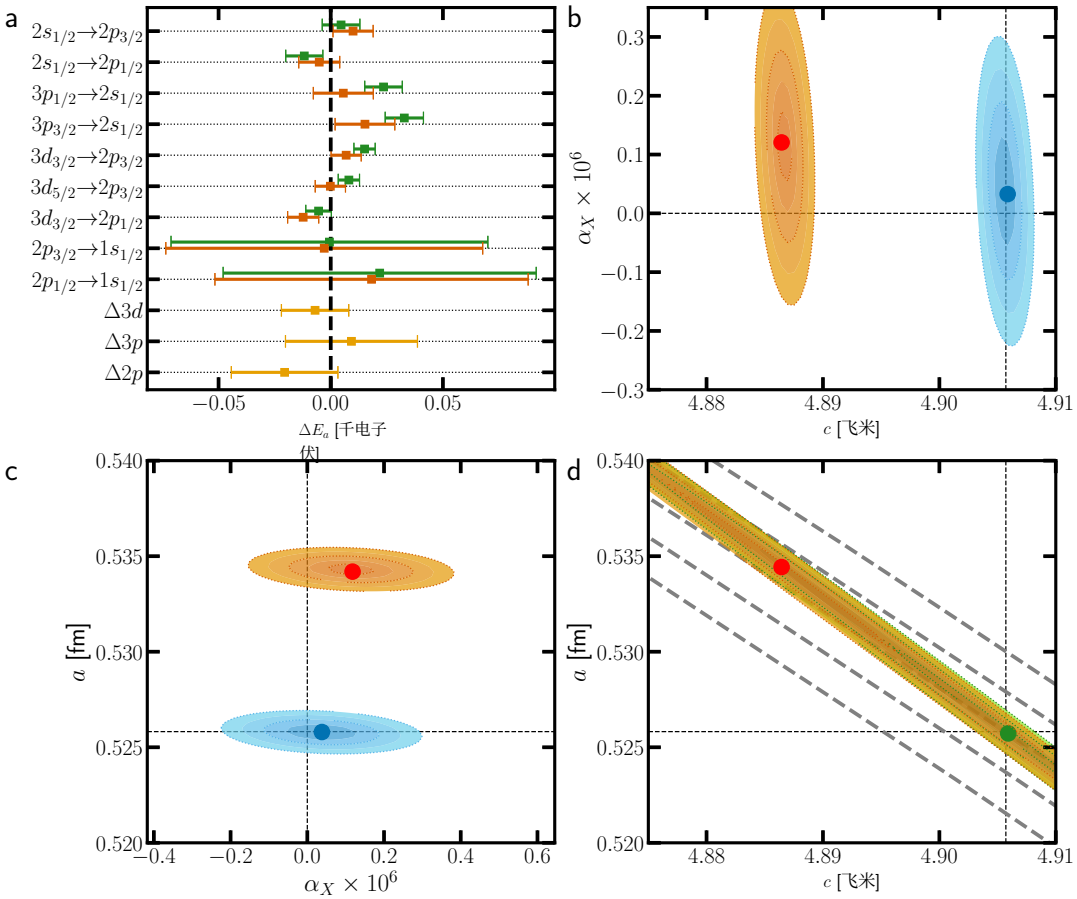

图1. 文中所述的 $\mu-^{90}$锆拟合图。此处展示无质量标量玻色子 X的结果。a）图中以橙色显示拟合 ΔE_a^{Pb}后的能量残差。在绿色中，我们展示先前针对 $\alpha_X = 0$的拟合。b）、c）和d）展示三个自由参数的似然轮廓，虚线表示“仅QED情况”拟合的 ′最佳拟合参数。橙色轮廓对应于“QED+超出标准模型”拟合的最佳拟合参数 ′处的截面。为方便起见，我们还以浅蓝色展示了在仅QED最佳拟合参数处穿过超出标准模型拟合似然面的相同截面。这突出显示了这些参数与拟合的一致性，尽管橙色区域看起来似乎相距甚远。虚线表示这些仅QED最佳拟合参数。在图d）中，黑色实线标示出均方根电荷半径恒定曲线，绿色椭圆表示仅QED情况下的似然轮廓。

定义这种假想新玻色子X 与标准模型费米子 f 耦合的拉格朗日量密度为

$$\mathcal{L}_\varphi \supset g_f^\varphi \varphi(x)\bar{f}(x)f(x), \qquad \mathcal{L}_Z \supset g_f^Z Z_\nu(x)\bar{f}(x)\gamma^\nu f(x) \tag{3}$$

其中， $\varphi(x)$ 和 $Z_\nu(x)$ 分别是标量玻色子和矢量玻色子的波函数，而 g_f 是耦合常数。本文中，由于核基态自旋为零，我们仅讨论标量和矢量；与自旋耦合的赝标量和轴矢量，其耦合受到极大抑制。请注意，本文始终用标签‘μ’表示 μ子量，而非时空指标。

我们采用原子核的经典非相对论描述，在这种描述中，原子核完全由其密度 $\rho_n(r)$ 描述；在本例中，该密度具有球对称性。因此，由于加入了新的玻色子 X，原子核产生了一个超越标准模型势

$$V_X^{\mathrm{BSM}}(\mathbf{r}) = -\xi_X N_n \alpha_X \int \rho_n(r) \frac{\exp\left(-m_X|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r', \tag{4}$$

其中 $\alpha_X = g_\mu^X g_n^X/4\pi$ 表示新玻色子 X介导的 μ子与核子之间的耦合强度， m_X 是玻色子的质量，而 $\xi_\varphi = \gamma^0$ 和$\xi_Z = -1$。 N_n 是原子核中的核子数 n 。请注意，若 X 与质子和中子耦合，则对两种核子的耦合强度 α_X 不必相同。质子和中子的密度也同样如此。不过，由于我们会发现 $\alpha_X \ll 1$可用核电荷分布近似所有分布 [20]。

数据拟合： 原则上，必须将超越标准模型势纳入狄拉克方程中，以自洽地求解 μ子势。然而，由于 $\alpha_X/\alpha_{\mathrm{QED}} \ll 1$我们将分析限制在超越标准模型耦合的最低阶，

因此，我们得到态 i的结合能

$$E_i[c,a,\alpha_X,m_X] = E_i^{\rm QED}[c,a] + \Delta E_i^{\rm BSM}[\alpha_X,m_X], \quad (5)$$

with

$$\Delta E_i^{\rm BSM}[\alpha_X,m_X] = \int d^3x \mu_i^\dagger(\mathbf{x}) V_X^{\rm BSM}(\mathbf{x}) \mu_i(\mathbf{x}). \quad (6)$$

此处我们明确标出了自由参数对结果的依赖。一般而言，超出标准模型修正确实取决于自由参数 c 和 a，不过我们注意到，这些参数的任何微小变化都属于高阶效应 [21, 22]。因此，在计算超出标准模型修正时，我们将采用 [13]中纯量子电动力学拟合对应的 μ子波函数。参数 c 和 a 在“量子电动力学”与“量子电动力学 +超出标准模型”拟合之间的差异很小，这进一步验证了这一简化是合理的。

我们对式（5）中结合能的量子电动力学贡献的处理与文献 [12, 13]完全相同。详情请参阅这些论文中关于量子电动力学部分的处理过程；此处仅概述关键方面。有限核尺寸、乌林势 [23], 维希曼-克罗尔 [24],和卡伦-萨布里 [25] 均通过势纳入，因此在所有阶上都得到考虑。需要注意的是，这些效应本身是完整真空极化贡献的微扰级数中的首项。核极化 [9], 、缪子自能 [10], 和核反冲 [11] 则在能量层面纳入，因此仅考虑 α 的最低阶。请注意，所有效应均在弗里图像中计算，因此对 αZ而言考虑了所有阶。

我们将重点研究缪子 ^{90}锆的谱，因为其精度和对理论预言的拟合远胜其他情况。因此，对界限的解释相当直接，因为我们可以确信该系统已得到充分理解。我们也会讨论缪子 ^{208}铅的相同处理方法；然而，由于拟合质量较差，而且人们担心谱对核电荷分布形状的依赖，因此对提取出的界限难以抱有同样的信心。尽管这或许显而易见，我们仍要强调，虽然界限是自洽地提取出来的，其可靠性直接取决于缪子谱中标准模型部分的完备程度。缪子 ^{120}锡的谱也是如此：它有两组实验数据，一组较早，误差明显更大 [26], ；另一组较新，但分辨出的跃迁数量不足，无法进行自洽的超出标准模型拟合 [8]。

锆和锡：对 ^{90}锆的谱进行拟合所得结果，在 $m_X \to 0$ 标量情形下如图1 所示，相应参数汇总于表I。对于轻玻色子，超越标准模型耦合与 $\alpha_X = 0$ 完全一致。此处量子电动力学参数仅在其误差范围内变化，均方根电荷半径基本不受影响。图中上左图为有无超越标准模型耦合时的谱拟合。可以看出，拟合并未发生有意义的变化。其余面板展示了 ′仅QED + BSM’拟合的似然面的不同截面。对于固定的玻色子质量 m_X ，这是一个三维对象；我们展示了两个截面，分别穿过包含超越标准模型耦合的最佳拟合参数平面（橙色）和仅QED拟合的最佳拟合参数平面（蓝色）。绿色曲线复现了 [13]的仅QED拟合。可以看出，新拟合与超越标准模型耦合为零的情况完全一致，并在不确定度范围内得出了相同的均方根电荷半径。

对于质量 $m_X a_0^\mu \ll 1$，无质量极限适用，其中 a_0^μ 是相关态的缪子玻尔半径。质量高于这一范围后，指数抑制会减弱超越标准模型势的影响。我们针对一系列质量 $m_X \neq 0$ 分别进行了拟合，并在图2中汇总了标量耦合的相应排除界限。我们未展示矢量的相应界限，因为在双对数图中，它们与符号相反的标量界限无法区分。为确定真正的排除界限，我们选取了质量 m_X 和耦合 α_X 参数空间中的坐标，对 ′量子电动力学+超出标准模型模型的拟合与原始的 ′仅含量子电动力学的拟合进行比较。若后者的优选程度比前者高出超过95%的p值，我们就认为该点被排除。沿着由此得到的排除界限，我们评估了最佳拟合均方根电荷半径的变化，并将其与原始拟合的不确定度进行比较。均方根电荷半径确实变化显著：在较低质量下约为不确定度的5倍，在较高质量下则可达30倍。然而，对此不应过分解读，因为 ′量子电动力学+超出标准模型模型的自由参数数量是原模型的两倍；尤其是在接近排除边界时，其拟合优度并不优于原始拟合。此外，只有在先前测量已经排除的参数空间中，才会观察到如此极端的变化。沿着较低的界限——我们的界限略微超过先前结果之处——均方根电荷半径的变化仍在其不确定度范围内。因此，不能简单地将这种变化解释为超出标准模型效应导致的均方根电荷半径不确定度。尽管如此，仍须注意，拟合良好的′量子电动力学+超出标准模型模型可能对应显著不同的均方根电荷半径。

对于质量更大的玻色子，拟合逐渐趋向于非零的超越标准模型耦合，如图2所示。图中以浅色虚线表示最佳拟合BSM耦合，并以阴影区域表示95%的置信排除界限。必须强调的是，由 χ^2所衡量的拟合优度仅提高了约一倍，几乎没有统计显著性：与 ′量子电动力学+超越标准模型’拟合相比， ′仅量子电动力学’拟合并未在统计上显著地更受偏好。此外，所偏好的超越标准模型耦合落在参考文献 [27] 此前给出的排除界限之内。因此，我们得出结论：该结果不具有统计显著性，必须视为一次统计涨落。

我们得到的界限略弱于轻μ子原子的兰姆位移测量所得界限，参见 [27]。不过，这些界限是以自洽的方式提取的——

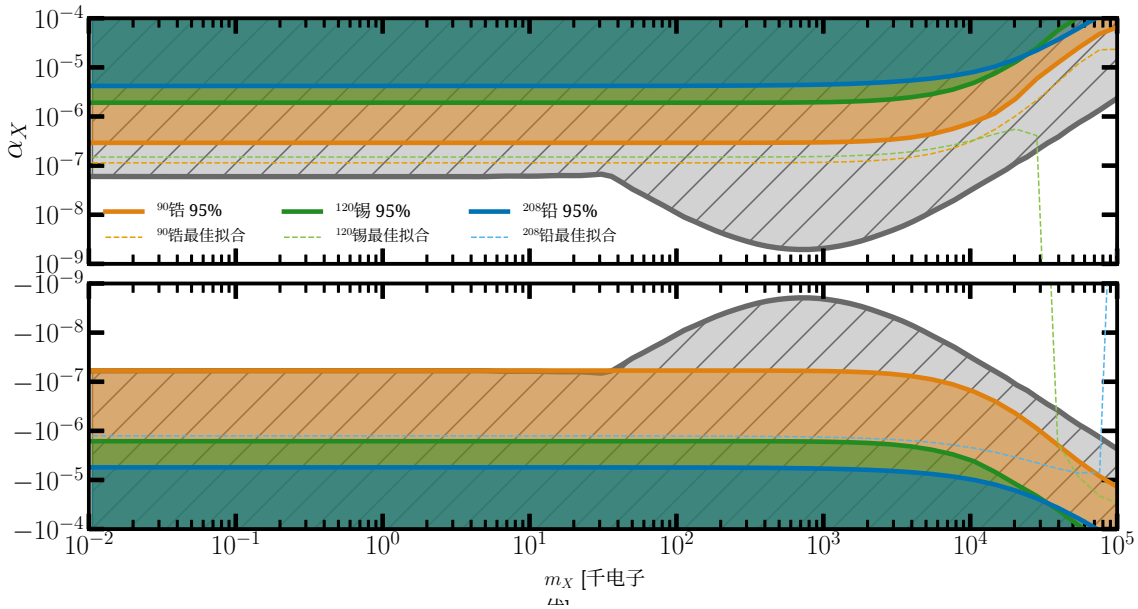

图2。该图展示了新标量粒子的参数空间。灰色区域表示此前根据轻μ子原子的兰姆位移测量以及跃迁 $3d_{5/2} - 2p_{3/2}$ 在 $\mu-^{24}$镁和 $\mu-^{28}$硅 [27]得出的排除范围。橙色表示根据 $\mu-^{90}$锆光谱学得出的自洽界限，绿色表示根据 $\mu-^{120}$锡得出的界限，蓝色表示根据 $\mu-^{208}$铅得出的界限。虚线表示最佳拟合的超出标准模型耦合，颜色与相应的排除区域一致。

	QED	量子电动力学 +超出标准模型			
		标量		矢量	
m_X	—	0	$0.5m_\mu$	0	$0.5m_\mu$
c [飞米]	4.8944(78)	4.887(13)	4.829(33)	4.888(13)	4.844(33)
a [fm]	0.5309(35)	0。534(6)	0.563(15)	0.534(6)	0.555(15)
α_X	0	1。1(7) $\times 10^{-7}$	1.1(4) $\times 10^{-4}$	$-1.1(7) \times 10^{-7}$	$-8(4) \times 10^{-5}$
$r_{\rm rms}$ [fm]	4.2740(7)	4。2747(11)	4.2856(50)	4.2746(11)	4.2829(50)

表 I. 该表总结了仅含量子电动力学的最佳拟合值，以及对 ^{90}锆的谱进行量子电动力学与标量玻色子、量子电动力学与矢量玻色子自洽拟合所得的最佳拟合值。在玻色子质量可忽略和玻色子质量较大的两种情况下，均方根电荷半径都不受影响。

自洽地。为了将这些界限与另一种通过简单方法提取的界限进行比较，我们仅对量子电动力学拟合的残差进行了超越标准模型耦合拟合。这样的拟合会错误地得出比自洽界限更严格的界限：低质量时最多严格 6.5 倍，高质量时最多严格 30 倍。不过必须强调，这些“改进”的界限并不正确。

铅：同样的分析也可以应用于 μ 子 ^{208}Pb 的光谱数据。不过，这里需要更加谨慎。由于核电荷密度形状带来的理论不确定度很大，仅考虑量子电动力学的拟合与数据不符（χ^2/DoF $\sim$ 9.5）。这种不确定度难以量化，因为无法对所有可能的电荷分布空间进行系统扫描。不过，可以通过生成一系列分布来估算其数量级；本例中使用的是自由参数数量逐渐增加的高斯分布

参数 N:

$$\rho_{\rm C}^{\rm Gauss}(r) = \frac{1}{\lceil N/2 \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil N/2 \rceil} \frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(r-\delta_i)^2}{2\sigma_i^2}\right). \tag{7}$$

因此，可以将分布的前 N 个偶数阶矩（奇数阶矩因球对称性而为零）与拟合中使用的二参数费米分布相匹配

$$\langle r^{2n} \rangle \equiv \int r^{2n} \rho_{\rm C}^{2pF}(\mathbf{r}) d^3r = \int r^{2n} \rho_{\rm C}^{\rm Gauss}(\mathbf{r}) d^3r \quad \forall\, n = 1, 2, ..., N. \tag{8}$$

由不同电荷分布导致的一阶能量差因此可简单表示为

$$\Delta E_{A\to B}^{\rm FNS} = 4\pi Z\alpha \int_0^\infty dr r^2 \Delta\rho(r) \int_0^\infty dr' \frac{|\Psi_A^{\rm 2pF}(r')|^2 - |\Psi_B^{\rm 2pF}(r')|^2}{\max(r, r')}, \tag{9}$$

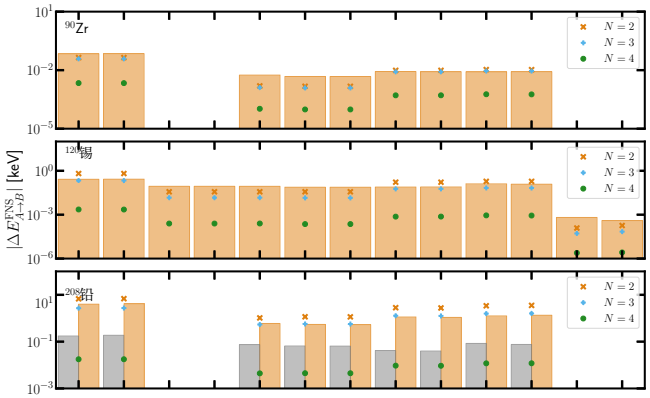

图 3. 该图展示了核电荷密度分布变化所导致的能量差（9）。前 N 个矩固定为相同值。如图所示，固定的矩越多，能量差越小。此外，橙色阴影区域表示拟合中采用的不确定度。最下方的图描绘了铅的拟合结果，其中灰色表示的不确定度水平，对于仅有 2 个自由参数的核电荷分布而言过小。因此，将 $N = 2$ 的能量差作为形状不确定性的替代量，并将其加到铅的拟合中。该处理的结果即为橙色区域。请注意，这确实会影响最佳拟合值，但这些值仍在误差范围内一致。

其中 $\delta\rho(r)$ 是高斯分布与二参数费米分布之间的差异，而 $\Psi_A^{2\mathrm{pF}}$ 是束缚μ子在二参数费米电荷分布下的波函数。如图 3 所示，只有当 $N = 4$时，能量差才会低于不确定度水平，如橙色阴影所示。然而，拟合得到的二参数费米分布为 $N = 2$，因此必须考虑形状不确定性。请注意，^{90}锆和 ^{120}锡的情况不一定如此，因为 $N = 2$ 已经接近不确定性带。

随后，我们重复参考文献 [12] 中的分析，并将 $N = 2$的能量差作为形状不确定性的替代指标。假设态基底中的误差彼此不相关，即可轻松得到协方差因此，唯一的相关性来自转换到跃迁基底。我们想指出，这只是一个粗略估计，但仍能让我们了解与形状相关的误差量级。进行这次拟合后，^{208}铅的最佳拟合参数变为 $c = 6.65(4)\mathrm{fm}$，$a = 0.52(2)\mathrm{fm}$，对应于 $r_{\mathrm{rms}} = 5.5044(38)\mathrm{fm}$。拟合质量为 $\chi^2/\text{自由度} = 0.11$。借助对数据更好的拟合，我们现在可以尝试提取超越标准模型界限。这些界限以蓝色阴影区域表示于图2 中。鉴于核电荷分布形状带来的不确定度很大，界限通常弱于 ^{90}锆的结果，这并不令人意外。

再次，拟合结果得到非零的超越标准模型耦合，如蓝色虚线所示；然而，对于 ^{208}铅，$\alpha_X = 0$ 在质量空间的大部分区域内均与某个 1σ 置信区间相符。拟合优度仅略有改善，这表明“ ′量子电动力学+超越标准模型”模型在统计上并不比“仅含 ′量子电动力学”的拟合更受青睐。此外，超越标准模型玻色子仍不会影响均方根电荷半径。

结论： 表面上看，我们已经证明 $\mu-^{90}$锆的谱数据与耦合为零的超出标准模型情形相一致，并提取了参数空间上的适当界限，从而确认了通过较轻μ子原子的光谱测量获得的互补界限。当前界限是自洽地提取的，即允许超出标准模型效应影响从拟合中提取的QED参数。因此，这些界限是保守的，因为这一过程通常会得到较弱的界限。尽管如此，在参数空间的某些区域，我们的界限仍略优于先前的界限。这项研究还具有进一步意义，因为我们已经证明，从纯QED拟合中提取的核参数会受到超出标准模型物理纳入的影响，其影响程度取决于该效应的大小，这进一步突显了开展自洽 研究的必要性。后一点尤其值得关注，因为从μ子光谱学中提取的核参数经常用于精密量子电动力学检验。为了限制超出标准模型效应对精密测量（例如均方根电荷半径）的影响，因此有必要结合多项测量，使其中的超出标准模型效应相互抵消或以不同方式缩放。

[1] J. A. Wheeler，《介子与原子核之间电磁相互作用的一些后果》，μ^--介子与原子核，《现代物理评论》**21**，133（1949年）。[2] G. Feinberg 和 L. M. Lederman，《μ子和μ子中微子的物理学》，《核与粒子科学年度评论》**13**，431（1963年）。[3] E. Borie 和 G. A. Rinker，《μ子原子的能级》，《现代物理评论》**54**，67（1982年）。[4] W. N¨ortersh¨auser 和 I. D. Moore，核电荷半径，载于 *Handbook of Nuclear Physics*，由 I. Tani- 编 hata、H. Toki 和 T. Kajino（2023年），第1–70页。[5] Y. Yamazaki、H. D. Wohlfahrt、E. B. Shera、M. V. Hoehn 和 R. M. Steffen，μ子PB-208核极化修正中理论与实验的差异，《物理评论快报》**42**，1470（1979年）。[6] P. Bergem、G. Piller、A. Rueetschi、L. A. Schaller、L. Schellenberg 和 H. Schneuwly，根据μ子X射线研究铅-208的核极化和电荷矩，《物理评论C》**37**，2821（1988年）。

[7] T. Q. Phan、P. Bergem、A. Ruetschi、L. A. Schaller 和 L. Schellenberg，《μ子原子锆-90中的核极化》，《物理评论C》32，609（1985年）。[8] C. Piller、C. Gugler、R. Jacot-Guillarmod、L. A. Schaller、L. Schellenberg、H. Schneuwly、G. Fricke、T. Hennemann 和 J. Herberz，《通过μ子原子测定锡同位素的核电荷半径》，《物理评论C》42，182（1990年）。[9] I. A. Valuev、G. Col`o、X. Roca-Maza、C. H. Keitel 和 N. S. Oreshkina，《反对核极化是μ子原子精细结构反常来源的证据》，《物理评论快报》 **128**, 203001 2022 2201 09638（），[ ] arXiv：. 原子物理。[10] N. S. Oreshkina，《重μ子原子能级的自能修正》，《物理评论研究》4，L042040（2022年），arXiv：2206.01006 [原子物理]。[11] V. A. Yerokhin 和 N. S. Oreshkina，《μ子原子中核反冲效应的QED计算》，《物理评论A》108，052824（2023年）。[12] Z. Sun、K. A. Beyer、Z. A. Mandrykina、I. A. Valuev、C. H. Keitel 和 N. S. Oreshkina，《 ^{208}铅核电荷半径再探：弥合精细结构反常差距》，《物理评论快报》135，163002（2025年）。[13] K. A. Beyer、I. A. Valuev、Z. A. Mandrykina、Z. Sun 和 N. S. Oreshkina，《相对论反冲：破解μ子 ^{90}锆精细结构难题的关键》，arXiv： 2511 22298。[ ] 2025 原子物理（）。[14] N. Michel 和 N. S. Oreshkina，《μ子原子动态超精细结构的高阶修正》，《物理评论A》 **99**, 042501 2019 1809 06623（），[ ] arXiv：. 原子物理。[15] B. Dreher、J. Friedrich、K. Merle、H. Rothhaas 和 G. L¨uhrs，《根据测得的电子散射数据确定核基态和跃迁电荷密度》，《核物理A》235，219（1974年）。[16] S. Navas *et al.*（粒子数据组），《粒子物理学综述》，《物理评论D》110，030001（2024年）。[17]K. A. Beyer、I. A. Valuev、C. H. Keitel、M. Tamburini 和 N. S. Oreshkina，《重μ子原子中精细结构反常的标准模型之外解所面临的挑战》，《物理评论快报B》854，138746（2024年），arXiv:2306.10889 [高能物理现象学]。[18] C. Delaunay、J.-P. Karr、T. Kitahara、J. C. J. Koelemeij、Y. Soreq 和 J. Zupan，《轻新物理光谱学界限的自洽提取》，《物理评论快报》130，121801（2023年），arXiv:2210.10056 [高能物理现象学]。[19] J. E. Moody 和 F. Wilczek，《新的宏观力？》，《物理评论D》30，130（1984年）。[20] B. A. Brown、S. E. Massen 和 P. E. Hodgson，《a=16-58原子核的质子和中子密度分布》，《物理学杂志G：核物理》5，1655（1979年）。[21] R. C. Barrett，《由μ子X射线确定的核电荷分布的模型无关参数》，《物理评论快报B》33，388（1970年）。[22] K. W. Ford 和 J. G. Wills，《μ子原子与核电荷分布的径向形状》，《物理评论》185，1429 1969( )。[23] E. A. Uehling，《正电子理论中的极化效应》，《物理评论》48，55（1935年）。[24] E. H. Wichmann 和 N. M. Kroll，《强库仑场中的真空极化》，《物理评论》101，843（1956年）。[25] A. O. G. Kallen 和 A. Sabry，《四阶真空极化》，《丹麦皇家科学院数学与物理学学报》29，1（1955年）。[26] R. Engfer、H. Schneuwly、J. Vuilleumier、H. Walter 和 A. Zehnder，《由μ子原子得到的电荷分布参数、同位素位移、同核异能素位移和磁超精细常数》，Atomic Data and Nuclear Data Ta- bles 14，509（1974年），《核电荷与矩分布》。[27]I. Beltrami *et al.*，《μ子3d$^{5/2}$ - 2p$^{5/2}$ X射线跃迁的新精密测量：真空极化检验及超越量子电动力学的μ子—强子相互作用搜索》，《核物理A》451，679 1986( )。