arXiv:2512.16606v1 [math.DG] 18 Dec 2025

来自紧齐性空间的流形次浸

SAMUEL LIN、RICARDO A. E. MENDES 和 MARCO RADESCHI

Abstract. 我们证明，在紧致正规齐性空间上定义的奇异黎曼叶状结构，或更一般地说，流形次度量映射，具有代数性质。此外，在这种情况下，受拉普拉斯–贝尔特拉米算子保持的代数函数代数与流形次度量映射之间存在一一对应关系。

一个关键的中间结果是，对于紧致正规齐性空间上的任意流形次度量映射，由纤维的平均曲率给出的向量场是基本的，也就是说，它与底空间上的一个向量场相关联。

1. 引言

流形次度量映射定义为映射 $\sigma\colon M \to X$，其中（M，g）是一个黎曼流形，X 是一个度量空间；除了是一个次浸没（即 σ 将度量球映射为半径相同的度量球）之外，它的纤维还是光滑的、可能不连通的子流形。次浸没和流形次度量映射最初分别在 [Bi87] 和 [CG16], 中定义。更多详情请参见第 2.3 节。

流形次度量映射推广了许多经典对象：黎曼次浸没、适当等距群作用的商映射，以及具有闭叶的奇异黎曼叶状结构（包括等距曲率叶状结构）。此外，次浸没和流形次度量映射也自然出现在刚性问题中，并且据猜测与具有下曲率界的塌缩有关。感兴趣的读者可参阅 [KL22, Introduction]中的参考文献列表。

一个等价且或许更自然的对象，是将 $\mathcal{F}$ 划分为等距子集：次浸没 $\sigma\colon M \to X$ 的纤维彼此等距；反过来，给定一个由等距闭子集（“叶”）构成的划分 $\mathcal{F}$，则在“叶空间” $M/\mathcal{F}$ 上存在唯一的度量，使自然投影映射 $\sigma\colon M \to M/\mathcal{F}$ 成为次浸没。这导出了（流形）次浸没之间一种自然的等价关系：若 $\sigma\colon M \to X$ 和 $\sigma'\colon M \to X'$ 的纤维定义了相同的划分，则二者等价。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C12, 53C20, 53C21, 57S15, 58J50, 13A50。R. M. 获得了 DMS-2506409、DMS-2005373 项目以及俄克拉荷马大学 Dodge 艺术与科学学院青年教师暑期奖学金的资助。本研究部分工作是在 R. M. 访问 M. R. 位于都灵的 Universit`a degli Studi di Torino 期间完成的，R. M. 对此接待表示感谢。

当 M 是圆球面时，每个流形次浸没都是代数的 对象。这一点已在 [LR18、MR20]，中得到证明，并与经典不变理论密切相关（包括其应用），见 [MR20、MR23、LMR23]。本文的主要目标是将这些结果推广到 M 为紧齐性空间的情形。

本文将称连通紧致黎曼流形为齐性空间，如果其等距变换群传递作用于其上；称其为正规齐性空间，如果存在某个紧李群 G 传递作用于 M，且该群上的某个双不变度量在 G 上诱导出 M上的给定度量。后者包括所有紧对称空间。将流形次度量映射从球面推广到紧齐性空间时，关键在于选取适当的函数代数，以推广多项式。给定紧齐性空间 M，我们将“代数函数” $\mathbb{R}[M] \subset C^\infty(M)$ 定义为拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征函数所张成的空间。更多细节（包括“代数”一词的合理性说明）见第 2.2 节。

我们的第一个主要结果将 [LR18、MR20、MR23] 中的主要结果推广到紧致正规齐性空间：

定理 A. 设 (M, g) 是一个紧致正规齐性空间。
(a) 每个流形次度量映射 $\sigma\colon M \to X$ 都是代数的，也就是说，存在有限个基本的（即在 σ的纤维上为常数）特征函数 $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{R}[M]$，使得映射 $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)\colon M \to \mathbb{R}^k$可下降为从 X 到半代数集 $\rho(M) \subset \mathbb{R}^k$的同胚。特别地，$\sigma$ 的每个纤维都是一个代数簇，即 ρ的一个水平集。***(b)*** 定义在 M 上的流形次度量映射（模自然的等价关系）与 $\mathbb{R}[M]$ 中受拉普拉斯–贝尔特拉米算子保持不变的子代数之间存在一一对应。

事实上，定理 A 是更一般结果的推论（(a) 对应定理 23，(b) 对应推论 30）；在这些结果中，M 是紧致（不一定正规）的齐性空间，并且要求流形次度量映射 $\sigma\colon M \to X$ 具有基本平均曲率。粗略地说，这意味着 σ 各纤维的平均曲率向量构成一个向量场，该向量场与 X上的一个向量场在 σ下相关。于是，定理 A 可由定理 23、推论 30 以及下述结果推出：

定理 B。 设 (M, g) 是一个紧致正规齐性空间，且令$\sigma\colon M \to X$ 为一个流形次浸。则 σ 具有基本平均曲率。

在定理 B 之前，只有在奇异黎曼叶状结构由等距作用的轨道给出，或环境空间属于以下空间之一时，才已知其具有基本的平均曲率性质：球面、欧几里得空间[AR15], 或 $\mathbb{C}P^n$，$\mathbb{H}P^n$ [AR16]。定理 B 将这一空间列表大幅扩展至所有紧致正规齐性空间（特别是所有紧对称空间）。

定理 B 的证明源于定理 35。定理 35 给出了紧致正规齐性空间中任意子流形的平均曲率关于其焦距的显式公式，我们相信该公式本身也具有独立的研究价值。反过来，定理 35 的证明利用了从希尔伯特空间到该紧致正规齐性空间的黎曼浸没的存在性，以及数位作者围绕这一浸没所发展出的理论，其中包括 [TT95, HLO06]。据我们所知，直到现在，这一理论仅被用于等距参数叶状结构的背景下，因此将其应用于定理 B 是一种创新。

鉴于人们长期以来一直关注具有双不变度量的李群上的黎曼浸没的分类（见 [Gro02，第 5 个问题.4],以及下文的问题 1），我们指出定理 A 的以下直接推论：

推论 C。 具有双不变度量的紧李群上的黎曼浸没是代数的。

开放问题。

定理 A(ii) 中拉普拉斯代数与流形次度量映射之间的一一对应关系，建立了拉普拉斯代数的代数性质与相应流形次度量映射的几何性质之间的对照表。关于这一对照表中的一些条目，参见球面情形下的 [MR20、MR23、LMR23]。我们提出：

问题 1： 设 $(M,\ g)$ 是一个紧齐性空间。对与正则黎曼叶状结构相对应的 $\mathbb{R}[M]$ 拉普拉斯子代数进行（代数上的）刻画。

一个潜在的应用是研究具有双不变度量的紧李群上的黎曼浸没，这是 [Gro02，第 5.4]个问题中提出的问题。在纤维是全测地的情况下，预计只会出现陪集纤维化； [Spe17], 中提出了一个证明，但在一般情况下， [KS12] 中发现了大量非陪集的例子。在 $M = S^n$ 的情况下，唯一的黎曼浸没是霍普夫纤维化，参见 [GG88、Wil01、LW16] （Escobales 和 Ranjan 的较早部分结果除外）。即使在这种情况下，我们也认为，利用对问题 1 的回答给出另一种证明将会很有意义。

问题 2。 设 (M, g) 是一个紧齐性空间，且 $A \subset \mathbb{R}[M]$ 是拉普拉斯算子子代数。 A 是否有限生成?

在球面情形下，答案是肯定的， [MR20] 中的证明使用了 S^n 上的叶状结构到 $\mathbb{R}^{n+1}$的延拓，其中相应的拉普拉斯代数是分次的。对问题 2 的加强（以及一种可能的研究途径）是考察：给定李群 G在 M上的传递性等距作用，以及 M 到某个正交G表示 V的等距 G-等变嵌入，是否存在将给定流形次浸延拓为 V上的无穷小流形次度量映射的方式。

问题 3。对于哪些闭黎曼流形 M ， $\oplus_\lambda E_\lambda$ （拉普拉斯–贝尔特拉米算子的所有特征函数的张成空间）在乘法下是闭的？也就是说，任意两个特征函数的乘积何时是特征函数的有限和？

引理 9 表明，对于 M 齐性空间，答案是肯定的。如果 M 满足这一性质，那么不难看出， M/Γ 也满足这一性质，其中 Γ 是一个通过等距变换自由作用的有限群。因此，一些非齐性空间（例如克莱因瓶）也具有这一性质。看来只有非常特殊的紧致黎曼流形才满足这一性质，但作者并不了解有多少已知此性质不成立的情形。其中一个例子是紧致双曲曲面，参见 [第]章。

问题 4。对于哪些黎曼流形 M ，以下性质成立：对任意子流形 $L \subset M$ 及点 $p \in L$，点 p 处的平均曲率向量 $H(p)$ 由 p 处相对于 L 的法向方向上的焦距决定？

根据定理 35，这些包括所有紧致正规齐性空间。我们可以沿着一条测地线，以一种抽象的方式重述这个问题，且只涉及曲率自同态。通过部分分式分解，这可能与复分析存在有趣的联系，类似于例 36。

证明概述。

定理 B： 设 M 是一个完备黎曼流形，且 $\sigma\colon M \to X$ 是一个流形次浸。利用 Wilking 横截雅可比方程的论证可知， σ 的“焦点数据”是基本的（见引理 37）。这意味着，沿着两条从同一个正则 σ-纤维 L 法向出发的测地线，若它们的初速度经过微分 $d\sigma$ 映射到同一个向量，则 L-焦距（按重数计）的集合相同。

现在假设 M 是一个紧致正规齐性空间。那么，根据定理 35，沿着从 M 的任意子流形 L 法向出发的法测地线，其焦距集合决定了该子流形的平均曲率。特别地， σ 具有基本平均曲率。

定理 35 的证明依赖于从可分希尔伯特空间 V 到 M 的黎曼浸没（在“正则化”的意义下）及其性质；我们从 [HLO06] 中提取出这一浸没。粗略地说，当转而考察原像 $L \subset V$ 以及该测地线的一个水平提升 $\hat{c}$ 时，沿着从 L 法向出发的测地线 c 的焦距不会改变。由于 $V \to M$ 的纤维是极小的，相应形算子的迹从 L 转到 L 时也不会改变。最后，由于 V 是一个向量空间，$\hat{L}$ 的形状算子的特征值恰好是焦距的倒数。

定理 A(a)： 设 M 是一个紧致正规齐性空间，且 $\sigma\colon M \to X$ 是一个流形次浸。定义平均算子 $\mathrm{Av}\colon L^2(M) \to L^2(M)$，使得 $\mathrm{Av}(f)(p)$ 等于 f 在经过 p 的唯一 σ-纤维 L_p 上的平均值。由于根据定理 B， σ 具有基本平均曲率，

运用涉及椭圆正则性的 [LR18] 中的论证可知，Av 将光滑函数映射为光滑函数，并且与拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ 可交换（引理 26）。由于 Δ 的特征函数张成的空间（记作 $\mathbb{R}[M]$）在 $C^0(M)$ 中稠密（引理 5），因此可以利用平均算子证明，由所有 σ-基本特征函数张成的代数 $\mathcal{B}(\sigma)$ 能够分离 σ-纤维。利用 $\mathbb{R}[M]$ 是诺特的这一事实，我们提取出一个有限子集 $\{\rho_1, \dots, \rho_k\} \subset \mathcal{B}(\sigma)$，其中的基本特征函数仍能分离纤维（引理 14）；并且不难验证（命题 22），这些特征函数满足定理 A(a) 中列出的性质。

定理 A(b)：关键步骤是：给定一个由 Δ 保持的不任意子代数 $A \subset \mathbb{R}[M]$，构造一个定义在 M 上的流形次浸，使其基本代数函数的代数与 A 一致。该构造分若干步骤进行，与 [MR20], 中处理 M 圆球面的情形类似。首先运用关于 A 的纯代数事实，尤其是 A 是极大的（也就是说，任何严格更大的子代数都能分离更多点）， A 存在一个雷诺算子（平均算子的代数类比），并且 $A = F(A) \cap \mathbb{R}[M]$，其中 $F(A)$ 表示 A 的分式域。

几何构造从有限分离集 $\{\rho_1, \dots, \rho_k\} \subset A$ 出发，据此定义一个具有基本平均曲率 ρ_0 的黎曼浸没： $M_0 \to X_0 \subset \mathbb{R}^k$，其中 $M_0 \subset M$ 是开且满测度的， X_0 是带有适当黎曼度量的光滑流形。取闭包后，我们得到一个次浸没 $\hat{\rho}\colon M \to X$，并借助 [LW24] 证明它是流形次浸。利用 A 的极大性，以及 ρ_0 与 $\hat{\rho}$ 的纤维在 M_0 上一致这一事实，我们证明子代数 A 与 $\mathcal{B}(\hat{\rho})$ 具有相同的分式域，由此推出 $A = \mathcal{B}(\hat{\rho})$。

致谢。我们感谢 Alexander Lytchak 提出了利用子流形的无限维理论证明定理 B 的想法。

2. Preliminaries

2.1. 拉普拉斯算子的谱。设 (M, g) 是一个闭黎曼流形。作用于函数的拉普拉斯–贝尔特拉米算子（或称“拉普拉斯算子”）定义为

$$\Delta(f) = -\operatorname{div}(\nabla f)$$

对于 $f \in C^\infty(M)$。

我们将 Δ 的特征值记为

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

其中，当 $i \to \infty$ 时， $\lambda_i \to \infty$ 。对于特征值 λ，我们用 E_λ 表示相应的特征空间，并注意到它是有限维的。若我们为每个 E_λ 选取一个 L^2-正交归一基，则它们对所有 λ 的并集构成 $L^2(M)$ 的一个 L^2-正交归一基。

M 的任意等距变换都会在 $C^\infty(M)$ 上诱导一个保持各个特征空间不变的线性映射。因此，给定 G 在 M 上的等距群作用，每个特征空间都自然地具有 G-表示的结构。

我们将需要以下结果，该结果似乎为专家所熟知。由于作者未能在文献中找到相关出处，故在此给出证明。

引理 5. 设$(M、\ g)$ 是一个闭黎曼流形。那么，$\oplus_\lambda E_\lambda$（ Δ的所有特征函数张成的空间）在上确界范数下于 $C^0(M)$ 中稠密。

证明。由斯通–魏尔施特拉斯定理（例如参见 [Rud76，第 162]页定理 7.32），$C^\infty(M)$在上确界范数下于 $C^0(M)$中稠密，因此只需证明 $\oplus_\lambda E_\lambda$ 在 $C^\infty(M)$中稠密。

设 $f \in C^\infty(M)$，并记 $f = \sum_{k=0}^\infty a_k\phi_k$，其中 $\{\phi_k\}$ 是由特征函数构成的 L^2-正交归一基，其特征值为 $\lambda_{i(k)}$。利用 Δ的自伴性，我们有 $a_k = \langle f, \phi_k\rangle = \langle \Delta^j f, \lambda_{i\ k\ ()}^{-j}\phi_k\rangle$，特别地，对于任意选取的 j，都有$|a_k| \le \|\Delta^j f\|_{L^2}\lambda_{i\ k\ ()}^{-j}$。

由韦尔定律（见 [Cha84，第 I.3] 节）可知 $\lambda_{i(k)} \sim Ck^{2/n}$（其中 $n = \dim M$）。这意味着，对于任意选择的$N > 0$，都有 $|a_k| = O(k^{-N})$，因为我们可以在上面的不等式中取 $j > Nn/2$。

由于上确界范数满足 $\|\phi_k\|_{L^\infty} \le C'\lambda_{i\ k}^{(n-1)/4\ ()}$（例如，见 [SZ02，摘要]），我们可以取足够大的 N，使得 $\frac{2}{n}\frac{n-1}{4} - N < -1$，再用韦尔定律得出级数 $\sum_{k=0}^\infty |a_k|\|\phi_k\|_{L^\infty}$ 收敛。

因此，$\sum_{k=0}^\infty a_k\phi_k$ 的部分和构成 $\oplus_\lambda E_\lambda$ 中的一个序列，该序列在上确界范数下收敛到 f。□

2.2. **紧齐性空间上的代数函数**。本节固定记号，并回顾关于齐性空间的基本事实。

定义 6。若连通闭黎曼流形 (M, g) 上等距变换群的自然作用是传递的，则称其为紧齐性空间。若紧齐性空间 (M, g) 上存在一个（紧）李群 G，使其通过等距变换在 (M, g) 上传递作用，并且 G 上存在一个双不变度量 Q，使自然商映射 $(G, Q) \to (M, g)$ 是黎曼浸没，则称该空间为紧致正规齐性空间。

定义 7。设 (M, g) 是一个紧齐性空间，且 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个函数。若 f 是拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ 的特征函数的有限和，则称 f 为代数的。我们用 $\mathbb{R}[M]$ 表示所有代数函数构成的 ($\mathbb{R}$-向量空间 [1])。换言之，$\mathbb{R}[M] = \bigoplus_\lambda E_\lambda$，其中 E_λ 表示与特征值 λ 对应的特征空间。

以下事实说明了前一定义中使用“代数的”这一名称的合理性：

引理 8. 设(M, g) 是一个紧齐性空间，且 G 是一个通过等距变换在 M 上传递作用的紧李群。那么存在一个 G-等变嵌入 $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^N$，其中 G 在线性地作用于 $\mathbb{R}^N$。此外，对于任意这样的嵌入选择以及任意连续函数f: $M \to \mathbb{R}$，以下条件等价：

[1]实际上是一个 $\mathbb{R}$-代数，参见下面的两个引理。

(a) f 是代数的。*(b)* f 是 G-有限的，即 G轨道张成一个有限维向量空间。*(c)* 对某个多项式映射 $P\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$， $f = P \circ \varphi$ 。

证明。 根据 [Mos57，Pal57], a G-等变嵌入 φ 总是存在。固定一个这样的嵌入。

(b) 与 (c) 的等价性由 [Hel63，引理 3.1] 得出。

(a) $\implies$ (b)：假设 f 是代数的。由于 Δ 的每个特征空间都是有限维的 G-不变子空间，因此 f 是 G-有限的。

(b) $\implies$(a)：令 $\mathcal{F}(M)$ 表示 G-有限函数的代数，固定 $p \in M$，并考虑由 $p \mapsto g \cdot p$ 给出的 $\pi\colon\ G \to M$ 。由于 π 是 G-等变且满射的，拉回映射 π^* 是一个 G-等变线性嵌入，将$\mathcal{F}(M)$嵌入到 G 上 G-有限（即“代表”）函数的代数 $\mathcal{F}(G)$ 中。根据 [BtD95，III 命题 1.5]， $\mathcal{F}(G)$ 是其同型分量的直和，每个分量都是有限维的。因此， $\mathcal{F}(M)$ 是其同型分量的直和，每个分量都是有限维的。

由于 Δ 是 G-等变的，它保持 $\mathcal{F}(M)$，并保持其每个同型分量。令 $f \in \mathcal{F}(M)$ 为一个 G-有限函数。于是$f = f_1 + \cdots + f_k$，其中每个 f_i 都属于某个同型分量。根据（有限维）谱定理，每个 f_i 都是Δ的特征函数的有限和，因此 f 是代数的。□

引理 9。 设 （M、 g）是一个紧齐性空间。则 $\mathbb{R}[M]$ 是一个有限生成的 $\mathbb{R}$-代数，并且在上确界范数下稠密于 C^0（M）。

证明。 设 G 是 M的等距变换群，并任取一个 G-等变嵌入 $\varphi\colon$ $M \to \mathbb{R}^N$，其中 G在线性地作用于 $\mathbb{R}^N$上。根据引理 8， $\mathbb{R}[M]$是 $\mathbb{R}$-代数同态 $\varphi^*\colon\ \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N] \to C^0(M)$ 的像。因此， $\mathbb{R}[M]$是一个有限生成的 $\mathbb{R}$-代数。根据引理 5，在上确界范数下，它在 $C^0(M)$ 中稠密。□

2.3. 流形次度量映射。 本节回顾次浸没（分别为流形次浸没）的定义及一些基本事实，并请读者参阅 [KL22] （分别参阅 [MR20]）以了解更多细节。

次浸没最初由 [Bi87], 引入，是度量空间之间的映射 $\sigma\colon\ Y \to X$ ，它将闭度量球映射为半径相同的闭度量球。 σ 的纤维将 Y 划分为两两等距的闭子集，并且每个这样的划分都来自一个次浸没。在方便时，我们会经常在这两种观点之间切换。当 Z 是一个集合时，函数 $f\colon\ Y \to Z$ 若可通过 σ 分解，则称为基本的 。如果子集 $A \subset Y$ 是纤维的并，也就是说，对于某个子集 $B \subset X$，有 $A = \sigma^{-1}(B)$，则称其为饱和的 。

如果 Y 是亚历山德罗夫空间，那么 X 也是（参见 [KL22，命题 3.1]）；在这种情况下， σ 在每个点都有良定义的微分 $d_p\sigma\colon\ T_pY \to T_{\sigma(p)}X$

$p \in Y$，其中 T_pY，$T_{\sigma(p)}X$ 表示切锥，参见 [KL22，命题 3.3]。

流形次度量映射最初定义于 [CG16]。

定义 10. 设 (M, g) 是一个黎曼流形，且 $\sigma\colon M \to X$ 是到度量空间 X 上的次浸没。若对每个 $x \in X$，都存在一个非负整数 $k = k(x)$，使得 $\sigma^{-1}(x)$ 是一个可能不连通的光滑 k 维嵌入子流形 M，则称 σ 为一个流形次浸 。我们有时将 σ 的纤维称为“叶”。

我们强调，给定纤维的所有连通分支都必须具有相同维数，但不同纤维的维数可以不同。

流形次度量映射的例子包括：黎曼浸没、具有闭叶的（奇异）黎曼叶状结构，以及等距变换群 [2] 中（不一定连通的）闭子群的作用。

定义 11。设 $\sigma\colon M \to X$ 是一个流形次浸。M 中的正则部分记为 M_{reg}，它由所有最大维数的纤维之并构成。

正则部分 M_{reg} 是 M 的一个开且饱和的子集，其为满测度集，因此是稠密的。

定义 12。设 $\sigma\colon M \to X$ 是一个流形次浸。当对于每个 $p, q \in M_{\mathrm{reg}}$，若 $\sigma(p) = \sigma(q) = x \in X$，则有 $d_p\sigma(H_p) = d_q\sigma(H_q)$，其中 H 表示纤维 $\sigma^{-1}(x) \subset M$ 的平均曲率向量场时，我们称 σ 具有基本平均曲率 。

3. Laplacian algebras

本节将证明关于子代数 $A \subset \mathbb{R}[M]$ 的纯代数事实。这些子代数在拉普拉斯算子作用下保持不变（我们有时称之为“拉普拉斯代数”），其中 M 是一个紧齐性空间。我们始终假设 A 包含常数 $\mathbb{R} = E_0$。最终，这些结果将在第 5 节中用于构造一个流形次浸 σ，使其基本代数函数的代数 $\mathcal{B}(\sigma)$ 等于 A。

定义 13. 设 M 是一个紧齐性空间，Z 是 M 上的一组实值函数。在 M 上定义等价关系：当对所有 $f \in Z$，都有 $f(p) = f(q)$ 时，$p \sim_Z q$。我们用 $\mathcal{L}(Z)$ 表示 M 按等价类得到的划分。

注意，Z 可以扩充为由 Z 生成的 $\mathbb{R}$-代数，而不改变 $\mathcal{L}(Z)$。另一方面，根据以下结果，Z 总可以缩减为一个有限集，其证明引自 [DK15, 定理 2.4.8]:

引理 14。设 M 为一个紧齐性空间，$A \subset \mathbb{R}[M]$ 为一个子代数。则存在一个有限分离集 $\rho_1, \ldots, \rho_k \in A$，其含义是

[2]在后两个例子中，我们给出了等距分解，而实际的次度量映射由到叶空间/轨道空间的自然投影给出。

即 $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\{\rho_1, \ldots, \rho_k\})$。元素 ρ_1、...、 $\rho_k \in A$ 可以选自 A的任意给定基。

证明。 设 $B \subset A$是 A的一个 $\mathbb{R}$-基。考虑由元素 $1 \otimes f - f \otimes 1$生成的 $\mathbb{R}[M] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[M]$中的理想 I，其中 f遍历B的所有元素。由引理 9和希尔伯特基定理可知， $\mathbb{R}[M] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[M]$是诺特的，因此存在 ρ_1，.....， $\rho_k \in B$ 使得

$$1 \otimes \rho_1 - \rho_1 \otimes 1 \ , \ \ldots \ , \ 1 \otimes \rho_k - \rho_k \otimes 1$$

生成 I。注意，$(1 \otimes f - f \otimes 1)(p, \ q) = f(q) - f(p)$，这意味着$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\{\rho_1, \ldots, \rho_k\})$。□

定义 15。 设 M 是一个紧齐性空间。给定 M的一个划分$\mathcal{F}$，我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ 表示 $\mathbb{R}[M]$ 中在 $\mathcal{F}$的各部分上为常数的所有元素构成的代数。给定一个 $\mathbb{R}$-子代数 $A \subset \mathbb{R}[M]$，若 $A = \mathcal{B}(\mathcal{L}(A))$，则称 A是极大的；也就是说，对于任何严格包含 A的子代数 $A' \subset \mathbb{R}[M]$，划分 $\mathcal{L}(A')$都严格细于 $\mathcal{L}(A)$。

以下是对 [MR23，定理 A]的推广：

引理 16. 设 M 是一个紧齐性空间。设 $A \subset \mathbb{R}[M]$ 是一个在拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ作用下保持不变的$\mathbb{R}$-子代数。那么A是极大的。

证明. 由拉普拉斯算子的条件可知 $A = \bigoplus_\lambda (A \cap E_\lambda)$，其中 E_λ表示拉普拉斯算子的 λ-特征空间。令 $\sim_A$ 表示 M 上模 A, σ的等价关系：$M \to X = M/\sim_A$ 为典范投影，而 $A' = \mathcal{B}(\sigma)$ 是由 σ-基本的代数函数构成的代数，也就是说，这些函数可下降到 X。于是我们可以定义映射 φ: $A \to C^0(X)$，使得$\varphi(f)(\sigma(p)) := f(p)$；并且 $\varphi(A)$ 是一个在 X 上分离点的代数（特别地， X 是豪斯多夫的），且包含常数函数，因此由 Stone–Weierstrass 定理（例如参见 [Rud76，第 162]页上的定理 7.32），它关于上确界范数在 $C^0(X)$ 中稠密。

反设存在某个 $f' \in A' \setminus A$。由于 $f' \in \mathbb{R}[M]$，它包含在 Δ的有限个特征空间的直和中，也就是说， $f' \in E := \sum_{i=1}^{N} E_{\lambda_i}$。由于 $A \cap E \subseteq A$是有限维的，存在 $p_{A\cap E}(f')$（其中投影是相对于 L^2 范数而言的），并且 $f := f' - p_{A\cap E}(f')$ 在 L^2 范数下垂直于 A，且$f \neq 0$。由 $\varphi(A)$的稠密性，存在 $g \in A$，使得对任意选择的 $\varepsilon > 0$，都有 $\|f - g\|_{C^0(M)} = \|\varphi(f) - \varphi(g)\|_{C^0(X)} < \varepsilon$。利用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\langle f, g\rangle = \langle f, f\rangle - \langle f, f - g\rangle \geq \|f\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2} \cdot \|f - g\|_{L^2}$$

由于 $\|f - g\|_{L^2} \leq \sqrt{\mathrm{vol}(M)}\|f - g\|_{C^0(M)}$，我们可以选择 $g \in A$ 使得$\langle f, \ g\rangle > 0$，这与事实 $f \perp A$ 矛盾。

因此 $A' = A$，也就是说， A 是极大的。 □

定义 17. 设 $A \subset B$ 是 $\mathbb{R}$代数。若线性投影映射 π: $B \to A$ 满足对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，均有 $\pi(ab) = a\pi(b)$，则称其为 雷诺算子 。

引理 18. 设 M 是一个紧齐性空间，且 $A \subset \mathbb{R}[M]$是由 Δ 保持不变的子代数。则存在一个雷诺算子π： $\mathbb{R}[M] \to A$。

证明。 由于 A 在拉普拉斯算子 Δ作用下保持不变，因此我们有 $A = \bigoplus_\lambda($ $A \cap E_\lambda)$，其中 E_λ 表示拉普拉斯算子的 λ-特征空间。对于每个 λ，令π_λ： $E_\lambda \to A \cap E_\lambda$为 L^2-正交投影，并定义 π: $\mathbb{R}[M] \to A$ 使得 $\pi = \oplus_\lambda \pi_\lambda$。由于各特征空间两两 L^2-正交，因此 π 是从 $\mathbb{R}[M]$ 到 A的 L^2-正交投影，也就是说，$\ker(\pi) = \oplus_\lambda \ker(\pi_\lambda)$ 与 A正交，且 $\mathbb{R}[M] = A \oplus \ker(\pi)$。

令 $a \in A$ 和 $b \in \mathbb{R}[M]$。写作 $b = b_1 + b_2$，其中 $b_1 = \pi(b) \in A$ 且$b_2 \perp A$。那么

$$\pi(ab) = \pi(ab_1 + ab_2) = ab_1 + \pi(ab_2) = a\pi(b) + \pi(ab_2),$$

其中，在第二个等式中，我们用到了 A 是一个代数，因此$ab_1 \in A$。因此，要证明 π 是雷诺算子，只需证明$ab_2 \perp A$。令 $f \in A$。则

$$\langle f, ab_2 \rangle = \int fab_2 = \langle fa, b_2 \rangle = 0$$

因为 $fa \in A$ （因为 A 是一个代数）且 $b_2 \perp A$。 □

引理 19. 设 M 是一个紧齐性空间， $A \subset \mathbb{R}[M]$ 是一个在 Δ作用下保持不变的子代数。则 $A = \mathbb{R}[M] \cap F(A)$，其中 $F(A)$ 表示 A的分式域。

证明。 由引理 18 可知雷诺算子存在，因此 [MR20，Lemma 24(b)]中的证明适用。事实上，一个包含关系显然；对于另一个，取 f， $g \in A$和 $h \in \mathbb{R}[M]$ 使得 $h = f/g$。于是 $f = gh$，因此，在等式两边应用雷诺算子 π ，得到 $f = g\pi(h)$，这意味着 $f/g \in A$。 □

4. Basic algebraic functions

本节介绍与紧齐性空间上的流形次浸 σ 相关的基本代数函数 $\mathcal{B}(\sigma)$ 代数，该代数推广了经典不变理论中的不变函数代数。我们证明（下文的定理 23），当流形次浸 σ 具有基本平均曲率时，这个代数“足够大”，能够分离纤维，从而 σ 是代数的，最终得到引言中的定理 A(a)。

定义 20。 设 (M, g) 是一个紧齐性空间，且 σ: $M \to X$ 是一个流形次浸（见第 2.3 节）。基本代数函数 代数由所有在 σ 的纤维上为常数的代数函数（见第 2.2 节）组成，记为 $\mathcal{B}(\sigma) \subset \mathbb{R}[M]$。

定义 21. 设 (M, g) 是一个紧齐性空间，且 σ: $M \to X$ 是一个流形次浸。若存在基本

特征函数 $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathcal{B}(\sigma)$，使得对于满足 $p, q \in M$ 的任意 $\sigma(p) \neq \sigma(q)$，都存在 i，使得 $\rho_i(p) \neq \rho_i(q)$。满足此性质的集合 $\{\rho_1, \dots, \rho_k\} \subset \mathcal{B}(\sigma)$ 称为 σ 的（有限）分离集。

以下内容阐明了流形次度量映射代数性的定义及其直接推论。

命题 22. 设(M, g) 是一个紧齐性空间，且 $\sigma\colon M \to X$ 是一个流形次浸。假设 σ 是代数的，其分离集为$\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathcal{B}(\sigma)$。令 $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$。则：

(a) 映射 $\rho\colon M \to \mathbb{R}^k$下降为一个同胚 $X \to \rho(M)$。*(b)* $\rho(M)$ 是 $\mathbb{R}^k$的一个半代数子集。*(c)* 每个 σ-纤维都是一个代数簇，即在任意 G-等变嵌入 $M \to \mathbb{R}^N$下，它都对应于 $\mathbb{R}^N$ 中的一个代数簇，其中 G 在线性作用于 $\mathbb{R}^N$。

证明。(a) 根据次浸没的定义，X 上的度量拓扑与由 $\sigma\colon M \to X$确定的商拓扑一致。因此，诱导映射 $\bar{\rho}\colon X \to \rho(M)$ 是连续的。由于 $\bar{\rho}$是双射，X是紧的，而 $\rho(M)$ 是豪斯多夫的，我们得出 $\bar{\rho}$ 是一个同胚。

为证明 (b)，我们使用引理 8。设 G 是一个在 M上传递作用的紧李群，并且 $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^N$是一个 G-等变嵌入，其中G在线性作用于 $\mathbb{R}^N$。那么 $\rho_i = P_i \circ \varphi$对于某些多项式 $P_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$成立，且 $\rho(M) = P(\varphi(M))$，其中 $P\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$由 $P = (P_1$、.....、$P_k)$ 给出。由于 $\varphi(M)$ 是一个 G-轨道，它是 $\mathbb{R}^N$中的代数簇。因此，根据塔斯基量词消去定理，$P(\varphi(M))$ 是一个半代数子集。

(c) 可由 (b) 的证明直接得到。 □

本节的主要结果是以下定理，其证明的大部分思路与 [LR18, Theorem 1.1] 和 [MR20, Theorem 19] 的证明相同。值得注意的例外是最后一步，即有限分离集的存在性，参见注 27。

定理 23. 设 (M, g) 是一个紧齐性空间，且 $\sigma\colon M \to X$是一个流形次浸。假设 σ 具有基本平均曲率。那么，$\mathcal{B}(\sigma)$是 $\mathbb{R}[M]$ 的一个子代数，在拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ作用下保持不变，并且 σ是代数的。

我们注意到，在定理 23 中，M 的紧致性是必要的：

例 24. 考虑由商映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$给出的 $M = \mathbb{R}$ 和 σ。纤维（或轨道）是无限离散子集，因此不是代数簇。

对于一个具有连通纤维的类似例子，考虑由商映射 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/\mathbb{R}$给出的 $M = \mathbb{R}^3$ 和 σ，其中 $\mathbb{R}$ 通过“螺旋式”运动以等距变换的方式作用于 $\mathbb{R}^3$：$t \in \mathbb{R}$ 被映射为先绕 z轴旋转 t，旋转发生在xy平面内，随后沿 z轴方向平移 t。于是，任何不在 z轴上的 $p \in \mathbb{R}^3$ 的轨道都是一条螺旋线；它不是代数簇，因为它与任何包含 z轴的平面的交集都是一个无限离散子集。

在给出定理 23 的证明之前，我们先回顾平均算子的定义及其基本性质。

定义 25. 设 M 是一个黎曼流形，且 $\sigma\colon M \to X$ 是一个具有紧致纤维的流形次浸。平均算子 是由 Av：$L^2(M) \to L^2(M)$ 定义的线性映射

$$\mathrm{Av}(f)(p) = \frac{1}{\mathrm{vol}(L_p)} \int_{q\in L_p} f(q)\ d\,\mathrm{vol}_{L_p}(q).$$

这里，L_p 表示经过 p 的 σ-纤维；$d\mathrm{vol}^{L_p}$ 表示由 M 上的限制黎曼度量在 L_p 上诱导的黎曼体积形式；而 $\mathrm{vol}(L_p) = \int_{q\in L_p} 1\ d\mathrm{vol}^{L_p}(q)$ 表示相应的体积。

引理 26. 设 $\sigma\colon M \to X$ 是一个具有紧致纤维和基本平均曲率的流形次浸。则有以下结论：
(a) 平均算子定义良好，且是到 $L^2(M)$ 中具有基本代表元的元素所构成子空间上的 L^2-正交投影。*(b)* 对任意 $f \in C^\infty(M)$，元素 $\mathrm{Av}(f) \in L^2(M)$ 具有一个光滑代表元。*(c)* 算子 Δ 与 $\mathrm{Av}\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 可交换。

证明。 这些结论的证明与特殊情形下的证明类似：此时 σ 由奇异黎曼叶状结构给出，参见 [LR18，第 3] 节（另见 [PR96]）。因此，我们只概述论证，并指出所需的关于流形次度量映射的关键事实。具体而言：正则部分 M_{reg} （即最大维数纤维的并集）的补集是一个闭子集，它由余维至少为二的子流形并成。这可由[MR20 附录 B]中关于分层的结果推出。更确切地说，由 [MR20，注 46]可知，M_{reg} 是开集；由 [MR20，命题 43]可知，每一层都是光滑子流形。由[MR20，引理 47], 可知，不存在余维为一的层，因此 $M \setminus M_{\mathrm{reg}}$是余维至少为二的层之并。

由于 M_{reg} 具有满测度，类似于 [LR18 第 3.1 节和第 3.2] 节的结果，基本上可用相同的方法证明。特别地，这便得到了 (a)，以及平均算子与拉普拉斯–贝尔特拉米算子对光滑函数 $M_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{R}$可交换这一事实。

(b) 的证明与 LR18 的定理 3 中的论证相同。所用到的关于 $M\setminus M_{\mathrm{reg}}$ 的关键事实是，它在 M 中的余维至少为二；特别是，它的 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度为零。

(c) 由 (b) 以及 Av 与 Δ 在 M_{reg} 上的函数中可交换这一事实得出。□

定理 *23* 的证明。子集 $\mathcal{B}(\sigma) \subset \mathbb{R}[M]$ 根据定义是一个 $\mathbb{R}$-子代数。

令 $f \in \mathcal{B}(\sigma)$。根据定义，$f$ 是特征函数的有限和，因此 $\Delta(f)$也是特征函数的有限和。此外，$\Delta(f)$是

根据平均算子的定义和引理 26，它是基本的。事实上，函数是基本的，当且仅当它等于其平均值，并且 Av(Δ(*f*)) =Δ(Av(*f*)) = Δ(*f*)。因此， $\mathcal{B}(\sigma)$在 Δ作用下保持不变。

接下来我们证明 $\mathcal{B}(\sigma)$ 能分离 σ-纤维。设 L, L' 是两个不同的纤维，并选取在 L 上恒等于 0、在 L' 上恒等于 1 的 $f \in C^0(M)$。经过平均化，我们可以假设 f 是基本的。选取$\varepsilon \in (0, 1/2)$。根据引理 9，存在一个与 f 的上确界范数距离为 ε 的 $h \in \mathbb{R}[M]$。因此 Av(*h*) 与 f 的距离为 ε，因为 f 是基本的，所以 Av(*h*) 在 L 和 L' 上的取值不同。此外，Av(*h*) $\in \mathcal{B}(\sigma)$，因为Δ, Av 可交换。因此 $\mathcal{B}(\sigma)$ 能分离 σ-纤维。

由于 $\mathcal{B}(\sigma)$ 在 Δ 作用下保持不变，它有一个由特征函数构成的 $\mathbb{R}$-基。根据引理 14， σ 是代数的。□

注 27。 如果 $\mathcal{B}(\sigma)$ 是有限生成的，那么上述证明的最后一部分就会简化，因为任何生成集 $\rho_1, \dots, \rho_k$都会是一个分离集。由于我们不知道 $\mathcal{B}(\sigma)$ 是否有限生成（见问题 2），因此我们改为采用引理 14。

注 28。 定理 23 可以部分推广到这样的情形：假设 (M, g) 是实解析（而非齐性）的闭黎曼流形。也就是说，存在一个由拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征函数构成的有限 集 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$，它可以分离 σ-纤维。证明思路与上述定理 23 的证明相同，只需作几处修改。首先，(M, g) 的基本特征函数是实解析的（因为它们是系数为实解析函数的偏微分方程的解，见[LMP23, §2.2]）。其次，在引理 14 的证明中，要用到这样一个事实（见[Fri67, 定理 ′（I, 9）]）： $M \times M$ 上所有全局定义的实解析函数构成的环是诺特的。

5. From Laplacian algebras to manifold submetries

本节的主要目标是：给定一个紧齐性空间 M，确定代数 $\mathbb{R}[M]$ 中由代数函数构成的子代数，这些子代数作为某个具有基本平均曲率的流形次浸 σ 的基本代数函数 $\mathcal{B}(\sigma)$ 的代数出现。它们恰好是由拉普拉斯–贝尔特拉米算子保持不变的子代数。这最终导出了定理 A(b) 中的一一对应。

定理 29。 设 M 是一个紧齐性空间，且 $A \subset \mathbb{R}[M]$ 是一个由拉普拉斯算子保持不变的子代数。则存在一个具有基本平均曲率的流形次浸 σ： $M \to X$，使得 $\mathcal{B}(\sigma) = A$。

在给出定理 29 的证明之前，我们先利用它证明以下命题：

推论 30. 设 M 是一个紧齐性空间。在所有从 M 出发且具有基本平均曲率的流形次度量映射集合上定义等价关系 $\sim$：当且仅当 σ 和 σ' 的纤维定义了

M的同一个分解时， $\sigma \mapsto \mathcal{B}(\sigma)$ 给出一个双射，将所有从 M 出发且具有基本平均曲率的流形次度量映射的集合（模去 $\sim$）映到所有在拉普拉斯–贝尔特拉米算子作用下保持不变的 $\mathbb{R}[M]$ 的子代数集合。

证明。设 $\sigma\colon M \to X$ 是一个具有基本平均曲率的流形次浸。由定理 23，$\mathcal{B}(\sigma)$ 是一个在拉普拉斯算子作用下保持不变的子代数。根据定义，$\mathcal{B}(\sigma)$ 仅取决于 M 被分解为 σ 的纤维的方式。因此，上述映射是良定义的。

由定理 29，$\mathcal{B}$ 的像是所有在拉普拉斯–贝尔特拉米算子作用下保持不变的 $\mathbb{R}[M]$ 的子代数构成的集合。

设 $\sigma\colon M \to X$ 和 $\sigma'\colon M \to X'$ 是两个具有基本平均曲率的流形次度量映射，并假设 $\mathcal{B}(\sigma) = \mathcal{B}(\sigma')$。由定理 23，$\sigma$ 和 σ' 是代数的，因此 $\mathcal{B}(\sigma) = \mathcal{B}(\sigma')$ 分离 σ-纤维并分离 σ'-纤维。因此，给定 p，$q \in M$，它们属于不同的 σ-纤维，当且仅当它们属于不同的 σ'-纤维。由此得出 $\sigma \sim \sigma'$。□

本节余下部分将证明定理 29，并给出若干引理。其中一些结论类似于 [MR20] 中的结果（该文讨论球面情形），对于那些证明 也类似的结论，我们略去细节。主要的新内容包括引理 31，因为当 M不是球面时，我们不知道 $\rho(M_{\mathrm{reg}})$ 是否为光滑流形（参见 [MR20，命题 26][3]）；以及在引理 34 后的段落中使用 [LW24]，以替代类似于 [MR20 中命题 29 和 30]的论证。

5.1. 定理 29 的证明。 取 (M^n, g) 为一个紧齐性空间，$A \subset \mathbb{R}[M]$ 为由 Δ保持不变的子代数，且 $\rho_1, \dots, \rho_k$为一个有限分离集（由引理 14 可知这样的集合存在）。

定义 $\rho = (\rho_1、\dots\dots、\rho_k)\colon M \to \mathbb{R}^k$。令 m为 $\nabla\rho_1、\dots\dots、\nabla\rho_k$张成空间的最大维数，并定义

$$M_{\mathrm{reg}} = \{p \in M \,:\, \dim(\mathrm{span}(\nabla\rho_1(p), \dots, \nabla\rho_k(p))) = m\}.$$

注意，对于 $X \in T_pM$，我们有 $d\rho_p(X) = (\langle\nabla\rho_1(p)\ X\rangle、\dots\dots、\langle\nabla\rho_k(p)\ X\rangle)$，因此 $\ker(d\rho_p) = \{\nabla\rho_1(p)\dots\dots、\nabla\rho_k(p)\}^{\perp}$。这表明 $\rho|_{M_{\mathrm{reg}}}$是一个秩恒定映射，而经过 $p \in M_{\mathrm{reg}}$ 的纤维的法空间为

$$\nu_p(\rho^{-1}(x)) = \mathrm{span}(\nabla\rho_1(p), \dots, \nabla\rho_k(p)).$$

引理 31。 存在一个多项式函数 $Q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$，使得 $X_0 = \rho(M_{\mathrm{reg}}) \setminus Z(Q)$ 是 $\mathbb{R}^k$中的一个光滑的 m 维嵌入子流形，而 $M_0 = \rho^{-1}(X_0)$ 是 M_{reg}的一个开满测度子集，其中 $Z(Q)$ 表示 Q的零点集。

[3]在准备本文的过程中，我们注意到 [MR20 中命题 26] 的证明有一步论证不够充分。补上缺失的论证后，可以得到 [MR20 中命题 26], 所述的结果；但由于该论证用到了拉普拉斯代数的有限生成性，因此只适用于 M 为圆球面的情形，参见问题 2。

证明。我们首先证明集合 $\rho(M_{\mathrm{reg}}) \subset \mathbb{R}^k$ 是半代数的。证明与命题 22(b) 的证明类似。我们使用一个 G-等变嵌入 $\varphi\colon\ M \to \mathbb{R}^N$，其中 G 是一个在 M 上传递作用、在线性作用于 $\mathbb{R}^N$ 上的紧李群，见引理 8。特别地，$\varphi(M)$ 是一个 G-轨道，因此是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个代数簇。选取多项式函数 $P_i\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，使得 $\rho_i = P_i \circ \varphi$。那么，$\varphi(M_{\mathrm{reg}})$ 是 $\varphi(M)$ 中满足以下条件的子集：1-形式 dP_i 在 $\varphi(M)$ 的切空间上的限制张成一个 m 维空间。由于 P_i 是多项式，且 $\varphi(M)$ 的切空间由有限个线性向量场张成，即由对应于 G 的李代数的一组基的作用场张成，因此 $\varphi(M_{\mathrm{reg}})$ 是半代数的。因此，令 $P = (P_1, \dots, P_k)$，由塔斯基定理可知，$\rho(M_{\mathrm{reg}}) = P(\varphi(M_{\mathrm{reg}})) \subset \mathbb{R}^k$ 是半代数的。

回顾一下，每个半代数子集 $E \subset \mathbb{R}^k$ 都允许进行半代数分层，参见 [BR90 第 68 页定义 2.4.1 以及第 75]页命题 2.5.1。这意味着，E 是有限个互不相交的“层”的并，其中每个“层”都是 $\mathbb{R}^k$ 的半代数局部闭解析子流形（并且它们满足“边界条件”）。E 的维数定义为其各层的最大维数（作为光滑流形），参见 [BR90 第 75]页定义 2.5.3。

由于 $\rho|_{M_{\mathrm{reg}}}$ 是一个秩恒为 m 的光滑映射，半代数集 $\rho(M_{\mathrm{reg}}) \subset \mathbb{R}^k$ 的维数为 m。对 $\rho(M_{\mathrm{reg}})$ 取一个分层，并令 $T \subset \rho(M_{\mathrm{reg}})$ 为维数严格小于 m 的各层的并。特别地，$\rho(M_{\mathrm{reg}}) \setminus T$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的一个光滑 m 维嵌入子流形。

由于 T 是一个维数小于 m 的半代数集，[BR90 中第 136] 页的引理 3.4.4 推出 $T \subset Z$，其中 Z 是一个维数小于 m 的代数的集（作为半代数集，即依照 [BR90 的定义 2.5.3]的意义）。因此，Z 是有限个维数小于 m 的局部闭光滑子流形的并。令 Q 为定义 Z 的多项式，证毕。□

由于 $\rho|_{M_0}\colon\ M_0 \to X_0$ 是一个常秩映射，因此它是满射光滑浸没。

引理 32。（参见 [MR20，命题 26]）存在一个定义在 X_0 上的光滑度量 b，使得 $\rho|_{M_0}\colon\ M_0 \to X_0$ 是一个具有基本平均曲率的黎曼浸没。

证明。对所有 i，j，我们有

$$\langle \nabla\rho_i, \nabla\rho_j \rangle = \frac{1}{2}\left(\Delta(\rho_i\rho_j) - (\Delta\rho_i)\rho_j - \rho_i(\Delta\rho_j)\right) \in A,$$

因为 A 是一个受拉普拉斯算子保持的子代数。因此，对于所有 p，$q \in M_{\mathrm{reg}}$ 满足 $\rho(p) = \rho(q)$ 的情形，我们由分离性质可得 $\langle \nabla\rho_i(p)\ \nabla\rho_j(p) \rangle = \langle \nabla\rho_i(q)\ \nabla\rho_j(q) \rangle$。

因此，对于每个 $x \in X_0$，在 T_xX_0 上都存在一个内积 b_x，使得将 $d\rho_p$ 限制在法空间 $\nu_p(\rho^{-1}(x))$ 上后，它是一个等距变换

映 onto T_xX_0，对于每个 $p \in \rho^{-1}(x)$ 的选择都是如此。这定义了 X_0 上的度量张量b，使得 $\rho|_{M_0}\colon M_0 \to X_0$ 是一个黎曼浸没。由于$\rho|_{M_0}\colon M_0 \to X_0$ 是光滑浸没，且度量 g 是光滑的，因此 b 也是光滑的。

平均曲率向量场为基本的证明与[MR20，引理 31]中的证明相同。□

引理 33。 *(参见 [MR20，命题 27])* 黎曼浸没 $\rho|_{M_0}\colon M_0 \to X_0$ 的任意一对 ρ-纤维 L_1、L_2 在 M中等距。

证明。设 $p, q \in L_1$。令 γ 为 M中连接 $p = \gamma(0)$ 与 L_2 的一条（单位速率）极小测地线，其长度为 ℓ。那么 $\gamma'(t)$ 在 $t = \ell$处是水平的，因此当 t 充分接近 ℓ时。

沿着 γ上的一个平行标架，写出向量 $\gamma'(t)$ 和 $\nabla\rho_i(\gamma(t))$，其中 $i = 1, \dots k$。将由此得到的向量作为列，组成一个 $n \times (k+1)$ 矩阵 $B(t)$，并令 $F(t)$ 为 $B(t)$ 的所有 $(m+1)\times(m+1)$ 子式的平方和。因此，对于所有满足 $\gamma(t) \in M_0$ 的 t，有 $F(t) = 0$ 当且仅当 $\gamma'(t)$ 是水平的。

由于（M，g）是一个紧齐性空间，因此它是一个实解析流形，其测地线也是实解析的，拉普拉斯算子的特征函数亦然。因此，$F(t)$ 是解析的。由于 $F(t)$ 在 t 的 ℓ 附近为零，它必处处为零，尤其在 $t = 0$ 附近为零。也就是说，$\gamma(t)$ 在小区间（$-\varepsilon$，ε）上的限制是黎曼浸没 $\rho|_{M_0}\colon M_0 \to X_0$ 的一条水平测地线。

设 $\hat{\gamma}\colon \mathbb{R} \to M$ 是一条测地线，使得 $\hat{\gamma}|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 是 $\rho \circ \gamma|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 的水平提升，且 $\hat{\gamma}(0) = q$。那么，对于所有 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，都有 $\rho(\gamma(t)) = \rho(\hat{\gamma}(t))$；由于这些都是解析函数，因此对所有 $t \in \mathbb{R}$ 也成立。特别地，$\hat{\gamma}(\ell) \in L_2$，这意味着 $d_M(q, L_2) \le \ell = d_M(p, L_2)$。

交换 p, q 的角色，我们得到 $d_M(q, L_2) = d_M(p, L_2)$。交换 L_1, L_2 的角色，我们得出 L_1, L_2 是等距的。□

引理 34. 存在一个次浸没 $\hat{\rho}\colon M \to X$，使得 M_0 是一个饱和集，并且在 M_0 上，按 $\hat{\rho}$ 的纤维所作的分解与按黎曼浸没 $\rho|_{M_0}$ 的纤维所作的分解一致。

证明。 利用前面的引理，这与 [MR20，命题 28] 的证明类似。□

$\hat{}$ 由于次浸没 $\hat{\rho}\colon M \to X$ 的几乎所有正则纤维都具有基本平均曲率，我们可以使用 [LW24，命题 15.2] 得出结论：$\hat{\rho}$ 的每个纤维都是光滑子流形。根据 [LW24], 中的定义，这仍然允许某些纤维具有维数不同的连通分支。但基本平均曲率通过类似于 [MR20，命题 32], 的论证，意味着 $\hat{\rho}$ 的每个纤维确实都具有维数相同的连通分支，也就是说，$\hat{\rho}$ 是定义 10 意义下的流形次浸。

注意，按照第 2.3 节的定义，$\hat{\rho}$ 的正则部分包含 M_0，但也可能更大。不过，由于 M_0 在 M中稠密，因此可知$\hat{\rho}$ 具有

按照定义 12 的定义，具有基本平均曲率。因此，根据定理 23，$\hat{}$子代数 $A = \mathcal{B}(\hat{}\rho) \subset \mathbb{R}[M]$ 在拉普拉斯算子作用下保持不变，并且能区分$\hat{}$ $\hat{}\rho$-纤维，因此 $\mathcal{L}(A)$与将 M 分解为$\hat{}\rho$的纤维所得的分解相一致。

还需证明 $A = \hat{A}$.

一方面，设 $f \in A$。$\hat{}\rho$ 的构造表明，对于任意 p，$q \in M$ 满足$\hat{}\rho(p) = \hat{}\rho(q)$，存在序列 p_i，$q_i \in M_0$ 使得 $p = \lim p_i$ 且 $q = \lim q_i$，并且对于每个 i都有 $\rho(p_i) = \rho(q_i)$。因此，根据 $\rho_1, \ldots, \rho_k$的分离性质，对所有 i都有$f(p_i) = f(q_i)$，从而$\hat{}f(p) = f(q)$。因此，相对于$\hat{}\rho$，f是基本的，即 $f \in A$，这就表明$\hat{}$ $A \subset A$。

反向包含方面，设 $f \in A$。考虑由格拉姆矩阵 $\langle \nabla \rho_i, \nabla \hat{\rho_j} \rangle$的所有 $m \times m$ 子式的平方和给出的 $P \in A$ 。注意到$P \neq 0$，并且 $P = 0$ 在 $M \setminus M_{\mathrm{reg}}$上。于是，$P \cdot (Q \circ \rho) f = 0$ 在 $M \setminus M_0$上（回忆一下，多项式 Q 是由引理 31 得到的）；又由于 $\hat{}\rho$和 ρ 在 $M \setminus M_0$上有相同的纤维，且 $P \cdot (Q \circ \rho) \in A$，我们可知$P \cdot (Q \circ \rho) \cdot f$ 在 A的公共水平集上为常数。但引理 16 指出 A 是极大的，因此 $P \cdot (Q \circ \rho) \cdot f \in A$。特别地，这表明 $f \in F(A)$，其中 $F(A)$表示 A 的分式域。$\hat{}$ 利用引理 19，我们得到 $f \in A$。因此 $A \subset A$。

定理 29 的证明至此完成。

6. Normal homogeneous spaces and the proofs of Theorem A and Theorem B

以下结果是定理 B 证明的关键，其运用也是本文的主要新意。它可以较为直接地从 [HLO06] 中阐述的理论推出（该理论由 Terng、Thorbergsson 等人早先开创，参见 [TT95]），我们认为它本身也可能具有独立的研究价值。

定理 35. 设 M 是一个紧致正规齐性空间，$L \subset M$ 是一个光滑子流形，$p \in L$ 是 L 上的一点，$v \in \nu_p L$ 是一个单位法向量。记

$$\cdots \leq l_2^- \leq l_1^- < 0 < l_1^+ \leq l_2^+ \leq \cdots$$

沿 v 方向的 L 的焦距（按适当的重数重复计数）。那么，L 沿 v 方向的形状算子 A_v 的迹为

$$\mathrm{tr}(A_v) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_k^-} + \frac{1}{l_k^+} \right).$$

证明。 根据 [HLO06，第 18]，页存在一个黎曼浸没 $\pi: V \to M$，其纤维为极小纤维，其中 V 是一个可分希尔伯特空间。

令 $\hat{}L = \pi^{-1}(L)$，选取 $\hat{}p \in \hat{}L$，并令 $\hat{}v \in T_{\hat{p}}\hat{}L$ 为 $\hat{}v$的水平提升。根据 [HLO06，引理 6.1]，，L 沿 $\hat{}v$ 方向的焦距为

与 L 的相同，即：

$$\cdots \leq l_2^- \leq l_1^- < 0 < l_1^+ \leq l_2^+ \leq \cdots$$

ˆ 由于 V 是希尔伯特空间， L 在 ˆv 方向上的形状算子 $A_{\hat{v}}$ 的特征值为

$$\frac{1}{l_1^-} \leq \frac{1}{l_2^-} \leq \cdots < 0 < \cdots \leq \frac{1}{l_2^+} \leq \frac{1}{l_1^+}$$

参见 [HLO06，第 26] 页。

ˆ 根据 [HLO06，引理 5.2]， L 是可正则化的。根据 [HLO06，第 13]，页的定义，这意味着级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_k^-} + \frac{1}{l_k^+} \right)$$

收敛到 $A_{\hat{v}}$ 的“正则化迹”，记作 $\mathrm{tr}_r(A_{\hat{v}})$。

根据 [HLO06，引理 5.2] （或者说其证明），我们有 $\mathrm{tr}(A_v) = \mathrm{tr}_r(A_{\hat{v}})$。因此

$$\mathrm{tr}(A_v) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_k^-} + \frac{1}{l_k^+} \right).$$

□

例 36。设 $M = S^2$， L 为与北极距离为 $\varphi \in (0, \pi)$ 的纬线圆，且 v 为指向北极的单位法向量。那么，形状算子 A_v及其迹均等于 $\cot(\varphi)$。正焦距为

$$\varphi,\ \varphi + \pi,\ \varphi + 2\pi, \ldots$$

负焦距为

$$\ldots,\ \varphi - 2\pi,\ \varphi - \pi$$

因此，定理 35 表明

$$\cot(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi + k\pi} + \frac{1}{\varphi - k\pi - \pi} \right)$$

可改写为

$$\cot(\varphi) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\varphi + n\pi}$$

这是欧拉提出的一个著名恒等式，参见 [AZ04，第 20] 章。另见 [Wik25]，中名为“部分分式展开”的章节。

引理 37. 设 M 是一个完备黎曼流形， $\sigma\colon\ M \to X$是一个流形次浸。则最大维数纤维的焦距是“基本的”。也就是说，给定一个最大维数的纤维 $L = \sigma^{-1}(x)$ ，以下结论成立。设 $p_i \in L$ 和 $v_i \in \nu_{p_i} L$，其中 $i = 1, 2$，且 $d\sigma(v_1) =$

$d\sigma(v_2)$。那么， L 沿v_1 方向的焦距（含重数）与沿 v_2方向的焦距相同。

证明。这基本上与 [MR20，第 17] 号命题，以及[AR15，命题 3.1]中的证明相同。□

定理 *B* 的证明。 这立即由定理 35 和引理 37 得出。□

定理 *A* 的证明。 这立即由定理 B、定理 23 和推论 30 得出。 □

References

[AR15] Marcos M. Alexandrino 和 Marco Radeschi。叶空间之间的等距变换。 *Geom. Dedicata*，174：193–201，2015年。[AR16] Marcos M. Alexandrino 和 Marco Radeschi。奇异黎曼叶状结构的平均曲率流。 *J. Geom. Anal.*，26(3)：2204–2220，2016年。[AZ04] Martin Aigner 和 Günter M. Ziegler。 *Proofs from The Book*。施普林格出版社，柏林，第三版，2004年。插图由 Karl H. Hofmann 绘制。[Bi87] V. N. Berestovskii。非负曲率三维形式的“次浸没”。 *Sibirsk. Mat. Zh.*，28(4)：44–56，224，1987年。[BR90] Riccardo Benedetti 和 Jean-Jacques Risler。 *Real algebraic and semi-algebraic sets* 。《数学新论》。 [《当代数学专题》]。Hermann出版社，巴黎，1990年。[BtD95] Theodor Bröcker 和 Tammo tom Dieck。 *Representations of compact Lie groups*， *Graduate Texts in Mathematics*第98卷。施普林格出版社，纽约，1995年。译自德文手稿；1985年译本的修订重印版。[CG16] Xiaoyang Chen 和 Karsten Grove。正曲率下次浸没的刚性定理。 *Adv. Math.*，289：784–796，2016年。[ch] clvolkov（ https://mathoverflow.net/users/164854/clvolkov）。紧黎曼曲面上特征函数的乘积。MathOverflow。网址：https://mathoverflow.net/q/401421（版本：2021-08-10）。[Cha84] Isaac Chavel。 *Eigenvalues in Riemannian geometry* 115 *Pure and Ap-* ，卷数 *plied Mathematics* 1984 为 。Academic Press, Inc.，奥兰多，佛罗里达州，。含 Burton Randol 撰写的一章，并附有 Jozef Dodziuk 撰写的附录。[DK15] Harm Derksen 和 Gregor Kemper。 *Computational invariant theory*， *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*第130卷。施普林格出版社，海德堡，增订版，2015年。附有 Vladimir L. Popov 撰写的两篇附录，以及 Norbert A’Campo 和 Popov 撰写的补遗，《不变量理论与代数变换群》，第 VIII 卷。[Fri67] Jacques Frisch。复解析空间之间态射的平坦点。 *Invent. Math.*，4：118–138，1967年。[GG88] Detlef Gromoll 和 Karsten Grove。欧几里得球面上的低维度量叶状结构。 *J. Differential Geom.*，28(1)：143–156，1988年。[Gro02] Karsten Grove。对称性的几何及其应用。载于 *Conformal Riemannian* ，[，第 *and Lagrangian geometry (Knoxville, TN, 2000)* 27 *Univ. Lecture Ser.* 31–53页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002年。[Hel63] Sigurdur Helgason。不变量与基本函数。 *Acta Math.*，109：241–258，1963年。

[HLO06] Ernst Heintze、Xiaobo Liu 和 Carlos Olmos。等距子流形与 Chevalley 型限制定理。载于 *Integrable systems geometry and topology*，[，第 22] 卷，第–页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006年。[KL22] Vitali Kapovitch 和 Alexander Lytchak。次度量映射的结构。 *Geom.*，（）：–。[*Topol.* 26 6 2649 2711, 2022
KS12] Martin Kerin 和 Krishnan Shankar。来自简单紧李群的黎曼浸没。 *Münster J. Math.*，5：25–40，2012年。[LMP23] Michael Levitin、Dan Mangoubi 和 Iosif Polterovich。 *Topics in spectral geometry* 237 *Graduate Studies in Mathematics* ，卷数为 。
美国数学会，罗得岛州普罗维登斯， [2023] ©2023年。[LMR23] Samuel Lin、Ricardo A. E. Mendes 和 Marco Radeschi。奇异黎曼叶状结构的韦尔定律及其在不变理论中的应用。 *arXiv e-prints to appear in Geometry and Topology* 2312 06533, ，第 ar
Xiv: 页。2023年12月。[LR18] Alexander Lytchak 和 Marco Radeschi。球面上奇异黎曼叶状结构的代数性质。 *J. Reine Angew. Math.*，744：265–273，2018年。[LW16] Alexander Lytchak 和 Burkhard Wilking。球面上的黎曼叶状结构。*Geom. Topol.*，20(3)：1257–1274，2016年。[LW24] Alexander Lytchak 和 Burkhard Wilking。次度量映射的光滑性。 *arXiv e-prints* 2411 15324, 2024 ，第 arXiv:
页。11月。[Mos57] G. D. Mostow。欧几里得空间中的等变嵌入。 *Ann. of Math. (2)*，65 432 446，1957年：–。[MR20] Ricardo A. E. Mendes 和 Marco Radeschi。拉普拉斯代数、流形次浸没与不变量理论逆问题。 *Geom. Funct. Anal.*，30 573，2020年 2 536( )：–。[MR23] Ricardo A. E. Mendes 和 Marco Radeschi。拉普拉斯代数的极大性及其在不变理论中的应用。 *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，202(2)：1011–1031，2023年。[Pal57] Richard S. Palais。紧致可微变换群在正交表示中的嵌入。 *J. Math. Mech.*，6：673–678，1957年。[PR96] Efton Park 和 Ken Richardson。黎曼叶状结构的基本拉普拉斯算子。*Amer. J. Math.*，118(6)：1249–1275，1996年。[Rud76] Walter Rudin。 *Principles of mathematical analysis*。《纯粹与应用数学国际丛书》。McGraw-Hill Book Co.，纽约—奥克兰—杜塞尔多夫，第三版，1976年。[Spe17] Llohann D. Speranca。紧李群上的全测地黎曼叶状结构。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:1703.09577 页，2017 年 3 月。[SZ02] Christopher D. Sogge 和 Steve Zelditch。具有特征函数最大增长的黎曼流形。 *Duke Math. J.*，114(3)：387–437，2002年。[TT95] C.-L. Terng 和 G. Thorbergsson。对称空间中的子流形几何。 *J.*，（）：–。[*Differential Geom.* 42 3 665 718, 1995
Wik25] 维基百科。三角函数 — 维基百科，自由的百科全书。 http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Trigonometric%20functions& oldid =1290517820，2025年。 [在线；访问日期：23-May-2025]。[Wil01] Burkhard Wilking。闭测地线的指标奇偶性与 Hopf 纤维化的刚性。*Invent. Math.*，144(2)：281–295，2001年。

Colby College
Department of Mathematics
4000 Mayflower HillWaterville,
ME 04901, USA*Email address*:
samlin@colby.edu

University of Oklahoma
Department of Mathematics601 Elm Ave
Norman, OK, 73019-3103, USA*Email address*:
ricardo.mendes@ou.edu

Università degli Studi di Torino
Departimento di Matematica "G. Peano"
Via Carlo Alberto, 10 10123 Torino (TO),
Italy*Email address*: marco.radeschi@unito.it