arXiv:2512.16622v1 [cs.CG] 18 Dec 2025

半平面中的射线在线竞争搜索

Elmar Langetepe 和 Florian Gans

波恩大学，计算机科学研究所 V，德国波恩 D-53113
{elmar.langetepe,s6flgans}@uni-bonn.de

摘要。 我们研究在半平面中搜索射线（或直线）的问题。该问题是奶牛路径问题自然延伸至半平面后的形式，也可以直接由一个 1.5 维地形搜索问题引出。我们提出并分析了一种适用于这一设定的高效策略，并证明其最坏情况下的竞争比小于 9.12725；同时还证明，任何策略的竞争比下界至少为 9.06357。因此，该策略几乎是最优的，差距小于 0.06368。通过对地形搜索问题作适当调整，我们改进了以往的结果，并给出了受几何直观启发的证明论证。正如预期，地形本身只能帮助搜索者与未知最短路径进行竞争。我们在一定程度上提取出了问题的核心。

关键词： 在线策略 · 竞争分析 · 射线搜索 · 半平面与地形。

1 引言

在在线搜索博弈和在线算法领域，所谓的奶牛路径问题是一个广为人知且非常著名的搜索问题。奶牛位于围栏附近，正在寻找一处距离它有一定距离的洞。奶牛并不知道洞可能在哪里、距离有多远，而且当时还是漆黑的夜晚，见图 1。从几何角度来说，搜索者位于一条（无限）直线 l 上的固定起始位置 s，正在寻找 l上某处一个未知的（静止的）目标点 t 。如果智能体知道目标 t的位置，就可以沿直线直接朝它移动，从而获得最优的最小搜索代价 $|st|$ 。如果没有更多信息或视野，任何合理的搜索路径都必须从 s出发，交替探查两个方向，来回移动，并逐步增加两个方向上的搜索深度。因此，任何合理的策略都可以用一个（无限）移动序列$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...)$ 表示，其中 $x_i \in$ II R， $i \in$ IIN；智能体在一个方向上逐步增加探查深度至 $x_1 < x_3 < x_5 < \ldots$，在另一个方向上逐步增加探查深度至 $x_2 < x_4 < x_6 < \ldots$，并交替探查这两个方向。请注意，智能体会返回起点，因此在找到目标之前，每段距离都要计算两次。我们希望比较成功

搜索策略的路径长度与信息完备时通往目标的最短路径。对于给定策略 X，当智能体在第 k 步以距离 x_k擦过目标，随后以距离 x_{k+1} 开始新一轮迭代，转向另一侧探查；返回后，又在先前探查位置稍后方的某处、距离 $|st| = x_k + \epsilon$ 处发现目标时，会出现相对于未知最短目标路径的（局部）最坏情况，其中 ϵ可以任意小。我们要研究的是：在信息不完备的情况下，如何设计高效的在线策略，以应对信息完备时的最优离线路径；在本例中，这条路径就是通往目标的直接最短路径。

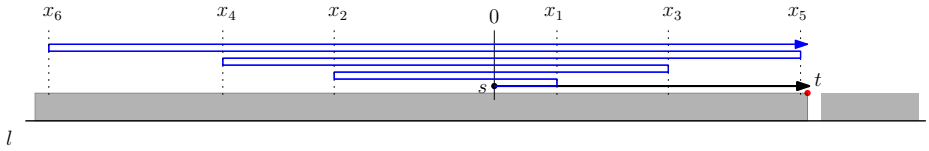


图 1. 奶牛 正在寻找围栏上的未知洞，并沿着围栏来回移动。任何合理的搜索策略都可以表示为一个序列 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, ...)$。当目标距离起点为$|st| = x_k + \epsilon$，且此前已在另一侧完成一趟往返，最远到达距离 x_{k+1} 处时，奶牛便会陷入一种相对于通往目标的未知最短路径而言的局部最坏情况（此处 $k = 5$）。

这就是在线算法或策略的竞争分析的一般概念。对于高效的在线近似，我们要寻找一个序列 X，以确保通往目标的在线搜索路径长度至多比到达该目标的最短路径长 C 倍。因此，在这种设定下，我们希望找到一个序列，使得对于某个常数 $C \geq 1$，我们能够保证

$$2\sum_{i=1}^{k+1} x_i + (x_k + \epsilon) \leq C \cdot (x_k + \epsilon) \text{ holds for any } k \in \mathbb{N} \text{ and any } \epsilon > 0\,. \qquad (1)$$

我们希望找到最优策略 X，使其在所有此类常数下都能最小化 C。注意，式（1）中求和项的系数 2 来自往返移动。对于 $k = 0$，不存在 x_0（或者将 $x_0 := 0$ 作为替代）。这意味着这样的常数 C 不可能存在，因为对于任意固定的 $x_1 > 0$ 和 C，我们都可以利用任意小的 ϵ，使得 $2x_1 + \epsilon \leq C \cdot \epsilon$ 不成立。我们通过假设目标至少距离起点一步远来克服这种初始情况（例如 $x_0 := 1$）。另一种做法是采用竞争分析中的加性常数，见第 2 节。无论如何，我们也可以忽略 ϵ，并寻找一个使下列比值最小化的序列，同时保证存在一个常数 C，使得

$$\frac{2\sum_{i=1}^{k+1} x_i + x_k}{x_k} = 1 + 2\frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k} \leq C \text{ holds for any } k \in \mathbb{N}\,.$$

显然，上述局部最坏情况保证足以确保对所有其他目标也能达到近似比 C。例如，从 x_k 移动到 x_{k+2} 时，任何潜在目标都会得到更好的比值。

该问题最初由 Beck [4]于1964年作为线性搜索问题提出。此后，人们从许多方面对其进行了重新研究。众所周知，倍增启发式能够给出一个 $x_i = 2^{i-1}$ 的最优策略，其 $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1}}{2^k} = 4 - \frac{1}{2^k} \leq 4$ 和 $C = 9$。人们针对这一常数的最优性结果给出了不同的证明。Gal [13] 最先在搜索博弈的背景下给出了证明；另一个证明则基于泛函优化中的著名一般性结果，即 $F_k(X) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$ 是定义在序列 X上的一个泛函。后来，Baeza-Yates 等人 [3]重新提出了这个问题。

1.1 半平面中的射线搜索

本文将奶牛路径问题推广到半平面，并研究以下任务：从欧几里得二维平面中直线 l 上的某个点 s出发，搜索一条射线 r；该射线的起点 t 位于 l 上，并且相对于 l指向某个半平面。不失一般性，假设 l 是坐标系的 X轴，s 是原点 (0，0)，且射线 r_t 相对于 X轴指向上半平面，起点为 $t = (t_x, 0)$。搜索路径首次经过未知射线时，就能探测到该射线，见图2。只搜索垂直于 X轴的射线，便直接得到原始的奶牛路径问题，因为向半平面内移动并无益处。对于更一般的射线，搜索路径 Π 必须进入半平面。如果搜索路径 Π 首次在某个点 p'经过未知射线，我们便考虑搜索路径 $|\Pi_s^{p'}|$从 s到 p 的长度与到达该射线的最短路径之比；后者是线段 st'，且垂直于该射线。

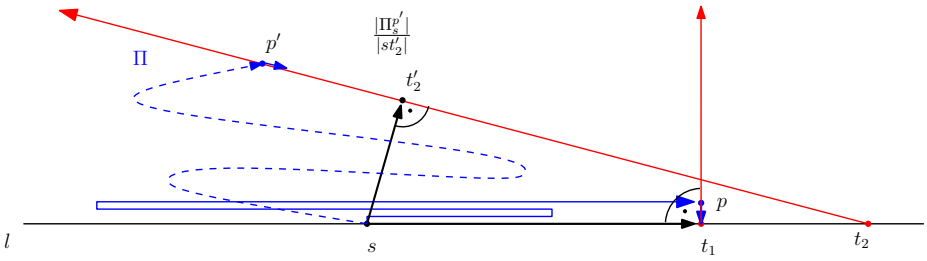


图 2。 在半平面中搜索未知射线，并以搜索路径 Π 与通往该射线的最短路径进行竞争。如果目标集合限定为垂直于 l 的射线，我们将回到奶牛路径问题。

我们希望使用广义牛路径策略作为搜索路径，在上半平面中向左、向右以及沿 {v1} 方向的搜索深度不断增加。

因此，我们对要寻找的射线作如下限制。下一节提到的地形搜索应用也充分说明了这一限制的合理性。任何以点 t 为射线起点、位于 X 轴上的射线 r，都可以延伸为直线 l_r。搜索路径将在上半平面内延伸。为贴近奶牛路径问题，我们要求到任何指定点 l_r 的最短路径，也就是垂直于 l_r 的线段 st'，也必须保持在这个半平面内。换言之，相应的射线指向原点 s。射线起点位于 s 左侧的射线，其斜率为正，直到 ∞；射线起点位于 s 右侧的射线，其斜率为负，直到 $-\infty$。现在，任何合理的（无限）搜索路径 Π 都必须经过所有这类射线，从左向右移动，并且沿两个 X 方向以及 Y 方向的搜索深度不断增加，见图3。

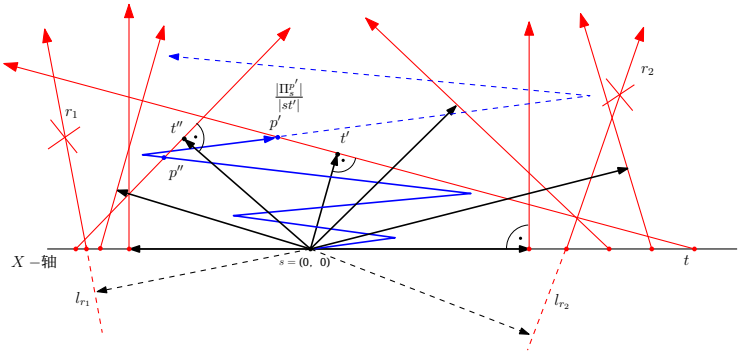


图 3. 我们要寻找的射线子集示例。对于任意这样的射线 r，从 s 到该射线的最短路径，即满足 $t' \in r$、且垂直于 r 的线段 st'，也必须位于上半平面内。射线 r_1 和 r_2 不在我们的关注范围内。一条合理的搜索路径 Π可以采用广义牛径，同时逐步增加高度。请注意，我们的竞争对象是任何满足给定性质的目标射线。

本文首先提出一种二维策略（与奶牛路径问题相关），保证在半平面内针对任意一条指向原点的未知射线，其竞争比相对于最短路径小于 9.12725。我们还给出了 9.06225 的下界。因此，两者之间的差距严格小于 0.065。将范围限制为指向起点的射线（或直线），其动机充分，这源于第2.1节讨论的地形搜索问题。通过适当修改，我们也调整了策略，使其适用于地形搜索问题。值得庆幸的是，通过几何论证，我们可以证明这一修改足以保证在地形上的竞争比也达到所给出的数值。显然（正如预期的那样），地形只会给我们带来优势。总的来说，我们改进了上述先前结果。我们解决这一问题的不同方法，也在某种程度上提炼出了

地形搜索问题的核心。这应该有助于人们进一步求得其整体竞争复杂度。

2 相关工作与地形搜索应用

从分析角度来看，我们将采用 Sleater 和 Tarjan 提出的竞争分析框架 [20] ，该框架最初用于列表更新和分页问题。我们来考察一个具体的算法问题，并令 $\mathcal{P}$ 为该问题所有实例的集合。最优离线算法 OPT 在掌握全部信息的情况下求解该问题。此外，该算法在实例 $P \in \mathcal{P}$ 上的成本记为 $S_{OPT}(P)$，最优性意味着 OPT对任意实例和任意算法都能达到最小成本。我们进一步假设，在线算法 ALG 也能求解$P \in \mathcal{P}$ 的任意问题实例，但只能逐步获取问题信息。因此，ALG 可能无法以最小成本求解问题，即 $S_{ALG}(P) \geq S_{OPT}(P)$。如果存在常数 A和 C 使得不等式成立，我们就称该在线算法为 C-竞争的。

$$S_{ALG}(P) \leq C \cdot S_{OPT}(P) + A \tag{2}$$

对所有 $P \in \mathcal{P}$均成立。因此，ALG 保证其结果不会比最优离线解差超过 C 倍，另加一个常数 A。第二个常数 A涵盖了起始情形。当某些固定的小型实例中，在线算法的前几步相对于最优解会产生较高的成本时，就需要这个常数。在这种情况下，问题可能无法得到恰当分析。因此，允许通过加法常数完全涵盖或排除小型实例或特殊的起始情形。因此，分析特定策略时，只需考虑比率$\frac{S_{ALG}(P)}{S_{OPT}(P)}$。对于下界，必须将常数 A考虑在内。因此，下界构造需要能够保证 $S_{OPT}(P)$ 的值任意大（进而也能保证$S_{ALG}(P)$ 的值任意大）。

所提到的奶牛路径问题有着悠久的传统，并且已经讨论过许多进一步的扩展和修改。Beck [4] 于1964年首次将该问题作为线性搜索问题提出，后来他又回到这一问题上 [5]。在搜索博弈的背景下，Gal [13]首次给出了最优解。Baeza-Yates 等人 [3]将该问题引入计算几何领域。随机化的影响也曾被研究 [16],；该问题被扩展到 m条射线 [19]，还针对转向成本 [10] 和有界距离 [14]进行了研究。人们已经发现了一些关于最优策略的一般性刻画 [8, 19]。最近，人们还讨论了距离和方向提示的概念 [2]。将搜索问题扩展为在二维平面中搜索直线（或射线）是一项终极挑战。主要猜想是，对数螺线是搜索平面中直线时整体上最佳的竞争策略，其已证明的竞争比为13。8111351795。。。这也被称为雾中游泳问题 或迷失森林问题 ，即在平面中搜索一条（海岸）线；参见 Chrobak [9]关于以下情形的综述：

已知到直线的距离，Alpern 和 Gal [1]关于搜索博弈与会合的著名教科书，以及 Finch [12]的报告。截至目前，在平面中的螺旋搜索最优性仅在雷达搜索平面中点的背景下得到证明 [17]。人们曾尝试研究轴平行海岸线这一限制情形 [15, 18]。

2.1 地形搜索应用

此处讨论的问题，其最直接的动机源自 S. de Berg 等人最近的一项工作（Latin 2024） [7]。作者研究了一种未知的 1.5维地形 T，其上边界在欧几里得坐标系中被建模为一个 X-单调（折线链）函数。更准确地说，地形的上边界必须是 X-单调的，或相对于某个地平面 G 单调；该地平面可假设与 X 轴平行。此前，1.5维地形的守卫问题也曾受到关注，例如，过去曾研究过计算所需守卫数量的问题 [6, 11]。

在这里，智能体从地形上的某处出发，并必须沿着搜索路径 Π 始终保持在地形上方，以找到位于地形上的未知目标 t。这类似于在地形上方移动的直升机，见图2.1。沿搜索路径 Π，在某个点 p_t，目标可能会首次进入视野，也就是说，线段 $t\,p_t$ 不再与地形相交。此时，目标 t 将被发现。形式上，搜索者在 p_t 首次进入目标 t 的可见区域 $\mathrm{Vis}_T(t)$。根据地形边界的 X-单调性，射线 r_t 指向目标时，这种情况确实总会发生。现在，搜索者要与从起点 s 出发、必须始终保持在地形上方且经过这条射线的最短路径竞争，也就是发现目标的离线最短路径 $\mathrm{OPT}_T(s,\ r_t)$。

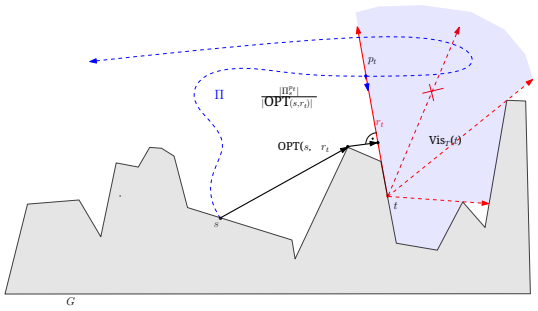


图 4. 在 1.5维地形 T中搜索未知目标 t。首次进入 t 的可见区域 $\mathrm{Vis}_T(t)$时，指向起点的射线 r_t 会最先被访问。无需考虑背离起点的可见射线。从 s 出发、避开地形并访问射线 r_t 的最短路径 $\mathrm{OPT}_T(s,\ r_t)$不一定是单条线段。

请注意，对特殊边界函数（X-单调折线链或函数）的限制，是实现合理近似的必要条件。如果允许将任意折线链用作地形的上边界，就可以轻易地沿边界模拟任意多边形。这意味着，在这种情形下，将无法针对任意未知目标实现常数竞争比的在线近似。出于同样的原因，在线代理需要具备方向感，也就是说，智能体需要了解固定的地面水平线 G。

现在不难看出，任何此类地形配置都会导出一个合法的（子集）输入，供我们在半平面中的纯射线搜索问题使用。下面说明这一转换。它并非旨在构成完整的归约，而是为了阐释我们的场景；整体示例见图 5。为此，我们首先考虑地形上那些从起点不可见的潜在目标点 t 。对于任意 $\mathrm{Vis}_T(t)$和任意搜索路径 Π ，总存在唯一一条射线 r_t，它是任意给定搜索路径 Π从 s出发后首先访问的射线，见图 5(i)。最优离线搜索路径也会在某个点p_{r_t}首先访问这条唯一的射线。因此，实际上只需探测射线。此外，所有这类潜在射线显然都必须朝向起点，含义如前所述。在这一转换过程中可能会出现一些例外：目标位于 s 的一侧，而射线却向下指向起点的另一侧，见图 5 中的 t_2 和 r_{t_2} 。这不会造成问题，因为之后我们只需将射线起点改到另一侧（此处为 t_2'）。我们访问的只是射线，而不是射线起点本身！

接下来，我们考虑经过 s 且平行于地平面 G 的直线 l（智能体需要知道地平面的位置以便确定方向）。现在，我们可以将射线延长或缩短至这条直线 l，参见图 5(ii)。如果我们再像图 5(iii) 那样省略地形，就得到一个纯粹的射线搜索问题实例。这个问题似乎更难处理（就竞争比而言），因为通往射线的最短路径现在会缩短为一条线段，而且我们不再拥有视野。此时还不能完全确定这一点，因为地形也会影响或限制智能体可能的移动。最终我们会看到，就我们的策略而言，地形总是有帮助的，而最坏情况是在没有任何地形时达到的。

反过来，我们确实可以给出某种归约。对于半平面中的任意射线搜索情形，只要给定一组允许的射线，我们就可以构造一个恰好会触发这些射线的地形。参见从图 5(iii) 到图 5(iv) 的逆向变换。

2.2 地形搜索的已知结果

S. de Berg 等人（Latin 2024） [7] 提出了一种用于地形搜索问题的策略。他们采用交替倍增策略，在X方向上使用 $x_i = 2^i$ ，并对任意 Y移动采用由 $\alpha \approx 0.231477$ 给出的固定斜率，见图6。这确实给出了一条广义牛路径。

如果地形会在给定方向上被这条路径撞到，智能体就必须作出反应，开始沿着地形移动，并尝试接上预计算路径

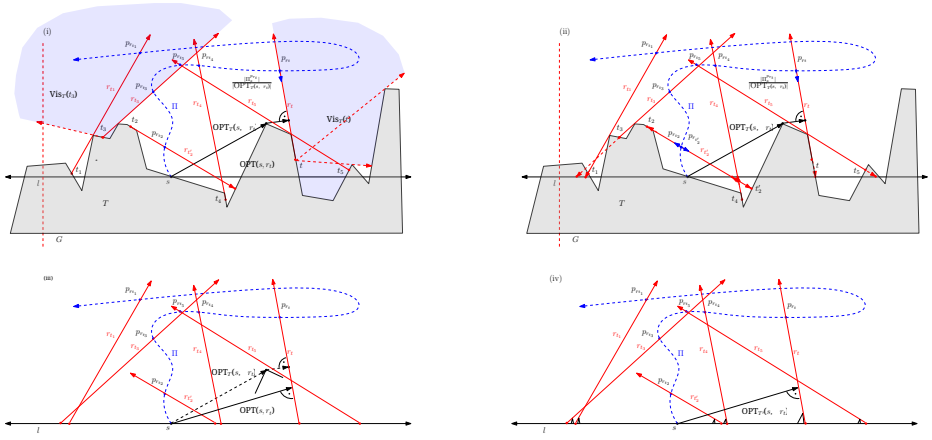


图5. (i) 搜索路径 Π 通过进入可见区域 $\mathrm{Vis}_T(t)$ 中的首条可见射线 r_t，来探测地形上的未知目标 t。所有此类射线都指向目标 s。(ii) 现在，我们可以将目标点移至经过 s、平行于地形地面线 G 的直线 l 上。(iii) 考虑新目标对应的射线，并省略整个地形本身，就得到了一个（纯粹的）射线搜索问题实例。到目标射线的最短路径是一条线段，而且只会缩短。我们与一个更优的离线解竞争。(iv) 任何具有固定射线集合的此类射线搜索情形，都可以利用目标点附近的小尖峰轻松转换为简单的地形搜索问题。

再次参见图6。更准确地说，智能体沿着下一个返回线段下方的一个方向移动。当智能体撞上地形时，智能体开始沿着地形移动。只要智能体保持在返回路径下方，它就会沿着地形移动；如果沿坡度方向移动不会受阻，则会沿坡度方向移动。因此，总能最终找到相应的下一个返回线段，并重新接上路径，继续向另一侧移动。请注意，这条返回路径线段至少必须一直畅通到起始 X 坐标处。

从解析角度看，在给定的论文中，倍增距离 $x_i = 2^i$ 从一开始就已固定。通过考虑两种情形得出了斜率 $\alpha \approx 0.231477363970178$：一种是最坏情况下的地形情形，另一种是沿固定路径出现的上述转折点情形，这与原始的奶牛路径问题类似。两种情形都由垂直射线给出，并且一般情况下保证竞争比为 $3\sqrt{19}/2 \approx 9.24663$ 。作者还证明，没有任何策略能达到低于 $\sqrt{82} \approx 9.05538$ 的竞争比。

为了准确理解这两种最坏情况，我们提取了这两种情况，并使用GeoGebra表格重新计算，如图7所示。因此，地形情况似乎已经很明显地过于悲观，因为其中不必要地考虑了一段子路径。

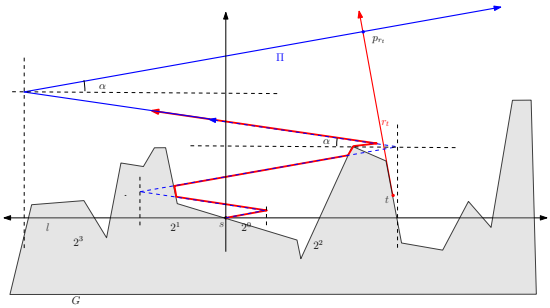


图 6. 地形搜索问题中之字形策略方案的示例，其中$x_i = 2^i$，且固定斜率由角$\alpha \approx 0.231477$给出。返回另一侧时，始终沿预先计算好的固定路径进行。（左侧）地形可能会使智能体走到下一个返回线段处，然后折返。（右侧）如果坡度方向再次畅通，且尚未遇到返回线段，智能体会沿坡度方向前进一段距离。

3 半平面中的射线搜索

鉴于上述考量，接下来我们将采用不同的方法。我们首先考虑不含任何地形的纯射线搜索问题，并对两个参数进行优化，即加倍因子 r 以及一个取决于 r的斜率 α_r 。最坏情况会略有不同。最后，我们还会以不同的方式调整适用于地形的纯策略。幸运的是，我们可以很容易地论证，经过这种修改，我们总能从地形中获益。这也让我们对问题的纯粹本质有了更深入的认识，分析似乎也更加直接。

3.1 策略设计与比率函数

我们使用参数 $x_i = r^i$ 设计一种牛径式策略，用于 $i = 0$，1、2、.....间交替的 X-距离，并用参数 α_r 表示整体斜率，见图 8。为进行优化，斜率取决于 r。令 p_i 表示转折点，令 h_i 表示对 Y轴连续各次访问的高度。

图 8 描述了起点以及一般情况。搜索路径 Π 的局部最坏情况与原始的奶牛路径问题类似：一条垂直射线 t 向左或向右延伸。在转折点（例如 p_{i-1}）处会稍微错过射线 t ，并在下一次转向时于 p'_{i-1} 处发现它。离线最短路径的长度由 p_{i-1}的 X坐标的绝对值给出。更一般的局部最坏情况出现在：稍微错过一条与转折点p_{i-1} 相切的切线 t' ，而智能体开始沿另一侧于 p_i处返回后，会在 p' 处碰到相应的射线。这种最坏情况取决于

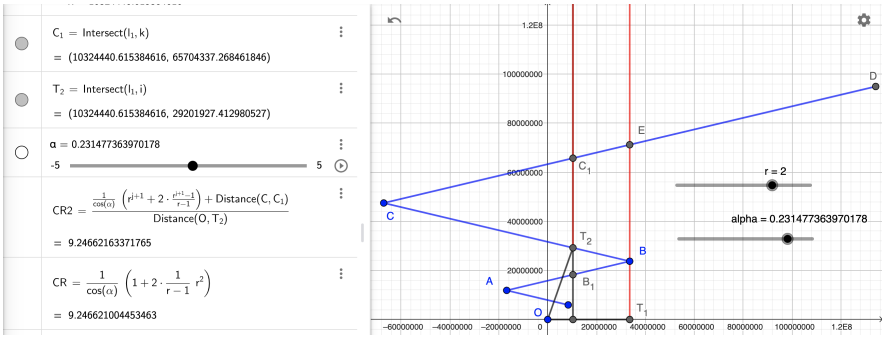


图7。 S. de Berg 等人（Latin 2024）所采用的最坏情况汇总与模拟。两种最坏情况计算均针对垂直射线，其中一种未设置障碍物。离线最短路径始终是一条线段，分别为 OT_1 或 OT_2。对于带有单个障碍物的地形情形，计算中考虑了障碍物后方的路径长度 $|B_1B|+|BT_2|$，尽管策略在给定情形下会忽略这段路径。显然，地形情形仍有改进空间。

角 β（α_r，r）大于 α_r，它表示相应射线 t'的斜率。智能体以通往这样一条射线 t'的最短路径为参照进行竞争。更确切地说，一条线段 $Op_{t'}$ 垂直于 t'，且 $p_{t'} \in t'$。显然，t' 及相应的路径长度构成一般局部最坏情况，因为β（α_r，r）$= \pi/2$ 表示前面提到的最坏情况，其中 $t' = t$。

为方便起见，我们用 α 和 β 代替 α_r 和 β_r，从而隐含地固定给定 r时的角度。令 t_i 表示图9所示的一般局部最坏情况在转折点 p_{i-1} 处上述提到的切线。注意，在右侧的转折点 p_{i-2} 处以及策略的任意一次迭代中，都可能出现完全相同的情形。渐近而言，两者没有区别。比率的计算也相同。我们使用标准三角学。

我们有 $h_0 := 0$ and $h_i = \sum_{j=0}^{i-1} 2\tan(\alpha) r^j = 2\tan(\alpha) \frac{r^i-1}{r-1}$ 对于 $i = 1$，2，3，.....转折点由下式给出

$$p_{i-1} = \left((-1)^{i-1} \cdot r^{i-1}, 2\tan(\alpha) \left(\frac{r^i - 1}{r-1} - \frac{1}{2} r^{i-1} \right) \right)$$

对于 $i = 1$，2，.....假设我们向右开始移动。根据对称性，只需计算右侧的比值，见图9。要计算右侧角度为 β 的 p_{i-1} 处的切线 t_i，我们考虑

$$t_i : Y = -\tan(\beta) \cdot X + b$$

并插入 p_{i-1} 以计算 b。令 b' 为 t_i 与Y轴的交点。因此我们有 $b = |sb'| = \tan(\beta) r^{i-1} + 2\tan(\alpha) \left(\frac{r^i-1}{r-1} - \frac{1}{2} r^{i-1} \right)$。令 t'_i为 —— -

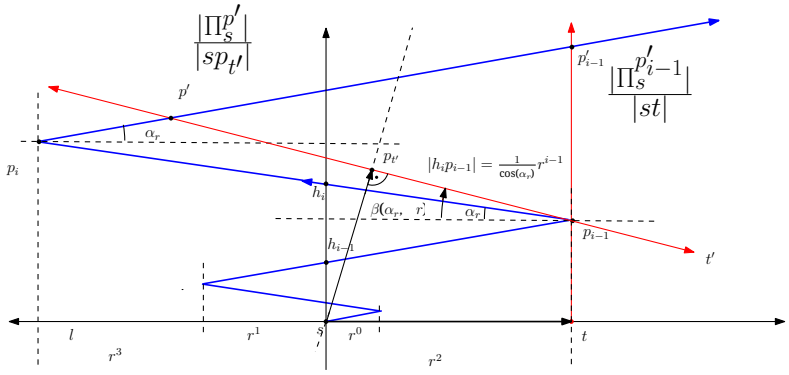


图8. 斜率为 α_r 且指数基数为 r时一般情形的示例。当智能体在点 p_{i-1} 处稍微错过与基线垂直的射线，并在点 p'_{i-1}处探测到该射线时，即构成局部最坏情况。沿基线到达该射线的最短路径长度为 $|st|$ 。一般而言，我们考虑一条经过 p_{i-1}、斜率为 $\beta(\alpha_r,\ r)$ 的局部最坏情况射线。到达这条射线的最短路径是与射线垂直的线段 $sp_{t'}$ 。智能体在点 p_{i-1} 处稍微错过该射线，在从 p_i折返后，于点 p' 处探测到该射线。

满足以下条件的 t_i 上的点： st'_i 是从 s 到 t_i的最短路径。对相应的（全等）三角形应用正弦定理（参见图9），我们有 $|st'_i| = \sin(\pi/2 - \beta) \cdot b = \cos(\beta) \cdot b$, 即到 t_i的离线最短路径长度。总的来说，到 t_i 的最短路径为

$$|st'_i| = \cos(\beta) \cdot \left(\tan(\beta) r^{i-1} + 2\tan(\alpha) \left(\frac{r^i - 1}{r - 1} - \frac{1}{2} r^{i-1} \right) \right) . \tag{3}$$

接下来，我们计算射线 t_i 在 p'_i处被探测到之前， $\Pi_s^{p'_i}$ 的总路径长度。往返移动至转折点 p_j 一次的长度为 $|h_{j-1}p_j|+|p_j h_j| = 2\cos(\alpha) r^j$。对于从 p_i 到 p'_i 的路径，我们考虑三角形 p_i、 p_{i-1} 和 p'_i，见图9。我们有 $|p_{i-1}p_i| = \frac{1}{\cos(\alpha)} \left(r^i + r^{i-1} \right)$ ，并根据正弦定理和相应的角度计算得出 $\frac{|p_i p'_i|}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{|p_{i-1}p_i|}{\sin(\beta+\alpha)}$。因此，总路径长度 $|\Pi_s^{p'_i}|$为

$$|\Pi_s^{p'_i}| = \frac{2}{\cos(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^{i-1} r^j \right) + \frac{1}{\cos(\alpha)} r^i + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \left(r^i + r^{i-1} \right)$$

现在，我们可以计算给定 r、 α 和 β 时的（渐近）比率。最后，对于固定的 r 和 α ，我们可以搜索最坏情况 $\beta \in [\alpha, \pi/2]$ ，它给出的

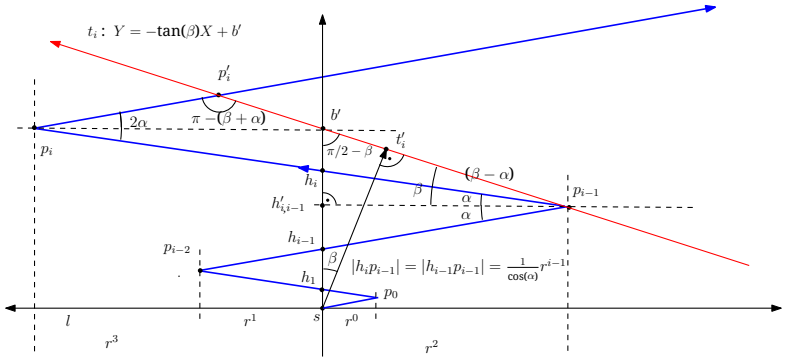


图 9. 一般局部最坏情况的数学分析涵盖了所有情形。射线是直线 $t_i: Y = -\tan(\beta)X + b'$ 的一部分。代入已知点 p_{i-1} 得到 b'。三角形 $s\,t_i'\,b'$ 和 $p_{i-1}\,h_{i,\,i-1}'\,b'$ 全等。因此，我们利用正弦定理计算 st_i'。类似地，在三角形 $p_{i-1}\,p_i'\,p_i$ 中利用正弦定理计算长度 $|p_i p_i'|$。

是由 r 和 α 给定的策略的竞争性能。我们有

$$C(r,\alpha,\beta) := \frac{\frac{2}{\cos(\alpha)}\left(\sum_{j=0}^{i-1} r^j\right) + \frac{1}{\cos(\alpha)} r^i + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)}\left(r^i + r^{i-1}\right)}{\cos(\beta)\cdot\left(\tan(\beta) r^{i-1} + 2\tan(\alpha)\left(\frac{r^i-1}{r-1} - \frac{1}{2} r^{i-1}\right)\right)}. \quad (4)$$

公式（4）中的比值 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$ 可以通过化简几何级数、分别将分子和分母乘以 $\cos(\alpha)\, r^{i-1}$，并考虑到对于任意 $r > 1$，$\frac{-1}{r^{i-1}}$ 都会变得任意小来简化。因此，我们（渐近地）有

$$C(r,\alpha,\beta) = \frac{2\left(\frac{r}{r-1} + \frac{1}{2} r\right) + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}(r+1)}{2\cos(\beta)\sin(\alpha)\left(\frac{r}{r-1} - \frac{1}{2}\right) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}. \quad (5)$$

公式（5）有充分依据。对于 $\beta = \pi/2$，它可简化为

$$C(r,\alpha,\pi/2) = \frac{2}{\cos(\alpha)}\left(\frac{r^2}{r-1} + \frac{1}{2}\right) \quad (6)$$

这是转向点的最坏情况，见图 8。通过简单分析可知，最优解（对所有 α，在 r 上最小化 $C(r,\ \alpha,\ \pi/2)$）由 $r = 2$ 给出，结果为 $\frac{9}{\cos(\alpha)}$，这使得原始奶牛路径问题在 $\alpha = 0$ 时的竞争比为 9。

我们可以利用简单的（即三角）恒等式进一步化简比率公式(5)，得到

$$C(r,\alpha,\beta) = (r+1)\frac{\frac{r}{r-1} + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}}{2\cos(\beta)\sin(\alpha)\frac{r}{r-1} + \sin(\beta-\alpha)}. \quad (7)$$

$$C(r,\alpha,\beta) = \frac{r+1}{\cos(\alpha)} \quad \frac{\frac{r}{r-1} + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}}{\sin(\beta) + \cos(\beta)\tan(\alpha)\frac{r+1}{r-1}} \,. \tag{8}$$

3.2 $C(r, \alpha, \beta)$ 的上界与分析

我们将讨论对 $C(r, \alpha, \beta)$ 的优化，并使用 MatLab 作为标准的计算机代数系统。完全采用解析方法进行优化似乎非常繁琐。我们必须为 $r > 1$ and$\alpha \in (0, \pi/2)$ 找到最优数对 (r, α)，使得 $\sup_{\beta\in[\alpha,\pi/2]} C(r, \alpha, \beta)$ 最小。更正式地说，牛径式策略的最佳比率为

$$\inf_{(r,\alpha)} \left(\sup_{\beta\in[\alpha,\pi/2]} C(r,\alpha,\beta) \right) \text{ for } r > 1 \text{ and } \alpha \in (0, \pi/2] \,. \tag{9}$$

显然，这是一个多维优化问题，不太容易处理和求解。不过，我们可以利用这样一个优势：首先，我们要寻找的是一个上界，而不是对一般情形下的问题进行全面的理论优化。对于给定的一对固定策略取值 (r, α) 所定义的固定牛径策略，关于 β 的优化最终可以通过解析方法完成（必要时也可采用数值方法）。因此，对于固定的一对 (r, α)，其中 $r = 1.978624821$ 和 $\alpha = 0.166547577$，我们最终得到了对所有 $\beta \in [\alpha, \pi/2]$ 均成立的上界 9。1273。最后，我们将论证这种选择依据充分，实际上也没有留下进一步改进的空间。

图 10 展示了 $C(r, \alpha, \beta)$ 在 $\beta \in [\alpha, \pi/2]$ 时的图像，以及该上界的性质。给定的策略取值平衡了两种最坏情况：对于 $\beta \approx 0.190681180073897$ ，唯一的局部最大值（通过数值计算得出）与 $\beta = \pi/2$ 的边界最大值（在精度允许范围内）相同；并且，对于所有 $\beta \in [\alpha, \pi/2]$，均保证 $C(r, \alpha, \beta) < 9.12725$。因此，该策略保证了所给出的比率；在给定范围内，这个局部最大值和全局最大值可以通过 MatLab 以数值方法高精度计算得出。

现在我们将简要讨论如何求得这些值，以及为什么最终可以通过解析论证得出，这些值一般而言（在精度范围内）能够优化公式（9）。

对 α 和 r的区间限制：在这里，我们已经尝试以目标为导向进行论证，以便合理地限制 α 以及 r的区间。这将有助于之后的解析解释。首先，目标导向意味着我们采用牛径式策略，并希望严格低于上述最终目标，即 9.12725，这是目前为止得到的中间结果。为方便起见，我们说，希望设计出优于 9.1273 比率的牛径式策略。

注意到 $r = 2$ 始终（对于任意 $\alpha \in [0, \pi/2)$ 是公式（6）的唯一局部最小值，并且当 r较小时和较大时，该比值在局部递增。更确切地说，通过简单的解析方法，对于 $r = 2$，函数 $f(r) = \frac{2}{\cos(\alpha)}\left(\frac{r^2}{r-1} + \frac{1}{2}\right)$ 在 $r > 1$ 且~~$\alpha \in [0, \pi/2$~~固定时有唯一最小值 $f(2) = \frac{9}{\cos(\alpha)}$

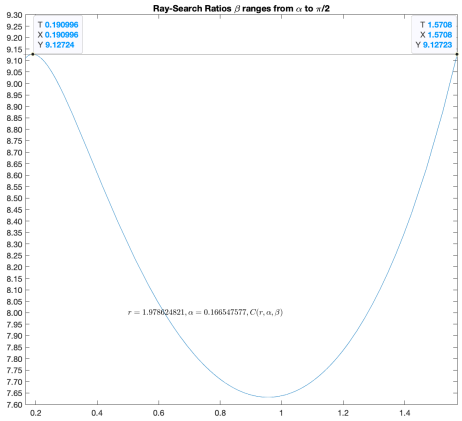


图 10. 一般优化的性质。我们需要找到满足以下条件的数对 (r,α)：在某个 $\beta_{\max}$ 后不久增大 $\beta\in[\alpha,\pi/2]$ 时，局部最大值 $C(r,\alpha,\beta_{\max})$ 与边界最大值 $C(r,\alpha,\pi/2)$ 重合。使用带有 $r=1.978624821$ 和 $\alpha=0.166547577$ 的 (r,α)，得到 $C(r,\alpha,\beta)<9.12725$。带有 $\beta_{\max}\approx 0.190681180073897$ 的 $C(r,\alpha,\beta_{\max})$ 大致也能达到该值（甚至略低），$C(r,\alpha,\pi/2)$ 也同样如此。

因此，我们现在就可以代入，α 应由 $\cos(\alpha)>\frac{9}{9.1273}$ 界定。这意味着 α 必须严格小于 0.1673。对于我们特殊的奶牛路径式策略，还可以给出 α 的一个合理上界。如果将给定固定的 α 下的路径完全展开，我们将在转折点 p_{i-1} 处达到高度（记作）Y，此时已经走过了总长度（记作）P的路径。在 p_{i-1} 处的一条近似水平射线也给出了 α的一个界。到该射线的最优距离是 Y。因此，我们可以考虑一个包含 P、Y和 α 的直角三角形，其中$\frac{P}{Y}=\frac{1}{\sin(\alpha)}<9.1273$ 必须成立，见图 11。这给出 $\alpha>0.109781$。

另一方面，与 $\beta=\pi/2$ 类似，$\beta=\alpha$ 也是一种边界情况；目标射线将在下一个转弯后不久被检测到。这会得到比率 $C(r,\alpha,\alpha)=\frac{r+1}{\sin(2\alpha)}$。根据 $\alpha<0.1673$ 以及目标 $C(r,\alpha,\alpha)<9.1273$，我们因此得出结论 $r<1.9885$。此外，对于边界情况 $\beta=\pi/2$，结合上述关于 $\alpha>0.109781$ 的下界，我们再次得出结论 $r>1.825$。这再次由比率公式（6）和不等式 $C(r,\pi/2,0.109781)<9.1273$ 得到证明。请注意，如前所述，$r=2$ 始终是公式（6）的唯一局部最小值（对任意 α 均如此），且当 r 变小时或变大时，比率都会局部增加。进而，利用这个新的 r 下界，我们可以再次进一步缩小 α 的范围。$C(1.825,\alpha,\alpha)=\frac{1.825+1}{\sin(2\alpha)}<9.1273$ 得到 $\alpha>0.156$。再次使用公式（6），令 $\alpha=0.156$，并取~~$C(r,\pi/2,0.156)$~~ <9.1273，得到 $r>1.913$。

总体结论如下。若要凭借给定的策略设计打破 9.1273 的比率，我们需要 $r\in(1.913,1.9885)$ 和 $\alpha\in$

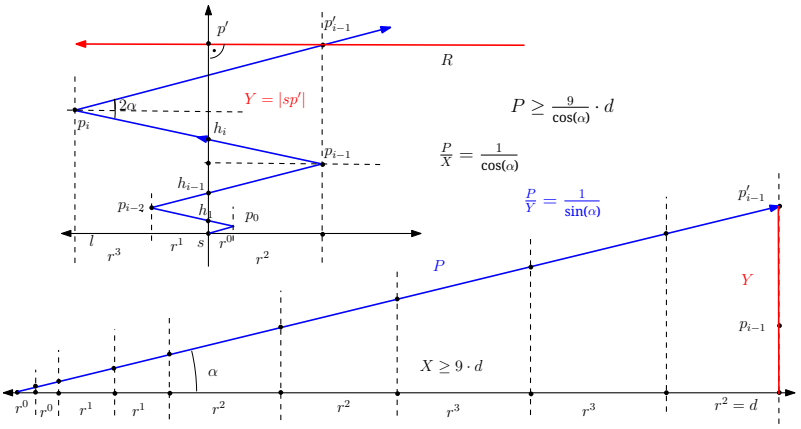


图11。为了得到 α 的上界，我们将长度为 P的完整路径展开至高度 Y，并考虑距离为 Y 的水平射线对应的局部最坏情况。我们有 $\frac{P}{Y} = \frac{1}{\sin(\alpha)}$。注意，由于传统牛路径问题，$X$-距离 X 大于 $9 \cdot d = 9 \cdot r^i$。

(0.156,0.1673)，这是数值优化、解析解释和合理绘图的总体合理范围。

对于任意固定的数对 (r, α)，其中 $r \in (1。913, 1。9885)$，且 $\alpha \in (0。156, 0。1673)$，并令 $\beta \in [\alpha, \pi/2]$不断增大，我们可以更仔细地考察一般比率公式 (7)。通常，对于 r 和 α 的此类合理取值，随着 $\beta \in [\alpha, \pi/2]$ 增大，比率 $C(r, \alpha, \beta)$在这个范围内是连续且可微的函数，其变化如下。首先，$C(r, \alpha, \beta)$会增大，因为分母的增长速度比分子慢。实际上，这种增长会一直持续到局部最大值。随后，比率先下降至局部最小值，最后——射线末端的距离确实缩短，而路径长度仍在增加——比率再次上升，并在 $\beta = \pi/2$处达到边界最大值。最后（下文中），通过考察公式 (7) 对 β的一阶导数，我们将从解析上论证这种变化规律。

例如，如果我们仅将地形搜索策略取值（来自 [7]）用于纯射线搜索策略，那么 $r = 2$和 $\alpha = 0.23147\ldots$对应的 $C(r, \alpha, \beta)$ 图显示，$\beta = \pi/2$ 的边界最大值涵盖了所有其他比率，因此保证了给定的比率 9。24663，见图12。这正是我们最初的猜想，但这并非最佳选择。另一方面，对于取值 $r = 1.98$ 和 $\alpha = 0.165$，给定策略在某个 $\beta \approx 0.192355$ 的局部最大值处达到最坏情况比率 9。21274，该点紧接着牛路径方向改变之后，见图 13。看来，我们确实必须平衡这两种最坏情况——局部最大值和边界最大值应当相同。

我们将进一步给出一些有说服力的论据，说明上述参数对的选择在所有此类策略中几乎（除数值精度外）是最优的——

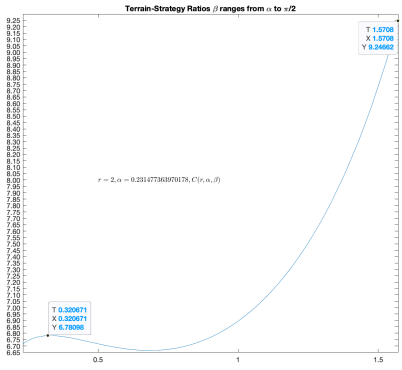


图 12. 一个边界最大值 $\beta = \pi/2$ 涵盖所有比率 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$，其中 $r = 2$ 和 $\alpha = 0.23147\ldots$ 取自 [7]。

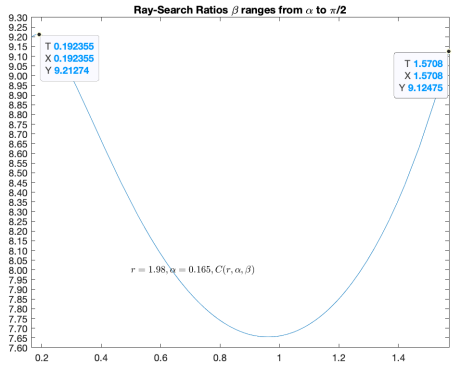


图 13. 一个局部最大值在 $\beta \approx 0.192356$ 处涵盖所有比率 $C($ $r\ \alpha$ $r\ =$ 1.98 $\alpha = 0.165\ldots$, , $\beta)$, 其中 and

策略。上述关于 α 的上界已经表明，我们必须将其保持在 0.1673 以下，但还必须调整 r。对 $r = 2$ 的比率进行平衡后得到 $\alpha \approx 0.167777$，并且已经保证了一个小于 9.1282 的合理比率，见图 14。因此，若要将该比率保持在 9.1282 以下，唯一的方法还包括略微减小 r，并且 通过调整 α，始终平衡两个最差情况下的比率。于是，我们利用 MatLab，并交替使用 Florian Gans 作为 LAB 项目一部分编写的区间算术程序，以数值方式找到了相应的最佳参数对（$r,\ \alpha$）。

分析论证： 请注意，平衡两个边界情况 $\beta = \alpha$ 和 $\beta = \pi/2$并无意义。最后，这也意味着，上述通过交换论证来最小化 α 和 r 取值范围的方法终将无法继续！如上所述，对于任意合理的数对 $(r,\ \alpha)$，比率 (7) 的值从 $\beta = \alpha$开始总是先增大。形式上，我们可以分析 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$ 关于 β的一阶导数的符号（分子）。我们有

$$C'(r,\ \alpha,\ \beta) = (r+1)\times \frac{\left(2\cos(\beta)\sin(\alpha)\ \frac{r}{r-1}+\sin(\beta-\alpha)\right)\frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)_2}+\left(2\sin(\beta)\sin(\alpha)\ \frac{r}{r-1}-\cos(\beta-\alpha)\right)\left(\frac{r}{r-1}+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\right)}{\left(2\cos(\beta)\sin(\alpha)\ \frac{r}{r-1}+\sin(\beta-\alpha)\right)^2}.$$

现在根据 $C'(r,\ \alpha,\ \alpha) = (r+1)\ 2\cos\ (\alpha)\ _2 > 0$，我们得出在开始增长时，$\beta \in [\alpha, \pi/2]$ 比率 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$ 会增大。此外，我们可以利用 r和 α的区间。对于所有此类数对 $(r,\ \alpha)$，我们可以证明 $C'(r,\ \alpha,\ 2\alpha) < 0$

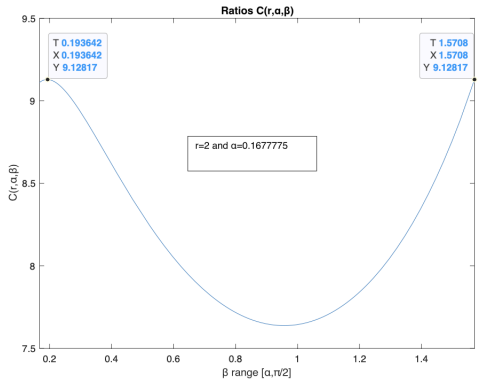


图14。 对最坏情况比率进行平衡（ $\beta = \pi/2$ 的边界最大值和 $\beta \approx 0.19364$的局部最大值），对于 $r = 2$ 而言，已经能得到非常出色的策略。对于$\alpha \approx 0.1677775$，该策略保证比率 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$小于 9。1282。

成立，并且当 $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$ 时， $C(r,\ \alpha,\ \beta)$ 存在局部最大值。要证明这一点，我们只需尽可能降低 $C'(r,\ \alpha,\ 2\alpha)$ 的分子为负的可能性！分别取最小或最大的 r ，以及最小或最大的 α；如果这样有助于使 $C'(r,\ \alpha,\ 2\alpha)$ 为正，它仍然保持为负。如前所述，该比率最终必须增大， $C'(r,\ \alpha,\ \pi/2) > 0$ 始终成立。因此， $\beta \in [2\alpha, \pi/2]$中也存在局部最小值。更准确地说，在给定区间内，甚至可以证明 $C'(r,\ \alpha,\ \pi/2 - \alpha) > 0$。

总而言之，我们可以证明，对于 $\beta \in [\alpha, \pi/2]$ 以及任意一对$(r,\ \alpha) \in [$(1。913，1。9885)， (0。156，0。1673)]，函数 $C'(r,\ \alpha,\ \beta)$起始值为正，随后出现某个负的最小值，之后又变为正值；图15展示了 $r = 1.95$ 和 $\alpha = 1.61$的一个示例。因此，导数会两次等于零，进而$C(r,\ \alpha,\ \beta)$的表现如前所述：对某个 $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$有局部最大值，对某个 $\beta \in [2\alpha, \pi/2 - \alpha]$ 有局部最小值，并且对 $\beta = \pi/2$有边界最大值。因此，需要平衡哪些量就显而易见了！通过使用 $r = 1.978624821$ 和 $\alpha = 0.166547577$，我们可以保证比率小于 9。12725。

3.3 下界构造

为了推导任意策略的竞争比下界，我们首先说明，任何合理的策略都会使 Y 坐标单调递增。向下移动没有任何好处。此外，任何合理的策略都会像传统牛径问题那样，依次交替向左和向右延伸 X 方向。与传统牛径问题类似，当策略返回到左侧或右侧先前达到的最大距离 d 处时，对于垂直射线，总会出现一个局部最坏情况。此时

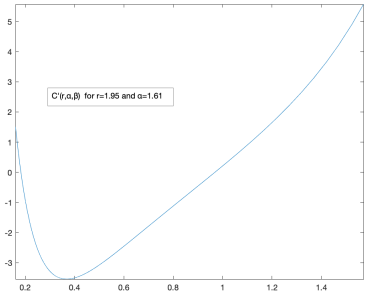


图 1。对于任意合理的数对（r，α），β中 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$ 的导数有两个零点：其中一个对应于 $\beta \in [\alpha, 2\alpha]$ 时 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$ 的最大值，另一个对应于 $\beta \in [2\alpha, \pi - \alpha]$ 时 $C(r,\ \alpha,\ \beta)$ 的最小值。最后，在 $\beta = \pi/2$ 处还有一个边界最大值。

当前最高的整体 Y 坐标 d_y 也已被访问，我们还要与一条距起点 d_y 的水平射线竞争。

因此，我们考虑任意策略 ans。如图 11 所示，我们将其总路径展开，并考察策略某个任意阶段中沿 X 方向的这种最坏情况。必定存在这样一个局部最坏情况点（$d,\ d_y$），其总路径距离大于 $9\times d$（该值已由常规奶牛路径问题得到）。为了给当前路径距离提供一个下界，我们现在只考虑通往（$d,\ d_y$）的简单直线路径。将策略的总路径展开后，这条路径的长度小于原始策略的长度。图16仅示例说明了这种展开以及最终将路径简化为三角形（$-p$，0），（0，d），（$d,\ d'_y$）。注意，可以假设 $p \geq 8d$。在下文中，我们设定 $p = 8d$，因为这样总能使所构造下界的比率最小。

现在，我们可以分别计算垂直射线距离为 d 或水平射线距离为 d_y 时的两个比率 $\sqrt{81d^2+(\ d_y\ ^2\ )}$ 和 $\sqrt{81d^2+(\ \ d_y\ ^2\ )}$。$d_y \geq d$ 或 $d \geq d_y$ 至少有一个成立。这意味着第一个d或第二个比率中d_y至少有一个更差。因此，为了得到这种情形下的总体下界，我们必须计算使两个比率中的较大值最小的 $d = d_y$ 对应的比率。这给出了第一个下界 $\sqrt{82} \approx 9.055385\cancel{1}\ldots$，该下界此前已为人所知。我们还可以进一步提高这个下界。

在点（$d,\ d_y$）处，我们必须注意，不能只考虑与一条水平射线和一条垂直射线竞争；还必须考虑所有从起点出发、最短距离为 d 或 d_y 的射线，请再次参见图16。

要与所有射线竞争，通往 $(d,\ d_y)$ 的最短展开路径必须始终位于以起点为圆心、半径为 d 或 d_y 的半圆之外。此类最短展开路径的下界会沿切线到达该圆，然后沿圆前进，再（沿切线）朝 $(d,\ d_y)$ 前进。d_y 大于 d并非不允许，但那样我们就始终只需与

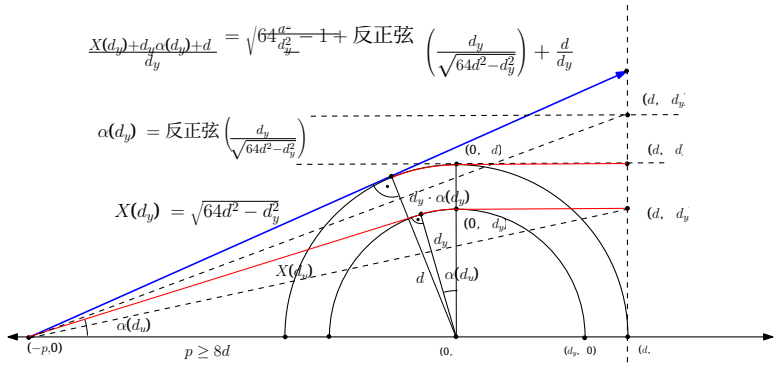


图16. 我们将任意策略截至局部最坏情况下方向为 d 的垂直射线处的完整路径完全展开，并用一条直线将其缩短。在此处，我们到达该策略所有点中高度最大的点（d，d_y）。由于我们考虑到达（d，d_y）的最短直接移动，因此首先只需考虑三角形（$-p$，0），（d，0），（d，d_y），以及一条经过（d，d_y）的垂直射线和一条水平射线，以比较两个比率。注意，可以假设 $p \geq 8d$，并且我们利用 $p = 8d$ 得出下界。两者最大值的最小值在 $d_y = d$ 时取得。为了进一步提高下界，我们还可以假设，展开后的路径实际上必须始终位于以起点为圆心、半径为 d_y 的半圆之外，才能与所有到起点距离为 d_y 的射线竞争。此类最短避圆路径除以 d_y 后给出一个下界。对于下界，我们只能保证所有 $d_y \leq d$ 中的最小值，而该值再次在 $d = d_y$ 时取得。

距离为 d 的垂直射线及其对应的圆竞争，这会导致更大的比率。

因此，为计算这一设定下的下界，我们只需将相应比率表示为 d_y 关于 $d_y \in [0, d]$ 的函数，并以原点为圆心、半径为 d_y 的半圆进行分析。因此，到达局部最坏情况的路径长度至少为：切向移动距离 $X(d_y) = \sqrt{64d^2 - d_y^2}$ 至圆周，再加上长度为 $\alpha(d_y) \cdot d_y$ 的圆弧，其中 $\alpha(d_y) = \arcsin\left(\frac{d_y}{\sqrt{64d^2-d_y^2}}\right)$，以及从 $(0,\ d_y)$ 到 $(d,\ d_y)$ 的距离 d。计算过程如图16所示。我们得到的比率取决于 $d_y \in [0, d]$。由于我们考虑的是比率，因此也可以对该情形进行缩放，使得 $d = 1$，从而计算出其最小值（作为已证明的下界）：

$$R(d_y) := \sqrt{64\frac{1}{d_y^2} - 1} + \frac{1}{d_y} + \arcsin\left(\frac{d_y}{\sqrt{64 - d_y^2}}\right)$$

对于 $d_y \in (0, 1]$。比率函数 $R(d_y)$ 单调递减（见图 17），因此 $d_y = 1$ 给出了 $R(1)$ 的下界。 $= 9.063577796336\ldots$不存在比率更优的策略！

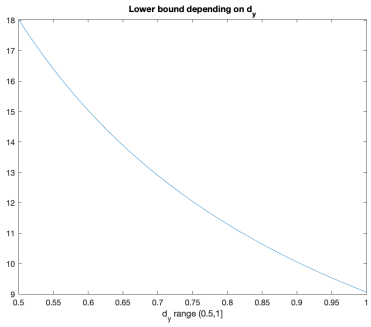


图17. 单调递减比率函数 $R(d_y)$ 的图像，其中 $R(1) = 9.063577796336\ldots$ 是总体下界。

4 地形问题的应用与调整

现在，我们希望将上述奶牛路径策略应用于地形搜索问题，并对其进行调整。首先想到的是，直接借鉴 S. de Berg 等人（Latin 2024）的之字形策略思路，[7] 并采用图6所示的调整方法。结果发现，这种做法并没有整体上的帮助；我们应该利用地形，因为通往当前最坏情况射线的最短路径确实会沿着 Y 方向延伸。因此，与之前的设想不同，当我们到达地形时，将按照以下方式调整纯策略。

请注意，我们最终将采用第3.2节中的参数 $r = 1.978624821$ 和 $\alpha = 0.166547577$，以下将这一原始纯策略记作 Πorig。我们可以用 MatLab 以很高的精度计算这些值，以确保结果低于给定比率。具体数值将在最后时刻纳入考虑。只要可能，我们都会以符号形式进行分析。最后，我们将确保计算正确，且不受数值问题的影响。

以下令 Π_S 表示根据地形调整后的策略。开始时，Πorig 和 Π_S 完全相同，我们从 Πorig 起点开始移动。如果纯策略首次在某一点（记作 q_1）碰到地形，我们建议作如下调整。不变量是，我们始终沿某个方向跟随原始策略的某个副本，只是其 Y 坐标可能更大。实际上，从 q_1 出发，在某点 $q_{(1,2)}$ 转弯后，我们原本计划沿原路返回到相同的 X 坐标，抵达原始策略上的某一点 q_2；参见图 18。

从 $p_1 = q_1$ 出发已无法再进行这样的移动，因此我们离开原先理想化的路径，沿着地形前进一段时间。计划最终到达点 p_2，使其与 q_2 具有相同的 X 坐标和 q_1，且 Y 坐标更大。我们还希望在 p_2 处重新回到一条可以自由返回的路径上

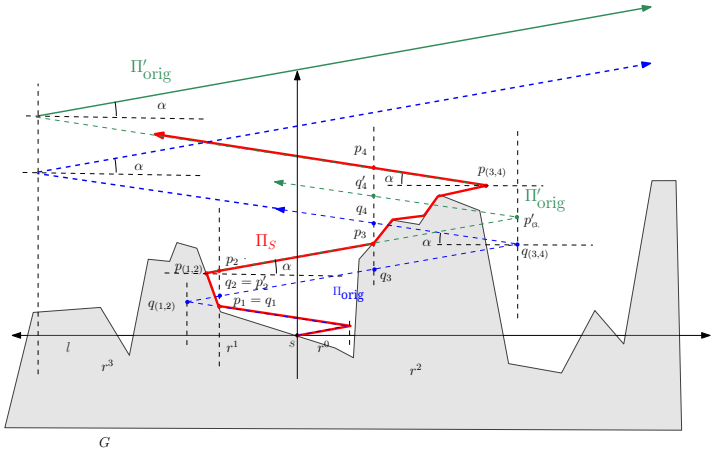


图18。示例说明了针对地形搜索问题的新型之字形策略调整，距离为 X，固定斜率由角 α 给定。我们使用原始策略 Πorig 或其副本 $\Pi'\text{orig}$；若与地形发生碰撞，则沿地形向上攀爬。新策略 Π_S 在自由空间中后退移动时，达到相同的 X 坐标；比较点 p_4 与原始策略 Πorig 上的点 q_4 和/或原始策略 $\Pi'\text{orig}$ 上的点 q'_4。此外，根据构造，总路径长度分别保持不变，误差至多为 p_4 和 q_4。点 p_4 的 Y 坐标可能大于 q_4。例如，当在当前中间规划 $\Pi'\text{orig}$ 中首次访问地形时，在某个点 p_3，我们使用预算 $|\Pi\text{orig}(q_3, q_4)|$（这也等于 $|\Pi'\text{orig}(p_3, q'_4)|$），并沿地形向上攀爬，直到必须再次沿 α 方向前进，或者必须从点 $p_{(3,4)}$ 返回点 p_4，以局部保证 $|\Pi\text{orig}(q_3, q_4)| = |\Pi_S(p_3, p_4)|$。返回点 $p_{(3,4)}$ 可以在移动过程中计算；我们在自由空间中沿 α 方向返回，并按预期到达 p_4，同时保证总路径长度为 $|\Pi\text{orig}(s, q_4)| = |\Pi_S(s, p_4)|$!

沿 α 方向前往另一侧，从而在 q_2 上方以 $\Pi'\text{orig}(p_2)$ 作为 $\Pi\text{orig}(q_2)$ 的新副本开始。此外，新的部分路径 $\Pi_S(p_1, p_2)$ 的路径长度应与之前的 $\Pi\text{orig}(q_1, q_2)$ 相同，也就是说，我们希望有 $|\Pi\text{orig}(q_1, q_2)| = |\Pi_S(p_1, p_2)|$。为满足这些性质，我们从 p_1 出发，利用预算 $|\Pi\text{orig}(q_1, q_2)|$，并开始沿着地形移动。移动过程中，当 α 方向再次变得畅通，或者需要用剩余预算沿 α 方向返回到前面提到的 q_2 的 X 坐标时，我们可以离开地形，转向 α 方向。后一种情况下，我们刚好到达了一个转折点 $p_{(1,2)}$。显然，在移动过程中始终可以适当地计算剩余预算以及返回点 $p_{(1,2)}$。从该点 $p_{(1,2)}$ 出发，我们沿 α 方向返回，这条路径必须畅通，见图 18。因此，我们最终位于 q_2 正上方的 p_2，并

从一开始算起，调整后的策略的总路径长度与原始部分的路径长度相同，因此我们保证 $|\Pi\text{orig}(s,\ q_2)| = |\Pi_S(s,\ p_2)|$。

现在我们可以利用这个不变量。我们将再次沿着原始策略 $\Pi\text{orig}(q_2)$ 的一个副本 $\Pi'\text{orig}(p_2)$前进，从 p_2 处出发，但位置在 q_2 的正上方，且 Y坐标更大。之所以能够做到这一点，正是因为原始策略路径长度的一部分刚好用在了地形上，而我们只稍微向上走了一点！

现在，我们再次理想化地沿着原始策略的一个副本 $\Pi'\text{orig}(p_2)$前进，直到在另一侧碰到地形（也可能更晚才碰到）。例如，在图 18 中，这发生在点 p_3 处，此时我们应用相同的规则。原来的新部分规划是在 p_3 和 p'_4 之间来回移动，途经转折点 $p'_{(3,4)}$，沿着 $\Pi'\text{orig}(p_3)$进行。由于现在无法再这样做，我们便再次沿着地形前进，并利用预算 $|\Pi'\text{orig}(p_3, p'_4)|$（这显然与原始整体策略中的 $|\Pi\text{orig}(q_3, q_4)|$ 相同）。同样，我们希望沿着 $\Pi_S(p_3)$到达一个点 p_4，使其 Y 坐标与 p'_4（以及 q_4）相同。移动过程中，当 α方向再次畅通，或者当我们需要用剩余预算从转折点 $p_{(3,4)}$ 沿 α方向返回到前面提到的 p'_4的 X坐标时，我们就离开地形。显然，在移动过程中考虑剩余预算，就可以适当地计算出返回点 $p_{(3,4)}$。从这个转折点出发，我们沿 α方向返回，这段路径肯定畅通，见图 18。我们将到达 Π_S上的 p_4。此时，$|\Pi\text{orig}(s, q_4)| = |\Pi_S(s, p_4)|$ 成立，并且 p_4 位于 q_4的正上方。

总体策略如下：总体而言，调整后的策略 Π_S 在自由空间中的点 p_{2i} 处达到与 q_{2i} 在 Πorig 上和/或与当前 $\Pi'\text{orig}$ 上相比相同的 X坐标。我们沿着当前副本 $\Pi'\text{orig}(p_{2i-2})$（属于 $\Pi\text{orig}(q_{2i-2})$）继续前进。当在某个点 p_{2i-1} 处，地形被当前中间规划访问时，我们使用预算 $|\Pi\text{orig}(q_{2i-1},\ q_{2i})|$，并沿地形向上攀爬，直到再次需要沿 α方向前进，或者需要从 $p_{(2_i-1,2i)}$ 返回 p_{2i}，以始终保证 $|\Pi\text{orig}(q_{2i-1},\ q_{2i})| \rightleftharpoons |\Pi_S(p_{2i-1},\ p_{2i})|$。从 p_{2i} 开始，我们使用 $\Pi\text{orig}(q_{2i})$ 的下一个副本 $\Pi'\text{orig}(p_{2i})$。

接下来我们将证明，针对给定参数的地形采用这种简单的策略调整，始终能够保证地形搜索问题的竞争比不劣于原始纯策略。地形确实为我们带来了实际益处。

还要注意，图 18 所示的情形可能只是一个起始情形。而且，地形在边界处可能不会沿 Y 方向继续上升，而只是始终高于直线 l，并带有一些小峰值，以模拟任意射线；低层地形则向两侧延伸至无穷远。这意味着，最终初始收益将完全被抵消，我们又回到了纯策略的分析中。在这种情况下，初始收益只是一个负加性常数，实际上我们只能保证纯策略的比率！

4.1 通过几何论证给出的性能保证

在纯策略的分析中，我们平衡了两种最坏情况：一种是在返回后出现局部最大值，另一种是边界最大值。局部调整的优势在于，经过某个返回点 $p_{(2i-1,2i)}$ 后，我们能更早地访问相同的射线，且路径距离更短。因此，对于之前分析中的局部最大值，我们可以直接得到更好的比率。考虑最坏的边界情况时，我们的调整可能意味着，最坏情况下的垂直射线到起点的 X 距离会比之前更短。但若考虑中间经过的地形，并将原先的最坏情况纳入考量，就会发现比率确实也会下降：到达垂直射线的最短路径长度会增加，因为路径也沿着地形延伸。接下来我们将通过几何方式证明这些论点。

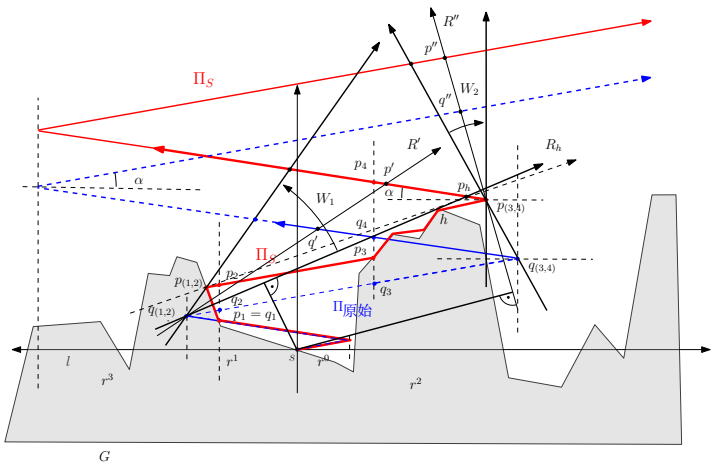


图19。 如果策略命中地形，所带来的比率改进示例。策略开始返回后，在 $p_{(3,4)}$ 处存在局部最坏情况射线。为使 Π_S 的比率局部变得更差，我们将 Π 原始策略的转折点 $q_{(1,2)}$ 视为射线起点，构成射线楔形区域。对于楔形区域 W_1 中的射线 R'，我们可以保证其比率不会差于原始策略，因为根据策略的构造，$|\Pi_S(s,\ p')| \leq |\Pi$ 原始策略 $(s,\ q')$ 成立。当 R' 穿过 $p_{(1,2)}$ 和 $q_{(1,2)}$ 时，楔形区域 W_1 终止。一般来说，还需考虑另一个楔形区域 W_2。该楔形区域始于一条穿过两个转折点 $p_{(2i-1,2i)}$ 和 $q_{(2i-1,2i)}$ 的射线，终于一条穿过 $p_{(2i-1,2i)}$ 的垂直射线。楔形区域 W_2 中的射线 R'' 围绕 $p_{(2i-1,2i)}$ 旋转。它们将在下一次沿同一方向移动时，于交点 p'' 处被检测到。

射线的比率降低：对于没有地形的情况，我们有两种最坏情况。现在我们说明，地形引起的调整

确实有助于在局部降低所有可能射线的比率。我们将指出需要考虑的两个射线区间 W_1 和 W_2 。这些射线将被视为策略 S的局部最坏情况射线。我们将感兴趣的射线细分为两个局部固定的束 W_1 和 W_2 ，并证明S 的比率不大于不使用地形的原始策略的比率。 W_1 和 W_2 的射线属于局部最坏情况。

射线的比率降低 W_1：最坏情况之一出现在原始策略以角度 $\beta = \alpha$ 起步并经过其返回点后不久。现在我们将论证，对于原始策略检测到的一组合理的最坏情况射线，新的返回点会带来更好的比率。调整后的策略会稍早返回，但会处于更高的 Y 层级。图 19 局部展示了整体情况。假设沿地形的移动从 p_{2i-1} 开始，并朝 p_{2i} 移动。沿地形的移动终止于最大高度处的最后一个点 $h = (h_x, h_y)$。此后，策略可能仍会再次朝方向 α 移入自由空间，但它总会在一个新的返回点 $p_{(2i-1,2i)}$ 返回，以便移动至 p_{2i}。我们关注的射线（即尚未经过的射线）必须保持在该点 h 之外，也必须保持在当前策略部分 Πorig($q_{(2i-3,2i-2)}$) 之外。根据构造，该部分始终不会越过 Π_S （ $p_{(2i-3,2i-2)}$）。因此，为了使 Π_S 的比率在局部变差，我们考虑另一侧的 Πorig 的原始转折点 $q_{(2i-3,2i-2)}$，并考察经过 h 和 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 的射线 R_h 。从 $p_{(2i-1,2i)}$ 返回后，这条射线必须在 p_h 处与 Π_S 相交。与经过 h 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$ （即 Π_S 不低于 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 时的前一个返回点）的射线相比，射线 R_h 到起点的距离不会更大。

因此， R_h 可视为返回后针对 Π_S的一个最坏情况起始射线。这条射线比 Π_S 在 p_h处更晚击中原始策略 Πorig。因此，当策略在返回后检测到第一条新射线时， Πorig 的比率在局部会更大。

我们能保证这种行为持续多久？我们检测到一个以 R_h为起点的楔形区域 W_1，参见图 19，并考虑一条穿过 Πorig 的 $q_{(2i-3,2i-2)}$和 Π_S上（p_h）的 R' 射线，此过程发生在 p_h之后。这条射线会在更早的时刻 q'击中 Πorig，更准确地说，$|\Pi$ orig$(s,q')| \leq |\Pi_S(s,p')|$。只要射线 R' 位于 Πorig 的转折点 $q_{(2i-3,2i-2)}$下方，我们就能保证比率不高于 Πorig 的比率。当射线经过 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 时，这束射线（图 19 中的楔形区域 W_1 ）便结束。对于楔形区域 W_1 内的所有射线 R'，我们都可以通过比较 $|\Pi_S(s,p')| \leq |\Pi$orig$(s,q')|$来应用同样的论证。该论证成立，直到 R' 经过 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$ ；两者不一定相同。

因此，还存在另一个需要进行比较的第二个楔形区域 W_2，它实际上属于边界最坏情况。该楔形区域在局部始于穿过 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 的射线，止于穿过 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 的垂直射线，另见图 19。对于此楔形区域中的射线 R''、检测点 p'' 和 q''，路径长度论证 $|\Pi_S(s,\ p'')| \leq |\Pi$orig$(s,\ q')|$

仍然成立，但到 R'' 的直接最短路径不再符合原始策略。我们需要针对楔形区域 W_2 采用另一种论证。

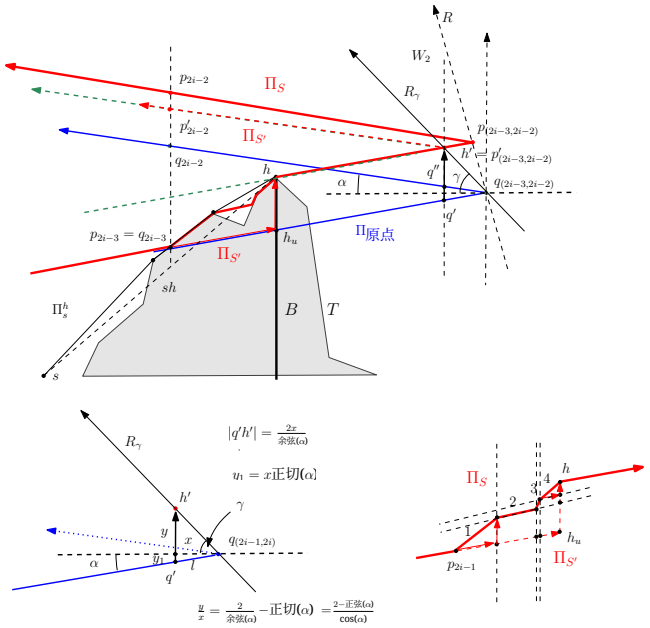


图 20。 如果策略开始沿地形移动，则起始射线 R_γ 的最小斜率 γ 将在地形仅通过一个垂直屏障 B 强制进行一次向上移动时达到。根据（三角不等式的连续应用），从 p_{2i-3} 到 h_u 再向上到 h 的直线移动长度，总是大于由地形强制形成的 Π_S 的单调路径 p_{2i-3}，h。相应地替换沿地形的移动后，返回点 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 向后移动到 $p'_{(2i-3,\ 2i-2)} = h'$；对于 $\Pi_{S'}$ 和 $|h_u h|$，它恰好等于 $|\Pi\text{orig}(q',\ q'')|$，这是由策略的设计决定的。简单的三角学表明，$R$ 的最小可能斜率由 $2-\sin(\alpha)\ \cos(\alpha)$ 确定，并且与线段 $|h_u h|$ 的长度无关。因此，我们得到了楔形区域 W_2 的唯一一条起始射线 R_γ。

射线的比率降低于 W_2： 第一个问题是，楔形区域 W_2 在局部可以有多大？如果最后的转折点 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$具有相同的 X坐标（当我们在最后一次朝相应方向移动时没有碰到地形，就会出现这种情况），那么该楔形区域实际上就是经过 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 本身的最后一条垂直射线。与到这条垂直射线的最短 X距离相比，这会得到相同的最坏情况比率（当策略在返回后回到该坐标时）；该距离就是转折点的 X坐标。

那么，当策略碰到地形并向上移动时，楔形区域 W_2 会如何变化？下一次返回后对最坏情况（边界最坏情况）又有什么影响？我们首先计算一条通向转折点 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$的起始射线的最小可能斜率。这两个点彼此相关，根据策略的设计，我们知道，对于路径长度，有 $|\Pi_S(s,\ p_{2i-2})| = |\Pi\text{orig}(s,\ q_{2i-2})|$ 成立。但在中间我们有 $|\Pi_S(s,\ p_{(2i-3,2i-2)})| > |\Pi\text{orig}(s,\ q_{(2i-3,2i-2)})|$，因为与原始策略相比，该策略会向上攀爬！

因此，经过 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 和 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 的射线 R 的斜率取决于 Π_S（p_{2i-3}, $p_{(2i-3,2i-2)}$）相对于 Πorig（q_{2i-3}, $q_{(2i-3,2i-2)}$）的移动。由于 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 始终固定，我们考虑 Π_S（p_{2i-3}, $p_{(2i-3,2i-2)}$）的首次命中点 p_{2i-3} 和离开点 h，它会改变 $p_{(2i-3,2i-2)}$，见图 20。根据构造，我们有 $|\Pi_S(s,\ p_{2i-3})| = |\Pi\text{orig}(s,\ q_{2i-3})|$，并且 p_{2i-3} 的 X 坐标始终与 q_{2i-3} 相同，但 p_{2i-3} 永远不会位于 q_{2i-3} 下方。因此，当 q_{2i-3} 和 p_{2i-3} 恰好是相同的点时，我们最有可能使 R 的斜率最小化。于是，假设 $q_{2i-3} = p_{2i-3}$。R 的斜率等于 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 与 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 之间的 Y 距离除以 X 距离。

如果移动 $\Pi_S(p_{2i-3},\ h)$ 从预算中扣除最大部分，那么点 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 将为 R 强制施加最小斜率，因为$p_{(2i-3,2i-2)}$ 的相对位置会沿着 α-轨迹改变 返回，参见图 20。根据三角不等式，从 p_{2i-3}沿 α方向移动到 h的 X-坐标处的点 h_u，再沿 Πorig移动，并通过垂直移动向上到达 h，所能强制施加的最大预算如图 2中的 Π'_S 所示。因此，R 的最坏情况最小斜率也将在使用最大预算并面对垂直屏障时达到。此外，h 可以恰好等于返回点$p_{(2i-3,2i-2)}$。我们在图 20 中用 $h' = p'_{(2i-3,2i-2)}$ 表示这一点。现在，我们可以精确计算出针对我们的策略，楔形区域 W_2 可能的最小起始斜率，而无需考虑最高点 h。

我们考虑经过 $p'_{(2i-3,2i-2)} = h'$ 的垂直线，该直线与 $\Pi\text{orig}(q_{2i-3}, q_{2i-2})$ 相交于两点 q' 和 q''，根据使用预算的策略构造，满足 $\Pi\text{orig}(q_{2i-3}, q'')$ 等于 $\Pi_S(p_{2i-3}, p'_{(2i-3,2i-2)})$。根据上述论证，线段 $q'h'$ 的长度恰为$|\Pi\text{orig}(q', q'')|$；对于最小斜率，我们考虑图 20 所示的情形。我们有$|q'h'| = 2y_1 = {}^{2x}\cos(\alpha)$，因此 $y = {}^{2x}\cos(\alpha) - y_2 = {}^{2x}\cos(\alpha) - x\tan(\alpha)$，最小斜率为 $\frac{y}{x} = {}^{2-}\sin(\alpha)\cos(\alpha) \approx 1.859957576113$。或者，设起始射线的角为 R_γ，其大小为 $\gamma := \arctan\left({}^{2}\cos(\alpha) - \tan(\alpha)\right) \approx 1.0774868815$（即 $\gamma \approx 61.73545079°$）。在此阶段，这些精确数值仅用于展示斜率的大致情况。

总的来说，对于相应的旋转点 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 和对应的 $q_{(2i-3,2i-2)}$，楔形区域 W_1 至少延伸至角 γ；楔形区域 W_2的起点不会早于 γ，并延伸至 $\pi/2$。射线R_γ 上的任何返回点 p_γ 都可以作为楔形区域 W_2 的最坏情况下的起始旋转点，前提是

预算已被垂直屏障最大限度地使用。地形上的任何其他移动都会导致返回点位于 R_γ上方。

最后，我们想要论证， $\beta = \pi/2$ 原始策略的边界最大值也涵盖了楔形区域 W_2 中射线的任何局部最坏情况。我们将展示，对于 W_2 而言，整体最坏情况由围绕$p_{(2i-3,2i-2)}$旋转的最后一条垂直射线给出。

如上文所示，当返回点$p_{(2i-3,2i-2)}$ 位于射线 R_γ 上时，策略和楔形区域 W_2 的最坏情况将达到（对于 $\gamma \approx 61.73545079^\circ$ ，该射线已在上文计算得出），该射线穿过原始策略的返回点$q_{(2i-3,2i-2)}$。因此，我们实际上可以沿着从$q_{(2i-3,2i-2)}$开始的射线 R_γ 向上移动这个点$p_{(2i-3,2i-2)}$ 。

此外，当前最大高度点 h在移动至$p_{(2i-3,2i-2)}$ 的过程中所处的位置，会影响从 s 到楔形区域 W_2内各射线的最短路径。假设会使用一条经过 $h_u h$ 的垂直屏障，也有助于使这条路径尽可能短。因此，就比率的总体最坏情况而言，严格来说我们只需考虑原始策略上的一条垂直线段 $h_u h$ ： 其长度决定了 Π_S 上的返回点$p_{(2i-3,2i-2)}$ ，也决定了到 W_2 内任意射线 R 的最短路径；该射线绕 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 从角度 γ 旋转至 $\pi/2$。

有趣的是，如果我们将线段 $h_u h$ 移得足够靠近返回点$p_{(2i-3,2i-2)}$ ，并且 $h_u h$ 也足够小，那么到起始射线R_γ 的最短路径可以是从 s 出发、垂直于 R_γ的一条直线段。继续旋转射线时，最短路径最终会经过$p_{(2i-3,2i-2)}$。为了说明这种情况确实会发生，我们可以考察一条经过所有原始返回点$q_{(2i-3,2i-2)}$的直线。

根据第 3.1 节中的策略设计， Πorig 的转折点此前已由以下方式精确计算：

$$q_{i-1} = \left((-1)^{i-1} \cdot r^{i-1}, 2\tan(\alpha) \left(\frac{r^i - 1}{r-1} - \frac{1}{2} r^{i-1} \right) \right)$$

从 $i = 1$ 开始，然后是 $i = 3$，5，7，.....，表示右侧的转弯；而 $i = 2$，4，6，8，.....表示左侧的转弯。采用新的记法，我们可以将这一概念直接表示为

$$q_{(2i-3,2i-2)} = \left((-1)^{i-1} \cdot r^{i-1}, 2\tan(\alpha) \left(\frac{r^i - 1}{r-1} - \frac{1}{2} r^{i-1} \right) \right)$$

左侧和右侧的含义仍相同。

我们考虑经过某个 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 的射线 R_γ ，并计算从起点 s 到该射线的最短距离。注意，我们已在第 3.1 节的公式（3）中考虑并计算了与角为 β 的一般射线之间的此类距离。因此，到 R_γ 的距离由一条长度为以下数值的正交线段给出

$$|s\, t_\gamma| = \cos(\gamma) \cdot \left(\tan(\gamma)\, r^{i-1} + 2\tan(\alpha) \left(\frac{r^i - 1}{r-1} - \frac{1}{2} r^{i-1} \right) \right)$$

其中 $\tan(\gamma) = \frac{2}{\cos(\alpha)} - \tan(\alpha)$ 成立，由此得到

$$\cos(\gamma) \cdot \left(\frac{2}{\cos(\alpha)} r^{i-1} + 2\tan(\alpha) \left(\frac{r^i - 1}{r-1} - r^{i-1} \right) \right) = 2\cos(\gamma) \cdot \left(\frac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \tan(\alpha) \frac{r - \frac{1}{r^{i-1}}}{r-1} \right) r^{i-1} \tag{10}$$

首先，我们将此长度与边界最坏情况射线 $R_{\frac{\pi}{2}}$ of Πorig 的最短距离进行比较，该距离为 r^{i-1}。考虑到所有精确值，对于任何 $i \geq 2$，(10) 中 r^{i-1} 前面的系数都显著大于 1。对于起始射线 R_γ，$\beta = \pi/2$ 的原始策略的边界最坏情况始终更差！请注意，我们在此首次使用了 r 和 α 的策略取值进行分析！

从 W_2 中的 R_γ 出发，射线现在围绕策略 Π_S 的 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 旋转，而非像原先那样围绕 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 旋转，因此与 r^{i-1} 相比，距离可能会缩短。当前最坏情况 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 在 R_γ 上的确切位置，取决于地形上的点 h；该点在朝向 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 移动的过程中具有最大高度。如上所述，当地形仅由单个障碍物构成，且朝向 h 的移动为垂直线段时，策略的比率会更差。对于任何给定的 h，返回点都可以精确确定。但 h 的位置仍有一定的调整空间，这会影响通往 W_2 中射线的最短路径。

我们面临的情况如图 21 所示。对于任意h，射线 R_y 都相同，但从起点到固定射线 R_y 的最短路径（即一条与 R_γ正交的线段 $s\,t_\gamma$）不一定会穿过顶点为 h的障碍物。这取决于 h 的位置以及 $h_u h$的长度。我们可以将平移 h和障碍物向前移动至返回点；例如，我们使用 $h' = p_{(2i-3,2i-2)}$。此时，线段 $s\,h' = sp_{(2i-3,2i-2)}$ 确实不再有障碍。以 s 为起点、R_γ 为终点的最短线段$s\,t_\gamma$ 可能会在 h' 上方碰到 R_γ，也可能完全不受障碍物阻挡。这仅取决于当前障碍物线段的长度 $h_u h$。我们已经论证过，在原始策略的边界最坏情况下，$s\,t_\gamma$ 的长度始终大于 r^{i-1} 的长度。调整后的策略也会在下一次返回途中更早找到 R_γ。原始策略的比率更大。

感兴趣的射线开始围绕$p_{(2i-3,2i-2)}$旋转。上述论证至少在$s\,p_{(2i-3,2i-2)}$ 线段与 W_2中的第一条射线 $R_{h'}$ 垂直之前仍然成立。注意，$p_{(2i-3,2i-2)}$ 位于 R_γ 上，而$s\,p_{(2i-3,2i-2)}$ 甚至大于 $s\,t_\gamma$，因此仍包含在原始边界最坏情况之内。如果我们继续让射线围绕$p_{(2i-3,2i-2)}$ 旋转，那么现在通往 W_2 中剩余射线的最短路径必定要经过一个给定的障碍物高度点。为确保万无一失，我们仍可以使用一个平移后的最坏情况高度点 h''。然而，对于这类剩余射线，W_2中的总体最坏情况将是经过$p_{(2i-3,2i-2)}$的最终垂直边界射线。显然，对于必须先经过某个高度点 h'' 的路径，通往这条最终射线的路径长度在这条边界射线处达到最小。而且，在反向移动过程中，这条垂直边界射线最终也会最后被检测到，即最大路径

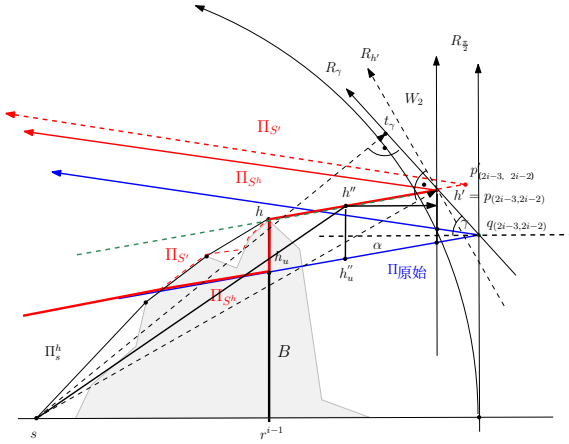


图21。楔形区域 W_2 的比率计算。策略在局部遇到一个最高点 h，见 $\Pi_{S'}$。作为局部最坏情况，我们可以先假设单个垂直屏障位于 h 时会消耗更多预算。这会得到策略 Π_{S^h}，它还会将返回点和旋转点 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 移得更靠近起点，并使起点经由地形到达相应楔形区域中射线的距离更短 W_2。对于起始射线 R_γ，我们知道原始边界最坏情况具有更大的比率：从 s 到 R_γ 的最短路径线段 st_γ 始终长于从 s 到经过 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 的垂直射线 $R_{\frac{\pi}{2}}$ 的最短路径长度 r^{i-1}。对于 W_2 中的射线，这一论证至少在到达射线 $R_{h'}$ 之前仍然成立；从起点到该射线的正交最短路径恰好就是线段 $s\,p_{(2i-3,2i-2)}$。我们知道 $|s\,p_{(2i-3,2i-2)}| > s\,t_\gamma$，因此只需应用相同的论证。此后，通往 W_2 中任意射线的最短路径都必须先经过高度点。剩下的情况是，我们要寻找经过高度点 h'' 的最坏情况，而该最坏情况也由一条经过 R_γ 上旋转点 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 的垂直射线给出。

长度；要检测 W_2 中的所有射线，最大路径长度将由一条经过$p_{(2i-3,2i-2)}$的最终垂直射线达到。

现在只需证明，对于任意这样的平移点 h''，从 s 到 h'' 的最短路径，随后再（水平）朝向经过 $p_{(2i-3,2i-2)}$ 的当前最终垂直最坏情况射线，其长度始终大于 r_{i-1}。若此结论成立，根据上述论证， W_2 中各条射线的比率都包含在前文所示的原始边界最坏情况之中。

我们考虑图22中单独给出的情形。固定高度点 h'' 到经过返回点 $h' = p_{(2i-3,2i-2)}$的相应垂直射线 $R_{h''}$ 之间的垂直距离。从 h'' 到射线 $R_{h''}$ 的垂直正交线段与射线交于点 r''。对于给定距离 $|h''\,r''|$，到这样一条射线的最短路径的总体最坏情况是什么？我们可以沿一条经过 r''且平行于 R_γ 的直线平移线段 $h''\,r''$。如果将这条线段向下平移到原始策略 Πorig，我们就可以确定，从 s到 h'' 的平移后的像的移动与该像

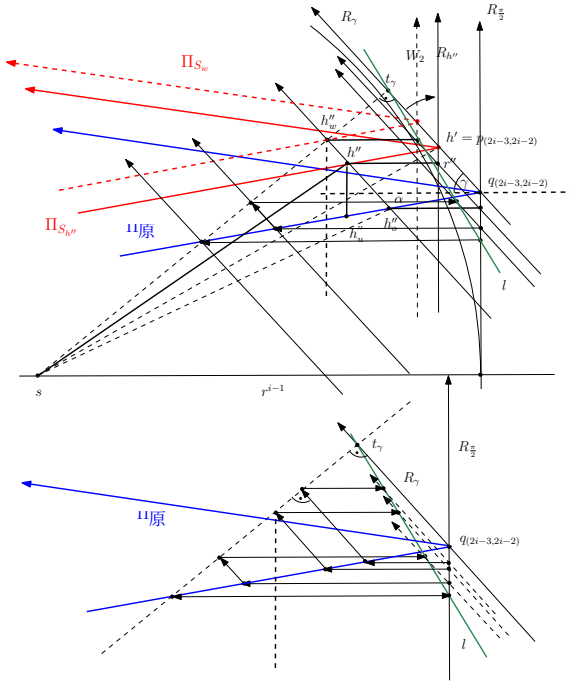


图22. 我们可以在 W_2 中找到最终射线的最坏情况描述。该策略的最坏情况高度点 h''_w 最终位于 $s\,t_\gamma$ 上，即从 s 到 R_γ 的最短路径。在这种情况下，对于给定的 $h''\,r''$ 固定距离，移动到 $s\,t_\gamma$ 上的高度点，再水平移动到相应返回点的垂直射线的距离最小。幸运的是，所有这类线段平移的最终端点都位于同一条公共直线上。这条直线 l 经过 $s\,t_\gamma$ 的端点（水平距离为 0），并在原始策略与 $s\,t_\gamma$ 的交点的 Y 坐标处与原始最坏情况射线 $R_{\frac{\pi}{2}}$ 相交。在这种情况下，最短路径中的最终水平距离最大，且恰好等于交点之间的水平线段。

线段 $h''\,r''$ 之和大于 r_{i-1}。当障碍物恰好终止于原始策略处时，这也是一种合理的情形。显然，若将线段 $h''\,r''$ 平移，使得 h'' 的平移后的像在某一点 h''_w 与从 s 到 R_γ 的最短路径线段 $s\,t_\gamma$ 相交，则平移后的像的总体最坏情况便由此给出。在这一特殊情形下，从 s到 h'' 的最短路径沿着经过 h'' 且平行于 R_y 的直线，再加上固定路径长度 $h''\,r''$，其长度达到最小。只需证明，对于任意给定的长度 $h''\,r''$，所有此类平移路径都短于 r_{i-1}。

请注意，对于任意固定的 $h''\,r''$，线段及其端点的平移都是线性变换。如图22下部所示，这意味着对于任意可能的距离，r'' 的最终像点都位于同一条直线 l上。还要注意，确实可以触发任意此类路径，使其

对应一条射线，方法是使用一个恰好终止于 $s\,t_\gamma$ 上某点、但位于原始策略上方的障碍物！因此，最终在评估 W_2 中的射线时，我们只需考虑由原始策略的点 $q_{(2i-3,2i-2)}$ 所决定的三角形内的路径，并采用策略的固定参数！所以，最终我们恰好考虑图23所示的任意此类三角形。它表示所有最坏情况中的所有（最终）移动。

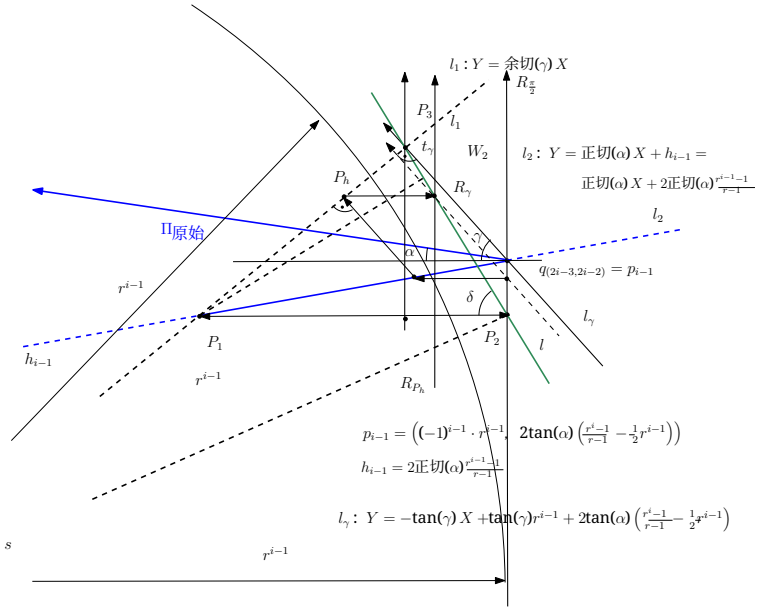


图23. 对于图22所示的精确计算，我们设定直线 l_2（作为策略的一部分）和 l_1（经过 $s\,t_\gamma$ 的直线）。我们可以计算 l_1 与 l_2 的交点 P_1，以及 l_γ 与 l_1 的交点 P_3，还可以求出 P_3 的 Y 坐标。因此，我们可以根据 P_2 和 P_3 计算 l 的斜率角 δ。如果从 s 到某个 P_h 的路径长度，加上从 P_h 到 l 的水平路径长度（这是到垂直射线 R_{P_h} 的最短路径长度），始终大于 r^{i-1}，那么针对射线 $R_{\frac{\pi}{2}}$ 的原始策略的最坏情况比率（该射线由 Πorig 的反向移动经过）就大于从楔形区域 W_2 出发的任何垂直最坏情况射线 R_{P_h} 的最坏情况比率。

Let

$$l_1 :\quad Y = \cot(\gamma)\, X = \frac{\cos(\alpha)}{2 - \sin(\alpha)}\, X$$

为经过线段 $s\,t_\gamma$ 的直线，并且

$$l_2 : Y = \tan(\alpha)\, X + h_{i-1} = \tan(\alpha)\, X + 2\tan(\alpha)\frac{r^{i-1} - 1}{r - 1}$$

为沿原策略的前向移动经过的直线。我们在局部（取决于 i）将经过 R_γ 的直线记为 l_γ。对于该策略设计，我们已在第 3.1 节中计算了所有此类射线（对任意 i），因此我们有

$$l_\gamma : Y = -\tan(\gamma)\, X + \tan(\gamma)\, r^{i-1} + 2\tan(\alpha)\left(\frac{r^i-1}{r-1} - \frac{1}{2}r^{i-1}\right).$$

我们希望计算三角形的端点 P_1、P_2 和 P_3，以便找出经过 P_2 和 P_3 的直线 l。此处 $t_\gamma = P_3$ 成立，且 P_1 是 l_1 和 l_2 的交点。点 P_3 是垂直（局部）最坏情况射线 $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ 与经过 P_1 的水平线的交点。

通过简单的计算，l_1 和 l_2 的交点 $P_1 =$（P_1（X） P_1（Y））可得

$$P_1(X) = \left(\frac{2\tan(\alpha)}{\cot(\gamma)-\tan(\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1} = \left(\frac{2\sin(\gamma)\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1}$$

and

$$P_1(Y) = \left(\frac{2\cot(\gamma)\tan(\alpha)}{\cot(\gamma)-\tan(\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1} = \left(\frac{2\cos(\gamma)\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1}$$

此外，我们还有

$$P_2 = \left(r^{i-1}, \left(\frac{2\cos(\gamma)\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1}\right).$$

此外，l_1 和 l_γ 的交点 $P_3 =$（P_3（X） P_3（Y））可得

$$\begin{aligned} P_3(X) &= \frac{\tan(\gamma)}{\cot(\gamma)+\tan(\gamma)}r^{i-1} + \frac{2\tan(\alpha)}{\cot(\gamma)+\tan(\gamma)}\left(\frac{r^i-1}{r-1} - \frac{1}{2}r^{i-1}\right) \\ &= \sin(\gamma)^2\, r^{i-1} + 2\sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)\left(\frac{r^{i-1}-1}{r-1} + \frac{1}{2}r^{i-1}\right) \end{aligned}$$

and

$$P_3(Y) = \sin(\gamma)\cos(\gamma)\, r^{i-1} + 2\cos(\gamma)^2\tan(\alpha)\left(\frac{r^{i-1}-1}{r-1} + \frac{1}{2}r^{i-1}\right).$$

计算 l 的斜率可得 $\frac{P_2(Y)-P_3(Y)}{P_2(X)-P_3(X)}$，因此

$$\frac{2\cos(\gamma)\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)} - \cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1} - \cos(\gamma)\left(\sin(\gamma)+\cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)r^{i-1}}{-2\sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)\frac{r^{i-1}-1}{r-1} + \left(1-\sin(\gamma)^2 - \sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)r^{i-1}}.$$

现在我们可以分别将分子和分母除以 r^{i-1}。为方便起见，我们可以去掉分子和分母中的因子 $\frac{1}{r^{i-1}}$，它们都会随 i 减小，并迅速趋于零。然后我们将分子和分母乘以 $(r-1)$，由此可得任意 l 的（渐近）斜率：

$$\frac{2\cos(\gamma)\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}-\cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)\frac{1}{r-1}-\cos(\gamma)\left(\sin(\gamma)+\cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)}{-2\sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)\frac{1}{r-1}+\left(1-\sin(\gamma)^2-\sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)}$$

两边再乘以 $(r-1)$ 后，可简化为

$$\frac{2\cos(\gamma)\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}-\cos(\gamma)^2\tan(\alpha)+\cos(\gamma)\sin(\gamma)-\cos(\gamma)\left(\sin(\gamma)+\cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)r}{-\sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)-1+\sin(\gamma)^2+\left(1-\sin(\gamma)^2-\sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)\right)r}$$

进一步简化为

$$\frac{\cos(\gamma)^2\tan(\alpha)(r+1)+\cos(\gamma)\sin(\gamma)(r-1)-2\cos(\gamma)\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}}{\sin(\gamma)\cos(\gamma)\tan(\alpha)(r+1)+(\sin(\gamma)^2-1)(r-1)}\,.$$

利用此前计算得到的数值，上述斜率（例如 s_l）可计算为 $s_l \approx -2.95062869307485708958438408444 64$；或者，图23中在 P_2 处由线段 P_1P_2 和 l 张开的角 δ 可计算为 $\delta \approx 71.27792404089269950873131165 2809°$。请注意，所有计算均使用 MatLab 以极高精度完成，这些数值仅供参考。

最后进行比较时，我们希望使用这些近似精确的数值。我们计算从起点到 P_1 的路径长度，并进一步考虑从 P_1 到 l、以垂直方式与 l 相交的最短路径，见图24。这条完整路径的长度是任何地形诱导路径长度的下界；这类路径从 s 出发，到达点 P_h，然后水平朝 l 方向前进。因此，如果这两段距离之和已经大于从 s 到射线 $R_{\pi/2}$ 的最短路径距离（即 r^{i-1}），那么结论便成立。在这种情况下，对于局部最坏情况射线 $R_{\pi/2}$，纯策略所达到的比率高于地形所给出的任何其他最坏情况情形。

通过简单的计算，我们得到

$$|s\,P_1| = \left(\frac{2\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1}$$

and

$$|P_1\,P_2| = r^{i-1} - \left(\frac{2\sin(\gamma)\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1}\,.$$

最后，我们必须证明 $\sin(\delta)|P_1\,P_2| + |s\,P_1|$ 大于 r^{i-1}。我们计算 $\sin(\delta)|P_1\,P_2| + |s\,P_1| - r^{i-1}$，并需要证明

$$(\sin(\delta)-1)r^{i-1}+(1-\sin(\gamma)\sin(\delta))\left(\frac{2\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1}$$

大于零。因此，我们考虑

$$\begin{aligned}(1-\sin(\delta))r^{i-1} &< (1-\sin(\gamma)\sin(\delta))\left(\frac{2\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\frac{r^{i-1}-1}{r-1}\\ (1-\sin(\delta)) &< (1-\sin(\gamma)\sin(\delta))\left(\frac{2\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r^{i-1}}\right)\\ (1-\sin(\delta))(r-1) &< (1-\sin(\gamma)\sin(\delta))\left(\frac{2\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\left(1-\frac{r-1}{r^{i-1}}\right).\end{aligned}$$

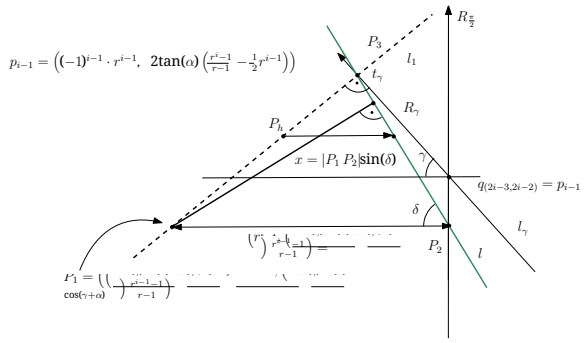


图24。对于最终结果，我们比较从起点 s 到点 P_h 再垂直延伸至与 l相交的任意路径的长度。这条路径的长度应大于 r^{i-1}。根据正弦定理计算，从 P_1 到 l 的最短路径长度为 $x = \sin(\delta)|P_1\,P_2|$。如果考虑从 s 到 P_1 的路径，并加上距离 x，就能得到所有需要考量的路径的下界。幸运的是，根据我们计算出的数值可以证明，对于任意 $i \geq 2$，这个下界始终大于 r^{i-1}。请注意，该图呈现的是一个实际情形，因为 $\delta \approx 71.277924$ 和 $\gamma \approx 61.73545$ 都是经过计算得出的！

在最后的计算中，我们可以使用一个（稍微）但显著更小的 δ，由于图24中的几何解释，这会降低我们满足最后一个不等式的可能性。使用显著更小的 δ，也相当于直接略去斜率的渐近计算中的因子 $\frac{1}{r^{i-1}}$。通过直接使用一个 $\delta' = 71$（显著小于计算所得的值），我们就处于非常稳妥的状态，因为 $\sin(\delta)$，进而距离 x，都会缩小。这会降低我们满足不等式的可能性。利用迄今为止计算出的所有其他值，我们仍可得出结论：

$$(1-\sin(\gamma)\sin(\delta'))\left(\frac{2\sin(\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}\right)\left(1-\frac{r-1}{r^{i-1}}\right)-(1-\sin(\delta'))(r-1)>0.1$$

对于 $i=5$，该式已经成立。实际上，对于 $i=2$，左侧的值已经大于 0.0339。随着 i 增大，该值只会继续增加，并渐近于一个大于 0.1195172 的值（对应 $\delta=71.277$）。这里我们可以第二次利用几乎精确的数值。就我们的主张而言，我们完全不必担心精度问题。

总而言之，尽管我们采用了一些近似值，但结果表明，就我们的策略设计而言，地形问题所达到的比率绝不会劣于不考虑地形时纯策略的比率。

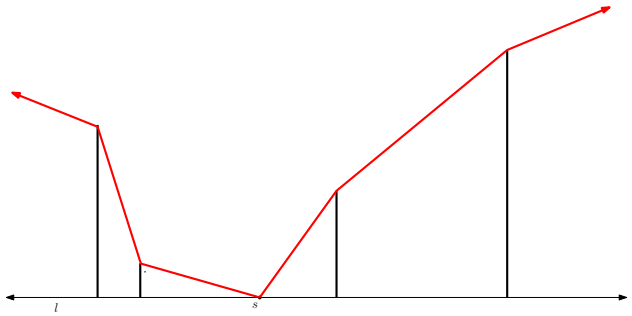


图 25. 对于合理的在线策略设计，在最坏情况下，我们可以假设地形由高度依次递增的垂直障碍物组成。

最后，我们想总结一下：至少对于我们这类牛径式策略，地形通常可以简化。

4.2 地形问题的核心

最坏情况由简单的垂直障碍物造成：图 20 已经直观展示了沿地形移动，以及这种移动对射线搜索比率的影响。如果我们沿着地形朝某个方向前进一段距离，最终会遇到地形上的一个最高点 h，然后返回另一侧。将这段地形替换为顶部点为 h 的垂直线段障碍物 B，只会使策略在检测未来射线时的比率变得更差。图 20 展示了相关的几何论证。请注意，B 已经是原始地形的一部分。简单的垂直障碍物会缩短通往射线的最短路径长度，还会迫使移动时尽可能用完向上沿地形移动的预算。

一般来说，这意味着对于我们的策略，实际上可以假设我们只需应对两侧的垂直线段障碍物；而且，由于任何合理的策略都不需要向下移动，我们还可以分别假设两侧障碍物的高度依次递增。我们可以预期出现图 25 所示的在线情形。

5 结论与未来工作

我们研究了在半平面内搜索未知射线的问题，使得通往未知射线的最短路径也位于该半平面内。经过推广和优化的奶牛路径策略保证竞争比不超过 9.12725，而对于任何策略，其下界为 9.06357。为此，我们针对该策略平衡了两条最坏情况射线：一条垂直射线，以及一条斜率为 β 的射线，它在一次转弯后不久与策略路径相切。该问题的研究动机源于近期研究的一个地形搜索问题。我们证明，可以将我们的策略调整用于地形搜索问题；通过几何论证和策略参数，我们证明地形的存在只会使竞争比降低。该研究还通过论证只有高度递增的垂直障碍物需要纳入考虑，在某种程度上剥离出了地形搜索问题的核心。这为求得该问题的最优竞争比奠定了基础。目前上界与下界之间的差距小于 0.06368。

参考文献

1. 阿尔珀恩, S., Gal, S.：搜索博弈与会合理论。施普林格 (2003) 2. Angelopoulos, S.：带提示的在线搜索。《信息与计算》**295**, 105091 (2023) 3. Baeza-Yates, R., Culberson, J., Rawlins, G.：平面搜索。Inform. Com- put. **106**, 234–252 (1993) 4. Beck, A.：论线性搜索问题。《以色列数学杂志》**2**(4), 221–228 (1964年) 5. Beck, A., Newman, D.J.：再论线性搜索问题。《以色列数学杂志》**8**(4), 419–429 (1970) 6. Ben-Moshe, B., Katz, M.J., Mitchell, J.S.：用于守卫最优1.5维地形的常数因子近似算法。《SIAM计算杂志》**36**(6), 1631–1647 (2007) 7. de Berg, S., van Beusekom, N., van Mulken, M., Verbeek, K., Wulms, J.：地形上的竞争性搜索。载于：拉丁美洲理论计算机科学研讨会。第254–269页。施普林格 (2024) 8. Bose, P., De Carufel, J.L., Durocher, S.：直线搜索：最优解的完整刻画。《理论计算机科学》**569**, 24–42 (2015) 9. Chrobak, M.：雾中游泳的公主寻找怪物奶牛。《ACM SIGACT新闻》**35**(2), 74–78 (2004) 10. Demaine, E.D., Fekete, S.P., Gal, S.：带转向成本的在线搜索。《理论计算机科学》**361**(2-3), 342–355 (2006)

11. Elbassioni, K., Krohn, E., Matijević, D., Mestre, J., Ševerdija, D.：改进的1.5维地形守卫近似算法。Algorithmica**60**(2), 451–463 (2011) 12. Finch, S.R.：对数螺线猜想。arXiv预印本 math/0501133 (2005) 13. Gal, S.：搜索博弈，科学与工程数学，第149卷。Academic Press，纽约 (1980) 14. Hipke, C., Icking, C., Klein, R., Langetepe, E.：如何在固定距离内找到直线上的一个点。离散应用数学 **93**(1), 67–73 (1999) 15. Jeż, A., Łopuszański, J.：论二维奶牛搜索问题。信息处理快报 **109**(11), 543–547 (2009) 16. Kao, M.Y., Reif, J.H., Tate, S.R.：在未知环境中搜索：奶牛路径问题的最优随机化算法。《信息与计算》**131**(1), 63–79 (1996) 17. Langetepe, E.：论螺旋搜索的最优性。载于：第二十一届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集。第1–12页。SIAM (2010) 18. Langetepe, E.：搜索轴平行海岸线。《理论计算机科学》**447**, 85–99 (2012) 19. López-Ortiz, A., Schuierer, S.：在m条射线上搜索的终极策略？《理论计算机科学》**261**(2), 267–295 (2001) 20. Sleator, D.D., Tarjan, R.E.：列表更新与分页规则的摊销效率。ACM通讯 **28**(2), 202–208 (1985)