arXiv:2512.16678v1 [math.MG] 18 Dec 2025

特殊庞斯列三角形族中基佩尔抛物线的定点焦点

Mark Helman、Ronaldo A. Garcia 和 Dan Reznik

摘要。我们证明，在一族内接于圆且包含一个等边三角形的庞斯列三角形中，基珀特内接抛物线的焦点保持定点。

1. 引言

基珀特内接抛物线与三角形的三条边相切 [13]。我们证明，其焦点——称为 X_{110} 内 [9]——在一族内接于圆且包含一个等边三角形的庞斯列三角形中保持定点。

在一篇配套文章中，我们研究一个密切相关的三角形族的退化情形，即外切于其内切圆、且也包含一个等边成员的庞斯列三角形 [6, 节4]。

如图 1所示，文中提到的两个族相对于其外接圆锥曲线 [2] 互为极像。

此处描述的一个关键性质是基佩尔抛物线的焦点 X_{110} （采用[9]术语）的定点性。它是三角形的一条研究颇多的内切圆锥曲线，参见[13]。这对应于庞斯列三角形相对于内切圆的费尔巴哈点定点性， [6], 中对此有所描述，本文也对此给出了证明。

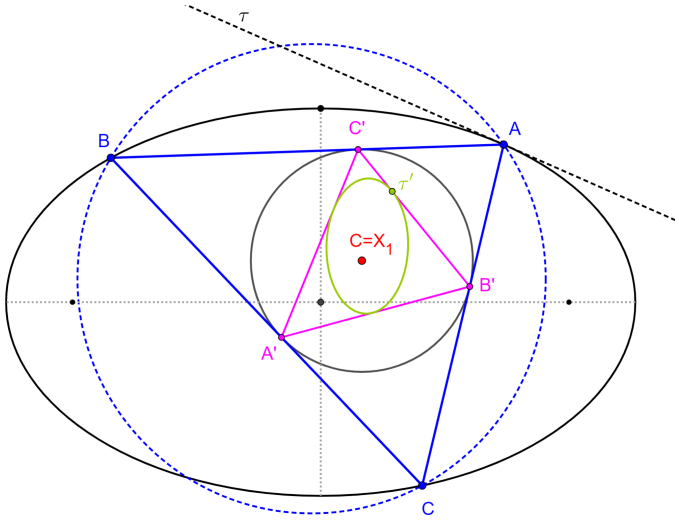


图 1。接触族 $A'B'C'$ 内接于圆，并包络一条圆锥曲线；该圆锥曲线是相对于内切圆的切线 τ 到 $\mathcal{E}$ 的极像。点 τ' 表示瞬时极性。

1.1. **计算证明。** 本文探讨的大多数现象都是通过模拟发现的。在一些图注中，我们提供了视频链接以及使用定制工具制作的交互式动画 [3]。

2. 综述：庞斯列问题

庞斯列问题是一个由 n 边形构成的一维族，其顶点位于第一条圆锥曲线 $\mathcal{E}$ 上，且各边与第二条圆锥曲线 $\mathcal{E}_c$ 相切（第二条曲线也称为“焦散线”）。要使这种庞斯列问题成立， $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}_c$ 必须在 $\mathbb{R}^2$ 中的位置满足“凯莱条件” [4]。尽管该问题具有射影不变性——一对圆锥曲线是两个圆的射影像，而在这两个圆的情形下，“庞斯列映射”可被线性化——我们发现，三角形的庞斯列问题（$n = 3$）是丰富有趣的欧几里得现象的源泉，涉及与三角形相关的经典几何对象（中心、圆、直线／轴等）的动力几何。

一个典型情形是，当 $\mathcal{E}$， $\mathcal{E}_c$ 共焦时。在这种庞斯列问题中——也称为椭圆台球 ——周长保持不变 [12], ，三角形的四个“希腊中心”（内心、重心、外心、垂心）的轨迹均为椭圆 [5, 8, 11]。此外，这个族还保持内切圆半径与外接圆半径之比（等价地说，内角余弦之和）不变 [7], ，这一结果后来被推广到所有 n [1]。

3. 等边三角形包含

我们研究圆形 $\mathcal{E}$ 且 $\mathcal{E}_c$ 为内含椭圆的情形。这是内接于某个圆锥曲线且外切于圆形 $\mathcal{E}_c$的庞斯列三角形族的仿射像，因此可以通过 [6,第2]节中的对称参数化来描述。具体而言，我们关注的是包含一个等边三角形成员的内接于圆的族。

观察1. 内接于圆 $\mathcal{E}$ 的庞斯列三角形族包含一个等边三角形，当且仅当其关于 $\mathcal{E}$ 的极像也包含一个等边三角形。

设 $\mathcal{E}_c$ 是一个焦点为 f、$g \in \mathbb{C}$的内切圆锥曲线，使得存在一个内接于单位圆 $\mathbb{T}$ 且外切于 $\mathcal{E}_c$的庞斯列三角形族。参见 图2:

引理1. 内接于单位圆且外切于焦点为 f、$g \in \mathbb{C}$ 的椭圆的庞斯列三角形族包含一个等边三角形，当且仅当 $1/f + 1/g$ 位于单位圆 $\mathbb{T}$上。

证明。 首先，假设 T_o 是这一族中的一个等边三角形。令 $\zeta \in \mathbb{T}$ 为 T_o的一个顶点，使得另外两个顶点分别为 $e^{\frac{2\pi}{3}i}\zeta$和 $e^{\frac{4\pi}{3}i}\zeta$。使用 [6, 节2], 中所述的对称参数化，令 $\lambda_o \in \mathbb{T}$ 为对应于三角形 T_o的参数。将各顶点代入参数化，得到

$$
\begin{aligned}
f + g + \lambda_o \overline{f}\overline{g} = \zeta + e^{\frac{2\pi}{3}i}\zeta + e^{\frac{4\pi}{3}i}\zeta = \zeta\left(1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{4\pi}{3}i}\right) = 0 \\
\implies \lambda_o = -\frac{(f+g)}{\overline{f}\overline{g}} \implies \left|-\frac{(f+g)}{\overline{f}\overline{g}}\right| = |\lambda_o| = 1 \\
\implies |f+g| = |fg| \implies \left|\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{f+g}{fg}\right| = 1
\end{aligned}
$$

因此， $1/f + 1/g$ 位于单位圆 $\mathbb{T}$上，正如所需。

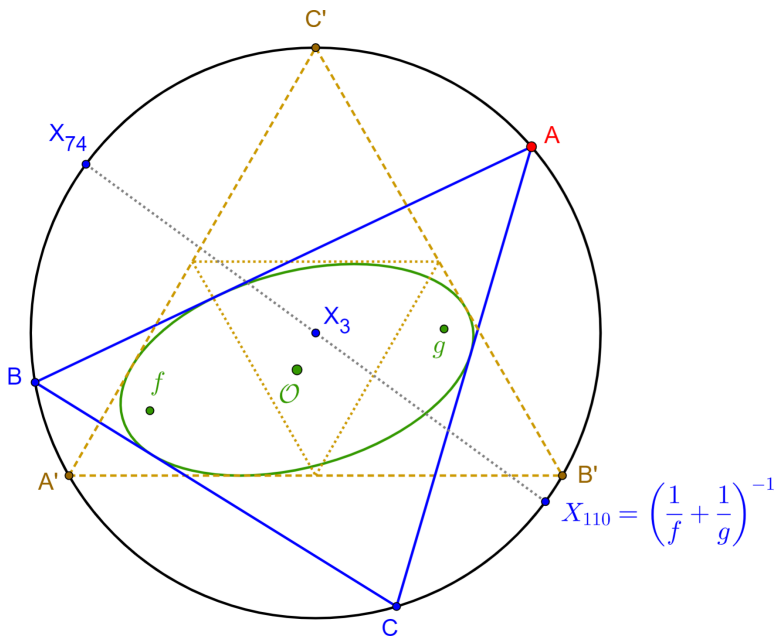


图2。 $T_o' = A'B'C'$（棕色）是一个等边三角形，选取了一个以内切圆锥曲线（绿色）为内切曲线的配置，其中心为 $\mathcal{O}$，焦点为（复数） f， g。 ABC是庞斯列族中的一个三角形（蓝色），该族由外接圆（黑色）和所选内切圆锥曲线定义。在这个族中， X_{110}。基佩尔抛物线（未显示）的焦点固定在（$1/f + 1/g$）$^{-1}$，其对跖点 X_{74}也固定在此处，即在 [9] 中称为“欧拉无穷远点的等角共轭点”。视频

反过来，假设 $1/f + 1/g$ 位于单位圆上，即 $|1/f + 1/g| = 1$。整理可得 $|f + g| = |fg|$。定义 $\lambda_o := -(f + g)/(fg)$。于是

$$|\lambda_o| = \left|-\frac{(f+g)}{\overline{f}\,\overline{g}}\right| = \frac{|f+g|}{|\overline{f}\,\overline{g}} = \frac{|f+g|}{|fg|} = 1$$

根据定义， $f + g + \lambda_o f\overline{g} = 0$。此外，

$$fg + \lambda_o(\overline{f} + \overline{g}) = \lambda_o\overline{\lambda_o}fg + \lambda_o(\overline{f} + \overline{g}) = \lambda_o(\overline{\lambda_o}fg + \overline{f} + \overline{g}) =$$
$$\lambda_o\overline{\left(f + g + \lambda_o\overline{f}\,\overline{g}\right)} = \lambda_o\overline{0} = 0$$

因此， 令 z_1， z_2， z_3 取 $\zeta^3 = \lambda_o$的三个根的值，我们看到这些3个根构成一个等边三角形，并满足 [6, 第2]节中对称参数化的方程。因此，这个等边三角形属于庞斯列族，证毕。□

4. 基佩尔抛物线的定点焦点

参见图3:

定义1。 三角形的基佩尔抛物线 与该三角形的三条边相切。其焦点为 X_{110}，始终位于外接圆上，其准线为欧拉线 X_2X_3 [13]。

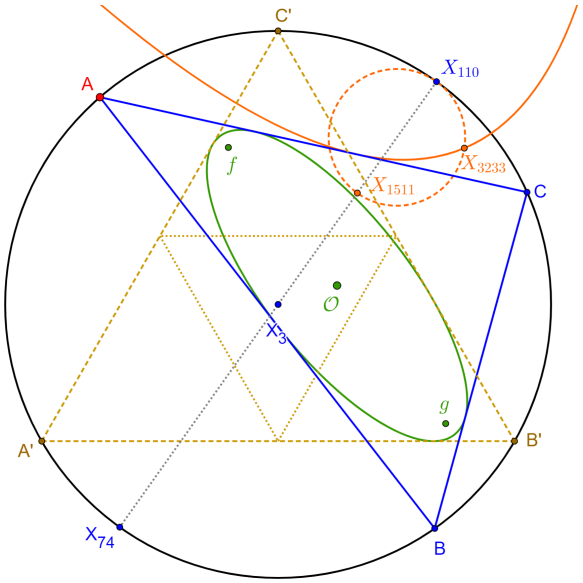


图3。 $T_o = ABC$ 位于 $\mathcal{T}_o$ （蓝色）如图所示（蓝色），其基佩尔抛物线（橙色）也为内切圆锥曲线，焦点位于 X_{110}。在 $\mathcal{T}_o$上，其顶点 X_{3233} 的轨迹是一个圆（橙色虚线），其直径为 $X_{110}X_{1511}$。 视频

此后，令 $\mathcal{T}_o^*$表示内接于单位圆与某个满足 $\mathcal{E}_c$ 的内切圆锥曲线之间的庞斯列三角形族引理1。仍参见图2，由引理1可得：

命题1。 在 $\mathcal{T}_o^*$ 上， X_{110} 在 $(1/f + 1/g)^{-1}$处定点。

在 [9], 中，(i) X_3 和 X_{110} 的中点称为 X_{1511}，且 (ii) X_{3233} 是基珀特内切抛物线的顶点 [10]。参见 图3：

观察2。 在 $\mathcal{T}_o^*$ 上， X_{3233} 描出一个直径为 $X_{110}X_{1511}$ 的圆，即 $1/2$。

参见 图4，令 A_{eq} 为 $\mathcal{T}_o^*$中等边三角形的一个顶点。令K 为外接圆上的一个选定点。令 $\mathcal{B}$ 表示$\angle KX_3A_{eq}$的外角平分线。可以证明：

命题2。 对于任意位于 X_3A_{eq}关于 $\mathcal{B}$ 的反射上的 $\mathcal{O}$， X_{110} 将在 K 处定点。

参见 图5，设 $T_o = ABC$ 为某个一般三角形。设 $\mathcal{O}$ 为内切圆锥曲线 $\mathcal{E}_c$的中心。设 $\mathcal{T}_o$ 为由外接圆和 $\mathcal{E}_c$定义的庞斯列族。设 $\mathcal{L}_{35}$ 为 X_3X_5的垂直平分线。可以证明：

命题3。 $\mathcal{T}_o$ 包含一个等边三角形，当且仅当 $\mathcal{O}$ 位于 $\mathcal{L}_{35}$上。此外，定点 X_{110} 与 $\mathcal{O}$无关。

设 $\alpha = \angle X_{110}X_3\mathcal{O}$。设 $\mathcal{O}'$ 是将 $\mathcal{O}$ 绕 X_3 逆时针旋转$\alpha/3 + \pi$所得。仍参见 图5，可以证明：

命题4。 包含于 $\mathcal{T}_o$ 中的等边三角形的一个顶点位于 $X_3\mathcal{O}'$ 与外接圆的交点处。

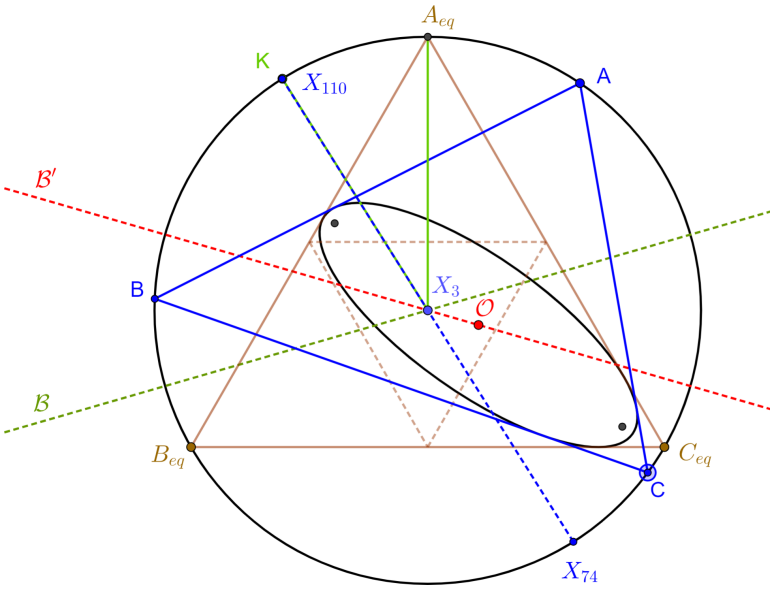


图4. 命题2中的构造： K 选取在外接圆上； A_{eq} 是等边三角形的一个顶点； $T_o = ABC$ 是 $\mathcal{T}_o^*$ 中的一个庞斯列三角形； $\mathcal{B}$ （绿色虚线）是 $\angle KX_3A_{eq}$的外角平分线； $\mathcal{B}'$ （红色虚线）是其关于 X_3A_{eq}的反射；对于 $\mathcal{O}$ 上 $\mathcal{B}'$的所有焦曲线中心， X_{110} 在所选 $\mathcal{T}_o^*$ 处相对于 K保持定点。

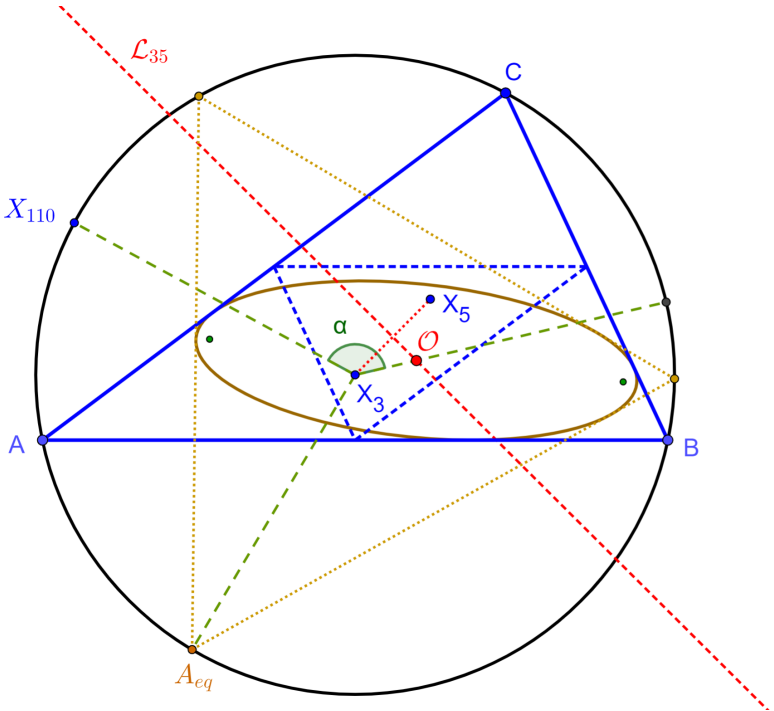


图5. 命题3和命题3 和4的构造。 X_{110} （ $T_o = ABC$的）在庞斯列情形下为定点，当 $\mathcal{O}$ 位于 $\mathcal{L}_{35}$ （红色虚线）上时，即 X_3 与 X_5的垂直平分线。图中显示了该族中所含等边三角形的一个顶点 A_{eq} 。

5. 极线的静止费尔巴哈点

设 $\mathcal{T}_o'$ 为 $\mathcal{T}_o$的切线三角形族，即其各边在 $\mathcal{T}_o$ [13, 切线三角形]的顶点处与外接圆相切。显然，这族三角形外切于一个圆，并内接于椭圆 $\mathcal{E}$，如上所述称为 $\mathcal{T}$。

观察3. $\mathcal{E}$ 是所选内切圆锥曲线关于外接圆的极像。

推论1. 由于等边三角形的切线三角形仍为等边三角形， $\mathcal{T}_o'$ 将包含一个等边三角形，因此其内切圆的中心位于 $\mathcal{E}_{eq}$上。

进而可将 [6,命题15]重新表述如下:

推论2. 费尔巴哈点 X_{11} 将是 $\mathcal{T}_o'$ 的定点。

证明. 基准三角形的X_{110} 是其切线族的 X_{11} 。反过来，基准三角形的 X_{11} 是接触三角形的 X_{110} 。□

在 [9]上， X_{65} 是接触三角形的垂心 X_4 。

推论3. 切线族的 X_{65} 的轨迹是一个圆。

证明. 接触族是庞斯列族（其边包络内切圆关于 $\mathcal{E}$ 的极像），且内接于圆。 X_4 总是与内接圆锥曲线旋转90度的版本位似。□

参考文献

[1] 阿科皮扬, A., 施瓦茨, R., 塔巴奇尼科夫, S. (2020). 《椭圆台球问题再探》. 《欧洲数学杂志》. doi:10.1007/s40879-020-00426-9. 2[2] 阿科皮扬, A. V., Zaslavsky, A. A. (2007). 《圆锥曲线几何》. 罗得岛州普罗维登斯：美国数学会. 1[3] 达兰, I., Reznik, D. (2021). 用于可视化探索、发现和分享庞斯列三周期现象的应用程序. arXiv:2106.04521. 2[4] 德拉戈维奇, V., 拉德诺维奇, M. (2011). 《庞斯列闭合定理及其拓展：可积台球、超椭圆雅可比簇与二次曲面束》. 《数学前沿》. 巴塞尔：施普林格. books.google.com.br/books?id = 2 QcOmDAEACAAJ. 菲耶罗布, C. ( ). 关于椭圆台球中三角形[5] 2021 轨道的外心. 《动力系统与控制系统杂志》. doi:10.1007/s10883-021-09537-2. 2[6] 加西亚, R., Helman, M., Reznik, D. (2024). 被等边三角形放大：围绕内切圆的庞斯列三角形及其退化情形. arXiv:2409.19464. 1, 2, 3, 6[7] 加西亚, R., Reznik, D., Koiller, J. (2021). 椭圆台球中三角形轨道的新性质. 《美国数学月刊》, 128 10 898 910 2 ( ): – . 加西亚, R., Reznik, D., Koiller, J. ( ). 椭圆台球中三[8] 2023 周期轨道的轨迹：为何有这么多椭圆? 《符号计算杂志》, 114 4 336 358 2 ( ): – . 金伯林, C. ( ). 《三角形中心百科全书》. [9] 2019 1, 3, 4, 6 faculty.evansville.edu/ck6/ encyclopedia/ETC.html. [10] 2024 摩西, P. ( ). 基珀特内切抛物线的顶点. 私人通信. 4 [11] 2014 罗马斯克维奇, O. ( ). 关于椭圆台球中三角形轨道的内心. 《数学教学》, 60 3 4 247 255 1304 7588 2 ( ): – . arxiv.org/pdf/ . .pdf. 塔巴奇尼科夫 , S. ( ). [12] 2005 30 《几何与台球》, 《学生数学丛书》第 卷 . 罗得岛州普罗维登斯: 美国数学会. 数学高级学习学期项目，宾夕法尼亚州大学公园市. 2[13] 韦斯坦, E. (2019). MathWorld. MathWorld——Wolfram网络资源. mathworld.wolfram. com. 1, 3, 6