类型论的宇宙范畴模型中的（带基点）单价性

Krzysztof Kapulkin
Yufeng Li

arXiv:2512.16697v1 [cs.LO] 18 Dec 2025

我们给出了依赖类型论的宇宙范畴模型中单值性公理的一种表述，便于在同伦论语境下加以验证。我们进一步发展了一种称为带基点单值性的单值性公理强化形式；它既符合计算上的需求，在语义上也自然，并验证了它在 Artin–Wraith 粘合和逆图形成下的封闭性。

引言

Voevodsky 的单值性公理或许是 21 世纪引入的最根本的逻辑原理。如果某个（小）类型宇宙中的任意两个类型，其等同性（或识别）类型都等价于它们之间的等价类型，那么该类型宇宙就满足单值性公理。因此，例如，逻辑等价的两个命题或存在双射的两个集合可以视为相等，进而在所有语境中相互替换。虽然单值性公理在非形式化的数学实践中方便且常被默认采用，但仍需要对其进行形式化论证。第一个此类论证来自 Voevodsky 著名的单纯形模型 [KL21]；该模型不仅满足单值性公理，事实上还启发了这一公理。将类型解释为空间（更准确地说，是 Kan 复形）后，小类型宇宙中的路径由其间的同伦等价给出，也就不足为奇了。此后，人们提出了大量其他单值性模型，包括立方模型 [CCHM15；OP16；ABCHHL21；AHH18；LOPS18]，以及 Grothendieck ∞-托扑斯 [Shu17；Shu15b；Shu19]中非常一般的高范畴模型。

本文有两个目标。第一，更系统地以 Voevodsky 的宇宙范畴 [Voe15b] 和／或 Uemura 的可表映射范畴 [Uem23]的语言研究单值性公理。第二，探讨对单值性公理的一种略微加强，本文称之为带基点的单值性。大多数模型都满足这一加强，它允许对等价进行模式匹配，或许与 Voevodsky 的原始工作思路相近。下文将依次讨论这两个目标。

Since their introduction [Voe15b; Voe17; KL21], universe categories have been recognized as a convenient language to speak of semantics of type theory [Uem23], including recasting other notions of models as universe categories. Perhaps the most prominent example is the rephrasing of categories with families [Dyb96] as natural models [Awo18], which are universe category structures on presheaf categories. In essence, a universe category consists of a category $\mathbb{C}$ with a map $\widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ and a choice of pullbacks of $\widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$. The map $\widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ is thought of as an external universe and its pullbacks serve to interpret type dependency. Some work is required to explain when the resulting model supports different type constructors and the details of this were worked out in [KL21].

When using universe categories to model homotopy type theory [Uni13], attention needs to be paid to how the univalence axiom is treated. In [KL21], the goal is to build a single model of homotopy type theory (in simplicial sets), and when it comes to verifying univalence, the authors do just that: they translate the statement into a statement about simplicial sets and check it directly. In contrast, the purpose of the present paper is to provide a more general semantic treatment of univalence at the level of universe categories by rephrasing the condition in a way that would make it easy to check in practice across various models. We also aim to avoid using the internal language formulations which, while elegant, might occasionally conceal important details, possibly leading to incomplete arguments. Altogether, the upshot of our formulation is that, when verifying univalence in a given universe category model, one does not need to work with syntax at all. We contrast it with the closely related work of Uemura [Uem23], who provides the treatment of univalence in categories with representable maps, a close cousin of universe categories, taking a much more syntactic approach.

有趣的是，为了得到一个可在宇宙范畴中轻松验证的单值性公理表述，我们实际上给出了一个比 HoTT Book 中常用版本略强的陈述 [Uni13], 这引出了本文的第二项贡献。如前所述，单值性公理最一般的表述是：从宇宙中两个类型之间的恒等类型到它们之间的等价类型的某个映射本身是一个等价。我们的强化要求该映射的同伦逆将恒等等价映到自反项。为了区分二者，我们将 [Uni13] 书中出现的版本称为书本单值性，而将我们的新版本称为 带基点的单值性。带基点的单值性是一种非常自然的强化，其动机来自奎伦模型范畴的语义 [Qui67；Hov99], 前提是A、$B\colon 1 \to \mathcal{U}$这两个选取类型的映射是余纤维化。这一点例如在纤维化的截面都是余纤维化时成立，而所有预层范畴上的 Cisinski 模型结构都满足这一条件。相比之下，在立方类型论的分类范畴中情况并非如此[CCHM15], ，因为项通常不是余纤维化。另一方面，由左类到纤维化的映射公理化了模式匹配，因此我们的带基点单值性在计算上也有可取之处，因为它使得对等价进行模式匹配具有正当性。由此，我们认为，这一强化构成了一个具有强有力语义依据、值得独立研究的新概念。

从本质上说，我们的改述基于一个提升条件（利用变形收缩之对偶的概念 [Cis19]），该条件只涉及 h-同构对象；尤其是，我们无需知道外部宇宙具有 Id-型结构。书本式单价性要求某个交换方块存在一个对角填充，使得只有下方三角形交换；而有指向的单价性要求由此得到的两个三角形都交换。因此，在源自 Quillen 模型范畴的模型中验证这一点非常自然，因为其中的填充会使两个三角形都交换。

Our semantic study of pointed univalence includes studying closure properties of models under two fundamental constructions: Artin–Wraith gluing and inverse diagrams. For book univalence, these were verified in the seminal work of Shulman [Shu15c], and we provide the “pointed counterpart” of his results. These results require *pointed function extensionality*,

a similar strengthening of function extensionality. Recalling that function extensionality asserts that two functions that are pointwise equal must be equal (as functions), pointed function extensionality asserts that functions pointwise equal via reflexivity terms must be equal by the reflexivity term. Once again, this strengthening is given by another natural lifting condition.

如上所述，本文自然分为两部分：第一部分讨论宇宙范畴框架中的（普通及基点）单值性（第1 至 3节），第二部分则“深入探究”基点单值性的闭包性质（第4 至6节）。具体而言：第 1节回顾宇宙范畴的基本理论，尤其讨论宇宙范畴在何种条件下支持表述单值性公理所需的不同类型构造子。第2节构造 h-同构对象，这是陈述单值性公理所必需的。第 3节介绍单值性的三种表述：定义 3.4 给出在宇宙范畴中最容易陈述的版本；定理 3.13 用一个相对容易陈述的条件对其重新表述；定理 3.16则将其与类型论表述进行比较。第 4节用提升条件给出函数外延性变体的一种表述，称为基点函数外延性。第5节证明，包括基点函数外延性和单值性在内的类型论构造，在构造 Artin–Wraith 胶合范畴时保持稳定。最后，第 6节利用迭代 Artin–Wraith 胶合证明，在基点函数外延性成立的条件下，基点单值性在构造逆图时保持稳定。

目录

摘要 1

目录 3

1 Background 4

1.1 Polynomial Functors 4

1.2 Universe Category Models of Type Theory 7

1.3 CwR Presentations of Type Theory 12

1.4 Id-Type Homotopy Theory 16

2 Generic Object of Homotopy Isomorphisms 19

2.1 Generic Object of Homotopy Identities 19

2.2 Generic Object of Homotopy Isomorphisms 23

3 Univalence 25

3.1 Fibrancy of the Endpoint Maps 27

3.2 Univalence via a Homotopy Retract Argument 29

3.3 Univalence Type-Theoretically 35

3.4 The CwR of Univalent Type Theory 37
3.5 Remarks on Pointed Univalence 39
4 Pointed Functional Extensionality 40
5 Artin–Wraith Gluing of Universe Categories 43
5.1 Universal Reedy Fibrations 45
5.2 Unit-Types 47
5.3 Σ-Types 48
5.4 Π-Types 48
5.5 Id-Types 49
5.6 Pointed Functional Extensionality 56
5.7 Pointed Univalence 58
6 Inverse Diagrams of Universe Categories 65

1 背景

本文采用类型论的宇宙范畴模型框架。我们首先回顾一些必要的背景知识，包括推前、多项式函子、宇宙范畴模型，以及如何在这一框架中公理化各种逻辑构造。

1.1 多项式函子

我们将大量使用可指数化映射，有时也会用到与可指数化映射相关的多项式函子和泛后复合。

定义 1.1. 范畴 $\mathbb{C}$ 中的映射 $p\colon E \to B$ 若沿 p 的拉回存在，且拉回函子 $p^*\colon \mathbb{C}/_B \to \mathbb{C}/_E$ 有一个右伴随 $p_*\colon \mathbb{C}/_E \to \mathbb{C}/_B$，则称其为可指数化的；我们称该右伴随为推前。— ♦

利用推前，可以定义与可指数化映射相关的多项式函子。

定义 1.2. 设 $\mathbb{C}$ 为一个有限完备范畴，并固定一个可指数化映射 $p\colon E \to B \in \mathbb{C}$，以及一个特定的推前选择 p_*。那么，与 p 相关联的多项式函子是复合函子

$$\mathbb{P}_p \coloneqq \left(\mathbb{C} \xrightarrow{E\times -} \mathbb{C}/_E \xrightarrow{p_*} \mathbb{C}/_B \xrightarrow{B_!} \mathbb{C}\right)$$

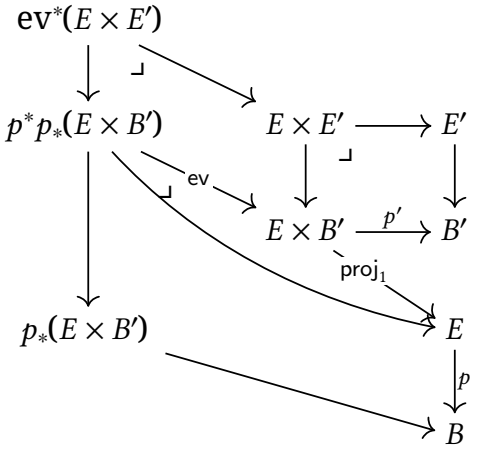
其中，最后一个映射 $\mathbb{C}/_B \xrightarrow{B_!} \mathbb{C}$ 只是忘掉基底。具体来说，给定 $X \in \mathbb{C}$，它返回映射 $p_!(E \times X) \xrightarrow[(\mathrm{proj}_1)]{p_!} B$的定义域对象。 — ♦

与指数映射相关联的多项式函子密切相关的是与一个可指数化映射作后复合的泛映射，其构造如下。

构造 1.3. 设 $\mathbb{C}$ 是一个有限完备范畴，并固定一个可指数化映射 $p\colon E \to B \in \mathbb{C}$，其推前函子为 p_*。设 $p'\colon E' \to B' \in \mathbb{C}$ 是一个映射。那么，映射

$$\mathsf{GenComp}(p', p)\colon \mathsf{ev}^*(E \times E') \to p^* p_*(E \times B') \to p_*(E \times B')$$

可按如下方式构造：首先沿 p 对 $E \times B' \to E$ 取推前，得到 $p_*(E \times B')$；然后沿 p 取拉回，得到余单位 $p^* p_*(E \times B') \to E \times B'$；最后沿复合映射 $p^* p_*(E \times B') \to E \times B' \to B'$ 对 $E' \to B'$ 取拉回。

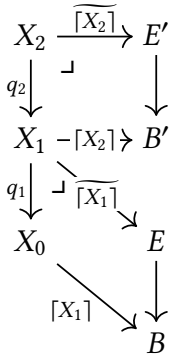


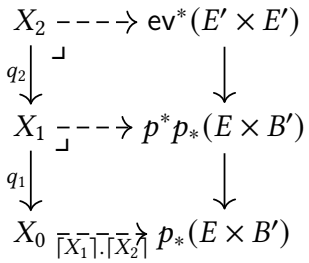
— ♦

上述构造中构造出的泛复合映射 1.3 名副其实。

引理 1.4. 设 $p\colon E \to B \in \mathbb{C}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个可指数化态射。任取一个态射 $p'\colon E' \to B' \in \mathbb{C}$。

假设存在如左图所示的拉回。那么复合态射 $X_2 \to X_1 \to X_0$ 是沿着如右图所示的态射 $\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil$ 对 $\mathsf{GenComp}(p, p') : \mathsf{ev}^*(E \times E') \to p^* p_*(E \times B') \to p_*(E \times B')$ 取拉回所得。



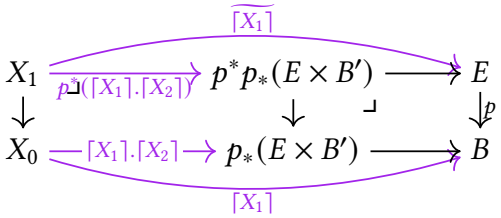


where $X_0 \xrightarrow{\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil} p_*(E \times B')$ is the unique map such that $(X_0 \xrightarrow{\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil} p_*(E \times B) \to B) = (X_0 \xrightarrow{\lceil X_1 \rceil} B)$ and $(X_0 \xrightarrow{\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil} p_*(E \times B'))^\dagger = (X_1 \xrightarrow{(\widetilde{\lceil X_1 \rceil}, \lceil X_2 \rceil)} E \times B')$. — ♦

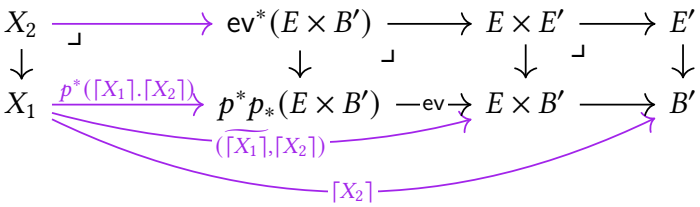
Proof. One explicitly constructs the required map $\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil$ in the following steps.

(1) 首先将映射 $X_0 \xrightarrow{\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil} p_*(E \times B')$构造为一个映射 $X_0 \to p_*(E \times B')$ over B到推前中。根据推前的泛性质，我们选取该映射的转置作为映射 $p^* X_0 = X_1 \xrightarrow{(\lceil X_1 \rceil, \lceil X_2 \rceil)} E \times B'$ over E。

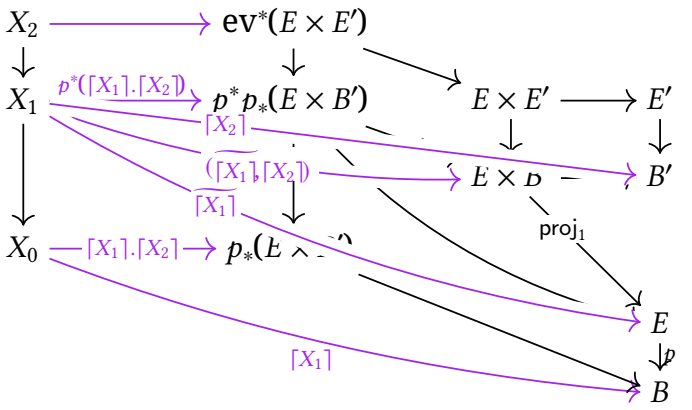
(2) 接下来，利用拉回引理，计算 $p^* p_*(E \times B') \to p_*(E \times B')$沿着 $X_0 \xrightarrow{\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil} p_*(E \times B')$的拉回，得到 $X_1 \to X_0$。



（3）最后注意到，根据定义，转置为 $\mathrm{ev} \cdot p^*(\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil) = (\lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil)^\dagger = \widetilde{(\lceil X_1 \rceil, \lceil X_2 \rceil)}$。因此，再次利用拉回引理，沿着$\mathrm{ev}$ ( )拉回 $\mathrm{ev}^*(E \times B')$ $\to$ $p^* p_*$ $E \times B'$ $E_1 \xrightarrow{p^* \lceil X_1 \rceil . \lceil X_2 \rceil}$ * $E \times B'$ $X_2 \to X_1$ ( )，恰好就是。



综合以上各项，我们得到如下图表。



唯一性 映射 $\lceil X_1 \rceil$ 的 $\xrightarrow{\lceil X_2 \rceil}$ 于是由伴随转置的唯一性得出。— ■泛型余

mposite is related to the associated polynomial functor in the following sense.

Lemma 1.5. Pushing forwards the first map $\mathrm{ev}^*(E \times E') \to p^*p_*(E \times B')$, in the context of the generic composite from Construction 1.3, viewed as an object of the slice category over $p^*p_*(E \times B')$, along the second map $p^*p_*(E \times B') \to p_*(E \times B')$ in $\mathsf{GenComp}(p', p)$ obtains the same map $p_*(E \times E') \to p_*(E \times B')$ as applying the polynomial functor from Definition 1.2 associated with p to $E' \to B'$. — ♦

证明。 由推前的分配律可立即得出，参见 [KL25a，引理 2。3]。—— ■

1.2 类型论的宇宙范畴模型

宇宙范畴模型 [Voe15b]以及将类型论表述为带可表示映射的范畴（CwR） [Uem23]，是一类通用且具有极高功率重量比的框架，可将依赖类型论的模型（其中上下文扩张由某些对拉回稳定的投影映射来建模）视为其特例。

定义 1.6 ([Voe15b，定义 2。1]）。设 $\mathbb{C}$ 为一个有限完备范畴。指数映射 *uni-*~*verse* 结构是定义在一个可指数化映射 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 上的一个特定右伴随的选取$\mathsf{var}\colon {}^{\mathbb{C}}/_{\mathcal{U}} \to {}^{\mathbb{C}}/_{\widetilde{\mathcal{U}}}$

$$ {}^{\mathbb{C}}/_{\mathcal{U}} \underset{\pi_!}{\overset{\mathsf{var}}{\underset{\top}{\dashrightarrow}}} {}^{\mathbb{C}}/_{\widetilde{\mathcal{U}}} $$

从 $\pi_!\colon {}^{\mathbb{C}}/_{\widetilde{\mathcal{U}}} \to {}^{\mathbb{C}}/_{\mathcal{U}}$ 后合成函子得到（也就是说，只需选择沿 π 的拉回）。

对于每个 $A\colon \Gamma \to \mathrm{U} \in {}^{\mathbb{C}}/_{\mathcal{U}}$，我们将 π_A 记作在 A 处的余单位，并将 $\Gamma.A$ 记作 π_A 的定义域，从而有一个拉回方块

$$ \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{\mathsf{var}_A} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \pi_A}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow[A]{} & \mathcal{U} \end{array} $$

映射 π_A 也是由宇宙结构选定的拉回。

~具有这种宇宙结构的映射 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 称为泛映射。范畴 $\mathbb{C}$ 上的宇宙结构由一个指定的泛映射~$\mathrm{U} \to \mathrm{U}$以及其上的一个宇宙结构组成。

— ♦

例1.7。令 $\mathbb{C}$ 为预层范畴，我们便恢复了带族范畴（cwf）的概念 [Dyb96]。— ♦

~有时，给定一个泛映射 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$，我们希望讨论它的任意拉回，而不是由其宇宙结构选定的特定拉回映射。为此，我们约定一些术语。

~定义 1.8。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$中的一个泛映射。

映射 $E \to B$的 π-名称 和 π-点 分别是映射 $\ulcorner E \urcorner$和 $\ulcorner E \urcorner$，如下所示，并使下图构成一个拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\widetilde{\ulcorner E \urcorner}} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\ulcorner E \urcorner]{} & \mathcal{U} \end{array}$$

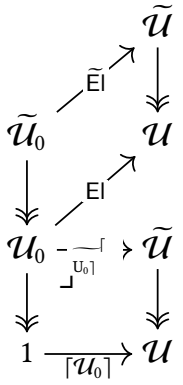
总之， π-(名称，点)对 $(\ulcorner E \urcorner, \ulcorner E \urcorner)$ 构成了 π-纤维性结构，定义在 $E \twoheadrightarrow B$ 上。能够赋予 π-纤维性结构的映射称为 π-纤维化，记作$E \twoheadrightarrow B$。作为 B 上切片范畴中的对象，我们称 $E \twoheadrightarrow B \in \mathbb{C}/B$ 是一个 π-纤维对象。

尽管 π-纤维性结构不一定唯一，但给定 $A\colon \Gamma \to \mathrm{U}$，所选的拉回 $\Gamma.A \to \Gamma$ 具有一个典范 π-纤维性结构（A，var_A）。此外，给定一个π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$及其纤维性结构 $(\ulcorner E \urcorner, \ulcorner E \urcorner)$，其典范 π-纤维替换是同构映射 $\pi_{\ulcorner E \urcorner}\colon B.\ulcorner E \urcorner \cong E \to B$。— ♦

有时，例如在讨论单值性时，我们需要在配备多个泛映射的范畴中进行研究。配备两个泛映射的范畴，常见的例子是内宇宙。

定义 1.9. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射。

U 上的一个内纤维化宇宙结构由一个泛映射 $\pi_0\colon \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 和一个终对象 1 组成，使得 $\mathrm{U}_0 \twoheadrightarrow \mathrm{U}_0$ 和 $\mathrm{U}_0 \twoheadrightarrow 1$ 可以配备典范 π-纤维化结构 $(\mathrm{El}, \mathrm{El})$ 和 $(\ulcorner \mathrm{U}_0 \urcorner, \ulcorner \mathrm{U}_0 \urcorner)$。



— ♦

目前，我们固定一个特定的泛映射（无论它是否为内在的），并为其赋予各种逻辑构造。我们从Id-类型结构开始，它是纤维化的泛纤维化优良路径对象的句法版本，其公理化描述见 [Voe15a],，现将其回顾如下。

定义1.10 （[Voe15a，定义 2。7]）设 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是有限完备范畴中的一个泛映射 $\mathbb{C}$。

一个预备恒等类型结构（也称为J1结构，见 [Voe15a，定义 2。7]）在$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 由一对虚线映射（恒等 $\ulcorner$自反$\urcorner$）组成，如下所示，它们从对角线$\mathcal{U} \to \mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}$ 映射到

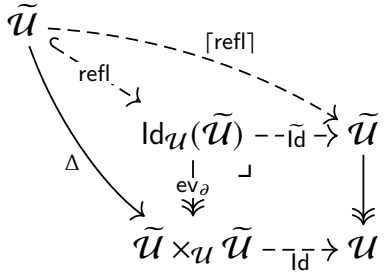
$\widetilde{\mathrm{U}} \to$
U。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\lceil \mathsf{refl} \rceil} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \Delta}\downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\widetilde{\mathsf{Id}}} & \mathcal{U} \end{array} \tag{PRE-Id-DEF}$$

$-\blacklozenge$

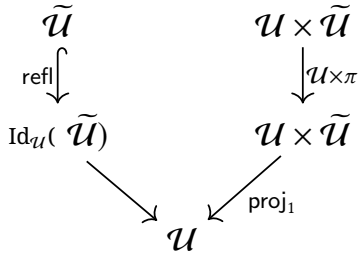
$\widetilde{\text{}}$构造 1.11 ([Voe15a，方程 (7)])。设 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射，该范畴配备了预Id-类型结构 (Id $\lceil$refl$\rceil$)，如 (预Id- 定义) 中所述。

$\widetilde{\text{}}$ $\widetilde{\text{}}$ $\widetilde{\text{}}$ $\widetilde{\text{}}$将 $\mathrm{ev}_\partial\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U}) \twoheadrightarrow \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U}$ 记为由宇宙结构沿 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ $\widetilde{\text{}}$选出的 π 的拉回，因此存在一个映射 $\mathrm{refl}\colon \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ 到该拉回中，如下所示。



(Id-DEF)

$\widetilde{\text{}}$ $\widetilde{\text{}}$ $\widetilde{\text{}}$于是，在 U 上，我们有一对映射 $\mathrm{refl}\colon \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U})$（其中 $\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ 被视为一个位于 U 上的对象，其所依据的映射为 $\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \rightrightarrows \mathrm{U} \to \mathrm{U}$）以及重新基化后的映射$\widetilde{\text{}}\mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times$U，如下所示。



$\widetilde{\text{}}$我们按如下方式构造切片范畴中 refl 与 $\mathrm{U} \times \pi$ 之间的拉回-Hom 映射

$$\begin{pmatrix} \mathsf{Diag}_{\mathcal{U}}(\mathsf{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \\ \downarrow \\ \mathsf{Sq}_{\mathcal{U}}(\mathsf{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} [\mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}), \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ [\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \times_{[\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}}} [\mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}), \mathcal{U} \times \mathcal{U}]_{\mathcal{U}} \end{pmatrix} \tag{J-PROB}$$

它编码了通用的 J 消去提升问题。 $-\blacklozenge$

$\widetilde{\text{}}$定义 1.12 ([Voe15a，定义 2.8])。设 $\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是有限完备范畴中的一个全局映射，该范畴配备了一个预-Id-类型结构(Id $\lceil$refl$\rceil$)，如（预Id-定义）所述。

一个J-消去结构（也称为J2-结构，见 [Voe15a，定义 2.8]），定义在预Id-类型结构（J1-结构）上，是（J-问题）的拉回 Hom 映射的一个截面。

$$\begin{array}{c} \mathsf{Diag}_{\mathcal{U}}(\mathsf{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \\ \Big\uparrow\!\!\Big\downarrow \\ \mathsf{Sq}_{\mathcal{U}}(\mathsf{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \end{array} \tag{J-DEF}$$

– ♦

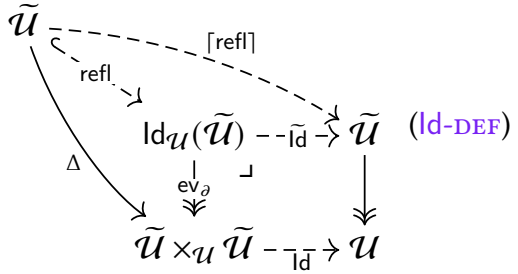
注 1.13. 上述 J-消去结构的定义，等价于说 J 是稳定提升结构，其含义见 [KL25b，定义 1.4 和 3.1]，~~~~~~中关于 $\mathsf{refl}\colon \mathcal{U} \hookrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$ 相对于 $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$，在切片范畴 $\mathbb{C}/_{\mathcal{U}}$ 中。

$$\mathsf{J} \in \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & & \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{refl}}\downarrow & \swarrow_{\mathcal{U}} & \downarrow \\ \mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

– ♦

定义 ~~~~~~1.14. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射。

~~~~~~一个（完整的）Id-类型 结构（也称为 完整的 J-结构，见 [Voe15a]）定义在 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 上，由一个预J-结构 (Id ⌈refl⌉) 作为（Id-DEF）J-消去结构（作为 J-DEF）。



(Id-DEF)

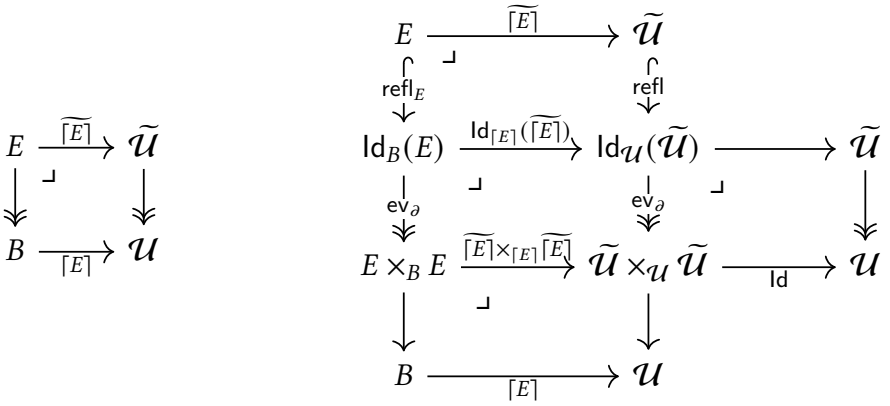
$$\begin{array}{c} \mathsf{Diag}_{\mathcal{U}}(\mathsf{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \\ \Big\uparrow\!\!\Big\downarrow \\ \mathsf{Sq}_{\mathcal{U}}(\mathsf{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \end{array} \tag{J-DEF}$$

– ♦

例 1.15. 在 CCHM 风格的立方型类型论中，[CCHM15],路径类型仅是预Id-类型，因为它们不一定具有所需的（定义性）J-消去结构，如定义 1.12 中所述。—— ♦

~~~~~~注 1.16. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射，该范畴配备了预 Id 类型结构。

~~~~~~对于每个带有 π-纤维化结构（⌈E⌉, ⌈E⌉）的 π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$，我们也~~~~~~将右侧相应标记的映射记为 $\mathrm{Id}_B(E)$、$\mathrm{Id}_{\lceil E \rceil}(\lceil E \rceil)$ 和 refl_E。
~~~~~~

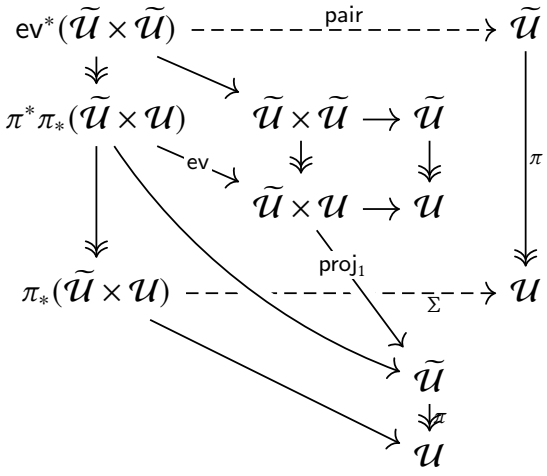


其中 $\mathsf{Id}_B(E) \twoheadrightarrow E \times_B E$ 由宇宙结构选定。 – ♦

宇宙范畴中逻辑量词的公理化，在语法层面编码了将它们视为伴随的处理方式。按照将逻辑量词视为伴随的思路， Σ-型是存在量词在类型论中的体现，因此 Σ-型结构采用构造1.3中的泛复合来公理化。

~定义 1.17。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射。

~在 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的一个外延 Σ-型 结构，是 $\mathsf{GenComp}(\pi, \pi)$ 上的一个 π-纤维化结构（Σ，对）。

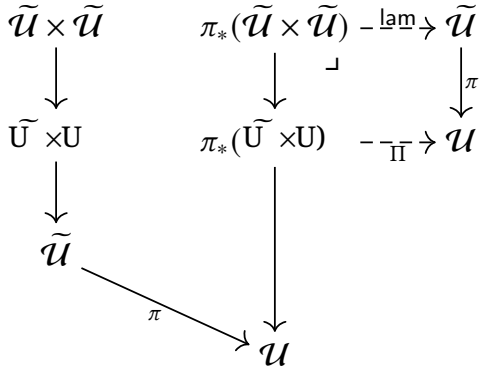


– ♦

同样，按照将逻辑量词视为伴随的思路，并根据引理 1.5 中所述的贝克–切瓦利论证， Π-型是全称量词在类型论中的体现，因此 Π-型结构采用与泛纤维化相关的定义 1.2中的多项式函子来公理化。

~定义 1.18 ([Voe17，定义 2.2]) 。设 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$中的一个泛映射。

$\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 上的一个外延 Π-类型 结构，是与 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 相关的多项式函子作用于自身所得像$\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$上的一个 π-纤维化结构（lam Π）。



– ♦

该 Σ-和 Π-型结构，定义1.17和1.18所述的结构，确实是如下意义上的泛纤维逻辑量词。

命题 1.19。设 $\pi: \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个万有映射。

(1) 若 若 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 配备了外延的 Σ-型结构，则 π-纤维化在复合运算下封闭。

(2) 若 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 配备了外延的 Π-型结构，那么沿着 π-纤维化的 π-纤维化的推前存在，且仍是 π-纤维化。

– ♦

证明。 第一部分由引理 1.4得出，第二部分由引理 1.5得出。 . – ■

推论 1.20。设 $\pi: \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射。若$\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 具有 Π-型结构，则下列映射是 π-纤维化。

$$[\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U} \quad [\mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}]_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U} \quad [\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$$

– ♦

证明。所有情形都类似。以 $[\mathrm{U} \times \mathrm{U}、\mathrm{U} \times \mathrm{U}]_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} \to \mathrm{U} \times \mathrm{U}$ 为例，这个$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$内 Hom 是 $(\mathrm{U} \times \mathrm{U}) \times_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} (\mathrm{U} \times \mathrm{U}) = \mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times \mathrm{U}$ 沿$\widetilde{\mathrm{U}} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times \mathrm{U}$ 的推前，因此由命题 1.19 得出结论。 — ■

1.3 类型论的 CwR 表示

各种逻辑构造的宇宙范畴公理化也很容易用 CwR 来表述各种类型论。

我们首先回顾 Uemura 对 CwR 的定义 [Uem23] 以及 Jelínek 关于 CwR 范畴双完备性的结果 [Jel24]。

定义1.21 ([Jel24，定义 2.3。1], [Uem23，定义 3.2。1])。一个带可表示映射的范畴（*CwR*）是一个范畴 $\mathbb{C}$，具有有限极限，并配备了一个满且稠密、对拉回稳定的子范畴类 $\mathrm{R}_{\mathbb{C}}$，其中的对象为可指数化映射，称为可表示映射。

CwR 之间的映射是指其底层范畴之间保有限极限、可表示映射以及沿可表示映射的推前的映射。

记 CwR 为由（小）CwR、CwR 映射以及在可表示映射处的方块为拉回的自然变换构成的 2-范畴。—— ♦

定义 1.22。记 $\mathsf{Cat}_{\mathsf{m}}$ 为由带标记映射和方块的（小）范畴构成的 2-范畴。

也就是说，带标记范畴是一个范畴 $\mathbb{C}$，配备了两个特定的饱和宽子范畴 $\mathrm{M}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 和 $\mathrm{S}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{C}^{\to}$。带标记范畴之间的 1-胞恰好是底层范畴之间将标记映射和方块映为标记映射和方块的函子。带标记范畴的 1-胞之间的 2-胞是自然变换，且其在标记箭头处的自然性方块也都是标记方块。

通常，我们用箭头 $\twoheadrightarrow$ 表示标记映射。 – ♦

将可表示映射作为标记映射、将拉回方块作为标记方块，便可使 CwR 的可表示映射赋予其带标记范畴的结构。反过来，根据 Jelínek 的以下结果，每个带标记范畴都可自由地产生一个 CwR。

定理 1.23 ([Jel24，推论 3.2.16 和 3.2.17])。遗忘 2-函子 $|{-}|\colon \mathsf{CwR} \to \mathsf{Cat}_{\mathsf{m}}$ 有一个左双伴随 $\langle{-}\rangle\colon \mathsf{Cat}_{\mathsf{m}} \to \mathsf{CwR}$，并且 CwR 具有所有双余极限。— ■

CwR 的双完备性导出如下构造。

构造 1.24. 设 $\mathbb{C}$ 是一个 CwR。固定两个标记范畴之间的映射 $\mathbb{I} \to \mathbb{J}$和 $\mathbb{I} \to |\mathbb{C}|$。于是，我们将以下在 CwR 中的双推出记作 $\mathbb{C} \cup_{\mathbb{I}} \mathbb{J}$

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathbb{I} \rangle & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle \mathbb{J} \rangle & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup_{\mathbb{I}} \mathbb{J} \end{array}$$

其中，映射 $\langle \mathbb{I} \rangle \to \mathbb{C}$ 在上方一行中是 $(\langle - \rangle \dashv |-|)$-转置映射 $\mathbb{I} \to |\mathbb{C}|$，而左侧一行中的映射是 $\mathbb{I} \to \mathbb{J}$ 在 $\langle - \rangle$下的像，依据 [Jel24，推论 3.2.16 和 3.2.17]。 – ♦

通过这一构造，可以导出以下构造。

构造 1.25。设 $\mathbb{C}$ 是一个 CwR。

(1) 通过形式地添加两个对象之间的映射 $X,\ Y \in \mathbb{C}$得到的 CwR 是双推出

$$\mathbb{C}[X \to Y] \coloneqq \mathbb{C} \cup_{\{X \quad Y\}} \{X \to Y\} \in \mathsf{CwR}$$

(2) 通过形式地添加两个映射$f\colon X \to X'$和$g\colon Y \to Y'$之间的交换方块得到的 CwR 是双推出

$$\mathbb{C}[f \to g] = \mathbb{C}\begin{bmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{bmatrix} \coloneqq \mathbb{C} \cup_{\begin{Bmatrix} X & & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & & Y' \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{Bmatrix} \in \mathsf{CwR}$$

(3) 通过形式地反演一类宽子范畴中的映射$W \hookrightarrow \mathbb{C}$所得到的 CwR，是沿着将$W$包含到其同伦范畴$W^{-1}W$中的包含映射作出的双推出，其中所有映射都标记为弱等价。

$$W^{-1}\mathbb{C} \coloneqq \mathbb{C} \cup_W W^{-1}W$$

(4) 通过形式地在两个映射之间添入一个拉回方块所得到的 CwR，其中$f\colon X \to X'$，而$g\colon Y \to Y'$，是这样得到的双余极限：先形式地添入一个方块$f \to g$，再形式地反演比较映射$X \to X' \times_{Y'} Y$。

$$\mathbb{C}[f \xrightarrow{\mathsf{pb}} g] = \mathbb{C}\begin{bmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{bmatrix} \coloneqq (X \to X' \times_{Y'} Y)^{-1}\mathbb{C}[f \to g]$$

— ♦

注 1.26. Jelínek 指出，利用标记方块，构造 1.25(4)也可以通过自由添入一个标记方块来实现。— ♦

上述构造满足以下（1-范畴意义下的）双推出泛性质。

引理 1.27. 设$\mathbb{C}$是一个 CwR。参见构造 1.25，

(1) 给定对象$X, Y \in \mathbb{C}$，映射$\mathbb{C}[X \to Y] \to \mathbb{D} \in$CwR 的同构类与映射$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$的同构类以及一个映射$FX \to FY \in \mathbb{D}$的选择一一对应。(2) 给定$\mathbb{C}$中的两个映射$f\colon X \to X'$和$g\colon Y \to Y'$，映射$\mathbb{C}[f \to g] \to \mathbb{D} \in$ CwR 的同构类与映射$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$的同构类以及一个交换方块$Ff \to Fg \in \mathbb{D}^{\to}$的选择一一对应。(3) 给定映射$W \hookrightarrow \mathbb{C}$的一个宽子范畴，映射$W^{-1}\mathbb{C} \to \mathbb{D} \in$ CwR 的同构类与映射$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$的同构类一一对应，且该映射将$W$中的所有映射都送到同构。

(4) 给定$f\colon X \to X'$和$g\colon Y \to Y'$在$\mathbb{C}$中，映射$\mathbb{C}[f \xrightarrow{\mathsf{pb}} g] \to \mathbb{D}$的同构类与映射$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$的同构类及一个拉回方块$Ff \to Fg \in \mathbb{D}$的选取一一对应。

— ♦

证明。由双推出的泛性质可直接得出。 — ■

现在可以将内涵类型论的各种逻辑结构直接翻译到 CwR 框架中。

构造 1.28。作为 CwR 构造的内涵类型论的各种片段如下所示。

(定义 1.6) 通用映射 Univ 的 CwR 是由带标记箭头生成的自由 CwR，它与 [Jel24, 记号 4.31] 或 [Uem23，例 3.26] 中的 CwR 相同。

$$\mathsf{Univ} \coloneqq \langle \{\pi : \widetilde{\mathcal{U}} \twoheadrightarrow \mathcal{U}\} \rangle$$

(定义 1.9) CwR IntUniv 是配备了通用内在（纤维化）宇宙的通用映射的 CwR，它由 Univ 通过形式地$\widetilde{\ }$添加一个映射$\mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 到 Univ，并使用构造 1.9 中定义的两个拉回方块，通过反复应用构造 1.25 得到。

$$\mathsf{IntUniv} \coloneqq \mathsf{Univ} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{U}}_0 \\ \downarrow \\ \mathcal{U}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{U}}_0 & \to & \mathcal{U}_0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} & \to & \mathcal{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 & \to & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ 1 & \to & \mathcal{U} \end{bmatrix}$$

(定义 1.14) CwR $\mathsf{Univ}^{\mathsf{pre\text{-}Id}}$ 是配备了通用前置Id-类型结构的通用映射的 CwR，它由 Univ 通过自由地添加定义 前置Id类型结构 中的 1.10形式的方块获得。

$$\mathsf{Univ}_{\mathsf{pre\text{-}Id}} \coloneqq \mathsf{Univ} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\lceil \mathsf{refl} \rceil} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow[\mathsf{Id}]{\ulcorner\ \urcorner} & \mathcal{U} \end{bmatrix}$$

一个一般Id-类型结构的 CwR 是通过对$\mathsf{Univ}^{\mathsf{pre\text{-}Id}}$ 形式地添加一个局部提升结构而构造出来的，方法见 [KL25b，构造 3。8]

$$\mathsf{Univ}_{\mathsf{Id}} \coloneqq \mathsf{Univ}_{\mathsf{pre\text{-}Id}} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & & \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle\mathsf{refl}}\downarrow & \swarrow_{\mathcal{U}} & \downarrow \\ \mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{bmatrix}$$

（定义1.17）通用映射的 CwR Univ_Σ 配备通用Σ-类型结构，由 Univ 通过自由添加构造 GenComp（π，π）中的一个拉回方块得到，构造编号为 1.3，并将其添加到 π

$$\mathsf{Univ}_\Sigma \coloneqq \mathsf{Univ} \begin{bmatrix} \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\mathsf{pair}} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle\mathsf{GenComp}(\pi,\pi)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) & \xrightarrow[\Sigma]{} & \mathcal{U} \end{bmatrix}$$

（定义1.18）通用映射的 CwR Univ_Π 配备通用Π-类型结构，由 Univ 通过自由添加一个拉回$\widetilde{\ }$方块得到，该方块来自构造 $\pi_*(\mathrm{U} \times \pi)$，构造编号为 1.3，并将其添加到 π

$$\mathsf{Univ}_\Pi \coloneqq \mathsf{Univ}\begin{bmatrix} \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\mathsf{lam}} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) & \xrightarrow[\Pi]{} & \mathcal{U} \end{bmatrix}$$

这些构造中的每一个都是$\mathsf{Univ}/\mathsf{CwR}$中的对象，其中从 Univ 出发的映射，是它们作为双余极限构造时显然的余极限映射。— ♦

上述 CwR 具有以下泛性质。

命题 1.29. 设 $\mathbb{C}$ 是一个有限完备范畴。

(1) $\mathbb{C}$ 具有 CwR 结构，其中将可表示映射取为可指数化映射。(2) 映射 $\mathsf{Univ} \to \mathbb{C} \in \mathsf{CwR}$ 的同构类与 $\mathbb{C}$中泛映射的选取的同构类一一对应。(3) 经由 $\mathsf{Univ} \to \mathbb{T}$ 的因子分解 $M\colon \mathsf{Univ} \to \mathbb{C} \in \mathsf{CwR}$，其中 $\mathbb{T} = \mathsf{IntUniv}$，$\mathsf{Univ}_{\mathsf{Id}}$，$\mathsf{Univ}_\Sigma$，$\mathsf{Univ}_\Pi$ 分别与泛映射 $M\pi\colon M\mathrm{U} \to M\mathrm{U} \in \mathbb{C}$ 上的内宇宙、$\widetilde{\ }$Id 型、 Σ-型、 Π-型结构的选取一一对应。

— ♦

证明。我们依次证明各部分。

可指数化映射的类 $\mathbb{C}$ 在右伴随的复合下对复合封闭；在拉回下也封闭，这由 [Nie82, 推论1。4]这就证明了第一部分。

将可表示映射取为可指数化映射的 CwR $\mathbb{C}$ 也具有带标记方形范畴的结构，其中标记映射是可指数化映射，标记方形则取为拉回方形。于是，由于$\mathsf{Univ} = \widetilde{\ }\langle\{\pi\colon \mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathcal{U}\}\rangle$是行走标记映射在左伴随$\langle -\rangle\colon\ \mathsf{Cat}_{\mathsf{m}} \to \mathsf{CwR}$ 下的像，见Jel24，推论3.2。17], 第二部分的结论由双伴随的定义即可得出。

最后一部分立即由 Π-型和 Σ-型的双推出的泛性质得到。对于Id-型，我们使用 [KL25b，定理3。9]。—— ■

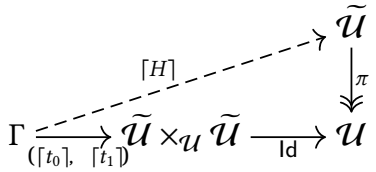
1.4 Id-类型的同伦理论

由于 Id-类型是纤维化的通用纤维化路径对象，因此可以使用前 Id-类型来表述各种同伦概念和构造。下面回顾这些思想。

我们首先从逻辑概念命题等式入手。

~定义 1.30。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$~ ~ 中的一个泛映射，该范畴配备了预 Id 类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。

对于固定对象 $\Gamma \in \mathbb{C}$ 和两个映射 $\ulcorner t_0 \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner\colon \Gamma \rightrightarrows \mathrm{U}$，满足 $\pi\ulcorner t_0 \urcorner = \pi\ulcorner t_1 \urcorner$，$\ulcorner t_0 \urcorner$ 与 $\ulcorner t_1 \urcorner$ 之间的一个命题~相等是 $\mathrm{Id}(\ulcorner t_0 \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner)\colon \Gamma \to$~ ~ $\mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的一个因子分解 $\ulcorner H \urcorner\colon \Gamma \to \mathrm{U}$，如下所示。



– ♦

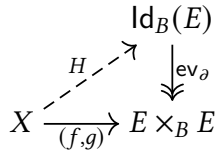
~定义 1.31。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$~ ~ 中的一个泛映射，并且该范畴配备了 Id 型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。

~给定 $\Gamma \in \mathbb{C}$，在 A 处的命题自同构： $\Gamma \to \mathrm{U}$ 由某个 $\ulcorner t \urcorner\colon \Gamma.A \to \mathrm{U}$~ 组成，并附带一个与 $\mathrm{var}_A\colon \Gamma.A \to \mathrm{U}$ 的命题等式（因此特别有 $\pi\ulcorner t \urcorner = A{\cdot}\pi_A$）。— ♦

取拉回可得平行映射之间的纤维同伦 这一同伦概念。

~定义 1.32。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备范畴 $\mathbb{C}$~ ~中的一个通用映射，并配备预 Id 类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。

对于一个固定的 π-纤维化对象 $E \twoheadrightarrow B \in \mathbb{C}/_B$ 以及两个平行映射 $f,\ g\colon X \rightrightarrows B \in \mathbb{C}/_B$，$f$与 g之间的 Id-同伦 是指 $(f,\ g)\colon X \to E \times_B E$ 经由 $\mathrm{ev}_\partial\colon \mathrm{Id}_B(E) \twoheadrightarrow E \times_B E$ 的一个分解。



– ♦

~定义 1.33. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是局部笛卡尔闭范畴中的一个万有映射~ ~$\mathbb{C}$，并赋有预 Id-类型结构 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。

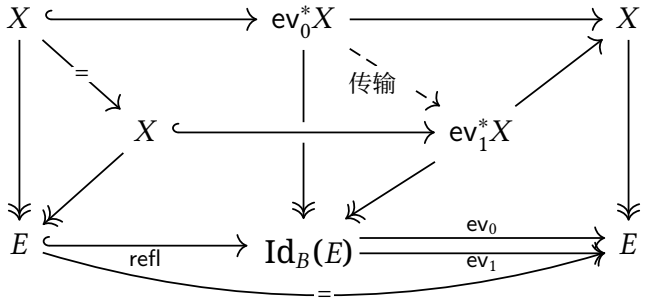
对于固定的 π-纤维化对象 $E \twoheadrightarrow B \in \mathbb{C}/_B$，自同构 $t\colon E \to E \in \mathbb{C}/_B$ 当且仅当它与 E 处的恒等映射 Id-同伦时，称为 Id-同伦恒等式。

对于π-纤维化对象 $E_0, E_1 \twoheadrightarrow B$，若映射 $f\colon E_0 \to E_1 \in \mathbb{C}/_B$ 配备映射 $s, r\colon E_0 \rightrightarrows E_1 \in \mathbb{C}/_B$，且 fs 与 rf 均为 Id-同伦恒等式，则称其为 Id-同伦同构或 Id-同伦等价。— ♦

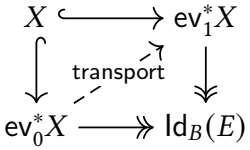
在具备 Π-型结构和完备 Id-型结构的情况下，沿纤维化的 refl 的拉回也能相对于泛纤维化在左侧提升。因此，我们得到了通常的传输映射。

~构造 1.34. 设 π: U $\to$ U 是有限完备的 $\mathbb{C}$ 中~ ~配备了 Π-型结构和完备 Id-型结构 Id : U $\times_{\mathcal{U}}$ U $\to$ U 的范映射。

假设我们有一组可复合的映射 $X \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow B$，其中每个映射都是一个 π-纤维化。目标是构造一个虚线映射 transport : $\mathrm{ev}_0^* X \to \mathrm{ev}_1^* X$ over $\mathrm{Id}_B(E)$，使得它沿着 refl : $E \hookrightarrow \mathrm{Id}_B(E)$ 的拉回是 X 处的恒等映射。



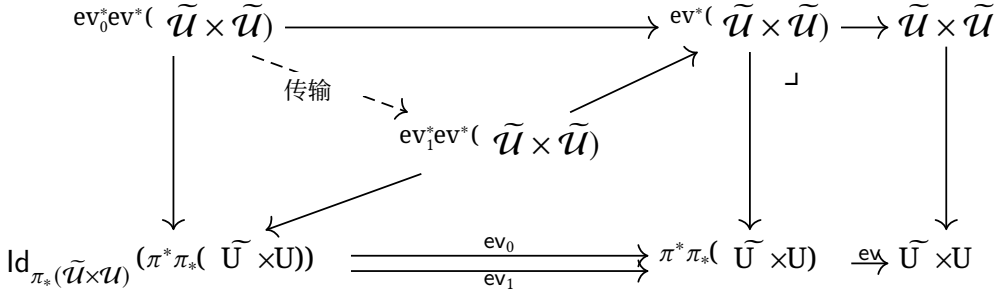
我们通过求解以下提升问题来做到这一点。



它有解，因为 $X \hookrightarrow \mathrm{ev}_0^* X$ 是 π-纤维化 $\mathrm{ev}_0^* X \twoheadrightarrow \mathrm{Id}_B(E)$ 沿 π-纤维化的拉回 $E \hookrightarrow \mathrm{Id}_B(E)$，且 π 具有 Π-类型结构。— ♦

上面的传输映射要求 refl 映射具有平凡余纤维化（即左提升）性质，而这一性质由完整 Id-类型结构上的 J-结构给出。对于预 Id-类型（例如 CCHM 立方类型论中的 Path-类型），我们未必能使用 J-消去。尽管如此，我们仍可要求预 Id-类型具有传输结构，也就是通过令 $X \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow B$ 为 Construction 1.3 中的泛可复合纤维化对 ev*(U $\times$ U) $\twoheadrightarrow$ ~ ~$\pi^*\pi_*$(U $\times$U) $\twoheadrightarrow \pi_*$(U $\times$U)，应用 Construction 1.34~ ~所得到的映射。

Definition 1.35. Let $\pi : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ be a universal map in a finitely complete $\mathbb{C}$. A transport-*structure* on a pre-Id-type structure Id : $\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ is some dashed map transport as below, where the pre-Id-type is taken for the π-fibration $\pi^*\pi(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) \twoheadrightarrow \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})$, as from Construction 1.3.



— ♦

Then immediate by definition, one observes that Construction 1.34 equips full-Id-type structures with a (canonical) transport-structure under the presence of Π-type structures.

2 同伦同构的泛对象

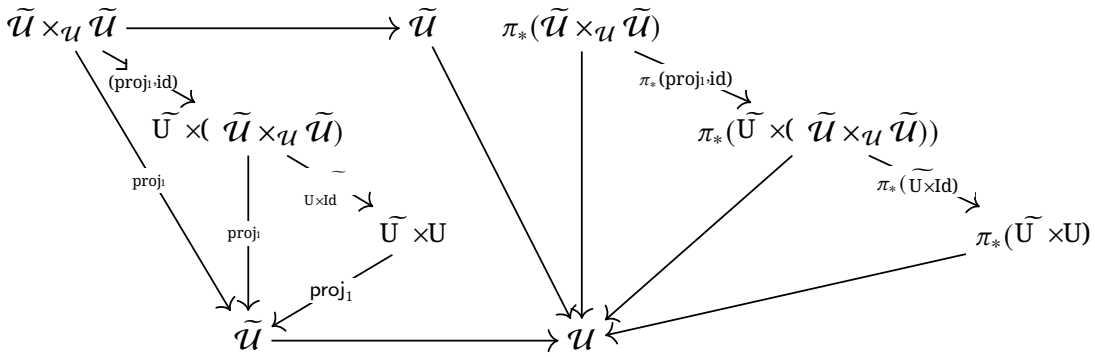
在本节中，我们固定一个有限完备范畴 $\mathbb{C}$ 中的通用映射 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$（或者更一般地，任意 π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$，它允许继承一组拉回的选取，使之成为通用映射$\widetilde{}$）。要开始陈述 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的单值性，我们首先需要构造一个对象，用来表示 π-小纤维化之间的 Id-类型同伦等价，其中 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 配备了一个预 Id-类型结构 $\mathrm{Id}\colon \widetilde{\mathrm{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$。

作为预示，在陈述单值性时，本节中的构造将应用于内部宇宙结构在 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的泛映射 $\pi_0\colon \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$。因此，当 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 配备预 Id_0- 类型结构 $\mathrm{Id}_0\colon \mathrm{U}_0 \times_{\mathcal{U}_0} \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 时，该构造最终将分类 π_0-小$\widetilde{}$纤维化之间的 Id_0-类型同伦等价。不过，为避免到处出现下标，我们省略该下标，因为这一构造本身可以对任意泛映射执行。

2.1 同伦恒等式的泛对象

我们首先构造表示 π-纤维化与一个同伦于恒等映射的自同构所组成对象的同构类。

引理 2.1. 假设 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 具有预恒等类型结构 $\mathrm{Id}\colon \widetilde{\mathrm{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$。在下图中，



~取左侧一行 $\widetilde{\mathrm{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{U}}$ 投影 $\xrightarrow{1'}$ $\widetilde{}$恒等$\mathrm{U} \times (\widetilde{\mathrm{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{U}})\ \mathcal{U} \xrightarrow{\times}$ $\widetilde{}$恒等$\mathrm{U} \times \mathrm{U}$，并沿 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 应用推前$\widetilde{}$，得到复合映射

$$\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\pi_*(\mathrm{proj}_1, \mathrm{id})} \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times (\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}})) \xrightarrow{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathrm{Id})} \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})$$

并且进一步得到一个 应用 Yoneda 嵌入可得到预层的自然变换

$$\left(\coprod_{\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{U}} \left\{ \Gamma.A \xrightarrow{\lceil t \rceil} \widetilde{\mathcal{U}} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{\lceil t \rceil} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{var}_A}\downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array} \right\}\right)_{\Gamma \in \mathbb{C}} \to \left(\coprod_{\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{U}} \left\{ \Gamma.A \xrightarrow{B} \mathcal{U} \right\}\right)_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

$$\left(\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{U}, \Gamma.A \xrightarrow{\lceil t \rceil} \widetilde{\mathcal{U}}\right) \mapsto \left(\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{U}, \Gamma.A \xrightarrow{(\mathsf{var}_A, \lceil t \rceil)} \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathsf{Id}} \mathcal{U}\right)$$

$-\blacklozenge$

证明。我们首先注意到，给定切片范畴中的任意映射（视为对象） $A\colon \Gamma \to \mathrm{U} \in \mathbb{C}/u$ in the $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，映射 $\Gamma \to \pi_*(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$ 经转置对应于映射 $\pi^*\Gamma \cong \Gamma.A \to \widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\mathrm{U}} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \cong \pi^* \mathrm{U} \in \mathbb{C}/\widetilde{u}$。由于拉回是后合成的右伴随，这样的映射$\widetilde{\quad}$与一个在 U 上方的映射 $\Gamma.A \to \mathrm{U}$ 一一对应。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$因此，对于任意固定的 $\Gamma \in \mathbb{C}$，我们可以将 Hom 集 $\mathbb{C}(\Gamma, \pi_*(\mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U})$ 写作

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(\Gamma, \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}})) &= \coprod_{A\colon \Gamma \to \mathcal{U}} \mathbb{C}/u(A, \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}})) \\
&\cong \coprod_{A\colon \Gamma \to \mathcal{U}} \mathbb{C}/\widetilde{u}(\pi^*A, \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \\
&\cong \coprod_{A\colon \Gamma \to \mathcal{U}} \mathbb{C}/\widetilde{u}(\Gamma.A, \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \\
&\cong \coprod_{A\colon \Gamma \to \mathcal{U}} \mathbb{C}/\widetilde{u}(\Gamma.A, \pi^*\widetilde{\mathcal{U}}) \\
&\cong \coprod_{A\colon \Gamma \to \mathcal{U}} \mathbb{C}/u(\Gamma.A, \widetilde{\mathcal{U}})
\end{aligned}$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$这表明 $\pi_*(\mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U})$ 表示分量为以下各项的预层

$$\left(\coprod_{\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{U}} \left\{ \Gamma.A \xrightarrow{\lceil t \rceil} \widetilde{\mathcal{U}} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{\lceil t \rceil} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{var}_A}\downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array} \right\}\right)_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

Now, given a map $\Gamma \to \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}})$ corresponding to $(A\colon \Gamma \to \mathcal{U}\ \lceil t \rceil\colon \Gamma.A \to \widetilde{\mathcal{U}})$, taking the $(\pi^* \dashv \pi_*)$-transpose of the composite $\Gamma \to \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \to \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})$ is the same as taking the composite of the transpose $\Gamma.A \to \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \to \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}$, which precisely gives the composite

$$\Gamma.A \xrightarrow{(\mathsf{var}_A, \lceil t \rceil)} \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \xrightarrow{(\mathsf{proj}_1, \mathsf{id})} \widetilde{\mathcal{U}} \times (\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathsf{Id}} \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U} \in \mathbb{C}/\widetilde{u}$$

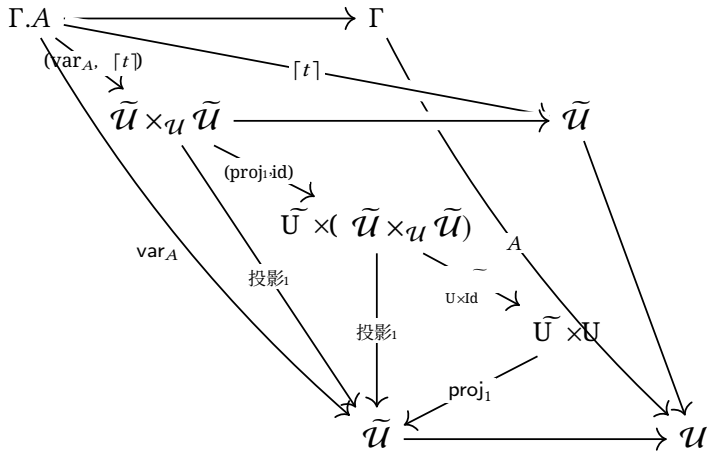
Further taking the image of this above map under the isomorphism

$$\mathbb{C}/\overline{u}(\Gamma.A, \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) \cong \mathbb{C}(\Gamma.A, \mathcal{U})$$

给出映射

$$\Gamma.A \xrightarrow{(\mathsf{var}_A, \lceil t \rceil)} \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathsf{Id}} \mathcal{U}$$

因此，下图总结了我们的运算。



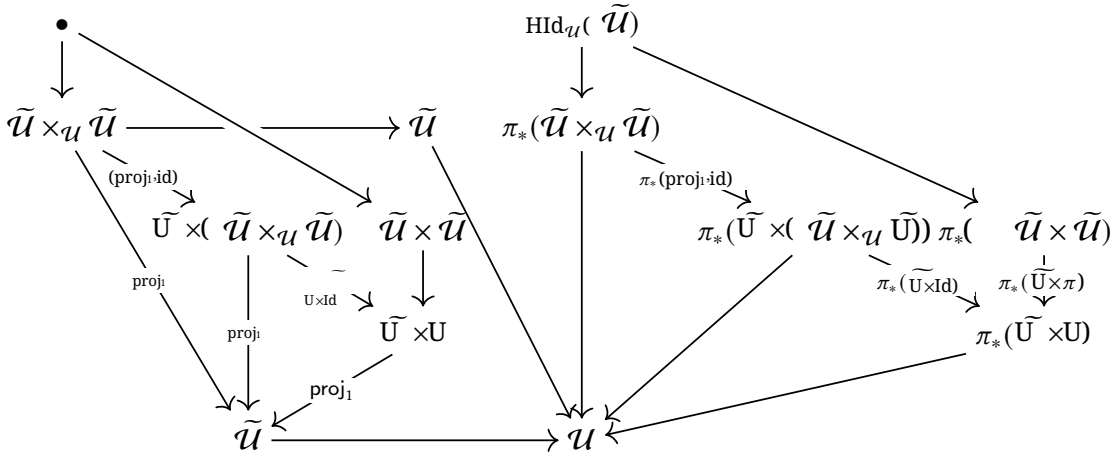
— ■

由此立即得到下述表示命题恒等的对象。

~ ~ ~造 2.2. 假设 U → U 具有一个预 Id-类型结构 Id: U ×$_{\mathcal{U}}$ U → U

构造 .

我们将 HId^{Id} $_{\mathcal{U}}$(~U) 定义为（同构类所对应的）拉回



根据构造，它配备了一个映射，指向内部 Hom

$$\mathsf{HId}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\mathsf{proj}_1} \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \cong [\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}}$$

— ♦

Co ~ ~ ~推论 2.3. 假设 U → U 具有预恒等类型结构 Id: U ×$_{\mathcal{U}}$ U → U .

同构类 HId^{Id} $\mathcal{U}$(~U) 中的任意对象，都表示命题恒等式预层。

$$\left(\coprod_{\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{U}} \left\{ (\Gamma.A \xrightarrow{\lceil t \rceil} \widetilde{\mathcal{U}}, \Gamma.A \xrightarrow{\lceil H \rceil} \widetilde{\mathcal{U}}) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{\lceil t \rceil} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{var}_A}\downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array} \text{ and } \begin{array}{ccccc} & & & & \widetilde{\mathcal{U}} \\ & & {\scriptstyle \lceil H \rceil}\nearrow & & \downarrow \\ \Gamma.A & \xrightarrow[(\mathsf{var}_A, \lceil t \rceil)]{} & \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\mathsf{Id}} & \mathcal{U} \end{array} \right\}\right)_{\Gamma}$$

而映射 HId^{Id} $\mathcal{U}$(~U) → π_*(~U × ~U) 表示一个自然变换，其分量为 $(A, \lceil t \rceil, \lceil H \rceil) \mapsto (A, \lceil t \rceil)$。— ♦

证明。该预层是由以下预层自然变换所表示的预层的拉回：~ ~ ~$\pi_*(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \to \pi_*(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$沿着引理 2.1 中的预层映射。由 Yoneda 嵌入的连续性和引理 2.1，可得其可表示性。— ■

对象 HId^{Id} $\mathcal{U}$(~U) 的一种更具语义性的描述如下。

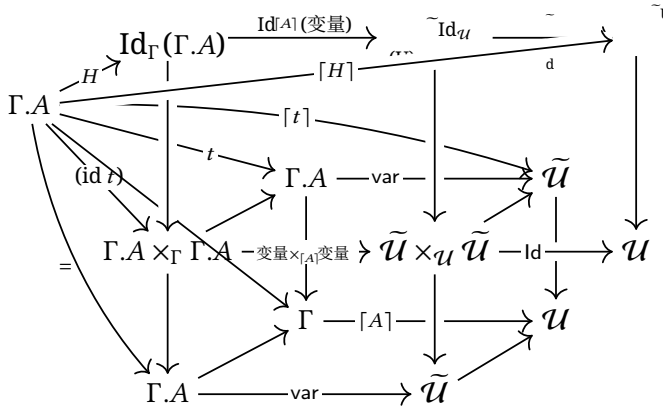
~ ~ ~命题 2.4. 假设 U → U 具有预 Id 类型结构 Id : U ×$_{\mathcal{U}}$ U → U。

那么，HId^{Id} $\mathcal{U}$(~U) 的同构类中的任意对象都表示预层

$$\left(\coprod_{\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{U}} \left\{ \begin{pmatrix} t \in {}^{\mathbb{C}}/_{\Gamma}(\Gamma.A, \Gamma.A) \\ H \in {}^{\mathbb{C}}/_{\Gamma.A}(\Gamma.A, \mathsf{Id}_{\Gamma}(\Gamma.A)) \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{H} & \mathsf{Id}_{\Gamma}(\Gamma.A) \\ & {\scriptstyle (t,\mathsf{id})}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathsf{ev}_{\partial}} & \\ & \Gamma.A \times_{\Gamma} \Gamma.A & \end{array} \right\}\right)_{\Gamma}$$

且映射 HId^{Id} $\mathcal{U}$(~U) → [~U ~U]$_{\mathcal{U}}$ 表示到 $\left(\coprod_{\Gamma \xrightarrow{A}} {}^{\sim}\mathcal{U}^{\mathbb{C}}/_{\Gamma}(\Gamma.A, \Gamma.A)\right)_{\Gamma}$ 中的映射，其分量为 $(t, H) \mapsto t$。 — ♦

证明。首先我们证明上述预层与~推论 2.3 的命题恒等预层同构。对每个固定的 $\lceil A \rceil$: Γ → U，从映射~ ~$\lceil t \rceil$: Γ.A → U 到映射 t: Γ.A → Γ.Aover Γ 的对应关系，是通过取 $\lceil t \rceil := \mathsf{var} \cdot t$: Γ.$A$ → Γ.A → U~ 和 $t := (\pi_A, \lceil t \rceil)$: Γ.A → Γ.A ≅ Γ ×$_{\mathcal{U}}$U 给出的。 H: Γ.A → Id$_{\Gamma}$(Γ.A)~ ~ 与 $\lceil H \rceil$: Γ.A → U 之间的对应关系，则通过取 $\lceil H \rceil := \mathsf{Id} \cdot \mathsf{Id}^{\lceil A \rceil}(\mathsf{var}) \cdot H$ 和 $H := ((\mathsf{id}\ t)\ \lceil H \rceil)$ 给出。



上述证明还允许我们根据可表示性和推论2.3得出，映射 $\mathrm{HId}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U}) \to [\widetilde{\ }\mathrm{U}\ \widetilde{\ }\mathrm{U}]_{\mathcal{U}}$在进入预层范畴时，将 $(t, H) \mapsto (\lceil t \rceil, \lceil H \rceil) \mapsto \lceil t \rceil \mapsto t$，如所述。— ■

2.2 同伦同构的泛对象

现在，我们构造泛对象，用以表示每个切片中纤维化对象之间的映射，并为每一侧分别配备同伦逆。思路是先将复合运算内化，再取映射 $\mathrm{HId}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U}) \to [\widetilde{\ }\mathrm{U}\ \widetilde{\ }\mathrm{U}]\ {}_{\sim\mathcal{U}}$ 的拉回。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$构造 2.5. 假设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 配备了预 Id- 类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\ }\mathrm{U} \to \mathrm{U}$。我们构造对象的同构类 $\mathrm{LHInv}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 和 $\mathrm{RHInv}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U})\widetilde{\ }$，它们表示切片范畴中对象之间的映射；这些切片范畴由 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的拉回所张成，且这些映射配备了单侧同伦逆。

$\widetilde{\ }$首先，将 $\mathrm{CompPair}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ 记为由以下可复合映射对组成的拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & [\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ [\mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{array}$$

因此它配备了两个复合映射

$$\mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \to [\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \times \mathcal{U} \qquad \mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \to \mathcal{U} \times [\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}}$$

$\widetilde{\ }$假设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有 Id-类型结构。表示左、右同伦可逆映射的泛对象同构类 $\mathrm{LHInv}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$和 $\mathrm{RHInv}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 分别由以下拉回给出。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LHInv}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \mathcal{U} \times \mathsf{HId}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \mathcal{U} \times [\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \\ \downarrow & & \\ [\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{RHInv}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \mathsf{HId}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathcal{U} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & [\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \times \mathcal{U} \\ \downarrow & & \\ [\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} & & \end{array}$$

— ♦

现在我们证明 $\mathrm{LHInv}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 和 $\mathrm{RHInv}^{\mathrm{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 确实表示正确的预层。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$引理 2.6。假设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有预-Id-型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。

(1) 该 映射 $\mathrm{RHInv}^{\mathsf{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U}) \to [\widetilde{\ }\mathrm{U} \times \mathrm{U},\ \mathrm{U} \times \widetilde{\ }\mathrm{U}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ 表示预层映射

$$\left(\coprod_{A,B:\ \Gamma\rightrightarrows\mathcal{U}} \left\{ \begin{pmatrix} f \in \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma.A, \Gamma.B) \\ s \in \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma.B, \Gamma.A) \\ H_s \in \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma, \mathsf{Id}_{\Gamma}(\Gamma.A)) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ccccc} \Gamma.A & & \xrightarrow{\quad H_s \quad} & & \mathsf{Id}_{\Gamma}(\Gamma.A) \\ & \searrow^{(fs,\mathsf{id})} & & \swarrow^{\mathsf{ev}_{\partial}} & \\ & & \Gamma.A \times_{\Gamma} \Gamma.A & & \end{array} \right\}\right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle (A,B,f,g,H)\mapsto(A,B,f)}$$

$$\left(\coprod_{A,B:\ \Gamma\rightrightarrows\mathcal{U}} \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma.A, \Gamma.B)\right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

(2) 同理，映射 $\mathrm{LHInv}^{\mathsf{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\ }\mathrm{U}) \to [\widetilde{\ }\mathrm{U} \times \mathrm{U},\ \mathrm{U} \times \widetilde{\ }\mathrm{U}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ 表示预层映射

$$\left(\coprod_{A,B:\ \Gamma\rightrightarrows\mathcal{U}} \left\{ \begin{pmatrix} f \in \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma.A, \Gamma.B) \\ r \in \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma.B, \Gamma.A) \\ H_r \in \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma, \mathsf{Id}_{\Gamma}(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ccccc} \Gamma.B & & \xrightarrow{\quad H_r \quad} & & \mathsf{Id}_{\Gamma}(\Gamma.B) \\ & \searrow^{(rf,\mathsf{id})} & & \swarrow^{\mathsf{ev}_{\partial}} & \\ & & \Gamma.B \times_{\Gamma} \Gamma.B & & \end{array} \right\}\right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle (A,B,f,g,H)\mapsto(A,B,f)}$$

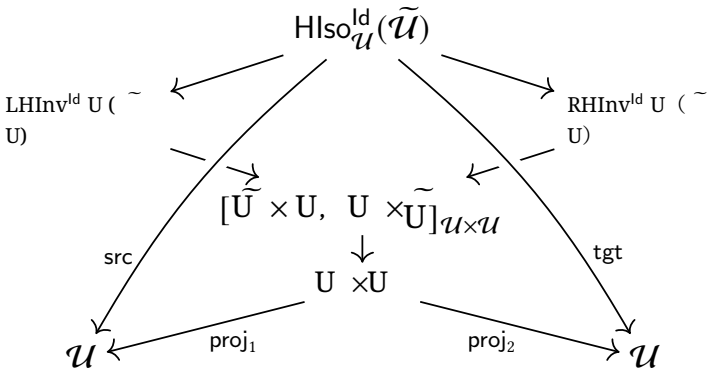
$$\left(\coprod_{A,B:\ \Gamma\rightrightarrows\mathcal{U}} \mathbb{C}/_{\Gamma}(\Gamma.A, \Gamma.B)\right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

$-\blacklozenge$

证明。 根据内部复合映射的定义和命题 2.4。 $-\blacksquare$

因此，以下构造确实给出了表示纤维化 Id-类型同伦等价的泛对象。

构造 2.7. 假设 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 具有预 Id 类型结构 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。按如下方式构造同构类 $\mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{U}})$ 以及映射 $\mathrm{src}, \mathrm{tgt}\colon \mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}}{}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{U}}) \rightrightarrows \mathrm{U}$。



– ♦

~引理 2.8. 假设 U ⁓ → U 具有预 Id 类型结构。那么，映射

$$\mathsf{src}, \mathsf{tgt} \colon \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \rightrightarrows \mathcal{U}$$

表示以下预层映射。

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma \to \mathcal{U} \\ B\colon \Gamma \to \mathcal{U}}} \coprod_{\substack{f \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A, \Gamma.B) \\ s,r \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B, \Gamma.A)}} \left\{ \begin{pmatrix} H_s \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A, \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \\ H_r \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B, \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{H_s} & \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.A) \\ & {\scriptstyle (f s, \mathsf{id})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathsf{ev}_\partial} & \\ & \Gamma.A \times_\Gamma \Gamma.A & \end{array} \text{ and } \begin{array}{ccc} \Gamma.B & \xrightarrow{H_r} & \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.B) \\ & {\scriptstyle (r f, \mathsf{id})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathsf{ev}_\partial} & \\ & \Gamma.B \times_\Gamma \Gamma.B & \end{array} \right\} \right)_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

$$\downarrow{\scriptstyle (A,B,f,s,r,H_s,H_r) \mapsto A} \quad \downarrow{\scriptstyle (A,B,f,s,r,H_s,H_r) \mapsto B}$$

$$(\mathbb{C}(\Gamma, \mathcal{U}))_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

– ♦

Proof. By Lemma 2.6. – ■

这种通过可表示性对 $\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}\,\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 的描述，也使我们能够按如下意义构造平凡同伦等价的映射。

~ ~ ~构造 2.9。假设 U ⁓ → U 具有预 Id 类型结构 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。映射

$$\mathsf{trv} \colon \mathcal{U} \hookrightarrow \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})$$

作为公共截面src、tgt：$\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}\,\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U}) \rightrightarrows \mathcal{U}$由引理2.8构造为表示该预层映射的唯一映射

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma \to \mathcal{U} \\ B\colon \Gamma \to \mathcal{U}}} \coprod_{\substack{f \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A, \Gamma.B) \\ s,r \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B, \Gamma.A)}} \left\{ \begin{pmatrix} H_s \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A, \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \\ H_r \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B, \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{H} & \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.A) \\ & {\scriptstyle (f s, \mathsf{id})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathsf{ev}_\partial} & \\ & \Gamma.A \times_\Gamma \Gamma.A & \end{array} \text{ and } \begin{array}{ccc} \Gamma.B & \xrightarrow{H_r} & \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.B) \\ & {\scriptstyle (r f, \mathsf{id})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathsf{ev}_\partial} & \\ & \Gamma.B \times_\Gamma \Gamma.B & \end{array} \right\} \right)_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

$$A \mapsto (A,A,\mathsf{id}_{\Gamma.A},\mathsf{id}_{\Gamma.A},\mathsf{refl}_A,\mathsf{refl}_A) \uparrow$$

$$(\mathbb{C}(\Gamma, \mathcal{U}))_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

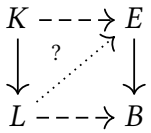
– ♦

3 单值性

在构造了表示纤维化Id-类型纤维化同伦等价~的泛对象之后（构造2.7 给出了一个泛映射$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$），我们现在可以开始陈述单值性公理的两种形式：一种直接对应于一个提升条件，结果表明它比 [Uni13]中的单值性更强；另一种则对应于 HoTT 书中的传统单值性 [Uni13]。

~粗略地说，较强版本指出，给定一个全局映射 U ⁓ → U，Id 类型纤维化同伦等价的泛对象可充当一个非常好的路径对象。不过，要统一处理书本单值性，我们还需要做一些准备。

定义 3.1。映射 $K \to L$ 相对于映射 $E \to B$ 的一种<小标题>下半部提升</小标题>，是指在给定提升时使底部三角形交换的填充。



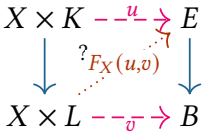
— ♦

注 3.2。请注意，在下半部提升的定义中，映射 $K \to L$ 确实发挥着作用；这并不等同于说所有映射 $L \to B$ 都经由 $E \to B$分解。这是因为，如果存在的话，我们不能简单地用从始对象（或空类型）出发的映射 $0 \to L$ 来替换 $K \to L$。相反，下半部提升性质规定，只有对于那些 $L \to B$ 的限制 $K \to L \to B$ 经由$E \to B$ 分解的 $L \to B$，才具有经由 $E \to B$ 的分解性质（与 $0 \to L$ 情形所给出的任意 $L \to B$ 相对）。因此，若 $E \to B$满足：$0 \to L$ 具有下半部左提升性质，那么这将蕴含 $K \to L$也具有下半部左提升性质，但反过来未必成立。— ♦

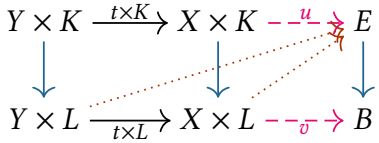
类似于 [KL25b，定义 1。4], 我们也可以对下半部提升的选取施加一致性条件。

定义 3.3. 固定映射 $i\colon K \to L$和 $p\colon E \to B$。

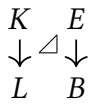
一个下半部提升族是指一种对应关系，它将每个对象 $X \in \mathbb{C}$ 以及 $X \times i$中相对于 p 的提升问题（u, v）对应到如下所示的一个下半部提升 F_X（u, v）。



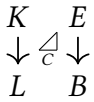
若对任意 $t\colon Y \to X$，都有 $F_Y(u \cdot (t \times U)\ v' \cdot (t \times V')) = F_X(u, v') \cdot (t \times V)$，如下所示，则称此族 F一致。



所有这类一致的下半部提升族构成的集合称为下半部提升结构，记作



在对象 C上的切片范畴中工作时，切片 $\mathbb{C}/C$ 中所有此类下半部提升的统一族构成的集合记为



— ♦

~ ~定义 3.4. 设 π_0: $U_0 \to U_0$ 和 $\pi : U \to U$ 是两个全映射，且 π_0 具有~ ~一个预 Id 类型结构 Id_0: $U_0 \times_{\mathcal{U}_0} U_0 \to U_0$。

A 带基点的(分别地，书) π-单值性结构，定义在（宇宙，预-Id-类型）对(π_0，Id_0)上，是映射 π- 纤维化结构 (src，tgt) 以及对 PtdUA (分别是 UA) trv 沿着 π 的均匀（分别是下半部分）提升的选择，定义见 [KL25b，定义 1。4] (分别是，定义3.3)

$$\mathsf{PtdUA} \in \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}}_0 & & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{trv}}\downarrow & \boxslash & \downarrow \\ \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\widetilde{\mathcal{U}}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) & & \mathcal{U} \end{pmatrix} \qquad \mathsf{UA} \in \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}}_0 & & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{trv}}\downarrow & \triangle & \downarrow \\ \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\widetilde{\mathcal{U}}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) & & \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

其中 (src,tgt) 和 trv 来自构造 2.7 和 2.9 中的对角分解，通过 $\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}$ U_0(~U_0)

$$\mathcal{U}_0 \xhookrightarrow{\mathsf{trv}} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \xrightarrow{(\mathsf{src},\mathsf{tgt})} \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_0$$

（宇宙，前恒等类型）对 (π_0，Id_0) 在具有一个带基点（分别为书本） π-单值性结构时，是带基点的（分别为书本） π-单值的。— ♦

注 3.5. 在上述定义中，我们只要求了 π-纤维性，但为了在语法上保持忠实，应当改为采用 典范 π-纤维性。不过，由于 $\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}$~$\mathcal{U}_0$(~$U_0$) 是通过可表示性构造的，只需取典范 π-纤维替换，我们便可以等价地将单值性表述为：在 $\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}\mathcal{U}_0$(~$U_0$) 的同构类中选取一个对象 ，使得与之关联的 $(\mathsf{src},\mathsf{tgt}) : \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}\mathcal{U}_0$(~$U_0$) $\twoheadrightarrow$ ~$U_0 \times$ ~U_0 是典范π-纤维的。因此，上述定义确实反映了语法。— ♦

3.1 端点映射的纤维性

在处理类型论模型时，许多情况下，检验单值性就等同于检验 trv 映射的平凡余纤维性，因为 Π-、 Σ-类型结构会自动赋予 (src，tgt) 映射纤维性。

~命题 3.6. 设 π: U $\to$ U 是一个赋有预 Id-类型~ ~结构 $\mathrm{Id} : U \times_{\mathcal{U}} U \to U$ 的泛映射。当 π 也赋有 Π-、 Σ-类型结构时，映射

$$(\mathsf{src},\mathsf{tgt}) : \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{U}$$

是 π-纤维的。 — ♦

证明。 在构造2.2的语境下，根据 Π-类型结构的定义，映射

$$\mathsf{HId}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}})$$

是 π-纤维的。

因此，在构造2.5 的语境下，映射 $\mathsf{LHInv}^{\mathsf{Id}}\,\mathcal{U}$(~$\mathcal{U}$) $\to$ $\mathsf{CompPair}\mathcal{U}$(~$\mathcal{U}$)和 $\mathsf{RHInv}^{\mathsf{Id}}\mathcal{U}$(~$\mathcal{U}$) $\to$ $\mathsf{CompPair}\mathcal{U}$(~$\mathcal{U}$) 自 are π-纤维化。此外，根据推论 1.20，该

~ ~ ~ ~对象 [U ×U、U ×U] ~𝒰×𝒰 以及 [U ×U、U ×U] ~𝒰×𝒰 也是 U ×U 上切片中的 π-纤维化对象，因此这些映射

$$\mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow [\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}}$$
$$\mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow [\mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}]_{\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}}$$

是 π-纤维化的。因此，根据 Σ-型结构和命题 1.19，复合映射

$$\mathsf{LHInv}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow \mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow [\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]$$
$$\mathsf{RHInv}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow \mathsf{CompPair}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow [\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]$$

是 π-纤维化的。

因此，在构造 2.7的语境中，根据上述推理和 Σ-型结构，复合映射

$$\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow [\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$$

~ ~是 π-纤维化的。再次根据推论 1.20，映射 $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$、$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$] ~𝒰×𝒰↠ $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$是 π-纤维化的。因此，根据 Σ-型结构和命题1.19，映射

$$(\mathsf{src}, \mathsf{tgt}) : \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \twoheadrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{U}$$

是 π-纤维化的。 — ■

因此，对于带有 Id、 Π、 Σ 结构的内在宇宙，表述单值性时，纤维性是自动具备的。

~ ~推论 3.7. 设 π: U →U 是一个通用映射，带有一个内在宇宙 π_0: $U_0 \to U_0$，且 π_0 分别配备预 Id、 Π、 Σ 结构，记作 $\mathsf{Id}_0, \Pi_0, \Sigma_0$。那么，映射

$$(\mathsf{src}, \mathsf{tgt}) : \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}_0}) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_0$$

是 π-纤维的。 — ♦

证明。由命题 3.6，映射 (src, tgt) : $\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}$ u_0(~U_0) ↠ ~U_0 × ~U_0 是 π_0-纤维的。但 π_0（典范地）是 π-纤维的，故结论成立。— ■

此外，讨论环境外部宇宙本身带有 Σ-型结构的内在宇宙时，src,tgt 各映射都是纤维的。

~ ~推论 3.8. 设 π: U →U 是一个带有内在宇宙 π_0: $U_0 \to U_0$ 的通用映射，且 π_0 分别配备了预 Id-、 Π-、 Σ-结构，记为 Id_0， Π_0， Σ_0，而 π 配备了一个 Σ-类型结构。则以下映射

$$\mathsf{src}, \mathsf{tgt} : \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}_0}) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_0$$

均为 π-纤维化的。 — ♦

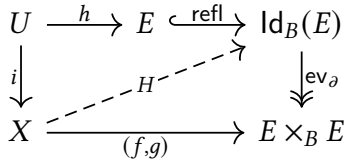
Proof. By Corollary 3.7, the map $(\mathsf{src}, \mathsf{tgt}) : \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}_0}) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_0$ is π-fibrant. Because $\widetilde{\mathcal{U}_0} \twoheadrightarrow 1$ is (canonically) π-fibrant, so are the two projections $\mathsf{proj}_1, \mathsf{proj}_2 : \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_0 \twoheadrightarrow \mathcal{U}_0$. Referring to Construction 2.7, the result then follows by Proposition 1.19 on the Σ-structure. — ■

3.2 通过同伦重 retract 论证单值性

Primarily, people are interested in having an internal univalent universe. In view of Corollary 3.7, all the work amounts to showing the (lower-half) left lifting property of the map $\mathsf{trv}\colon \widetilde{\mathcal{U}}_0 \to \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)$. In this section, we further reduce the need to solve all (lower-half) lifting problems to just one specific lifting problem.

~定义 3.9. 假设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是一个配备了 Id 类型结构~ ~Id: $\mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的通用映射。

给定 $B \in \mathbb{C}$ 以及两个映射 $f, g\colon X \rightrightarrows E \in \mathbb{C}/_B$，其中 $E \twoheadrightarrow B$ 是 π-纤维化的，一个从 f 到 g 沿着……保持常值 $i\colon U \to X$ 的 Id-同伦，使得 $fi = gi =: h\colon U \to X \rightrightarrows E$ 是以下提升问题的一个解。

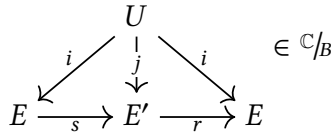


– ♦

我们关注上述提升问题的原因在于，针对 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的左提升性质可沿同伦重 retract 转移，而这些重 retract 限制后会给出常值同伦。

~ ~ ~引理 3.10. 假设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 配备了一个预 Id 类型结构 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。

设对象 $B \in \mathbb{C}$ 上有如下数据，其中 $E \twoheadrightarrow B$ 是一个 π-纤维化



其中复合映射 sr 通过某个位于 B 上方的 Id 类型同伦 H 与恒等映射 Id-同伦。

(1) 假设预 Id 类型结构具有传输结构。那么，存在一个映射

$$\begin{pmatrix} U & B\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \swarrow_B \downarrow \\ E' & B\times\mathcal{U} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} U & B\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \swarrow_B \downarrow \\ E & B\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

(2) 假设预 Id-类型结构是一个 Id-类型结构，并且 π 具有一个 Π-类型结构。如果同伦 H 沿着 $i\colon U \to E$限制时是常值的，那么就有一个映射

$$\begin{pmatrix} U & B\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \swarrow\!\!\!\swarrow_B \downarrow \\ E' & B\times\mathcal{U} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} U & B\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \swarrow\!\!\!\swarrow_B \downarrow \\ E & B\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

– ♦

证明。我们首先考察目标。由可表示性，对于 (1)，要证明 i 相对于 π 具有下半部提升结构，就是要证明对于所有映射 $f\colon C \to B$，若 $p\colon X \twoheadrightarrow f^*E$ 是一个π-纤维化，且 $x\colon f^*U \hookrightarrow (f^*i)^*X$ 是 $(f^*i)^*p\colon (f^*i)^*X \twoheadrightarrow U$ 的一个截面，那么可以找到某个截面 $x\colon f^*E \hookrightarrow X$，它是 p 的截面，如下图所示。

$$\begin{array}{ccc} (f^*i)^*X & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle x}\uparrow\downarrow & \lrcorner & \uparrow\downarrow{\scriptstyle \overline{x}} \\ f^*U & \xrightarrow[f^*i]{} & f^*E \end{array} \in \mathbb{C}/C$$

提升的均匀性性质意味着，对于任意 $g\colon D \to C$，还必须满足

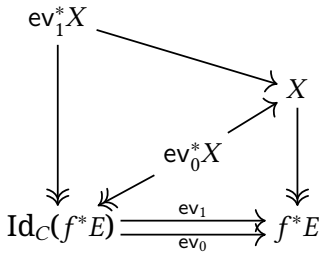
$$\overline{g^*x} = g^*\overline{x}$$

对于(2)，还需要确保 x 沿 f^*i 的拉回是$(f^*i)^*x = x$。

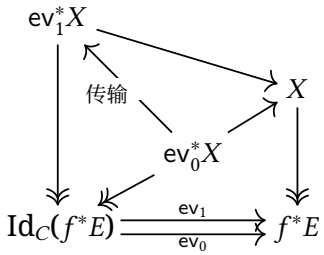
同样，由可表示性可知， j具有相应的延拓性质。因此，我们必须证明：如果 j 对情形(1) 和(2) 具有相应的延拓性质，那么 i也具有相应的延拓性质。

为此，固定某个 $f\colon C \to B$，并设有一个 π-纤维化 $X \twoheadrightarrow f^*E$，以及一个截面$x\colon f^*U \hookrightarrow (f^*i)^*X$，它属于拉回 $(f^*i)^*p\colon (f^*i)^*X \twoheadrightarrow f^*U$。在情形 (1) 和 (2) 中，我们都有一个从 sr 到恒等映射的同伦 H。将同伦 H 拉回后，便得到一个从 $(f^*s)\ (f^*r)$ 到恒等映射的同伦 f^*H。利用传输，我们可以应用以下过程。

(1) 我们首先沿着两个端点求值映射 $\mathsf{ev}_0, \mathsf{ev}_1\colon \mathrm{Id}_C(f^*E) \twoheadrightarrow f^*E$对 $X \twoheadrightarrow f^*E$作拉回，得到 $\mathsf{ev}_0^*X, \mathsf{ev}_1^*X \twoheadrightarrow \mathrm{Id}_C(f^*E)$。



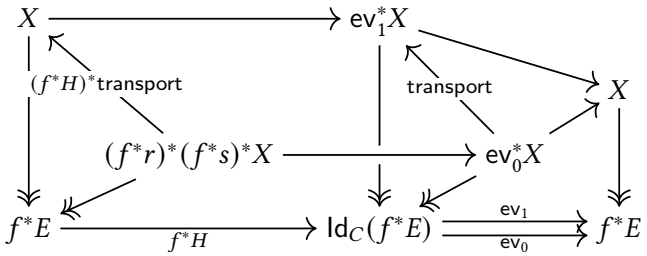
(2) 根据情形(1) 的假设和构造1.34根据情形(2)，我们有一个传输映射传输 $:\mathsf{ev}_0^*X \to \mathsf{ev}_1^*X$ 关于 $\mathrm{Id}_C(f^*E)$。



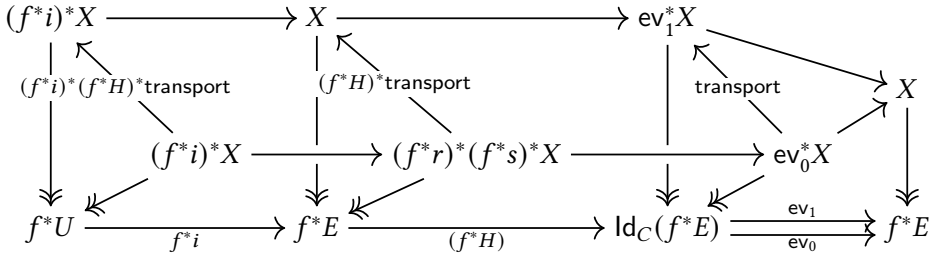
(3) 沿 f^*H 进一步拉回传输映射： $f^*E \to \mathrm{Id}_C(f^*E)$，得到

$$(f^*r)^*(f^*s)^*X \xrightarrow{(f^*H)^*\mathsf{transport}} X$$

位于 f^*E 上。



(4) 再沿着 f^*i 拉回：$f^*U \to f^*E$给出一个映射 $(f^*i)^*(f^*H)^*$，它将 U 上的传输从 $(f^*i)^*X$ 映到其自身，因为 $rsi = i$ 是假设。



(⋆)

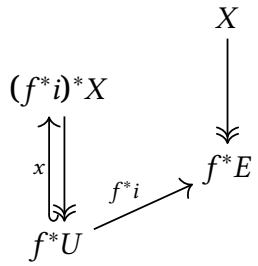
此外，在 (2) 的情况下，由于强性，我们有 $H|_i = \text{自反性} \cdot i$，因此

$$(f^*i)^*(f^*H)^*\mathsf{transport} = f^*(i^*H^*\mathsf{transport}) = f^*(i^*\mathsf{refl}^*\mathsf{transport}) = f^*(i^*\mathsf{id}) = \mathsf{id}$$

因此，通过取下式即可得到所需的延拓：

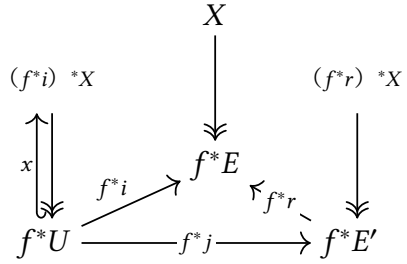
$$\overline{x} \coloneqq (f^*H)^*\mathsf{transport} \cdot (f^*s)^*x'$$

其中 x' 是 x 沿 f^*j 的延拓。具体而言，从一个纤维化 $X \twoheadrightarrow E$ 和一个截面 x 开始：$U \hookrightarrow i^*X$ 是拉回的截面，

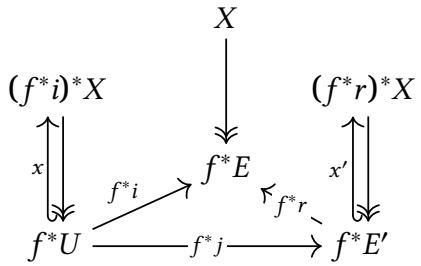


应用以下步骤：

(1) 我们首先沿着 f^*r 拉回 $X \twoheadrightarrow f^*E$，得到如下所示的 π-纤维化 $(f^*r)^*X \twoheadrightarrow f^*E'$。



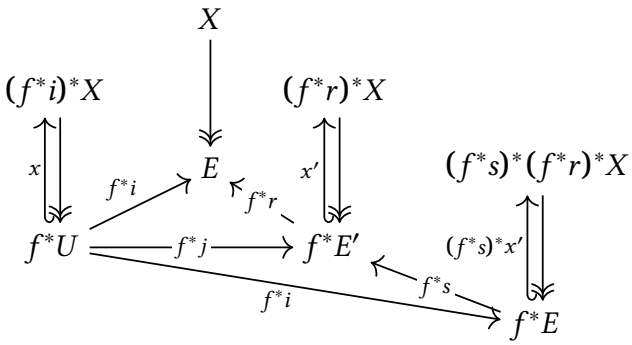
(2) 由于 r 位于 U 之下，且根据假设 j 对 π 具有一致提升性质，我们可以将x: $f^*U \hookrightarrow (f^*i)^*X = (f^*j)^*(f^*r)^*X$沿着 f^*j 延拓为某个 x': $f^*E' \hookrightarrow (f^*r)^*X$，如下所示.



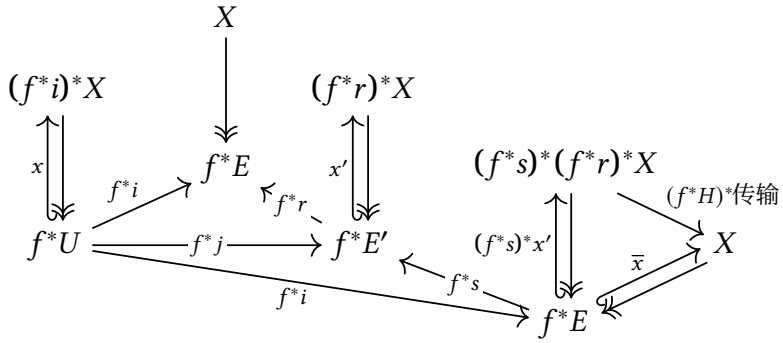
其中(2)，我们还有

$$(f^*j)^*x' = x$$

(3) 接下来，我们沿着 f^*s: $f^*E \to f^*E'$ 对 x': $f^*E' \hookrightarrow (f^*r)^*X$ 作拉回，从而得到一个截面 $(f^*s)^*x'$: $f^*E \to (f^*s)^*(f^*r)^*X$，如下所示



(4) 但我们的目标是得到一个最终落在 X 中的对象，因此我们使用$(f^*H)^*$传输 $:(f^*s)^*(f^*r)^*X \to X$沿着 f^*E从 (⋆) 出发，并令 $x := (f^*H)^*$传输$\cdot(f^*s)^*\overline{x'}$，如下所示



对于 (1) 这种情况，我们现在已经完成，因为我们只需提供 $X \twoheadrightarrow f^*E$ 的一个截面。

在 (2)的情形下，此过程给出了所需的扩张 x，因为由 $(f^*H)^*$ 所产生的传输结构调整因子 沿 f^*i 拉回后会消失。

$$(f^*i)^*\overline{x} = (f^*i)^*(f^*s)^*x' \cdot (f^*i)^*(f^*H)^*\mathsf{transport} = (f^*j)^*x' \cdot \mathsf{id} = x$$

在这两种情形下，由于传输结构的均匀性以及针对 π 的 j 的均匀性提升，并且传输结构具有均匀性，对于任意 $g\colon D \to C$，我们都有 $g^*x' = (g^*x)'$，因此

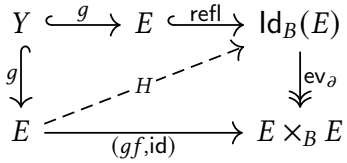
$$\begin{aligned} g^*\overline{x} &= g^*((f^*H)^*\mathsf{transport}) \cdot g^*((f^*s)^*x') \\ &= (g^*f^*H)^*(g^*\mathsf{transport}) \cdot (g^*f^*s)^*(g^*x') \\ &= (g^*f^*H)^*\mathsf{transport} \cdot (g^*f^*s)^*(g^*x)' \\ &= ((gf)^*H)^*\mathsf{transport} \cdot ((gf)^*s)^*(g^*x)' \\ g^*\overline{x} &= \overline{g^*x} \end{aligned}$$

这证明了提升的一致性。 — ■

常值限制同伦收缩的一种特殊情形，是强变形收缩的对偶。

~定义 3.11 ([Cis19，定义 2.4。16])。设 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是一个万有映射~ ~，配备了一个预Id-类型结构 $\mathsf{Id}\colon \mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U} \to \mathcal{U}$。

固定一个对象 $B \in \mathbb{C}$。给定映射 $f\colon E \to Y \in \mathbb{C}/B$，其中 $E \twoheadrightarrow B$ 是一个 π-纤维化，另一个映射 $g\colon Y \to E \in \mathbb{C}/B$ 当 (g, f) 是一个（精确的）截面-收缩对（即 $fg = \mathrm{id}_Y$），且 gf配备了一个到恒等映射的 Id-同伦，并且沿着 g限制时为常值时，它就表明 f是强 Id-变形收缩的对偶。



— ♦

~ ~命题 3.12。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 配备了一个预 Id-类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}}$~U →U。

设 $f\colon E \to Y$ 是一个在 E 上的映射，其中 E 是 π-纤维化的。

(1) 假设预 Id 类型结构配备了传输结构。那么，截面 $g\colon Y \hookrightarrow E$ 是 $f\colon E \to Y$ 的 Id-收缩，当且仅当

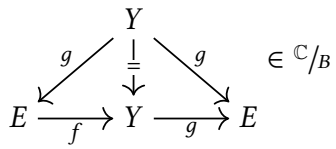
$$\begin{pmatrix} Y & B \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \downarrow \\ E & B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \neq \emptyset$$

(2) 假设预 Id 类型结构是一个 Id 类型结构，并且 π 具有 Π类型结构。那么，当且仅当满足以下条件时，截面 $g\colon Y \to E$ 展示了 $f\colon E \to Y$ 是强 Id 变形收缩的对偶

$$\begin{pmatrix} Y & B \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \downarrow \\ E & B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \neq \emptyset$$

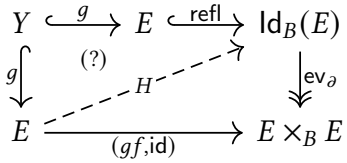
– ♦

证明。我们首先证明两部分中的 $\Rightarrow$ 方向。由于 g 是 f的精确截面，我们有如下结论



在两种情形下，(1) 和(2)，都存在一个Id-同伦 H，连接底行的复合gf与id；此外，在情形(2) 中，由强性可得 $H|_s = \mathsf{refl} \cdot s$。由于恒等~映射 $Y \to Y$ 相对于$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$具有左提升性质，因此情形(1) 的结论由引理3.10 (1)得出，而情形(2) 的结论由引理3.10 (2)得出。

$\Rightarrow$ 方向成立，这是因为$\mathsf{ev}_\partial : \mathsf{Id}_B(X) \twoheadrightarrow X \times_B X$本身就是一个 π-纤维化，由Id-型结构保证。因此，对于情形$\Rightarrow$ 的两个方向 (1) 和(2)，都有如下的对角填充，其中上方三角形在情形(1)中不一定交换，但在情形(2)中交换。



换言之，在情形(1)中，(f, g)构成一个Id-同伦截面—收缩对；此外，在情形(2)中，g 则表明 f是一个强Id-变形收缩的对偶。—— ■

特别地，在内在宇宙的单值性背景下应用命题 3.12，我们得到内在单值宇宙的如下刻画。

~定理 3.13. 设 π: U $\to$ U 是一个通用映射，并配备了预 Id、 Π、 Σ 结构以及一个内在宇宙

$$\pi_0 : \widetilde{\mathcal{U}}_0 \to \mathcal{U}_0$$

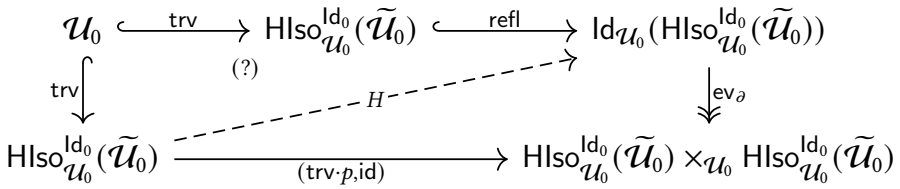
进一步假设内在宇宙 π_0 分别配备了预 Id、 Π、 Σ 结构，记作 Id_0， Π_0， Σ_0，且 π 配备了 Σ 型结构。

(1) 假设 π 上的预 Id 结构具有传输结构。那么，内在的（宇宙，预 Id 类型）对 (π_0, Id_0) 是 book π- 单值的，当且仅当 $\mathrm{trv} \cdot p$: $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_0} \mathcal{U}_0$(~U$_0$) $\to$U$_0$ $\to$ $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_0} \mathcal{U}_0$(~U$_0$) 与恒等映射 Id 同伦，其中 p 取 $p = \mathrm{src}$ 或 $p = \mathrm{tgt}$。

(2) 假设 π 上的 pre-Id 结构是一个完整的 Id 结构。那么，内部的（宇宙，pre-Id 类型）对 (π_0, Id_0) 是 pointed π-单值的，当且仅当 $\mathrm{trv} \cdot p$: $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_0} \mathcal{U}_0$(~U$_0$) $\to$U$_0$ $\to$ $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_0} \mathcal{U}_0$(~U$_0$) 通过某个沿 trv 限制时为常值的同伦 Id-同伦于恒等映射，其中 p 是 $p = \mathrm{src}$ 或 $p = \mathrm{tgt}$。

换言之，书本式单值性等价于下列提升问题存在下半部解，而带基点的单值性则等价于下列提升问题

存在完整解。



— ♦

证明。 由于 π 具有 Σ-型结构，映射 src、tgt 是 π-纤维化的（由推论 3.8可知），且 trv 按构造是这两个映射的截面。因此，trv 是 π-纤维化对象之间的映射，且这些对象位于 $\mathbb{C}$中。第一和第二部分现分别由命题 3.12 的第一和第二部分得出，再结合 Id-截面-收缩对定义以及强 Id-变形收缩的对偶定义的展开即可。— ■

3.3 类型论中的单值性

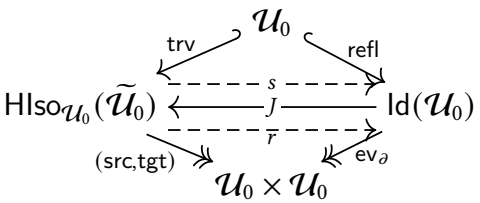
定义 3.4 中对单值性的表述，源于同伦类型论的奎伦模型范畴模型中的提升条件。然而，在类型论框架下工作时，单值性通常表述为：在 J-消去下，由 HIso 与 Id-型路径对象之间得到的映射本身就是一个 Id-型同伦等价。我们通过给出 [KL21，定理 3.3 的类似结果来检验这一点，7] 该结果表明，单值性的这两种版本是等价的。

~定义 3.14. 设 π: U $\to$ U 是一个配备了 Σ-,Π-,Id-类型结构以及一个内部宇宙的泛映射

$$\pi_0 : \widetilde{\mathcal{U}}_0 \to \mathcal{U}_0$$

进一步假设内部宇宙 π_0 分别配备了 Id-、 Π-、 Σ-结构，记作 Id_0， Π_0， Σ_0，并且外部宇宙 π配备了一个 Σ-类型结构。

相对于环境~宇宙，内部宇宙上的类型论指向单值性结构由一对映射 s， r: $\mathrm{HIso}^{\mathcal{U}_0}(\mathrm{U}_0) \rightrightarrows \mathrm{Id}(\mathrm{U}_0)$ 组成，它们在 $\mathrm{U}_0 \times \mathrm{U}_0$ 上方且在 U_0 下方



以及Id-同伦 H_s和 H_r，定义在$\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_0$ 上，分别从 Js到id 沿着 trv 为常值trv 以及 rJ到id 沿着 $refl$ 为常值refl，其含义如定义3.9所述。

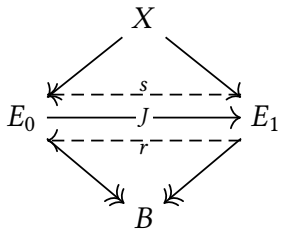
一个类型论书本单值性结构只需选择映射 s， r，并配备如上的 Id-同伦H_s， H_r；但与上文不同的是，限制后 H_s和 H_r不必为常值。

当内部单值性可以配备这种以点为基（分别地，书本式）的 π-单值性结构时，它相对于环境宇宙就是以点为基（分别地，书本式）单值的。

— ♦

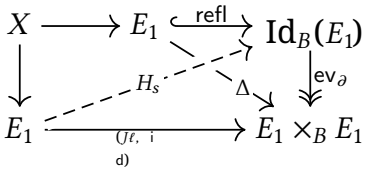
借助引理3.10中的同伦撤回稳定性结果，类型论中的以点为基单值性立即蕴含定义3.4所述的提升形式以点为基单值性。反过来的证明基本上与模型范畴中分解的同伦唯一性证明相同；我们在宇宙范畴的框架下重述如下。

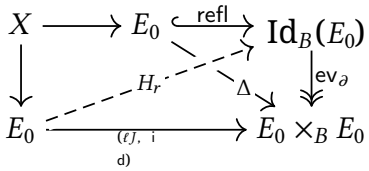
~引理 3.15. 假设 π: U $\to$ U 配备了 Id 类型。那么，对于下述每个交换图，若 $E_i \twoheadrightarrow B$ 是 π-纤维化的，且 $X \to E_i$ 对 π具有提升性质，只要J: $E_0 \to E_1$ 是一个填充子，就可以在另一方向找到填充子 s， r: $E_1 \rightrightarrows E_0$



以及分别位于 B 上、从 Js 到 id 且沿 $X \to E_1$ 保持常值的 Id-同伦 H_s，和从 rJ 到 id 且沿 $X \to E_0$ 保持常值的 Id-同伦 H_r。—— ♦

证明。由 $X \to E_1$ 的提升性质，可找到一个提升 ℓ: $E_1 \to E_0$，我们令它同时作为 s 和 r。然后，通过解这两个提升问题，即可得到从 $J\ell$ 到 id 且沿 $X \to E_1$ 保持常值的同伦，以及从 ℓJ 到 id 且沿 $X \to E_0$ 保持常值的同伦。





— ■

由此，我们可以看到以提升方式表述的单值性与以类型论方式表述的单值性之间预期的等价结果。

~定理 3.16 ([KL21，定理 3.3。7])。 设 π: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是一个赋有Σ-、Π-、Id-型结构及一个内在宇宙的泛映射

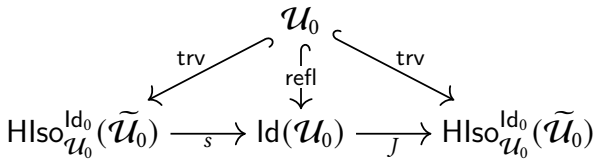
$$\pi_0 : \widetilde{\mathcal{U}}_0 \to \mathcal{U}_0$$

进一步假设内在宇宙 π_0 分别赋有 Id-、 Π-、 Σ-结构，记作 Id_0、 Π_0、 Σ_0，并且 π 赋有一个 Σ-型结构。

那么，按照定义 3.14 ，当且仅当 (π_0，Id_0) 是定义 π3.4 中以提升方式表述的 -单值的（分别为点式、书式），内在单值性才是相对于背景宇宙的类型论意义下的点式（分别为书式）单值性。—— ♦

证明。对于 $\Rightarrow$ 方向，我们必须证明，以类型论方式表述的带基点（分别为书本式）单价性蕴含以提升条件表述的带基点（分别为书本式）单价性。

对于带基点单价性的 $\Rightarrow$ 方向，我们注意到，作为类型论式带基点单价性定义的一部分，我们有



其中存在一个 Id-同伦 H_s，连接底行复合 Js 与 id，使得$\sim$ $\sim H_s|_{\mathsf{trv}} =$ refl·trv。由于 J-消去保证 $\mathsf{refl}:\mathcal{U}_0 \hookrightarrow \mathsf{Id}(\mathcal{U}_0)$ 可通过 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$提升，因此我们使用引理 3.10(2)，得到定义 3.4所述提升形式的带基点单价性。

$\widetilde{}$对于书本单价性的 $\Rightarrow$ 方向，我们回想一下，它仍然给出某个 $s: \mathsf{HIso}_{\mathcal{U}_0}(\mathrm{U}_0) \to \mathrm{Id}(\mathrm{U}_0)$，以及一个同伦 $H_s: Js \simeq \mathrm{id}$。然后，同样由于 J-消去保证$\widetilde{}$ $\widetilde{}\mathrm{refl} : \mathrm{U}_0 \hookrightarrow \mathrm{Id}(\mathrm{U}_0)$ 可通过 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 提升，我们使用引理 3.10 (1)，得到定义 3.4 所述提升形式的书本单价性。

对于 $\Leftarrow$ 方向，我们必须证明，以提升表述的带点（分别是书本）单值性蕴含以类型论方式表述的带点（分别是书本）单值性。带点单值性的 $\Leftarrow$ 方向由引理 3.15 得出。为了证明书本单值性的 $\Leftarrow$方向，我们注意到，根据定理 3.13，存在一个 Id-同伦截面-收缩对

$$\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \xrightarrow{\mathsf{src}} \mathcal{U}_0 \xrightarrow{\mathsf{trv}} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \in \mathbb{C}/_{\mathcal{U}_0}$$

但也存在一个精确的截面-收缩对

$$\mathcal{U}_0 \xrightarrow{\mathsf{trv}} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \xrightarrow{\mathsf{src}} \mathcal{U}_0 \in \mathbb{C}/_{\mathcal{U}_0}$$

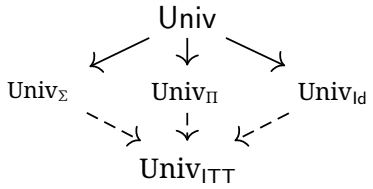
因此，通过提升定义的书本单值性表明，$\mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}_0}\,\mathrm{U}_0(\widetilde{}\,\mathrm{U}_0) \twoheadrightarrow \mathrm{U}_0$ 作为 U_0 上的纤维化对象是可缩的。但 $\mathrm{Id}(\mathrm{U}_0) \twoheadrightarrow \mathrm{U}_0$, 也可缩，因此可以找到一个等价 $\mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}_0}\,\mathrm{U}_0(\widetilde{}\,\mathrm{U}_0) \simeq \mathrm{Id}(\mathrm{U}_0)$，并利用 [Uni13, Theorem 4.7.7] 将其调整为逐纤维地定义在 $\mathrm{U}_0 \times \mathrm{U}_0$ 上。— ■

3.4 单价类型理论的 CwR

定理3.13 和3.16的一个直接范畴元理论应用，是通过余极限构造相对轻量地构造单价类型理论的 CwR。这是因为这两个定理共同蕴含：带基点的单价性（分别为书本单价性）等价于仅要求存在一个映射，它是某个方块的填充子（分别为下半部填充子）。

我们首先将内涵类型理论定义为一个 CwR：它是由一个可表箭头以及泛型 Σ-、Π-、Id-结构自由生成的 CwR。

Co构造 3.17。定义 $\mathrm{Univ}_{\mathsf{ITT}} \in \mathbf{CwR}$ 为如下双余极限余锥 e



其中 Univ_{Σ}、Univ_{Π}、$\mathsf{Univ}_{\mathsf{Id}}$ 来自构造 1.28 —♦

接下来，将包含内在宇宙和外在宇宙、且二者各自都带有内涵类型论结构的类型论构造为如下双余极限。

Cons构造 3.18。将 $\mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \in \mathbf{CwR}$ 定义为如下双余锥 e

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Univ} & \xrightarrow{\pi} & \mathsf{Univ}_{\mathsf{ITT}} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow\downarrow{\scriptstyle\pi_0} & & \vdots \\ \mathsf{IntUniv} & \dashrightarrow & \mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \end{array}$$

其中，映射 π 和 π_0 分别选取余域 CwR 中与其同名的可表映射。——♦

受定理 3.13的启发，现在可以分别构造书本版和尖点版单值类型论的 CwR。

构造 3.19。将 $\mathsf{Univ}_{\mathsf{BookUA}} \in \mathbf{CwR}$ 定义为如下双推出

$$\mathsf{Univ}_{\mathsf{BookUA}} \coloneqq \mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \cup_{\left\{ \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \right\}} \left\{ \begin{array}{ccc} & & \mathsf{Id}_{\mathcal{U}_0}(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) & \xrightarrow[(\mathsf{trv}\cdot\mathsf{src},\mathsf{id})]{} & \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \times_{\mathcal{U}_0} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \end{array} \right\}$$

类似地，将 $\mathsf{Univ}_{\mathsf{PointedUA}} \in \mathbf{CwR}$ 定义为如下双推出

$$\mathsf{Univ}_{\mathsf{PointedUA}} \coloneqq \mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \cup_{\left\{ \begin{smallmatrix} \bullet \to \bullet \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \bullet \to \bullet \end{smallmatrix} \right\}} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_0 & \xrightarrow{\mathsf{refl}(\mathsf{trv})} & \mathsf{Id}_{\mathcal{U}_0}(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \\ {\scriptstyle\mathsf{trv}}\downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) & \xrightarrow[(\mathsf{trv}\cdot\mathsf{src},\mathsf{id})]{} & \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \times_{\mathcal{U}_0} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \end{array} \right\}$$

—♦

这些构造的正确性很容易由下文看出。

定理 3.20. 设 $\mathbb{C}$是一个有限完备范畴。

(1) 映射 $M\colon \mathsf{Univ}_{\mathsf{ITT}} \to \mathbb{C} \in \mathbf{CwR}$ 的同构类与如下选择的同构类一一对应：一个全局映射 $M\pi\colon M\mathsf{U} \to M\mathsf{U} \in \mathbb{C}$，并为其赋予 Σ、Π 和 Id 类型结构。(2) 同构类 $M\colon \mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \to \mathbb{C} \in \mathbf{CwR}$ 与如下选择的同构类一一对应：一个全局映射 $M\pi\colon M\mathsf{U} \to M\mathsf{U} \in \mathbb{C}$，以及 Σ、Π 和 Id 类型结构的选择，和一个内部全局 $\sim M\pi_0\colon M\mathsf{U}_0 \to M\mathsf{U}_0$，并为其赋予 Σ、Π 和 Id 类型结构。(3) 映射 $M\colon \mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \to \mathbb{C} \in \mathbf{CwR}$ 可经由 $\mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \to \mathsf{Univ}_{\mathsf{PointedUA}}$（分别地，$\mathsf{IntUniv}_{\mathsf{ITT}} \to \mathsf{Univ}_{\mathsf{BookUA}}$）分解，当且仅当内部全局在类型论意义下是带基点的单值（分别地，书本单值）。

—♦

证明。前两部分由命题1.29、双余极限的泛性质，以及 [Jel24中的双伴随可得，推论 3.2.16 和 3.2。17]。最后一部分由定理3.13 和3.16给出的等价关系可得。—— ■

3.5 关于带基点单值性的评述

本文给出了宇宙范畴中单值性公理的三种表述：

- 定义 3.4 给出了一种易于在宇宙范畴中陈述的表述；
- 定理 3.13 给出了一个等价条件，它不仅在许多作为同伦类型论模型的宇宙范畴中（例如，来自模型范畴的宇宙范畴）更容易验证，而且在 CwRs 框架中也更容易陈述
- 定理 3.16 给出了一个以更具句法性的方式表述的等价条件，从而表明上述两个条件确实刻画了单值性。

正如我们之前指出的，我们对带基点单值性的表述比该公理通常的表述更强。现在我们来解释这一比较。

3.5.1 尖点单值性与《HoTT》一书中的单值性。 在定义 3.14中，我们通过要求这些同伦沿着trv 和 refl 限制为常值同伦，来表述类型论中的尖点单值性，并在定理 3.16 中证明，定义3.4 中尖点单值性的提升表述与之等价。在《HoTT》一书对单值性的表述 [Uni13，公理 2.10.3], 中， s和 r 只需是 J的同伦截面和同伦收缩，而无需额外满足常值同伦条件。

非正式地说，额外要求 $H_s\colon Js \simeq \mathrm{id}$ 沿 $\mathrm{trv} : \mathrm{U}_0 \to \mathrm{HIso}_{\mathcal{U}_0}(\mathrm{U}_0)$ 限制为 refl，在类型论记法中意味着存在一族映射 s，其指标由内部类型 $A, B : \mathrm{U}_0$ 给出

$$s_{(A,B)} : \mathsf{HIso}(\mathsf{El}(A), \mathsf{El}(B)) \to \mathsf{Id}_{\mathcal{U}_0}(A, B) \qquad (J\text{-SEC})$$

以及由 e 索引的同伦：$\mathrm{HIso}(\mathrm{El}(A), \mathrm{El}(B))$

$$H_s(e) : \mathsf{Id}_{\mathsf{HIso}(\mathsf{El}(A),\mathsf{El}(B))}(e, \mathsf{app}(J \circ s_{(A,B)}, e)) \qquad (H_s(e))$$

使得对于每个 $A : \mathrm{U}_0$

$$s_{(A,B)}(\mathrm{id}_A) = \text{自反} : \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_0}(A, A) \qquad H_s(\mathrm{id}_A) = \text{反身性} : \mathrm{Id}^{\mathsf{HIso}(\mathsf{El}(A),\mathsf{El}(A))}(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A) \qquad (\text{res-const})$$

换言之，该截面必须在定义上将平凡的同伦同构映射到平凡路径，而所选的同伦截面证明必须在平凡的同伦同构处返回平凡路径。

鉴于我们的条件易于表述，而且在各种情形下都很自然、易于验证，我们认为提出这样的强化是合理的。我们不知道我们的尖指单值性表述是否可以由书本单值性推导出来。

3.5.2 与已知的单价性证明的比较。 从单纯形模型中提炼单价性的证明 [KL21], 我们最初只以带基点的形式表述了单价性。直到完成定理3.13和 3.16关于带基点单价性的第二部分的证明后，我们才发现，带基点单价性蕴含着比书中单价性更强的结论。这随后促成了定理 3.13 和3.16中讨论书中单价性的第一部分。

在 pointed univalence 和 book univalence 的证明过程中，我们大量依赖左类对到纤维化的同伦收缩闭包性质，正如引理3.10所述。具体而言，Dan Licata 等人曾发布一个与之密切相关的、经机械化验证的类型论 book univalence 证明，该证明采用了一项替代条件。这一做法源自 Martín Escardó 的观察；他也在 Google Groups 的讨论中运用了收缩性质。[1]

我们用类型论记法简要介绍 Licata 的观察。Licata 指出，若要求一个映射 $s^{(A,B)}$ like from (J-sec)，称为 ua，以及一个同伦族 H_s like from ($H_s(e)$)，就可以得到类型论 book univalence。不过，条件 (res-const) 被替换为以下条件：对于每个同伦同构e: El(A) $\to$ El(B)，沿 app(ua$^{(A,B)}$, e) : Id$_{\mathcal{U}_0}(A, B)$ 进行传输会得到平行映射

$$\mathsf{transport}_{\mathsf{app}(\mathsf{ua}_{(A,B)},e)}, e : \mathsf{El}(A) \rightrightarrows \mathsf{El}(B)$$

它们是同伦的。

相比之下，我们在定理 3.16中通过证明：在以提升条件表述的书本单值性成立时，对每个 $A : \mathcal{U}_0$, ，类型

$$\Sigma(B : \mathcal{U}_0).\mathsf{HIso}(\mathsf{El}(A), \mathsf{El}(B))$$

是可缩的，进而援引 [Uni13，定理 4.7。7]这也正是 [CCHM15，推论 11] 中针对立方类型论所采用的相同论证。在那里，单值性被定义为 $\Sigma(B : \mathcal{U}_0).\mathsf{HIso}(\mathsf{El}(A),\mathsf{El}(B))$ 的可缩性，而这种表述与类型论书本单值性的等价性，也被归功于 Martín Escardó 在 Google Groups 讨论中的发现。[2]

反过来，类型论书本单值性蕴含作为提升条件的书本单值性，这一蕴含可视为同伦同构的归纳原理。Bauer 和 Lumsdaine 在 [BL11，定理 weq_induction]. 中观察到了这一点，并将其形式化。

4 有指点函数外延性

本文余下部分将逐步证明，指点单值性在逆图表的构造下得以保留。为此，需要一个指点版本的函数外延性，这与 [Shu15c] 为了证明图书单值性在逆图表的构造下封闭而需要函数外延性，情形颇为相似。本节定义指点函数外延性，并探讨其若干性质。

~本节余下部分，固定一个宇宙范畴 $\mathbb{C}$，其泛映射为 π: U $\to$ U。

[1] https://groups.google.com/g/homotopytypetheory/c/j2KBIvDw53s/m/YTDK4D0NFQAJ[2] https://groups.google.com/g/homotopytypetheory/c/HfCB_b-PNEU/m/Ibb48LvUMeUJ

定义 4.1。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 为一个泛映射，并具有一个恒等类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。A

t

带点的 Id-函数外延结构是对一个结构化 lif 的选择

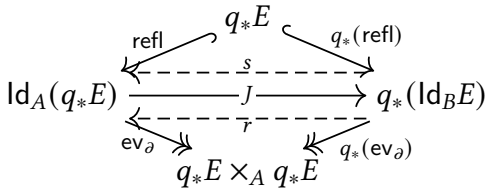
$$\mathsf{PtdFunExt} \in \begin{pmatrix} \mathbb{P}_\pi(\widetilde{\mathcal{U}}) & & \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U} \\ {\scriptstyle \mathbb{P}_\pi(\mathsf{refl})}\downarrow & \boxslash_{\mathcal{U}} & \downarrow \\ \mathbb{P}_\pi(\mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) & & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

按 [KL25b，定义 3。1]。 — ♦

类似于定理 3.16，我们得到带点函数外延性的以下更具类型论特征的刻画。

定义 4.2. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是一个全映射，$\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是一个 Id-类型结构，且 Π-类型结构为 $\Pi\colon \mathbb{P}_\pi(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$。

一个类型论 带点 (Id Π)-函数外延结构，是为每个π-纤维化 $q\colon B \twoheadrightarrow A$ 和每个位于 B 上方的 π-纤维型对象 $E \twoheadrightarrow B$，指定两个映射 $s^{q,E}$，$r^{q,E}\colon q_*(\mathrm{Id}_B E) \rightrightarrows \mathrm{Id}_A(q_* E)$，它们定义在 $q_* E \times_A q_* E$ 之上并处于 $q_* E$ 之下

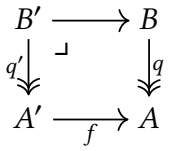


$$\begin{tikzcd}
 & q_*E \arrow[dl, hook', "\mathsf{refl}"'] \arrow[dr, hook, "q_*(\mathsf{refl})"] & \\
\mathsf{Id}_A(q_*E) \arrow[rr, "J"] \arrow[dr, two heads, "\mathsf{ev}_\partial"'] & & q_*(\mathsf{Id}_B E) \arrow[ll, dashed, bend right, "s"'] \arrow[dl, two heads, "q_*(\mathsf{ev}_\partial)"] \arrow[ll, dashed, bend left, "r"] \\
 & q_*E \times_A q_*E &
\end{tikzcd}$$

以及 Id-同伦 $H^{q,E}_s$和 $H^{q,E}_r$，它们分别定义在 $q_*E \times_A q_*E$之上，从 $Js^{q,E}$到 id（沿 $q_*(\mathsf{refl})$ 恒定）以及 $r^{q,E}J$ 到 id（沿 refl 恒定），其含义见定义 3.9。

映射 $s^{q,E}$，$r^{q,E}H^{q,E}_s$，$H^{q,E}_r$也选取得使其在拉回下稳定，也就是说，对于如下由宇宙结构选取的任意拉回

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] \arrow[d, two heads, "q'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, two heads, "q"] \\
A' \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$



有

$$f^*(s^{q,E}) = s^{q',f^*E} \qquad f^*(r^{q,E}) = r^{q',f^*E} \qquad f^*(H^{q,E}_s) = H^{q',f^*E}_s \qquad f^*(H^{q,E}_r) = H^{q',f^*E}_r$$

— ♦

定理 4.3. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是一个带有 Π-结构 $\Pi\colon \mathbb{P}_\pi(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ 的通用映射，并且带有一个 Id-类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。

那么，π 支持一个带基点的 Id-函数外延结构（如定义 4.1 所述），当且仅当它支持一个类型论的带基点 (Id Π)-函数外延结构（如定义 4.2 所述）。

— ♦

证明。 $\Leftarrow$ 方向由引理 3.10(2) 给出，而 $\Rightarrow$ 方向由引理 3.15给出，其中所有构造在通过拉回进行基变换时都保持稳定。— ■

备注 4.4。 根据沃沃德斯基的一个结果，已知书籍式单价性蕴含通常的函数外延性 [Uni13，定理 4.9。4], 其中没有定义 4.1中的基点保持条件。然而，尚不清楚带基点的单价性是否也蕴含带基点的函数外延性。— ♦

我们还得到了以下点态刻画的带点函数外延性，它避免了提及Id-类型。因此，在某些Id-类型构造较为棘手的范畴中，只要知道推前的行为，我们就可以用它来避免一些麻烦，从而构造带点函数外延性结构。具体来说，它将带点函数外延性归结为验证沿纤维化的推前是否将左类映到纤维化中。它的主要用途将在定理5.23中体现，我们将在那里证明胶合范畴中的带点函数外延性。

引理 4.5. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是一个带有 Π-结构 $\Pi\colon \mathbb{P}_\pi(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ 以及 Id-类型结构 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的通用映射。

每个带点 Id-函数外延性结构 $\mathrm{PtdFunExt} \in \mathbb{P}_\pi(\mathrm{refl})_{\mathcal{U}}(\pi \times \mathrm{U})$ 都会导出一族如下的映射，其指标由 π-纤维化 $q\colon B \twoheadrightarrow A$ 以及 $s\colon Y \to E$ 在 π-纤维化切片范畴 B 上给出

$$((s \boxtimes_B (B \times \pi)) \xrightarrow{\mathsf{ptdfunext}_{q,s}} (q_* s \boxtimes_A (B \times \pi)))_{q,s}$$

使其满足如下条件：对于每个 $f\colon A' \to A$，下图交换

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} Y \\ \downarrow s \\ E \end{pmatrix} \boxtimes_B \begin{pmatrix} B \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathsf{ptdfunext}_{q,s}} & \begin{pmatrix} q_* Y \\ \downarrow q_* s \\ q_* E \end{pmatrix} \boxtimes_A \begin{pmatrix} A \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ A \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\begin{pmatrix} f^* Y \\ \downarrow f^* s \\ f^* E \end{pmatrix} \boxtimes_B \begin{pmatrix} f^* B \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ f^* B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathsf{ptdfunext}_{f^* q, f^* s}} & \begin{pmatrix} f^* q_* Y \\ \downarrow f^* q_* s \\ f^* q_* E \end{pmatrix} \boxtimes_B \begin{pmatrix} A' \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ A' \times \mathcal{U} \end{pmatrix}
\end{array}$$

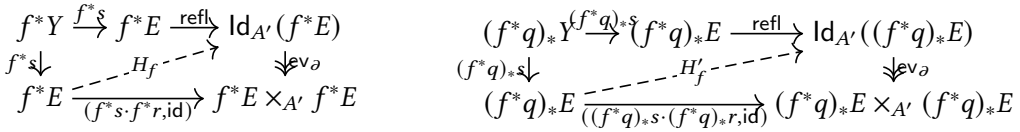
反过来，每个这样的族都限制为一个带基点的 Id-函数外延结构。

— ♦

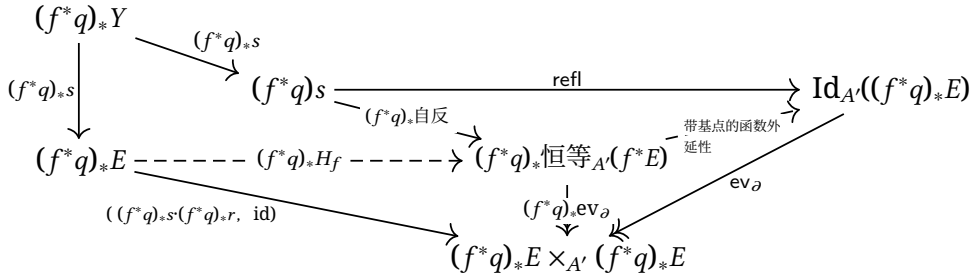
证明。显然，若存在这样的族 $(\mathsf{ptdfunext}_{q,s})_{q,s}$，那么令 q 变化，并取 $s = \mathrm{refl}$，从而可以将每个 $\mathsf{ptdfunext}_{q,\mathrm{refl}}$ 应用于由 J-消去所提供的提升结构，便可得到某个 $\mathrm{PtdFunExt} \in \mathbb{P}_\pi(\mathrm{refl})_{\mathcal{U}}(\pi \times \mathrm{U})$。

反过来，假设存在某个 $\mathrm{PtdFunExt} \in \mathbb{P}_\pi(\mathrm{refl})_{\mathcal{U}}(\pi \times \mathrm{U})$。设 $s\colon Y \to E$ 是 π-纤维化切片范畴中一个在 B 上的态射，并配有一个 π-纤维化 $q\colon B \twoheadrightarrow A$，目标是定义映射 $\mathsf{ptdfunext}_{q,s} : (s \boxtimes_B (B \times \pi)) \to (q_* s \boxtimes_A (A \times \pi))$。可以假设 $(s \boxtimes_B (B \times \pi))$ 非空；由于 $Y \twoheadrightarrow B$ 是纤维化的，s 因而有一个在 B 上的收缩 $r\colon E \to Y$。因此，思路是证明强变形收缩的对偶在推前下保持不变。

具体而言，由命题 3.12 (2)可知，只需从一族映射 $(H_f\colon f^* E \to \mathrm{Id}_{A'}(f^* E))_{f\colon A' \to A}$ 出发，其中对每个 f，左侧图表都交换，并且对每个 $g\colon A'' \to A'$，构造一族类似且相容的映射 $(H_{\prime} f\colon f^* E \to \mathrm{Id}_{A'}(f^* E))_{f\colon A' \to A}$，使得右侧图表交换。



这是通过先沿 $f^*q\colon f^*B \to A'$ 取左侧图表的推前像，得到如下方所示的左侧倾斜矩形，然后应用带点的函数外延结构 $\mathrm{PtdFunExt} : (f^*q)_*(\mathrm{Id}_{A'}(f^*E)) \to \mathrm{Id}_{A'}((f^*q)_*E)$，如同下方右侧的尖角三角形中所示。



必要的相容性条件很容易验证。 — ■

5 Artin–Wraith 粘合宇宙范畴

本文余下部分的目标是证明，指点单价性和函数外延性在逆图表的形成过程中得以保留。为此，主要的技术工具将是 Artin–Wraith 粘合范畴；回顾一下，它被定义为逗号范畴。

定义 5.1。函子 $M\colon \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 的*Artin–Wraith* 粘合范畴 是逗号范畴 $\mathbb{C}_1 \downarrow M$。 — ♦

根据 [Shu15a，定理 4。5], 若 $\mathcal{I}$ 是一个次数为 n 的逆范畴，那么它可表示为沿第 n匹配对象函子的粘合范畴。本节旨在抽象地研究粘合范畴，以便将其应用于第6节的逆图表范畴。

为此，本节固定一个 lex 映射

$$\mathbb{C}_0 \xrightarrow{M} \mathbb{C}_1$$

以唤起匹配对象函子的意象。我们还假设，$\mathbb{C}_0$ 和 $\mathbb{C}_1$ 分别是有限完备范畴，并且各自配备了通用映射

$$\pi_0 : \widetilde{\mathcal{U}}_0 \to \mathcal{U}_0 \in \mathbb{C}_0 \qquad \pi_1 : \widetilde{\mathcal{U}}_1 \to \mathcal{U}_1 \in \mathbb{C}_1$$

并分别配备了内部宇宙

$$\pi_0^\diamond : \widetilde{\mathcal{U}}_0^\diamond \to \mathcal{U}_0^\diamond \in \mathbb{C}_0 \qquad \pi_1^\diamond : \widetilde{\mathcal{U}}_1^\diamond \to \mathcal{U}_1^\diamond \in \mathbb{C}_1$$

此外，我们在以下假设下展开讨论。

假设 5.2。我们假设 M具有以下“右 Quillen”性质，并且 π_i，$\pi_i^\diamond$具有内涵类型论的结构：

(1) $M\colon\ \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 将 π_0-纤维化映射到 π_1-纤维化。

(2) 存在如下映射族，其指标由对象 $B_0 \in \mathbb{C}_0$ 和映射 s_0给出：$Y_0 \to E_0$，其中这些映射位于 B_0 上的 π-纤维化切片范畴中

$$\Big((s_0 \pitchfork_{B_0} (B_0 \times \pi_0)) \longrightarrow (Ms_0 \pitchfork_{MB_0} (MB_0 \times \pi_1))\Big)_{s_0, B_0}$$

并满足以下条件：对每个 $f_0\colon B_0' \to B_0$，下图可交换。

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} Y_0 \\ \downarrow{\scriptstyle s_0} \\ E_0 \end{pmatrix} \pitchfork_{B_0} \begin{pmatrix} B_0 \times \widetilde{\mathcal{U}}_0 \\ \downarrow \\ B_0 \times \mathcal{U}_0 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} MY_0 \\ \downarrow{\scriptstyle Ms_0} \\ ME_0 \end{pmatrix} \pitchfork_{MB_0} \begin{pmatrix} MB_0 \times \widetilde{\mathcal{U}}_1 \\ \downarrow \\ MB_0 \times \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} \\
\Big\downarrow \text{[KL25b, Construction 3.2]} & & \Big\downarrow \text{[KL25b, Construction 3.2]} \\
\begin{pmatrix} f_0^* Y_0 \\ \downarrow{\scriptstyle f_0^* s_0} \\ f_0^* E_0 \end{pmatrix} \pitchfork_{B_0'} \begin{pmatrix} B_0' \times \widetilde{\mathcal{U}}_0 \\ \downarrow \\ B_0' \times \mathcal{U}_0 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} M(f_0^* Y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle M(f_0^* s_0)} \\ M(f_0^* E_0) \end{pmatrix} \pitchfork_{MB_0'} \begin{pmatrix} MB_0' \times \widetilde{\mathcal{U}}_1 \\ \downarrow \\ MB_0' \times \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

(3) π_i 和 $\pi_i^\diamond$ 分别配备了 Unit $\Sigma, \Pi,$ Id 型结构，分别记为 $\mathrm{Unit}_i, \Sigma_i, \Pi_i, \mathrm{Id}_i$ 和 $\mathrm{Unit}_i^\diamond, \Sigma_i^\diamond, \Pi_i^\diamond, \mathrm{Id}_i^\diamond$。

$-\blacklozenge$

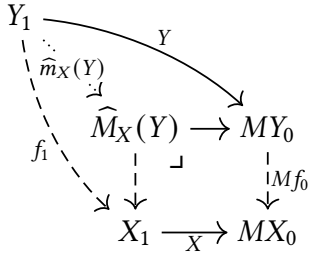
我们还将 Reedy 范畴理论中的以下定义转述到粘合范畴的情形中。

定义 5.3. 对于每个对象 $X \in \mathrm{Gl}(M)$，记其在投影映射 $\mathrm{Gl}(M) \to \mathbb{C}_i$ 下的像为 X_i，使得 X 是一个映射

$$X\colon X_1 \to MX_0 \in \mathbb{C}_1$$

我们称 X_i 为 X 的第 i 个分量，并称余域对象 MX_0 为 X 的绝对匹配对象。将其视为 $\mathbb{C}_1$ 的映射时，我们也称 X 为其自身的绝对匹配映射。

对于映射 $f\colon Y \to X$，相应的相对匹配映射 $\widehat{m}(f)\colon Y_1 \to M(f)$ 映入 $\widehat{M}(f)$ 相对匹配对象 $M(f)$；当 f 的含义可由上下文明确时，有时记作 $\widehat{m}_X(Y)\colon Y_1 \to M_X(Y)$。它是指向拉回的连接映射，如下图所示。



有时我们也用实线表示在 $\mathbb{C}_1$ 中作为映射的对象，并用虚线表示映射的分量。

$-\blacklozenge$

定义 5.4。映射 $E \to B \in \mathrm{Gl}(M)$ 称为***Reedy*** 纤维化，当其 0-分量 $E_0 \to\!\!\!\!\sim B_0 \in \mathbb{C}_0$ 以及相对匹配映射 $\widehat{m}_B(E)$：$E_1 \to M_B E \in \mathbb{C}_1$ 分别是 π_0-和 π_1-纤维化时。

如果 $E_0 \to B_0$ 和 $\widehat{m}_B(E)$：$E_1 \to \widehat{M}_B E$ 分别是 $\pi_0^\Diamond$-和 $\pi_1^\Diamond$-纤维化，则它是一个内 Reedy 纤维化</style》。

我们也称对象 X: $X_1 \to MX_0 \in \mathrm{Gl}(M)$ 为（内部）Reedy 纤维对象，当且仅当 $X \to 1$ 是（内部）Reedy 纤维化。— ♦

根据定义，显然，一个（内部）Reedy 纤维化对象 X: $X_1 \to MX_0$ 恰好等同于一个 π_1-纤维化，且其余域对象属于 M 的像。

在本节余下部分：

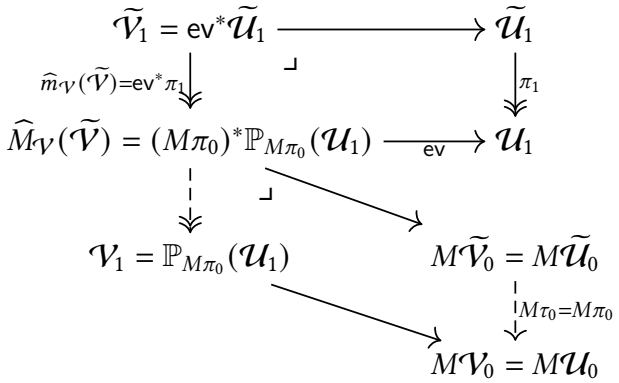
(1) 我们将在第 5.1 节再次证明，$\mathrm{Gl}(M)$ 具有一个通用 Reedy 纤维化，并配备一个内部 Reedy 纤维化的宇宙。(2) 接着，我们将在第 5.1 至 5.5 节证明，来自 $\mathbb{C}_0$ 和 $\mathbb{C}_1$ 的宇宙的 Unit Σ, Π、Id-结构会在 $\mathrm{Gl}(M)$ 上诱导出相应的结构。(3) 最后，我们将在第 5.6 和 5.7 节证明主要技术结果：$\mathbb{C}_0$ 和 $\mathbb{C}_1$ 的基点函数外延性结构与基点单值性结构也会在 $\mathrm{Gl}(M)$ 上诱导出相应的结构。

5.1 万有 Reedy 拟纤维化

本节的目标是构造一个配备内部万有 Reedy 拟纤维化的万有 Reedy 拟纤维化。

这些万有 Reedy 拟纤维化的构造如下。

~构造 5.5。我们构造映射 τ: $\mathrm{V} \to \mathrm{V} \in \mathrm{Gl}(M)$，其 0-分量为 π_0，其 1-分量为 $\mathrm{GenComp}(\pi_1, M\pi_0)$。



对内部宇宙应用相同的构造，我们得到映射 $\tau^\Diamond$：~$\mathrm{V}^\Diamond \to$~$\mathrm{V}^\Diamond \in \mathrm{Gl}(M)$。— ♦

我们必须验证上述构造确实给出了一个普适 Reedy 纤维化。首先证明 τ 和 $\tau^\diamond$ 都是普适映射。

引理 5.6。 映射 $\tau\colon \widetilde{\mathcal{V}} \to \mathcal{V} \in \mathsf{Gl}(M)$ 以及 $\tau^\diamond\colon \widetilde{\mathcal{V}}^\diamond \to \mathcal{V}^\diamond \in \mathsf{Gl}(M)$ 均由构造 5.5 给出，并且都具有泛映射的结构。—— ♦

证明。 τ 和 τ_0 的证明完全相同，因此我们只证明 τ的情形。要证明它具有通用映射的结构，我们需要为后复合函子 $\tau_!$选择一个特定的右伴随：$\mathsf{Gl}(M)/\widetilde{\mathcal{V}} \to \mathsf{Gl}(M)/\mathcal{V}$，并证明 τ 本身是可指数化的。我们依次证明这两个目标。

由于 $M\pi_0$ 是一个 π_1-纤维化，依据引理 1.4，$\mathsf{GenComp}(\pi_1, M\pi_0)$ 是 $\mathsf{GenComp}(\pi_1, \pi_1)$ 的拉回。由 π_1 上的 Σ-型结构可知，$\mathsf{GenComp}(\pi_1, \pi_1)$ 是 π_1-纤维的。因此，π_0 和 π_1 上的普遍结构分别给出了沿 τ 的 0-分量 π_0 和 1-分量 $\mathsf{GenComp}(\pi_1, M\pi_0)$ 的拉回选择。由于 $\mathsf{Gl}(M)$ 中的拉回是逐点计算的，合起来便得到了沿 τ 的拉回选择。

为了证明 τ 可指数化，根据 [FKL24，定理 2，19], 只需证明以下三个映射

$$\pi_0 \qquad M\pi_0 \qquad \mathsf{GenComp}(\pi_1, M\pi_0)$$

可指数化。根据假设 5.2， $M\pi_0$ 是 π_1-纤维化的，而上文已指出 $\mathsf{GenComp}(\pi_1, M\pi_0)$ 是 π_1-纤维化的。根据 [Nie82，推论 1，指数化映射在拉回下封闭。4], 因此，由 π_0 和 π_1的可指数化性即可得出结论。— ■

接下来，我们检验它们确实具有所声称的分类性质。

命题 5.7。 构造 $\tau\colon \widetilde{\mathcal{V}} \to \mathcal{V} \mathsf{Gl}(M)$（分别为 $\tau^\diamond\colon \widetilde{\mathcal{V}}^\diamond \to \mathcal{V}^\diamond$）中的映射是通用 Reedy 纤维化（分别是内部 Reedy 纤维化）。这意味着，若 $E \to B \in \mathsf{Gl}(M)$ 是 Reedy 纤维化（分别是内部 Reedy 纤维化），当且仅当 $E \to B$是一个 τ-纤维化（分别是 $\tau^\diamond$-纤维化）。— ♦

证明。 τ情形和 $\tau^\diamond$ 情形的证明完全相同，因此我们只证明 τ情形。

上的宇宙结构 τ 已由引理 5.6给出。从构造也显然可知， τ是一个 Reedy 纤维化，因此所有 τ-纤维化也都是 Reedy 纤维化。接下来要证明，所有 Reedy 纤维化 $p\colon E \to B$都可以赋予 τ-纤维化的结构。

我们参照证明末尾的图来进行说明。根据 Reedy 纤维化的定义， $p_0\colon E_0 \to B_0$ 是映射 $\lceil E_0 \rceil\colon B_0 \to \mathrm{U}_0$ 在 $\mathbb{C}_0$ 中的拉回。因此，$\frown \sim M_B E \to B_1$ 是映射 $M\pi_0\colon M\mathrm{U}_0 \to M\mathrm{U}_0$ 沿映射的拉回

$$B_1 \xrightarrow{B} MB_0 \xrightarrow{M\lceil E_0 \rceil} M\mathcal{U}_0$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由 π_1-纤维性可知， $\widehat{m}_B E\colon E_1 \to M_B E$存在一个映射 $\lceil E_1 \rceil\colon M_B E \to \mathcal{U}_1$，沿着该映射， $\widehat{m}_B E$可表示为 π_1的拉回。利用引理 1.4，可得到一个映射 $B^*(M\lceil E_0 \rceil).\lceil E_1 \rceil\colon B_1 \to \mathbb{P}_{M\pi_0}(\mathcal{U}_1)$ 使得沿其拉回 $\mathsf{GenComp}(\pi_1, M\pi_0)$ 可恢复 p

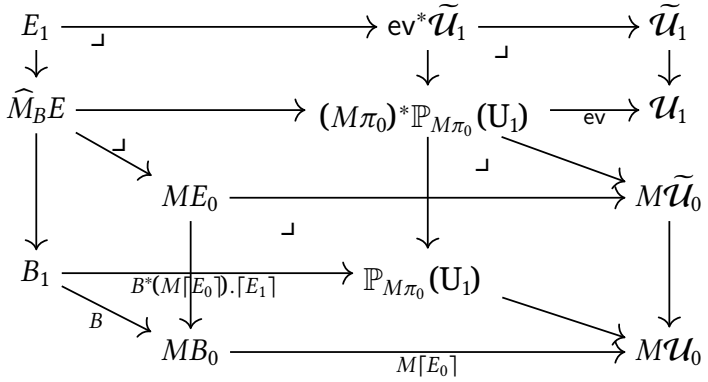
$$p_1\colon E_1 \xrightarrow{\widehat{m}_B E} \widehat{M}_B E \to B_1$$

此外，复合映射

$$B_1 \xrightarrow{B^*(M\lceil E_0\rceil).\lceil E_1\rceil} \mathbb{P}_{M\pi_0}(\mathcal{U}_1) \to M\mathcal{U}_0$$

是复合映射 $B_1 \xrightarrow{B} MB_0 \xrightarrow{M\lceil E_0\rceil} M\mathrm{U}_0$。

因此，我们在 $\mathrm{Gl}(M)$ 中得到如下图表，其中前面和后面的面都是拉回，这正是所要求的。



— ■

现在我们已经证明，τ 和 $\tau^\diamond$ 都是具有所需分类性质的万有映射。我们通过检验 $\tau^\diamond$ 是 τ 的一个内部宇宙来完成这一部分。

~定理 5.8。由构造 5.5，Reedy 纤维化的宇宙 $\tau\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V} \in \mathrm{Gl}(M)$配备了一个内在宇宙 $\tau^\diamond\colon \widetilde{\mathcal{V}}^\diamond \to \mathcal{V}^\diamond \in \mathrm{Gl}(M)$，由内在 Reedy 纤维化构成。

— ♦

证明。命题 τ 和 $\tau^\diamond$ 中的泛性质，见命题 5.7。还需验证 $\mathcal{V}^\diamond$（作为对象）以及 $\tau^\diamond$（作为映射）是 τ-纤维的。由命题 5.7可知，这等价于验证它们都是 Reedy 纤维的。

$\mathrm{V}^\diamond$ 的 Reedy 纤维性源于 $\mathrm{U}_1^\diamond$ 和 $M\pi_0^\diamond$ 是 π_1-纤维的，并且根据 π_1 的 Π-型结构，π_1-纤维映射在沿 π_1-纤维映射推前时保持封闭。$\tau^\diamond$ 的 Reedy 纤维性则由 $\pi_{\diamond i}$ 的 π_i-纤维性得出。—— ■

5.2 单位类型

$\mathrm{Gl}(M)$ 的单位类型可以直接构造。

~命题 5.9。$\tau\colon \mathrm{V} \to \mathrm{V} \in \mathrm{Gl}(M)$ 具有一种单位类型结构，该结构在两个投影 $\mathrm{Gl}(M) \to \mathbb{C}_i$ 下保持不变，其中 $i = 0, 1$；$\tau^\diamond$ 也同样如此。—— ♦

证明。由于 M 是 lex，单位类型映射 $1 \to \mathrm{V}$ 由如下映射给出：其中第 i 个分量分别为 $\mathrm{Unit}_i\colon 1 \to \mathrm{U}_i$（对于 τ）和 $\mathrm{Unit}_i^\diamond\colon 1 \to \mathrm{U}_i$（对于 $\tau^\diamond$）。— ■

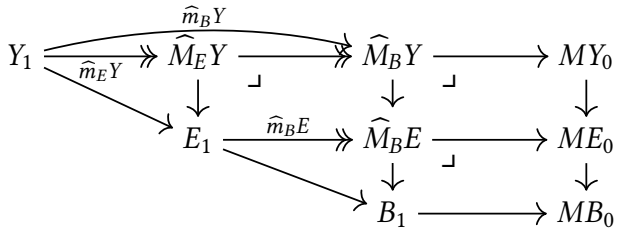
5.3 Σ-类型

对于 Σ-类型，我们需要证明：若 π_i-纤维化在复合下封闭，则 τ-纤维化也如此；同样，$\pi_{\diamond i}$-纤维化和 $\tau_\diamond$-纤维化也如此。

引理 5.10。Reedy 纤维化和 $\mathrm{Gl}(M)$ 的内部 Reedy 纤维化在复合下封闭。— ♦

Proof. 我们只证明 Reedy 纤维化的情形，因为内部情形完全相同 .

设 $Y \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow B$ 是一对可复合的 Reedy 纤维化。那么，其 0 分量 $Y_0 \twoheadrightarrow E_0 \twoheadrightarrow B_0 \in \mathbb{C}_0$ 是一个 π_0-纤维化，这是由 π_0 上的 Σ-类型结构保证的。通过取迭代拉回，可以看出，相对匹配映射 $\widehat{m}_B Y$ 是相对匹配映射 $\widehat{m}_E Y$ 与相对匹配映射 $\widehat{m}_B E$的一个拉回的复合。



由 π_1-纤维化的拉回稳定性以及 π_1上的 Σ-类型结构，结论成立。— ■

命题 5.11。$\tau\colon \widetilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V} \in \mathrm{Gl}(M)$ 和 $\tau^\diamond\colon \widetilde{\mathrm{V}}^\diamond \to \mathrm{V}^\diamond \in \mathrm{Gl}(M)$ 均具有一种 Σ-类型结构，该结构在 0 分量投影 $\mathrm{Gl}(M) \to \mathbb{C}_0$ 下保持不变。— ♦

证明。 根据构造，$\mathsf{GenComp}(\tau, \tau)$和 $\mathsf{GenComp}(\tau_\diamond\, \tau^\diamond)$分别是两个 τ- 和 $\tau^\diamond$-纤维化的复合，它们由命题 5.7可知是 Reedy 纤维化。因此，结论由引理 5.10得出。— ■

5.4 Π-类型

对于 Π-类型，我们需要证明沿着（内部）Reedy 纤维化的（内部）Reedy 纤维化的推前仍然是（内部）Reedy 纤维化。

引理 5.12。（内部）Reedy 纤维化在沿着（内部）Reedy 纤维化的推前下封闭。— ♦

证明。再次，内部情形与环境 Reedy 纤维化的情形完全相同，因此我们只处理环境 Reedy 纤维化的情形。

设 $E \twoheadrightarrow B \in \mathrm{Gl}(M)$ 是 B 上的 Reedy 纤维化对象，且 $q\colon B \twoheadrightarrow A \in \mathrm{Gl}(M)$ 是 Reedy 纤维化。由于映射 $\mathrm{Gl}(M) \to \mathbb{C}_0$ 按 [FKL24 保持推前，根据定理 2.19]，有 $(q_* E)_0 = (q_0)_* E_0$，它关于 B_0 是 π_0-纤维化的，这是由 π_0 上的 Π-类型结构所致。

对于 1-分量， [FKL24的构造 212] 表明，$q_* E_1 \to A_1$ 作为一个对象 在 A_1上，是沿着映射 $M_A q_* E \to q_{1*} M_B E$ 对推前对象作拉回构造得到的

$\widehat{}$沿着 q_1，相对匹配映射 $\widehat{m}_B E\colon E_1 \to M_B E \in \mathbb{C}_{/B_1}$，如下所示。

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & & (q_*E)_1 & \longrightarrow & (q_1)_*E_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{m}_B E} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{m}_A(q_*E)} & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (q_1)_*(\widehat{m}_B E)} \\ \widehat{M}_B E & & \widehat{M}_A(q_*E) & \longrightarrow & (q_1)_*(\widehat{M}_B E) \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ B_1 & \xrightarrow[q_1]{} & A_1 & & \end{array}$$

根据推前的分配律（[KL25a，引理 2。3] 或 [GK13，第 2 段。3]），$\widehat{}$由此可得，映射 $(p_1)_*(\widehat{m}_B E)$ 是一个 π_1-纤维化，因此 $(q_*E)_1 \to M_p E$ 是一个 π_1-纤维化。— ■

$\widetilde{}$命题 5.13. 若 π_i 具有适用于 $i = 0,1$ 的 Π-型结构，则 $\tau\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V} \in \mathrm{Gl}(M)$ 具有一个 Π-型结构，且该结构在 0-分量投影 $\mathrm{Gl}(M) \to \mathbb{C}_0$ 下保持不变。— ♦

证明。 由引理 1.5 和 5.12立即可得。 — ■

5.5 等同类型

对于 Id-类型，我们需要证明，（内部）Reedy 纤维化的对角映射存在如下分解：逐点平凡余纤维化后接（内部）Reedy 纤维化。该构造稍显繁琐，但它是 [KL21，命题 4。7]的直接推广。

5.5.1 可复合一对纤维化的 Id-类型。现在，我们先暂时离开粘合范畴的设定，回顾内涵类型论的一般宇宙范畴模型中 Σ-类型的 Id-类型的传输分解。

构造 5.14. 设 $\mathbb{C}$ 是任意一个具有有限完备性的范畴，并配备一个通用$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$映射 $\pi\colon \mathbb{U} \to \mathbb{U}$，该映射具有 Id-类型结构 $\mathrm{Id} : \mathbb{U} \times_{\mathcal{U}} \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 和 Π-类型结构。

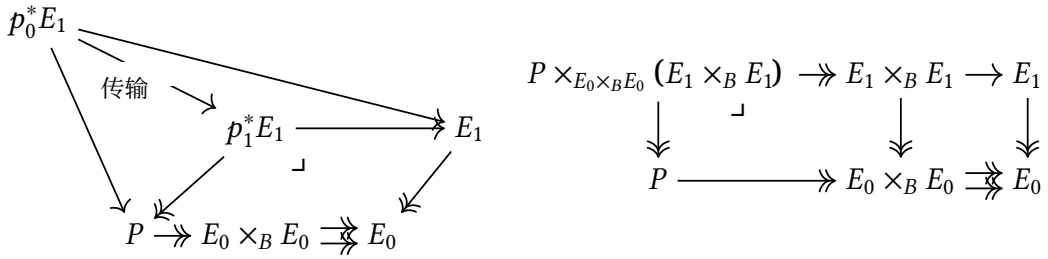
设有一对可复合的 π-纤维化 $E_1 \twoheadrightarrow E_0 \twoheadrightarrow B$，以及对角线 $E_0 \to E_0 \times_B E_0$ 的一个分解：

$$E_0 \xrightarrow{r} P \xrightarrow{p} E_0 \times_B E_0 \in \mathbb{C}_{/B}$$

其中 r 配备了提升结构 $r \underset{B}{\boxslash} E \times \pi$。目标是按如下方式构造拉回 $P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1)$ 上的一$\overline{\text{个}}$纤维对象 $\mathrm{Id}_B(E_0,\ P,\ E_1)$。

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathrm{Id}}_B(E_0, P, E_1) & & \\ \downarrow & & \\ P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) & \twoheadrightarrow & E_1 \times_B E_1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ P & \longrightarrow & E_0 \times_B E_0 \end{array}$$

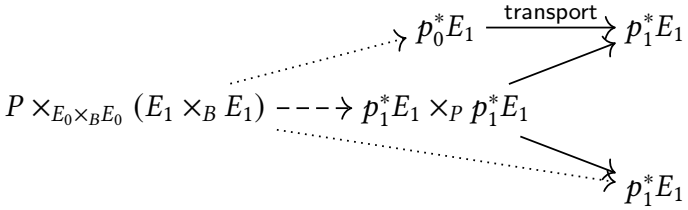
记 $p_0, p_1\colon P \xrightarrow{p} E_0 \times_B E_0 \rightrightarrows E_0$ 为两个投影。由 r 上的提升结构，可以得到如下左侧所示的传输映射 transport : $p_0^* E_1 \to p_1^* E_1$。



但请注意，右侧也有交换方块。因此，拉回的泛性质给出了映射

$$P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \longrightarrow p_i^* E_1 \in \mathbb{C}/_P$$

其中 $i = 0, 1$。1-分量 $P \times_{E_1\times_B E_1} (E_1 \times_B E_1) \longrightarrow p_1^* E_1$ 与 0-分量同 传输 映射 $P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \longrightarrow p_0^* E_1 \xrightarrow{\text{传输}} p_1^* E_1$ 进而给出映射 $P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \dashrightarrow p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1 \in \mathbb{C}/_P$ 如下。



(transport-pair)

因此，所需的纤维化 $\mathsf{Id}_B(E_0, P, E_1) \longrightarrow P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1)$ 通过沿着映射作拉回而构造 $P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1)\ p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1$ 该映射是在映射 $\mathsf{Id}_P(p_1^* E_1) \twoheadrightarrow p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1$ 上方构造的。

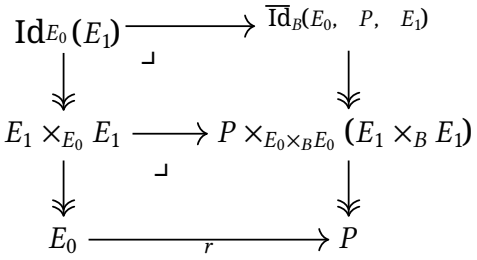
$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathsf{Id}}_B(E_0, P, E_1) & \longrightarrow & \mathsf{Id}_P(p_1^* E_1) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \mathsf{ev}_\partial \\ P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) & \dashrightarrow & p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1 \end{array} \quad \in \mathbb{C}/_P$$

$-\blacklozenge$

目标是证明复合映射 $\mathsf{Id}_B(E_0, P, E_1) \twoheadrightarrow P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \twoheadrightarrow E_1 \times_B E_1$ 是 E_1 在 P 上的对角线分解中的纤维化部分。为此，我们需要构造平凡余纤维化 $E_1 \to \mathsf{Id}_B(E_0, P, E_1)$；以下计算将有助于完成这一构造。

引理 5.15。 在构造 5.14的设定下，$\mathsf{Id}_B(E_0, P, E_1) \twoheadrightarrow P \times_{E_0\times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \in \mathbb{C}/_P$ 沿着 $r : E_0 \to P$ 的拉回所得到的映射为 $\mathsf{ev}_\partial : \mathsf{Id}^{E_0}(E_1) \twoheadrightarrow E_1 \times_{E_0} E_1$，

因此可得到如下迭代拉回。



$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{E_0}(E_1) \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \overline{\mathrm{Id}}_B(E_0, P, E_1) \arrow[d, two heads] \\
E_1 \times_{E_0} E_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \arrow[d, two heads] \\
E_0 \arrow[r, "r"'] & P
\end{tikzcd}$$

— ♦

证明。 由于 $\mathrm{Id}_B(\overline{E_0}, P, E_1) \longrightarrow P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1)$ 是沿映射 $P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1)$ $p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1$ 的 $\mathrm{Id}_P(p_1^* E_1) \twoheadrightarrow p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1$ 作拉回构造的，因此只需证明沿该映射重新基变换

$$P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \dashrightarrow p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1 \in \mathbb{C}/P$$

沿着 $r: E_0 \to P$ 得到 $E_1 \times_{E_0} E_1$ 处的恒等映射。

为此，我们首先注意到，$E_1 \times_B E_1 \twoheadrightarrow E_0 \times_B E_0$ 沿对角映射 $E_0 \to E_0 \times_B E_0$ 作拉回得到 $E_1 \times_{E_0} E_1$。因此，$P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \twoheadrightarrow P$ 属于以下迭代拉回

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times_{E_0} E_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E_1 \times_B E_1 \arrow[d, two heads] \\
E_0 \arrow[r, "r"'] & P \arrow[r, "p"'] & E_0 \times_B E_0
\end{tikzcd}$$

换言之，虚线映射 $P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \to p_1^* E_1 \times_P p_1^* E_1$（transport-pair）沿着 $r: E_0 \to P$ 拉回为一个从 $E_1 \times_{E_0} E_1$ 到其自身、且位于 E_0 之上的映射。最后注意到它是恒等映射，因为 transport：$p_0^* E_1 \to p_1^* E_1 \in \mathbb{C}/P$ 沿着 $r: E_0 \to P$ 拉回后得到 id：$E_1 \to E_1$。— ■

现在，我们可以通过补充平凡余纤维化部分，将构造 5.14 中的纤维化复合 $\mathrm{Id}_B(E_0, P, E_1) \twoheadrightarrow P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \twoheadrightarrow E_1 \times_B E_1$ 变为 E_1 在 P 之上的对角线分解。

构造 5.16。 在构造 5.14 的设定下，我们将映射 $\mathrm{refl}_B(E_0, P, E_1)$ 构造为以下复合映射

$$\overline{\mathrm{refl}}_B(E_0, P, E_1) := \left(E_1 \xrightarrow{\mathrm{refl}} \mathrm{Id}_{E_0}(E_1) \xrightarrow{\text{Lemma 5.15}} \overline{\mathrm{Id}}_B(E_0, P, E_1) \right)$$

其中，最终映射是到 $\mathrm{Id}_B(E_0, P, E_1)$ 的连接映射，由其在 r 下的拉回得到，即 $\mathrm{Id}_{E_0}(E_1)$（根据引理 5.15）。—— ♦

引理 5.17。 映射 $\mathrm{refl}_B(\overline{E_0}, P, E_1)_B(B \times \mathbb{Z})$ 由构造 5.16 定义，且满足

(1) 对于 π-纤维化 $\mathrm{Id}_B(E_0, P, E_1) \twoheadrightarrow P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1)$，以下图表交换。

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\overline{\mathrm{refl}}_B(E_1,P,E_2)"] \arrow[dd, two heads] & \overline{\mathrm{Id}}_B(E_1, P, E_2) \arrow[d, two heads] \\
& P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \arrow[d, two heads] \\
E_0 \arrow[r, "r"'] & P
\end{tikzcd}$$

(2) 复合映射

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\mathrm{refl}"'] \arrow[rr, bend left, "\overline{\mathrm{refl}}_B(E_0,P,E_1)"] & \mathrm{Id}_{E_0}(E_1) \arrow[r] & \overline{\mathrm{Id}}_B(E_0, P, E_1) \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{ev}_\partial(E_0,P,E_1)"] & P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \arrow[r, two heads] & E_1 \times_B E_1
\end{tikzcd}$$

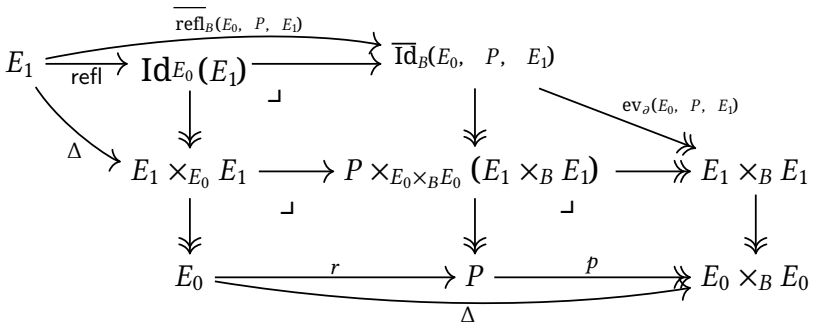
就是对角映射。

(3) 存在一个提升结构 $\mathrm{refl}_B(\overline{E_0, P, E_1})\ {}_B(B \times \pi)$。

— ♦

证明。 构造总结 5.16 结合引理 5.15的陈述，我们得到如下图表。

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\mathrm{refl}"'] \arrow[rr, bend left, "\overline{\mathrm{refl}}_B(E_0, P, E_1)"] \arrow[dr, bend right, "\Delta"'] & \mathrm{Id}_{E_0}(E_1) \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \overline{\mathrm{Id}}_B(E_0, P, E_1) \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{ev}_\partial(E_0, P, E_1)"] & \\
& E_1 \times_{E_0} E_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E_1 \times_B E_1 \arrow[d, two heads] \\
& E_0 \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "\Delta"'] & P \arrow[r, two heads, "p"] & E_0 \times_B E_0
\end{tikzcd}$$



沿图追踪即可证明(1)。

对于(2)，如下所示的复合映射就是对角映射

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\mathrm{refl}"'] \arrow[rr, bend left, "\overline{\mathrm{refl}}_B(E_0,P,E_1)"] & \mathrm{Id}_{E_0}(E_1) \arrow[r] & \overline{\mathrm{Id}}_B(E_0, P, E_1) \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{ev}_\partial(E_0,P,E_1)"] & P \times_{E_0 \times_B E_0} (E_1 \times_B E_1) \arrow[r, two heads] & E_1 \times_B E_1
\end{tikzcd}$$

因为，参见上图，对角映射 Δ: $E_0 \to E_0 \times_B E_0$ 沿着$E_1 \times_B E_1 \twoheadrightarrow E_0 \times_B E_0$ 的拉回是连接映射 $E_1 \times_{E_0} E_1 \to E_1 \times_B E_1$，其两个分量都是恒等映射。

最后，对于 (3)，要证明存在提升结构 $\mathrm{refl}_B(E_0, \overline{P, E_1})\ {}_B(B \times \pi)$，只需注意到，根据 [KL25b，构造 2.5]，，提升结构在复合下保持；而根据 Id 类型结构的定义， $E_1 \to \mathrm{Id}_{E_0}(E_1)$ 具有提升结构。因此，只需证明 $\mathrm{Id}_{E_0}(E_1) \to \mathrm{Id}_B(E_0, P, E_1)$ 对 $B \times \pi$ 具有提升结构。但它是 r 在一个 π-纤维化下的拉回，因此根据 Π 类型结构以及 [KL25b，构造 3.6]，，它对 $B \times \pi$ 也具有提升结构。— ■

5.5.2 Reedy 纤维化的 Id-类型。 现在我们把注意力转回到为 Reedy 纤维化构造 Id-类型。我们的思路是在 0-分量中使用 Id-类型，并在 1-分量中使用构造 5.14 和 5.16 。我们已经知道refl_0 具有左提升结构；由引理 5.~~17~~ (3) 可知，构造 5.16中的 refl也具有左提升结构。我们还回顾如下：粘合范畴中的左提升结构是逐点组装而成的。

引理 5.18. 对每个 $B \in \mathrm{Gl}(M)$ 以及映射 $s\colon Y \to E$，在 B 上的 Reedy 纤维化切片范畴中，令i取 $i = 0$ 或 $i = 1$，则存在映射

$$(s \boxslash_{B} (B \times \tau)) \longrightarrow (s_i \boxslash_{B_i} (B_i \times \pi_i))$$

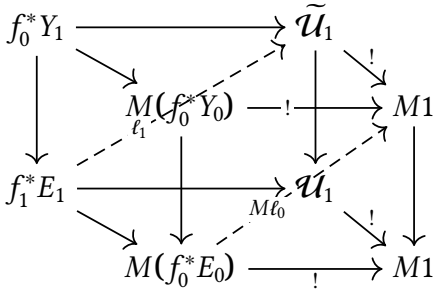
满足交换条件：对每个 $f\colon B' \to B \in \mathrm{Gl}(M)$，都有

$$\begin{array}{ccc} (s \boxslash_{B} (B \times \tau)) & \longrightarrow & (s_i \boxslash_{B_i} (B_i \times \pi_i)) \\ \text{[KL25b, Construction 3.2]}\downarrow & & \downarrow\text{[KL25b, Construction 3.2]} \\ (f^* s \boxslash_{B'} (B' \times \tau)) & \longrightarrow & (f_i^* s_i \boxslash_{B'_i} (B'_i \times \pi_i)) \end{array}$$

— ♦

证明。注意到映射$\mathrm{id}_M \tilde{\ } \mathcal{U}_0 \to \mathrm{id}_M \mathcal{U}_0 \in \mathrm{Gl}(M)$ 由单位类型结构可知是 Reedy 纤维化，因此 0- 分量的证明直接成立。

对于 1-分量，我们必须取 $\ell \in (s \boxslash_{B} (B \times \tau))$，并构造相应的$\ell_1 \in (s_1 \boxslash_{B_1} (B_1 \times \pi_1))$。为此，设有映射 $f_1\colon B'_1 \to B_1$，以及在 $\mathbb{C}_1$中，$f_1^* Y_1 \to f_1^* E_1$ 与 $\mathrm{U}_1 \to \mathrm{U}_1$ 之间的提升问题，如下面立方体的后面所示。由于 M 是右伴随函子，它保持终对象。因此，下面立方体的右面是 Reedy 纤维化，因为由单位类型结构可知，恒等映射是 π_1-纤维化。



利用 ℓ，可以在 $\mathrm{Gl}(M)$ 中解决上述提升问题，其 1-分量是针对 π_1 的原始 $f_1^* s_1$ 提升问题的一个解。

所需的交换条件可直接继承。 — ■

上述结果的逆命题也成立：逐点左映射是到 Reedy 纤维化的左映射。

引理 5.19。对于每个 $B \in \mathrm{Gl}(M)$ 以及映射 s：在 B 上的 Reedy 蔡斯切片中，有一个映射

$$(s_0 \boxslash_{B_0} (B_0 \times \pi_0)) \times (s_1 \boxslash_{B_1} (B_1 \times \pi_1)) \longrightarrow (s \boxslash_{B} (B \times \tau))$$

su满足交换性条件：对于每个 $f\colon\ B' \to B \in \mathrm{Gl}(M)$，有 s

$$\begin{tikzcd}
(s_0 \underset{B_0}{\boxslash} (B_0 \times \pi_0)) \times (s_1 \underset{B_1}{\boxslash} (B_1 \times \pi_1)) \arrow[r] \arrow[d] & (s \underset{B}{\boxslash} (B \times \tau)) \arrow[d] \\
(f_0^* s_0 \underset{B_0'}{\boxslash} (B_0' \times \pi_0)) \times (f_1^* s_1 \underset{B_1'}{\boxslash} (B_1' \times \pi_1)) \arrow[r] & (f^* s \underset{B'}{\boxslash} (B' \times \tau))
\end{tikzcd}$$

— ♦

证明。给定逐点提升，先在 0-分量中解决提升问题，再相对于纤维化的相对匹配映射提升 1-分量，即可在粘合范畴中构造出一个提升。— ■

现在我们可以证明，Reedy 纤维化也具有 Id-类型结构。

命题 5.20。对于每个（内在的）Reedy 纤维化 $E \to B \in \mathrm{Gl}(M)$，对角映射 $E \to E \times_B E \in {}^{\mathrm{Gl}(M)}/_B$ 有如下分解

$$E \xrightarrow{\mathrm{refl}} \mathrm{Id}_B^{\mathrm{Gl}(M)}(E) \xrightarrow{\mathrm{ev}_\partial} E \times_B E \in {}^{\mathrm{Gl}(M)}/_B$$

其中

(1) 映射 ev_∂ 是一个（内在的）Reedy 纤维化

(2) 沿相对匹配对象之间的映射 $M_B(\mathrm{refl})\colon\ M_B(E) \to M_B(\mathrm{Id}_B E)$ 拉回，会将相对匹配映射 $(\mathrm{Id}_B E)_1 \twoheadrightarrow M_{E\times_B E}(\mathrm{Id}_B E) \in {}^{\mathbb{C}_1}/_{\widehat{M}_B(\mathrm{Id}_B E)}$ 映为边界求值 $\mathrm{Id}_{\widehat{M}_B(E)}(E_1) \twoheadrightarrow E_1 \times_{\widehat{M}_B E} E_1 \in {}^{\mathbb{C}}/_{\widehat{M}_B(E)}$。换言之，有如下迭代拉回。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\widehat{M}_B(E)}(E_1) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\mathrm{ev}_\partial"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & (\mathrm{Id}_B E)_1 \arrow[d, two heads, "\widehat{m}_{E\times_B E}(\mathrm{Id}_B E)"] \\
E_1 \times_{\widehat{M}_B E} E_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \widehat{M}_{E\times_B E}(\mathrm{Id}_B E) \arrow[d, two heads] \\
\widehat{M}_B(E) \arrow[r, "\widehat{M}_B(\mathrm{refl})"'] & \widehat{M}_B(\mathrm{Id}_B E)
\end{tikzcd}$$

(3) 存在一种提升结构选择 $\mathrm{refl}_B(B \times \tau)$ ⧄

— ♦

证明。与前面一样，内部 Reedy 纤维化情形和环境 Reedy 纤维化情形完全相同，因此我们只证明环境 Reedy 纤维化情形。

我们首先构造所需的分解。0-分量由Id-类型结构给出，它作用于 $\mathbb{C}_0$。对于 1-分量，我们首先注意到，根据假设5.2 (2)，存在一个提升结构 $M(\mathrm{refl}_0)^{MB_0}(MB_0 \times \pi_1)$，由此通过基变换得到一个提升结构 ⧄ ⧄ $M_B(\mathrm{refl}_0)^{B_1}(B_1 \boxtimes \pi_1)$。因此，对角线 $M_B(E) \to$存在一个分解

$\widehat{\times_{B_1}}^{\widehat{M_B}(E)} M_B(E)$，如同

$$\widehat{M}_B(E) \xrightarrow{\widehat{M}_B(\mathsf{refl})} \widehat{M}_B(\mathsf{Id}_B E) \xrightarrow{\widehat{M}_B(\mathsf{ev}_\partial)} \widehat{M}_B(E) \times_{B_1} \widehat{M}_B(E)$$

满足应用构造5.14的条件。这样便产生了一个在 $M_B(\mathrm{Id}_B E)$ $\widehat{\times}_{\widehat{M}_B(E_0)\times_{B_1}\widehat{M}_B(E_0)}$ $(E_1 \times_{B_1} E_1)$ 上的纤维化对象 $\mathrm{Id}_{B_1}(E_0, M_B(\mathsf{ev}_\partial)\ E_1)$。但注意到$E_1 \times_{B_1} E_1 \to ME_0 \times_{MB_0} ME_0$ 可分解为

$$E_1 \times_{B_1} E_1 \longrightarrow \widehat{M}_B E \times_{B_1} \widehat{M}_B E \longrightarrow ME_0 \times_{MB_0} ME_0$$

于是可推出，$M_B(\mathrm{Id}_B E) \widehat{\times}_{\widehat{M}_B(E_0)\times_{B_1}\widehat{M}_B(E_0)} (E_1 \times_{B_1} E_1) \cong M_{E\times_B E}(\mathrm{Id}_B E)$ 是 $\mathrm{Id}_B(E)$ 关于 $E \times_B E$ 的相对匹配对象，并且是一个纤维化对象。因此，我们可以取其 1-分量为

$$(\mathsf{Id}_B E)_1 \coloneqq \overline{\mathsf{Id}}_{B_1}(E_0, \widehat{M}_B(\mathsf{ev}_\partial), E_1)$$

综上，我们得到如下迭代的拉回网格。

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathsf{Id}_B E)_1 \coloneqq \overline{\mathsf{Id}}_{B_1}(E_0, \widehat{M}_B(\mathsf{ev}_\partial), E_1) & \twoheadrightarrow & \widehat{M}_{E\times_B E}(\mathsf{Id}_B E) & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & E_1 \times_{B_1} E_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{M}_B(\mathsf{Id}_B E) & \xrightarrow{\widehat{M}_B(\mathsf{ev}_\partial)} & \widehat{M}_B(E) \times_{B_1} \widehat{M}_B(E) & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & B_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M(\mathsf{Id}_{B_0}(E_0)) & \xrightarrow[M(\mathsf{ev}_\partial)]{} & ME_0 \times_{MB_0} ME_0 & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & MB_0
\end{array}$$

于是，根据构造，$\mathsf{Id}_B^{\mathsf{Gl}(M)}(E) \twoheadrightarrow E \times_B E$ 是 Reedy 纤维化的，从而证明了(1)。利用引理5.15也可立即得到(2)。

对于(3)，应用构造5.16 即可得到refl 的 1-分量，即复合映射

$$\mathsf{refl}_1 \coloneqq \overline{\mathsf{refl}}_B(E_0, \widehat{M}_B(\mathsf{ev}_\partial), E_1) = \left(E_1 \xrightarrow{\mathsf{refl}} \mathsf{Id}_{\widehat{M}_B(E)}(E_1) \longrightarrow (\mathsf{Id}_B E)_1\right)$$

从而引理5.17 (1) 表明refl_1 是一个位于 $M_B(\mathsf{refl})$上方的映射。因此，得到如下交换方块 $\mathbb{C}_1$，它们构成映射 $E \to \mathsf{Id}_B(E)$ 于$\mathsf{Gl}(M)$中。

$$\begin{array}{ccccc}
E_1 & \longrightarrow & \widehat{M}_B(E) & \longrightarrow & M(E_0) \\
{\scriptstyle \mathsf{refl}_1}\downarrow & & {\scriptstyle \widehat{M}_B(\mathsf{refl})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M(\mathsf{refl}_0)} \\
(\mathsf{Id}_B E)_1 & \longrightarrow & \widehat{M}_B(\mathsf{Id}_B E) & \longrightarrow & M(\mathsf{Id}_{B_0}(E_0)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & B_1 & \longrightarrow & MB_0
\end{array}$$

引理5.17 (3) 还为refl_1 赋予了提升结构$\mathsf{refl}^1_{B_1}(B_1 \times \pi_1)$。因此，(3) 所需的提升结构$\mathsf{refl}_B(B \times \tau)$ 由引理5.19将 0-分量和 1-分量的提升结构组合起来即可得到5.19。

最后，我们注意到，根据引理 5.17 (2)，这给出了对角映射的一种分解。 — ■

定理 5.21。$\tau\colon \widetilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V} \in \mathsf{Gl}(M)$ 和 $\tau^\diamond\colon \widetilde{\mathrm{V}}^\diamond \to \mathrm{V}^\diamond \in \mathsf{Gl}(M)$ 均具有由 0-分量投影 $\mathsf{Gl}(M) \to \mathbb{C}_0$ 保持的 Id-类型结构。—— ♦

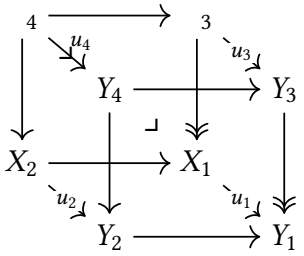
证明。 直接分别对 5.20 应用命题 τ 和 $\tau^{\diamond}$ 即可。 — ■

5.6 指向的函数外延性

现在的目标是证明，若 $\mathbb{C}_i$ 具有指向的函数外延性，那么 $\mathsf{Gl}(M)$也具有指向的函数外延性。思路是运用引理 4.5 ，从而根据引理 5.18 和 5.19，可将问题归结为验证：左映射在粘合范畴中的推前像的 0-分量和 1-分量仍分别是左映射。鉴于粘合范畴中推前像的 1-分量具有 [FKL24], 所述的行为，我们需要 [Shu15c]中的以下立方体引理。

~引理 5.22（[Shu15c，引理 11.7]）。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是有限完备~ ~范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射，该范畴带有一个 Π-结构 $\Pi\colon \mathbb{P}_\pi(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ 和一个 Id-类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。另设 π 带有一个 Σ-类型结构。

假设在某个 $B \in \mathbb{C}$ 上的 π-纤维化对象之间有如下图表，其中右侧面的竖直映射是 π-纤维化，且后面与前面是拉回。XX



$$\begin{tikzcd}
4 \arrow[rr] \arrow[dr, "u_4"] \arrow[dd] & & 3 \arrow[dr, "u_3"] \arrow[dd, two heads] & \\
& Y_4 \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & Y_3 \arrow[dd, two heads] \\
X_2 \arrow[rr] \arrow[dr, "u_2"] & & X_1 \arrow[dr, "u_1"] & \\
& Y_2 \arrow[rr] & & Y_1
\end{tikzcd}$$

那么有一个映射

$$(u_1 \underset{B}{\boxslash} (B \times \pi)) \times (u_2 \underset{B}{\boxslash} (B \times \pi)) \times (u_3 \underset{B}{\boxslash} (B \times \pi)) \longrightarrow (u_1 \underset{B}{\boxslash} (B \times \pi))$$

它满足如下交换条件，对每个 $f\colon B' \to B \in \mathbb{C}$ 都成立。

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} X_1 \arrow[d, "u_1"'] & \underset{B}{\boxslash} & B \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ Y_1 & & B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_2 \arrow[d, "u_2"'] & \underset{B}{\boxslash} & B \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ Y_2 & & B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_3 \arrow[d, "u_3"'] & \underset{B}{\boxslash} & B \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ Y_3 & & B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{pmatrix} X_4 \arrow[d, "u_4"'] & \underset{B}{\boxslash} & B \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ Y_4 & & B \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \arrow[d] \\
\begin{pmatrix} f^*X_1 \arrow[d, "f^*u_1"'] & \underset{B'}{\boxslash} & B' \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ f^*Y_1 & & B' \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f^*X_2 \arrow[d, "f^*u_2"'] & \underset{B'}{\boxslash} & B' \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ f^*Y_2 & & B' \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f^*X_3 \arrow[d, "f^*u_3"'] & \underset{B'}{\boxslash} & B' \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ f^*Y_3 & & B' \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} f^*X_4 \arrow[d, "f^*u_4"'] & \underset{B'}{\boxslash} & B \times \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ f^*Y_4 & & B \times \mathcal{U} \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

— ♦

证明。 根据 [Shu15c，引理 11。7] 并注意到，每个对象上的 π-纤维化切片 B 构成一个类型论纤维范畴，而沿映射 $B' \to B$ 拉回会诱导类型论纤维范畴之间的映射。 — ■

现在我们可以证明粘合范畴的有基点函数外延性。

定理 5.23. 假设每个 π_i 都配备了一个带基点的 Id_i-函数外延性结构。那么， τ 上的任意 Id 类型结构都具有一个带基点的函数外延性结构。

— ♦

证明。根据引理 Id-类型带基点函数外延性的刻画（引理 4.5），只需证明：假设沿 π_i-纤维化的推前保持到 Reedy 纤维化的左类，那么沿 Reedy 纤维化的推前也保持到 Reedy 纤维化的左类。π_i- 纤维化。

具体而言，取某个 $B \in \mathsf{Gl}(M)$ 上的 Reedy 纤维化切片中的映射 $s\colon Y \to E$，以及一个 Reedy 纤维化 $q\colon B \twoheadrightarrow A$。目标是构造一个映射

$$(s \pitchfork_B (B \times \tau)) \dashrightarrow (q_* s \pitchfork_A (B \times \tau))$$

满足引理4.5的相容性条件。由引理5.18 和5.19，可得到如下实线映射，它们满足所需的相容性条件。

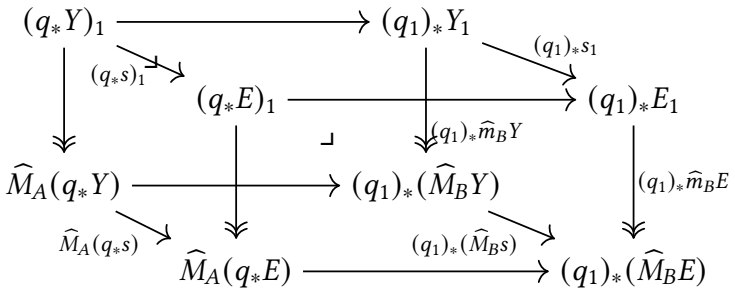
$$\begin{array}{ccc}
(s \pitchfork_B (B \times \pi)) & \xrightarrow{\text{Lemma 5.18}} & (s_0 \pitchfork_{B_0} (B_0 \times \pi_0)) \times (s_1 \pitchfork_{B_1} (B_1 \times \pi_0)) \\
 & & \downarrow \\
(q_* s \pitchfork_A (B \times \pi)) & \xleftarrow{\text{Lemma 5.19}} & ((q_* s)_0 \pitchfork_{B_0} (B_0 \times \pi_0)) \times ((q_* s)_1 \pitchfork_{B_1} (B_1 \times \pi_0))
\end{array}$$

因此，只需构造上图中虚线所示且在重索引下保持稳定的映射。

由于映射$\mathsf{Gl}(M) \to \mathbb{C}_0$ 在 [FKL24定理 2.19], 下保持推前，因此有$(q_* s)_0 = (q_0)_* s_0$。于是，Id_0-泛函外延性在 π_0 上给出了 0-分量的映射

$$(s_0 \pitchfork_{B_0} (B_0 \times \pi)) \longrightarrow ((q_* s)_0 \pitchfork_{B_0} (B_0 \times \pi))$$

对于 1-分量， [FKL24的构造 2.12] 表明，推前$(q_* s)_1 : (q_* Y)_1 \to (q_* E)_1$ 沿 s 的 1-分量由 q 上以下拉回的连接映射给出，其中 $\mathbb{C}_1$ 在 B_1



竖直映射 $(q_1)_* E_1 \to (q_1)_*(M_B E)$ 和 $(q_1)_* Y_1 \to (q_1)_*(M_B Y)$ 是 π_1-纤维化，因为根据 Reedy 纤维性，$\widehat{m}_B E$ 和 $\widehat{m}_B Y$ 是 π_1-纤维化；此外，推前的分配律（[GK13，第 2 段；3], [KL25a，引理 2.3]）意味着沿 π_1-纤维化对 π_1-纤维化作推前后，所得映射仍是 π_1-纤维化。现在我们想要运用引理 5.22 的立方体引理，因此考察从后侧面的余跨到前侧面的余跨的三个连接映射，并希望它们具有提升结构：

$\widehat{\ }$(1) $M_A(q_*s)$ 是映射 $M((q_0)_*s_0)$ 沿 $A_1 \to MA_0$ 的拉回。因此，可得到一个复合映射

$$\begin{tikzcd}
(s_0 \underset{B_0}{\boxslash} (B_0 \times \pi_0)) \arrow[r, "\mathsf{ptdfunext}_0"] & ((q_0)_*s_0 \underset{A_0}{\boxslash} (A_0 \times \pi_0)) \arrow[d, "\text{Assumption 5.2 (2)}"] \\
(\widehat{M}_A(q_*s) \underset{A_1}{\boxslash} (A_1 \times \pi_1)) & (M((q_0)_*s_0) \underset{MA_0}{\boxslash} (MA_0 \times \pi_1)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\widehat{\ }$(2) $(q_1)_*(M_Bs)$ 是沿 q_1 的推前，即沿 $B_1 \to MB_0$ 对 Ms_0 取拉回所得的推前。这意味着存在一个复合映射

$$\begin{tikzcd}
(s_0 \underset{B_0}{\boxslash} (B_0 \times \pi_0)) \arrow[r, "\text{Assumption 5.2 (2)}"] & (Ms_0 \underset{MB_0}{\boxslash} (MB_0 \times \pi_1)) \arrow[d] \\
((q_1)_*(\widehat{M}_Bs) \underset{A_1}{\boxslash} (A_1 \times \pi_1)) & (\widehat{M}_Bs \underset{B_1}{\boxslash} (B_1 \times \pi_1)) \arrow[l, "\mathsf{ptdfunext}_1"']
\end{tikzcd}$$

(3) $(q_1)_*s_1$ 是沿 q_1 对 s_1 的推前；根据 Σ-型结构，它是一个纤维化，因此由带基点的函数外延性假设，可得映射

$$(s_1 \underset{B_1}{\boxslash} (B_1 \times \pi_1)) \xrightarrow{\mathsf{ptdfunext}_1} ((q_1)_*s_1 \underset{A_1}{\boxslash} (A_1 \times \pi_1))$$

上述所有映射在重新索引下均稳定。利用引理 5.22 的立方体引理，可得到映射

$$(s_0 \underset{B_0}{\boxslash} (B_0 \times \pi_0)) \times (s_1 \underset{B_1}{\boxslash} (B_1 \times \pi_0)) \longrightarrow ((q_1)_*s_1 \underset{A_1}{\boxslash} (A_1 \times \pi_1))$$

在重新索引下稳定，正如所需。 — ■

5.7 带基点的单价性

现在我们可以证明，胶合范畴 $\mathsf{Gl}(M)$ 具有带基点的单价性。具体而言，我们将证明，配备了定理 Id-型结构的内部 Reedy 纤维化所构成的内部宇宙5.23 相对于环境 Reedy 纤维化的宇宙是带基点单价的。形式化地说，我们将证明以下定理。

定理 5.24。假设

(1) M: $\mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 有一个左伴随 D: $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$(2) 存在一个定义在内在 (宇宙，Id 类型)对 $(\pi_{\diamond i}, \mathrm{Id}_i^{\diamond})$ 上的 π_i-单值性结构。(3) 在 1-分量的环境 Id 类型 Id_1 of π_1 上，存在一个 Id_1-函数外延性结构。

于是，内部（宇宙， τ-单值性结构作用于（宇宙，Id-类型）对 $(\tau_{\diamond}$、$\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathsf{Gl}(M)})$上存在一个带基点的 τ-单值性结构，其中 $\tau^{\diamond}$、分别来自定理 5.8，而 来自定理 5.21。—— ♦

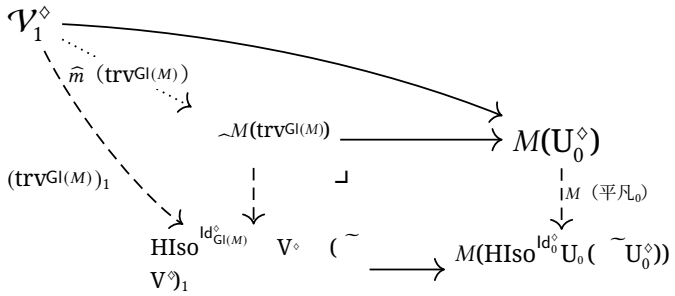
我们将分几步给出该定理的证明。技术细节主要集中在下面这一部分，在那里还可以看出为什么需要函数外延性前提。

5.7.1 平凡同伦等价的相对匹配映射作为推前。 将构造 2.7 和 2.9 应用于内在通用 Reedy 纤维化 $\tau^{\diamond}$ 及其内在 Id-类型 $\mathsf{Id}^{\diamond}_{\mathsf{Gl}(M)}$，可得到一个映射

$$\mathsf{trv}_{\mathsf{Gl}(M)} : \mathcal{V}^{\diamond} \to \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}^{\diamond}_{\mathsf{Gl}(M)}}_{\mathcal{V}^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{V}}^{\diamond})$$

由于 $\mathsf{Gl}(M) \to \mathbb{C}_0$ 保留所有逻辑结构，0-分量就是 trv_0: $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}_0}\mathcal{U}_0(\widetilde{\ }\mathrm{U}_0)$。它还有一个相对匹配映射 $\widehat{m}(\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})$，如下方虚线映射所示。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_1^{\diamond} \arrow[dr, dotted, "\widehat{m}\ (\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, dashed, "(\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})_1"'] & & \\
& \widetilde{M}(\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & M(\mathrm{U}_0^{\diamond}) \arrow[d, dashed, "M\ (\text{平凡}_0)"] \\
& \mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}^{\diamond}_{\mathsf{Gl}(M)}}\ \mathrm{V}^{\diamond}\ (\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\diamond})_1 \arrow[r] & M(\mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}^{\diamond}_0}\mathrm{U}_0(\widetilde{\ }\mathrm{U}_0^{\diamond}))
\end{tikzcd} \quad \in \mathbb{C}_1 \qquad (\mathsf{Gl}\text{-}\mathsf{trv})$$



本节的目标是给出相对匹配映射$\widehat{m}(\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})$的另一种表述。具体而言，我们证明如下结论。

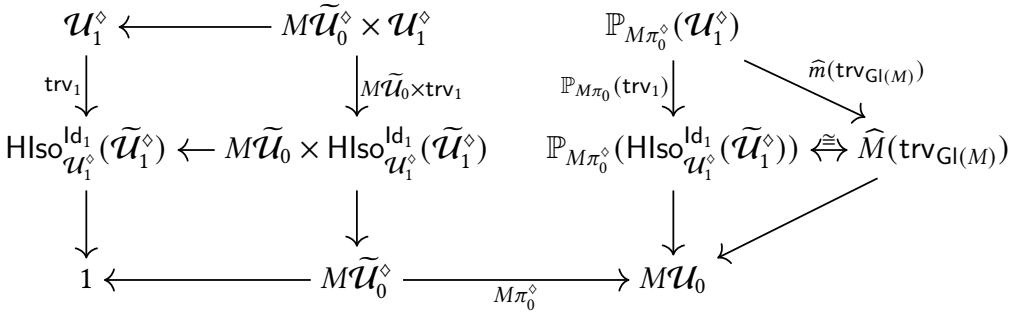
命题 5.25. 设 M: $\mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 有左伴随 D: $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$。

相对匹配映射 $\widehat{m}(\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}) : \mathrm{V}_1^{\diamond} \to \widehat{M}(\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})$（来自 (Gl-trv)）是 trv

$_1 \quad {}^{\diamond}_1 \to \quad {}^{\mathsf{Id}_1}_{\ \ {}^{\diamond}_1} \quad {}^{\widetilde{\ }\diamond}_1 \qquad M\pi_0^{\diamond} \quad M\ {}^{\widetilde{\ }\diamond}_0 \to : \mathrm{U}\ \mathrm{HIso}\mathcal{U}(\mathrm{U})$ 在与 : M

$\mathrm{U}\ \mathrm{U}_0^{\diamond}$ 相关联的多项式函子下的像。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_1^{\diamond} \arrow[d, "\mathsf{trv}_1"'] & M\widetilde{\mathcal{U}}_0^{\diamond} \times \mathcal{U}_1^{\diamond} \arrow[l] \arrow[d, "M\widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \mathsf{trv}_1"] & \mathbb{P}_{M\pi_0^{\diamond}}(\mathcal{U}_1^{\diamond}) \arrow[d, "\mathbb{P}_{M\pi_0}(\mathsf{trv}_1)"'] \arrow[dr, "\widehat{m}(\mathsf{trv}_{\mathsf{Gl}(M)})"] & \\
\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_1}_{\mathcal{U}_1^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{U}}_1^{\diamond}) \arrow[d] & M\widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_1}_{\mathcal{U}_1^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{U}}_1^{\diamond}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathbb{P}_{M\pi_0^{\diamond}}(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_1}_{\mathcal{U}_1^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{U}}_1^{\diamond})) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d] & \widehat{M}(\mathsf{trv}_{\mathsf{Gl}(M)}) \arrow[dl] \\
1 & M\widetilde{\mathcal{U}}_0^{\diamond} \arrow[l] \arrow[r, "M\pi_0^{\diamond}"'] & M\mathcal{U}_0 &
\end{tikzcd}$$



— ♦

为了证明命题5.25，我们需要知道 $\widehat{M}$（$\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}$）从（Gl-trv）作为$\mathbb{C}_1$ 的对象所表示的内容。

引理 5.26。设 M： $\mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 具有左伴随 D： $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$。

$\widehat{\ }$相对匹配对象 $M(\mathsf{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}) \in \mathbb{C}_1$ 来自 (Gl-trv)，表示一个预层，其对象上的作用将每个 $B \in \mathbb{C}_1$ 映射为以下数据元组：</style}

(1) A π_0-纤维化 $E_0 \twoheadrightarrow DB \in \mathbb{C}_0$

(2) 两个 π_1-纤维化对象 $E_1, E_1' \twoheadrightarrow \eta_B^*(ME_0)$ 的选择

(3) 在 $\eta_B^*(ME_0$ 上， E_1, E_1' 之间 Id_1-同伦同构的数据)

其中 $\eta_B\colon B \to MD(B)$ 是在 B 处的 $(D \dashv M)$-伴随单位。

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\simeq} & E_1' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \widehat{M}_\eta E \longrightarrow ME_0 & \\ & \downarrow \quad \lrcorner \quad \downarrow & \\ & B \xrightarrow{\eta} MD(B) & \end{array}$$

$-\blacklozenge$

证明。我们首先计算 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}\mathcal{V}(\widetilde{\ }\mathrm{V})_1$ 表示什么。由于 $D \dashv M$，投影 $\mathrm{Gl}(M) \to \mathbb{C}_1$ 也有一个左伴随 $\mathbb{C}_1 \to \mathrm{Gl}(M)$，它将每个 $B \in \mathbb{C}_1$ 映到单位箭头$\eta_B\colon B \to MD(B)$。换言之，有

$$\mathbb{C}_1(B, \mathrm{Hlso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}_{\mathcal{V}}(\widetilde{\mathcal{V}})_1) \cong \mathrm{Gl}_M(B \xrightarrow{\eta_B} MD(B), \mathrm{Hlso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}_{\mathcal{V}^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{V}}^{\diamond}))$$

由于我们试图计算 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}\mathcal{V}(\widetilde{\ }\mathrm{V})_1$ 表示什么，因此可以利用 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}\mathcal{V}^{\diamond}(\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\diamond})$ 的可表示性得到结果。具体而言，映射 $\eta_B \to \mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}\mathcal{V}^{\diamond}(\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\diamond})$ 与覆盖 η 的 $\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}$-同伦等价 $B \to MD\colon B(B)$ 自然双射对应。明确地说，这些包括:

(1) 内部 Reedy 纤维化 $E,\ E' \twoheadrightarrow \eta_B \in \mathrm{Gl}(M)$

(2) 映射 $f\colon E \to E' \in_{\mathrm{Gl}(M)/\eta_B}$以及 $s,\ r\colon E' \rightrightarrows E \in_{\mathrm{Gl}(M)/\eta_B}$

(3) 同伦 $H^s\colon E \to \mathrm{Id}_B^{\mathrm{Gl}(M)}(E) \in_{\mathrm{Gl}(M)/\eta_B}$以及 $H^r\colon E' \to \mathrm{Id}_B^{\mathrm{Gl}(M)}(E') \in_{\mathrm{Gl}(M)/\eta_B}$，使得

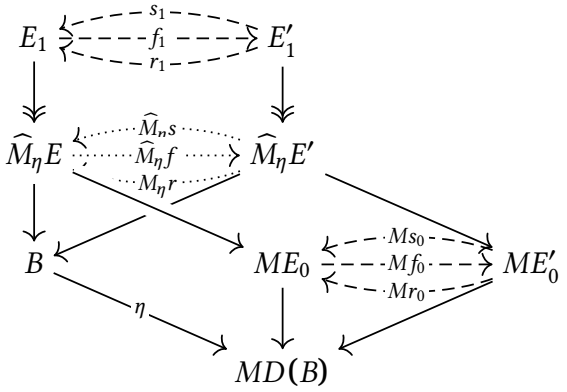
$$\mathrm{ev}_\partial H^s = (fs, \mathrm{id}) \qquad \mathrm{ev}_\partial H^r = (rf, \mathrm{id})$$

上述 0-分量分别给出映射 $f_0\colon E_0 \to E_0'$ 以及 $s_0,\ r_0$，它们在 $\mathbb{C}_0$ 中关于 DB 是纤维化的，同时还给出同伦 $H_0^s\colon E_0 \to \mathrm{Id}_{DB}(E_0)$ 和 $H_0^r\colon E_0' \to \mathrm{Id}_{DB}(E_0')$，使得

$$\mathrm{ev}_\partial H_0^s = (f_0 s_0, \mathrm{id}) \qquad \mathrm{ev}_\partial H_0^r = (r_0 f_0, \mathrm{id})$$

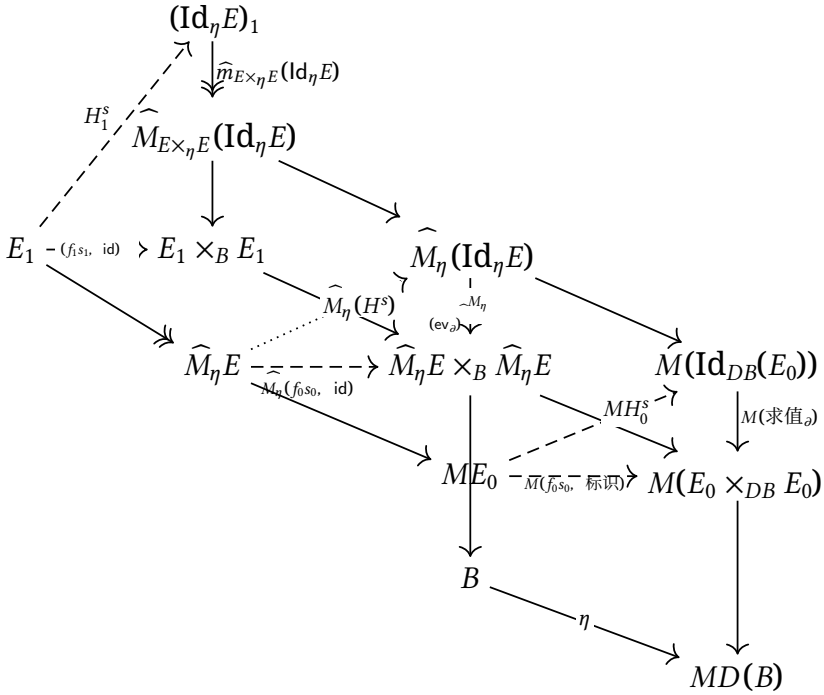
由于 $\widehat{M}(\mathrm{trv}M \quad {}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_0}{}^{\mathrm{Gl}(M)}_{\widetilde{\ }} \quad \widehat{M} \quad {}_{\mathrm{Gl}(M)} \quad {}^{\diamond}_{1} \quad {}^{0}_{\to})$ 是 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}\mathcal{V}(\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\diamond})$ 沿 $M(\mathrm{trv}): M(\mathrm{U}_0^{\diamond})(\mathrm{HIso}_{\mathcal{U}_0}(\mathrm{U}_0^{\diamond}))$ 的拉回，因此，要了解 (trv) 表示什么，就要知道当 0- 分量构成平凡等价时，- 分量的形式。

为此，我们先一般性地分析 1-分量。交换条件表明$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$，$f_1\colon E_1 \to E_1'$ 是一个覆于 $M_\eta(f)\colon M_\eta(E) \to M_\eta(E')$ 的映射，而它们都覆于 B；s，r 也同样如此。换言之，将 s，f，r 的 0-分量和 1-分量组合起来，可得以下图示



(s, f, r)

分析 H^s 的交换条件后可知，$H_1^s\colon E_1 \to (\mathrm{Id}_\eta E)_1$ 是一个映射$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$，覆盖 $M_\eta(H^s)\colon M_\eta E \to M_\eta(\mathrm{Id}_\eta E)$；其中映射 $(\mathrm{Id}_\eta E)_1 \longrightarrow M_\eta(\mathrm{Id}_\eta E)$ 经由边界求值的$\widehat{\quad}$相对匹配映射 $\widehat{m}_{E\times_\eta E}(\mathrm{Id}_\eta E)\colon (\mathrm{Id}_\eta E)_1 \twoheadrightarrow M_{E\times_\eta E}(\mathrm{Id}_\eta E)$ 分解。换言之，一旦 s，f 固定下来，H^s 就由使下图交换的虚线映射 H_0^s，H_1^s 唯一确定



(H^s)

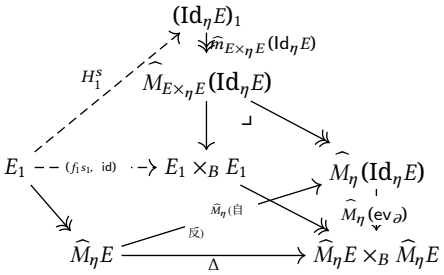
我们也可以对 H^r 进行同样的计算，从而得到相应的图。

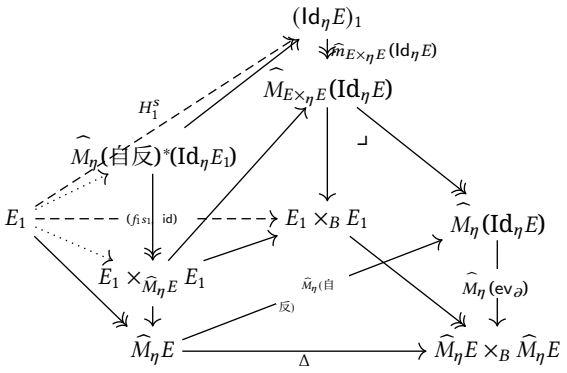
$\widehat{\quad}$但请记住，我们关心的是了解 $M(\mathrm{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})$ 的样子，也就是了解上述同伦等价 $\eta_B\colon B \to MD(B)$ 的 1-分量在 0-分量为平凡等价时的样子。因此，我们现在通过将所有

(s, f, r) 和 (H^s) 中的 0-分量替换为平凡等价中对应的分量来实现这一点。对 (s, f, r) 进行这种替换后，我们令 s_0, f_0, r_0 都为恒等（因此，特别是 $ME_0 = ME_0'$ 和 $M_\eta E = M_\eta E'$）。因此，$M_\eta s, M_\eta f, M_\eta r$ 也都是恒等。于是，s_1, f_1, r_1 位于 $M_\eta E$ 上的切片中。因此，(s, f, r) 现在是

$$\begin{array}{ccc} E_1 \underset{r_1}{\overset{s_1}{\rightleftarrows}} E_1' & & \\ \downarrow & & \\ \widehat{M}_\eta E & \longrightarrow & ME_0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\eta]{} & MD(B) \end{array} \qquad ((s,f,r)\text{-refl}_0)$$

现在我们对 (H^s) 的 0-分量进行同样的替换。除了将 s_0, f_0, r_0 的 0-分量以及拉回 $M_\eta s, M_\eta f, M_\eta r$ 全部替换为恒等映射外，我们还令 H_0^s 为 refl。于是，$M_\eta(f_0 s_0, \mathrm{id})$ 是对角线的拉回，而对角线仍是对角线；并且 $M_\eta(H^s)$ 是 $M_\eta(\mathrm{refl})$。聚焦于 B 上方的分量，我们得到左侧的图表。





右侧的图是由左侧图的内部构造出来的。我们可以先在底面中形成拉回，得到 $E_1 \times_{\widehat{M}_\eta E} E_1$，这就给出了一个连接映射 $E_1 \times_{\widehat{M}_\eta E} E_1 \longrightarrow M_{E\times_\eta E}(\mathrm{Id}_\eta E)$，沿着它可以拉回 $(\mathrm{Id}_\eta E)_1 \longrightarrow M_{E\times_\eta E}(\mathrm{Id}_\eta E)$，从而得到 $M_\eta(\mathrm{refl})^*(\mathrm{Id}_\eta E_1) \longrightarrow E_1 \times_{\widehat{M}_\eta E} E_1$。换句话说，我们刚刚拉回了

$$(\mathrm{Id}_\eta E)_1 \twoheadrightarrow \widehat{M}_{E\times_\eta E}(\mathrm{Id}_\eta E) \twoheadrightarrow \widehat{M}_\eta(\mathrm{Id}_\eta E)$$

沿着 $M_\eta(\mathrm{refl})$：$M_\eta E \to M_\eta(\mathrm{Id}_\eta E)$。在底面取拉回同样给出了连接映射 $E_1 \longrightarrow E_1 \times_{\widehat{M}_{E\times_\eta E}} E_1$，其中第一分量再次是 $f_1 s_1$：$E_1 \to E_1' \to E_1$。经过这一分解，我们可以看到，选择一个同伦 H_1^s：$E_1 \longrightarrow (\mathrm{Id}_\eta E)_1$，使得 $\mathrm{ev}_\partial H_1^s = (f_1 s_1,\ \mathrm{id})$：$E_1 \to E_1 \times_B E_1$ 如后方三角形中所示，与一个虚线映射 $E_1 \longrightarrow M_\eta(\mathrm{refl})^*(\mathrm{Id}_\eta E_1)$ 一一对应，该映射分解了所诱导的虚线映射 $(f_1 s_1,\ \mathrm{id})$：$E_1 \longrightarrow E_1 \times_{\widehat{M}_{E\times_\eta E}} E_1$。

但根据命题 5.20 (2)，可知 $M_\eta(\mathrm{refl})^*(\mathrm{Id}_\eta E_1) \twoheadrightarrow E_1 \times_{\widehat{M}_\eta E} E_1$ 实际上恰好就是 Id- 类型边界映射 $\mathrm{Id}^{\widehat{M}_\eta E}(E_1) \twoheadrightarrow E_1 \times_{\widehat{M}_\eta E} E_1$。因此，$(f_1 s_1, \mathrm{id})$：$E_1 \to$ 的一个分解

$E_1 \times_B E_1$ 经由 $(\mathrm{Id}_\eta E)_1 \to E_1 \times_B E_1$ 覆盖 B，恰好就是 $(f_1 s_1, \mathrm{id}) : E_1 \to E_1 \times_{\widehat{M}_\eta E} E_1$ 经由 $\mathrm{Id}^{\widehat{M}_\eta E}(E_1) \twoheadrightarrow E_1 \times_{\widehat{M}_\eta E} E_1$的一个分解。换言之，$s_1$ 是 $\widehat{f_1}$在 $M_\eta E$上的同伦截面。对 E' 重复同样的论证，可知 r_1 是 $\widehat{f_1}$在 $M_\eta E$上的同伦收缩。

总而言之，我们计算得到 $M(\mathrm{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})$ 表示如下预层：将每个$B \in \mathbb{C}_1$ 取为一个 π_0-纤维化，并且带有一个 Id_1-同伦同构，定义在$\eta_B^*(ME_0) = M_\eta E$之上，如（$(s, f, r)$-$\mathsf{refl}_0$）所示，这恰好就是该引理陈述中所声称的结果。—— ■

借助命题 5.25，我们现在知道 $M(\mathrm{trv}^{\mathsf{Gl}(M)})$ of (Gl-trv) 所表示的对象。为了证明命题 5.25，下一步是了解命题 5.25 中的 $\mathbb{P}_{M\pi_0^\Diamond}(\mathrm{HIso}^{\mathsf{Id}_1}\, \mathrm{U}_1^\Diamond(\ \widetilde{}\ \mathrm{U}_1^\Diamond))$ of (Gl-trv) 所表示的对象。为此，我们需要知道与 $M\pi_0^\Diamond : M\ \widetilde{}\ \mathrm{U}_0^\Diamond \longrightarrow M\mathrm{U}_0^\Diamond$ 相关联的多项式函子对 $\mathbb{C}_1$ 的对象做了什么。伴随对假设 $D \dashv M$ 也使得描述变得简单。

引理 5.27. 假设 $M : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 有左伴随 $D : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$。

对象 $Z \in \mathbb{C}_1$ 在与 $M\pi_0^\Diamond : M\ \widetilde{}\ \mathrm{U}_0^\Diamond \to M\,\mathrm{U}_0^\Diamond \in \mathbb{C}_1$ 相关联的多项式函子 $\mathbb{P}_{M\pi_0^\Diamond} : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_1$ 作用下的像表示预层

$$\left(\coprod_{E_0 \,:\, DB \to \mathcal{U}_0^\Diamond} \mathbb{C}_1(B.M(DB.E_0), Z) \right)_{B \in \mathbb{C}_1}$$

其中 $B.M(DB.E_0)$ 由以下连续的拉回得到

$$\begin{array}{ccccc} B.M(DB.E_0) & \longrightarrow & M(DB.E_0) & \longrightarrow & M\widetilde{\mathcal{U}}_0^\Diamond \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\eta]{} & MD(B) & \xrightarrow[ME_0]{} & M\mathcal{U}_0^\Diamond \end{array}$$

$\widetilde{}$，这里使用由宇宙结构 $\mathrm{U}_1 \to \mathrm{U}$ 选定的拉回。 — ♦

证明. 根据推前的泛性质，$\mathbb{P}_{M\pi_0^\Diamond}(Z)$ 表示将每个 $B \in \mathbb{C}_1$ 映为

$$\coprod_{B \to M\widetilde{\mathcal{U}}_0^\Diamond} \mathbb{C}_1(B \times_{M\mathcal{U}_0^\Diamond} M\widetilde{\mathcal{U}}_0^\Diamond, Z)$$

由伴随性，每个 $B \to M\ \widetilde{}\ \mathrm{U}_0^\Diamond$ 都唯一地经由单位 $\eta_B : B \to MD(B)$ 分解，其伴随转置为 $E_0 : DB \to \mathrm{U}_0^\Diamond$，如下所示

$$B \xrightarrow{\eta} MD(B) \xrightarrow{ME_0} M\mathcal{U}_0^\Diamond$$

结论由此得出，因为 M 作为右伴随也连续。 — ■

现在我们可以完成命题5.25的证明。

命题 5.25。假设 M: $\mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 有一个左伴随 D: $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$。

来自（Gl-trv）的相对匹配映射 $\widehat{m}(\mathrm{trv}^{\mathrm{Gl}(M)}) : \mathrm{V}_1^{\diamond} \to \widehat{M}(\mathrm{trv}^{\mathrm{Gl}(M)})$，是 trv

$_1 \quad {}_1^{\diamond} \to \quad {}^{\mathrm{Id}_1}_{{}_1^{\diamond}} \quad {}^{\sim}_{1}^{\diamond}$ $M\pi_0^{\diamond}$ M ${}^{\sim}_{0}^{\diamond} \to$: U HIso$\mathcal{U}$(U) 在与 : U U 相

$M \quad {}_0^{\diamond}$ ♦

关联的多项式函子下的像。—

证明。 该结果由引理 5.27 应用于 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_1}\mathcal{U}_1^{\diamond}(\ {}^{\sim}\mathcal{U}_1^{\diamond})$得出，该引理给出了相同的$\widehat{\ }$引理 5.26 所述的预层 $M(\mathrm{trv}^{\mathrm{Gl}(M)})$ 所表示的对象。 — ■

5.7.2 指向单价性的证明。 现在回顾一下 Reedy 纤维化的指向单价性陈述，因为我们可以证明它。

定理5.24。 假设

(1) M: $\mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}_1$ 有一个左伴随 D: $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_0$ (2) 在内（宇宙，Id 类型）对 $(\pi_{\diamond i}, \mathrm{Id}_i^{\diamond})$ 上存在一个 π_i-单值性结构。(3) 在环境Id 类型 Id_1 of π_1 o 上存在一个 Id_1-函数外延性结构。 f

1-分量。

于是，内部的（宇宙，Id-类型）对 $(\tau_{\diamond}, \mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)})$上存在一个指向的 τ-单值性结构，其中 $\tau, \tau^{\diamond}$来自定理 5.8，而 $\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}$来自定理 5.21。— ♦

证明。 由于 τ和 $\tau^{\diamond}$ 所具有的内涵类型论结构由命题 5.9、 5.11 和 5.13 以及定理 5.21 给出，根据推论 3.8 ，只需证明映射

$$\mathrm{trv}_{\mathrm{Gl}(M)} : \mathcal{V}^{\diamond} \to \mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}_{\mathcal{V}^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{V}}^{\diamond})$$

通过将构造 2.7 和 2.9 应用于内部泛 Reedy 纤维化 $\tau^{\diamond}$ 及定理 Id-类型 $\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}$ 所给出的内部 5.21 可一致地对左侧的$\sim\tau$提升： $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$。

根据引理 5.18 和 5.19，现在该问题等价于证明

$$(\mathrm{trv}_{\mathrm{Gl}(M)})_i : \mathcal{V}_i^{\diamond} \to (\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}_{\mathcal{V}^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{V}}^{\diamond}))_i$$

提升 u $\quad {}^{\sim}$在左侧相对于 τ: V $\to$ V $\in \mathrm{Gl}(M)$ 一致地提升，同时可以假设 tha t

$$\mathrm{trv}_i : \mathcal{U}_i^{\diamond} \to \mathrm{HIso}_{\pi_i^{\diamond}}(\mathrm{Id}_i^{\diamond}) \in \mathbb{C}_i$$

${}^{\sim}$在左侧相对于 π_i: $\mathrm{U}_i \to \mathrm{U}_i \in \mathbb{C}_i$ 一致地提升。0-分量的提升是显然的，因为 $\mathrm{Gl}(M) \to \mathbb{C}_0$ 保留所有逻辑结构，所以 $\mathrm{trv}^{\mathrm{Gl}(M)}$ 的 0- 分量就是 $\mathrm{trv}_0 : \mathrm{U}_0 \to \mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_0}\mathcal{U}_0(\ {}^{\sim}\mathrm{U}_0)$。

对于 1-分量，我们参考通过相对匹配映射进行的因式分解 $(\mathrm{trv}^{\mathrm{Gl}(M)})_1$ ，该映射来自 (Gl-trv)。

$$\mathcal{V}_1^{\diamond} \xrightarrow{\widehat{m}(\mathrm{trv}_{\mathrm{Gl}(M)})} \widehat{M}(\mathrm{trv}_{\mathrm{Gl}(M)}) \longrightarrow \mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}^{\diamond}_{\mathrm{Gl}(M)}}_{\mathcal{V}^{\diamond}}(\widetilde{\mathcal{V}}^{\diamond})_1$$

特别地，第二个映射是沿着被视为 $\mathbb{C}_1$ 中的映射的 $\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}^{\Diamond}_{\mathsf{Gl}(M)}\mathrm{V}^{\Diamond}(\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\Diamond})} \in \mathsf{Gl}(M)$ 对 $M(\mathrm{trv}_0)$ 的拉回。根据 Σ, Π, Id-structures 并结合推论 3.8，$\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}^{\Diamond}_{\mathsf{Gl}(M)}\mathrm{V}^{\Diamond}(\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\Diamond})} \in \mathsf{Gl}(M)$ 是 $\mathsf{Gl}(M)$ 的 Reedy 纤维化对象，因此它是 $\mathbb{C}_1$ 中的一个 π_1-纤维化。换言之，第二个映射 $\widehat{M}(\mathrm{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}) \longrightarrow \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}^{\Diamond}_{\mathsf{Gl}(M)}\mathrm{V}^{\Diamond}(\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\Diamond})_1}$ 是沿着一个 π_1-纤维化对 $M(\mathrm{trv}_0)$ 的拉回。但根据带基点的单值性，trv_0 可一致地对 π_0 提升，因此根据假设 5.2 (2)，$M(\mathrm{trv}_0)$ 可在 π_1 左侧一致地提升。因此，借助 Π-类型结构，$\widehat{M}(\mathrm{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}) \longrightarrow \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}^{\Diamond}_{\mathsf{Gl}(M)}\mathrm{V}^{\Diamond}(\widetilde{\ }\mathrm{V}^{\Diamond})_1}$ 也具有针对 π_1 的一致提升结构。

根据命题 5.25，第一个映射 $\widehat{m}$（$\mathrm{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}$）是平凡同伦等价的相对匹配映射，它是$\mathrm{trv}_1$ 在由π_1-纤维化 $\pi_1^{\Diamond}$所关联的多项式下的像。关于 $\mathbb{C}_1$ 的尖点单值性给出 trv_1 属于相对于 π_1的左类，因此由引理 $\widehat{m}$（$\mathrm{trv}^{\mathsf{Gl}(M)}$），将其应用于 $\mathbb{C}_1$的尖点函数性结构，可知它也属于左类。—— ■

6 宇宙范畴的逆图

现在我们证明，内涵类型论、尖点函数外延性和尖点单值性结构在构造逆图下保持稳定。

我们首先回顾逆范畴的定义。

定义 6.1。逆范畴 I 是一个范畴，其对象上存在一个由度函数 $\deg : \mathrm{ob}\,\mathrm{I} \to \mathbb{N}$ 给出的分级，使得如果 $f\colon i \to j \in \mathrm{I}$ 不是恒等映射，则 $\deg i > \deg j$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，记：

(1) $\mathrm{I}_{\leq n}$：由次数严格不大于 n的对象张成的 I 的全子范畴

(2) $\mathrm{I}_{=n}$：由次数恰为 n的对象张成的 I 的离散子范畴

(3) $\partial(i/\mathrm{I})$：i/I 的全子范畴，但不包含恒等映射。

— ♦

逆范畴理论的核心概念是余骨架及其导出的匹配构造，现回顾如下。

定义 6.2。设 I 是有限逆范畴，且 $\mathbb{C}$ 是有限完备范畴。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$(n+1)$ 阶余骨架 函子定义为沿 $\mathrm{I}_{\leq n} \hookrightarrow \mathrm{I}_{\leq n+1}$ 的限制函子的右伴随

$$\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}} \underset{(-)|_{\leq n}}{\overset{\mathsf{cosk}_{n+1}}{\underset{\top}{\rightleftarrows}}} \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}} \xrightarrow{(-)|_{=n+1}} \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}$$

第（$n+1$）阶匹配对象函子是复合映射

$$M_{n+1}(-) \coloneqq (\mathsf{cosk}_{n+1}\,-)|_{=n+1} : \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}$$

而（$n+1$）阶匹配映射是自然变换

$$m_{n+1}(-)\colon (-)|_{=n+1} \to M_{n+1}((-)|_{\leq n}) \in \mathsf{Cat}(\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}, \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}})$$

通过沿 $(-)|_{n+1}$ 限制余骨架伴随的单位得到。

对于每个 $i \in \mathbb{L}_{n+1}$，还可以得到位于 i 的匹配对象函子 和匹配映射，其定义是将 $\mathrm{ev}_i\colon \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}} \to \mathbb{C}^{\{i\}} \cong \mathbb{C}$ 应用于 M_{n+1} 和 m_{n+1}。也就是说，

$$M_i(-) \coloneqq M_{n+1}(-)_i\colon \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}} \to \mathbb{C}$$

and

$$m_i(-)\colon (-)_i \to M_i((-)|_{\leq n}) \in \mathsf{Cat}(\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}, \mathbb{C})$$

$-\blacklozenge$

为简化记号，当上下文明确其应用范围时，我们通常省略限制 $(-)|_{\leq n}$。于是，对于每个 $X \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}$ 以及 $i \in \mathbb{L}_{n+1}$，匹配对象就是极限

$$M_i X = \lim(\partial(i/\mathcal{I}) \to \mathcal{I} \xrightarrow{X} \mathbb{C})$$

而匹配映射 $m_i X\colon X_i \to M_i X$ 是由锥 $(X_f\colon X_i \to X_j)_{f\colon\ i \to j \in \partial(i/\mathcal{I})}$ 诱导出的唯一映射。

逆图表的归纳式构造方式也可以用粘合范畴表述如下。

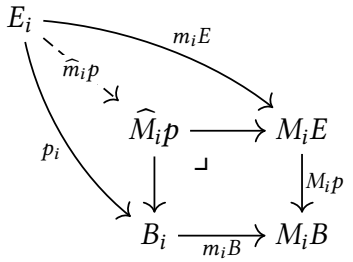
命题 6.3 ([FKL24，命题 4。7])。 若 $\mathbb{C}$ 是一个有限完备范畴，则对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有范畴等价

$$\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}} \simeq \mathsf{Gl}\left(\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}} \xrightarrow{M_{n+1}} \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}\right)$$

取 将每个 $B \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}$ 映射到绝对匹配映射 $m_{n+1}\colon\ B|_{=n+1} \to M_{n+1}(B|_{\leq n})$。 $-\blacksquare$

我们的目标是从一个内涵型类型论的宇宙模型 $\mathbb{C}$ 出发，在由形状为 I 的逆图构成的范畴 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 上构造另一个宇宙模型，并证明所诱导的图模型具有带基点的函数外延性和带基点的单值性。图模型 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 中的类型旨在刻画类型望远镜，其中的类型满足由形状 I 指定的某些定义性相互依赖关系。此类相互依赖关系通过 Reedy 纤维化形式化定义，所用工具为绝对匹配对象和相对匹配映射；下面我们将回顾这些概念。

定义 6.4. 给定映射 $p\colon\ E \to B \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$，其相对匹配对象 是位于 ∂B_i 上的对象 $M_i p \to B_i \in \mathbb{C}/_{B_i}$，它由沿着 $m_i B$ 对 $M_i p$ 进行基变换得到；其相对匹配$\widehat{\ }$映射 则是连接映射 $\widehat{m}_i p\colon\ E_i \to M_i p$ 到拉回中的映射，如下所示。



设 $\pi\colon \widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U} \in \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 的万有映射。那么，映射 $p\colon E \to B \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 是一个 *Reedy*π纤维化，当且仅当它的所有相对匹配映射 $\widehat{m}_i p$ 都是 π-纤维化。

一个（弱）分类 *Reedy* π-纤维化 是一个映射 $\pi^{\mathcal{I}}\colon \widetilde{\mathrm{U}}^{\mathcal{I}} \to \mathrm{U}^{\mathcal{I}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$，满足：$E \to B$是一个 $\pi_{\mathcal{I}}$-纤维化，当且仅当它是一个 Reedy π-纤维化。— ⧫

在本节余下部分，我们固定一个 Reedy 范畴 I，以及一个具有全局映射的有限完备范畴 $\mathbb{C}$

$$\pi\colon \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \in \mathbb{C}$$

配备一个内部宇宙

$$\pi^{\diamond}\colon \widetilde{\mathcal{U}}^{\diamond} \to \mathcal{U}^{\diamond} \in \mathbb{C}$$

我们还假设 π和 $\pi^{\diamond}$配备了分别记作 Unit Σ, Π、Id-type、Unit Σ, Π、Id 以及 Unit$^{\diamond}$, $\Sigma^{\diamond}$, $\Pi^{\diamond}$、Id$^{\diamond}$ 的结构。

首要任务是证明，$\mathbb{C}$ 这些类型论结构全部都能转移到相应的逆图表范畴结构上 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 其中 $\mathcal{I}$ 是逆范畴。鉴于命题 6.3将逆图表范畴表示为粘合范畴，我们通过应用命题 5.9、5.11和 5.13 以及定理 5.21中的一系列结果来完成这一任务。然而，这些结果都依赖于匹配对象函子的“右 Quillen”性质，正如假设 5.2所述。因此，我们首先给出一系列结果，为验证假设 5.2 对每个 M_{n+1}都成立。

引理 6.5 ([KL25a，命题 2。4])。固定 $i \in \mathcal{I}_{=n+1}$。函子 $M_i\colon \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}} \to \mathbb{C}$ 计算 i 处的绝对匹配对象，将 Reedy π-纤维化映为 π-纤维化，并将 Reedy $\pi^{\diamond}$- 纤维化映为 $\pi^{\diamond}$-纤维化。— ■

引理 6.6. 设 $\tau\colon \widetilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{V} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}$ 是一个分类 Reedy π-纤维化。

固定 $i \in \mathrm{I}_{n+1}$。对于每个 $B \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}}$ 以及映射 $s\colon E \to Y \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}}/_B$，在 Reedy π-纤维化切片范畴 over B 中，都存在一个映射

$$(s \overset{\square}{}_{B} (B \times \tau)) \longrightarrow (M_i s \overset{\square}{}_{M_i B} (M_i B \times \pi))$$

满足以下条件：对于每个 $f\colon B' \to B$，下图交换。

$$\begin{array}{ccc} (s \overset{\square}{}_{B} (B \times \tau)) & \longrightarrow & (M_i s \overset{\square}{}_{M_i B} (M_i B \times \pi)) \\ \downarrow\text{[KL25b, Construction 3.2]} & & \downarrow\text{[KL25b, Construction 3.2]} \\ (f^* s \overset{\square}{}_{f^* B} (f^* B \times \tau)) & \longrightarrow & (M_i(f^* s) \overset{\square}{}_{M_i B'} (M_i B' \times \pi)) \end{array}$$

— ⧫

证明。根据 [KL25a，命题 2，1], 映射 $M_i E \to M_i B$ 作为一个位于 $M_i B$ 之上的对象，可视为图表的极限

$$(\mathrm{proj}_f^* E_j \to M_i B)_{f\colon i \to j \in \partial(i/\mathcal{I})}$$

在 $M_i B$中，其中每个 投影$f\colon M_i B \to B_j$都是匹配对象锥的极限腿。在 [KL25a，命题 2。4], 中证明了，E 的 Reedy 拟纤维性会导致图表 $(\text{投影}_f^* E_j \to M_i B)_{f\colon i \to j \in \partial(i/\mathrm{I})}$ 在 $M_i B$ 上的 Reedy 拟纤维性。此外，[KL25a，命题 2。4] 证明了

每个 $E_j \to B_j$都是一个 π-纤维化，因此 $(\mathrm{proj}_f^* E_j \to M_i B)_{f\colon\ i\to j\in\partial\,(i/\mathrm{I})}$ 是一个取值于 M_iB上的纤维化切片中的 Reedy 拟纤维图表。对 $M_iY \to M_iB$应用相同的论证，我们看到它也是一个 Reedy 拟纤维图表的极限

$$(\mathrm{proj}_f^* Y_j \to M_i B)_{f\colon i\to j\in\partial(i/\mathcal{I})}$$

在 M_iB 上的纤维化切片中取值的 over M_iB。

因此， $M_is\colon M_iE \to M_iY \in \mathbb{C}/_{M_iB}$ 是映射

$$M_i s = \lim_{f\colon i\to j\in\partial(i/\mathcal{I})} (\mathrm{proj}_f^* E_j \xrightarrow{\mathrm{proj}_f^* s} \mathrm{proj}_f^* Y_j)$$

通过将极限函子应用于取值于 M_iB 上纤维化对象的 Reedy 纤维化图之间的自然变换而得到。但 Unit Σ， Π， Id-型结构 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}$ 的每个纤维化切片上都赋予了类型论纤维化范畴结构。因此，根据 [Shu15c，引理 11，8], 可知 M_is 可提升至 π。通过参照 [Shu15c] 中涉及的计算，可以直接验证该引理陈述中的兼容性条件。— ■

引理 6.7。对于任意集合 S，将其视为离散范畴，常值映射取值于 π，也记作

$$\pi\colon \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \in \mathbb{C}^S$$

是等配备一个由取值于 $\pi^\diamond$的常值映射给出的内部宇宙，也记作 d

$$\pi^{\mathcal{I}}\colon \widetilde{\mathcal{U}}^\diamond \to \mathcal{U}^\diamond \in \mathbb{C}^S$$

它们也都具有 Unit Σ、 Π和Id-类型结构，这些结构由 $\mathbb{C}$的相应逐点结构定义。— ♦

证明。显然。 — ■

我们可以通过迭代粘合，证明 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 的各种类型论结构在形成逆图时得以保持。对于指向单值性，由于第 5.7 节命题5.25在技术上依赖匹配对象函子的左伴随，因此会出现一些复杂情况。回顾定义 6.2 ，匹配对象函子 $M_{n+1}\colon \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\le n}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\le n+1}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}$ 定义为余骨架函子$\mathrm{cosk}_{n+1}\colon \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\le n}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\le n+1}}$ 与沿 $\mathcal{I}_{=n+1} \hookrightarrow \mathcal{I}_{\le n+1}$的限制函子的复合。尽管 cosk_{n+1} 按定义是右伴随，但限制函子 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\le n+1}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}$ 不一定有左伴随，除非 $\mathbb{C}$ 是余完备的。幸运的是，可以通过转到 $\mathbb{C}$的自由余完备化来解决这个问题，从而仍能为逆范畴得到指向单值性。

定理 6.8. 对于任意有限逆范畴 I，图表范畴 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 也存在一个

$$\pi^{\mathcal{I}}\colon \widetilde{\mathcal{U}}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{U}^{\mathcal{I}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$$

配备内部宇宙的泛映射

$$(\pi^{\mathcal{I}})^\diamond\colon (\widetilde{\mathcal{U}}^{\mathcal{I}})^\diamond \to (\mathcal{U}^{\mathcal{I}})^\diamond \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$$

使得

(1) 映射 $E \to B \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 是 π-Reedy 纤维化（分别为 $\pi^{\diamond}$-Reedy 纤维化），当且仅当它是 $\pi^{\mathcal{I}}$-纤维化（分别为 $(\pi^{\mathcal{I}})^{\diamond}$-纤维化）。(2) $\pi^{\mathcal{I}}$ 和 $(\pi^{\mathcal{I}})^{\diamond}$ 均配备了 Unit Σ, Π, Id-类型结构。(3) 如果 π 上的 Id-类型结构具有 pointed 函数外延性结构，那么由此诱导的 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 上的 Id-类型结构也具有该结构。(4) 假设 $\mathbb{C}$ 是余完备的。如果 π 上的 Id-类型结构具有 pointed 函数外延性结构，且 $\mathbb{C}$ 在 $(\pi^{\diamond}, \mathrm{Id}^{\diamond})$ 上具有 pointed π-单值性结构，那么 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 在 $((\pi^{\diamond})^{\mathcal{I}}, (\mathrm{Id}^{\diamond})^{\mathcal{I}})$ 上具有 $\pi^{\mathcal{I}}$-单值性结构，其中 $(\mathrm{Id}^{\diamond})^{\mathcal{I}}$ 是 $(\pi^{\diamond})^{\mathcal{I}}$ 上诱导的 Id-类型结构。

– ♦

证明。由于 I 是有限的，只需对每个 $\mathrm{I}_{\leq n}$，通过对 n进行归纳来证明该结果。

若 $n = 0$，则由引理 6.7 可直接得到该结果。现在假设我们已在 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}}$ 上建立了这样的宇宙范畴结构，目标是在 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}$上建立这些结构。于是，结合引理 6.5 和 6.6，以及引理 6.7 给出的 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}$ 上的逐点宇宙范畴结构，$(n+1)$-阶匹配对象函子 M_{n+1}: $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}$ 满足假设 5.2。因此，命题 5.9、5.11 和 5.13 以及定理 5.21 中的一系列结果，为 $\mathsf{Gl}(M_{n+1})$ 配备了一个通用 Reedy 纤维化，并配有一个内部通用 Reedy 纤维化，以及两个通用映射上的 Unit Σ, Π、Id-类型结构。注意到命题 6.3 中的等价 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}} \simeq \mathsf{Gl}(M_{n+1})$ 保持并反映 Reedy 纤维化与推前，这些通用结构便可转移到 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}$ 上。这就证明了 (1) 和 (2)。

定理5.23还通过归纳，在 Id-型上为 $\mathsf{Gl}(M_{n+1})$ 建立了一个带基点的函数外延结构，条件是该结构存在于 $\mathbb{C}$ 中，因为它也存在于 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{=n+1}}$ 中；此处由引理 6.7可知。该带基点的函数外延结构也可通过命题 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}}$中的等价 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_{\leq n+1}} \simeq \mathsf{Gl}(M_{n+1})$ 传递过去，因为命题 6.3 将其表述为一个结构化提升，因而在范畴等价下保持稳定。这就证明了 (3)。

最后，对于 (4)，我们使用定理 5.24 以及如下事实：的余完备性 $\mathbb{C}$ 为匹配对象函子提供了一个左伴随 M_{n+1}。 — ■

为了得到最后的结果，我们转入预层范畴，从而去掉定理 6.8 (4)中的余完备性假设。

$\widehat{\ }$引理 6.9。在 Yoneda 嵌入 $\mathbb{C} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 下，

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$(1) 映射 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U} \in \mathbb{C}$ 也配备了一个内部宇宙，由映射$\pi^{\diamond}\colon \widetilde{\mathrm{U}}^{\diamond} \to \mathrm{U}^{\diamond} \in \widehat{\mathbb{C}}$给出。根据 Yoneda 嵌入，$\pi, \pi^{\diamond} \in \widehat{\mathbb{C}}$也继承了它们在 $\mathbb{C}$ 中具有的 Unit Σ, Π, Id 类型结构。

$\widehat{\ }$(2) 如果 $\mathbb{C}$ 在 (π_0, Id_0) 上具有一个 pointed π-单值性结构，那么 $\mathbb{C}$也具有这样的结构。

(3) 若 π 在 $\mathbb{C}$ 中具有带基点的 Id-函数外延结构，则 π 在 $\widehat{\mathbb{C}}$.

– ♦

证明。Yoneda 嵌入是连续的，并且保留推前。因此， $\mathbb{C}$ 在 π 上的$\widehat{\ }$Unit Σ， Π-型结构会在 $\mathbb{C}$中诱导出 π 上的相应结构。

对于Id-类型结构，我们回顾一下，J-消去结构恰好是一个拉回-Hom 映射的截面，这一点由 [KL25b，推论 1 给出。7], 因此J-消去结构$\widehat{\ }$预Id-类型结构在 $\mathbb{C}$ 中也会导出相应的 $\mathbb{C}$。同样的论证也适用于尖点单值性和尖点函数外延性，因为它们同样是通过定义 3.4 和 4.1 中的统一提升结构来定义的。—— ■

定理 6.10。对于任意有限逆范畴 I，图范畴 $\mathbb{C}^I$ 也具有一个通用 Reedy π-纤维化

$$\pi^I : \widetilde{\mathcal{U}}^I \to \mathcal{U}^I \in \mathbb{C}^I$$

它带有一个内部通用 Reedy $\pi^\diamond$-纤维化

$$(\pi^\diamond)^I : (\widetilde{\mathcal{U}}^\diamond)^I \to (\mathcal{U}^\diamond)^I \in \mathbb{C}^I$$

使得

(1) π^I和 $(\pi_I)^\diamond$都配备了 Unit Σ， Π，Id-类型结构。(2) 如果 $\mathbb{C}$在 $(\pi^\diamond$，$\mathrm{Id}^\diamond)$ 上具有尖点 π-单值性结构，且 π具有尖点 Id-函数外延性结构，那么 $\mathbb{C}^I$在 $((\pi^\diamond)^I$，$(\mathrm{Id}^\diamond)^I)$ 上具有尖点 π_I-单值性结构，其中 $(\mathrm{Id}^\diamond)^I$是 $(\pi^\diamond)^I$ 上诱导的 Id-类型结构。

– ♦

证明。由定理 6.8 (1) 和(2)， $\mathbb{C}^I$ 具有一个通用 Reedy π-纤维化 π^I，并带有一个内部通用 Reedy $\pi^\diamond$-纤维化 $(\pi^\diamond)^I$，其中两个通用映射分别配备了 Unit Σ,Π,Id-类型结构 $\mathrm{Unit}^I, \Sigma^I, \Pi^I$, Id^I 以及 $(\mathrm{Unit}^\diamond)^I, (\Sigma^\diamond)^I, (\Pi^\diamond)^I, (\mathrm{Id}^\diamond)^I$。

$\widehat{\ }$将定理 6.8 应用于 $\mathbb{C}$，并采用引理 6.9 中由 Yoneda 嵌入给出的 $\mathbb{C}$ 上的逻辑结构，可得 $\widehat{\mathbb{C}}^I$ 上的通用 Reedy π-纤维化 $\pi\mathrm{I}$，以及一个内部通用 Reedy $\pi^\diamond$-纤维化 $(\pi\blacklozenge)^I$，其中两个通用映射分别配备了 Unit Σ,Π、Id-类型结构 $\mathrm{Unit}^I, \Sigma^I, \Pi^I, \mathrm{Id}^I$ 以及 $(\mathrm{Unit}^\diamond)^I, (\Sigma^\diamond)^I, (\Pi^\diamond)^I, (\mathrm{Id}^\diamond)^I$。此外，在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的情形下，由定理 6.8 (4)，还存在一个定义在 $((\pi\blacklozenge)^I, (\mathrm{Id}^\diamond)^I)$ 上的 πI-单值性结构。

然而，根据 [KL25a中逆图表范畴内推前的公式，引理 2.2] 以及 Yoneda 嵌入保留推前这一事实 [Uem23，引理 6.6(3)]，，可以看出 $\mathbb{C}^I \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}}^I$ 也保留推前。因此，考察第5 节中的构造可知，泛映射 $\pi_I, (\pi^\diamond)^I \in \widehat{\mathbb{C}}^I$ 是 $\pi_I, (\pi^\diamond)^I \in \mathbb{C}^I$ 在 $\mathbb{C}^I \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}}^I$ 下的像；同理，Unit Σ,Π,Id 类型结构也是如此，因为它们的构造仅~~依赖于拉~~回和推前。特别是，映射

$$\mathrm{trv}^I : (\pi^\diamond)^I \longrightarrow \mathsf{HIso}^{(\mathrm{Id}^\diamond)^I}_{(\mathcal{U}^\diamond)^I}((\widetilde{\mathcal{U}}^\diamond)^I) \in \mathbb{C}^I$$

经 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}}^{\mathcal{I}}$ 映射后得到

$$\underline{\mathsf{trv}^{\mathcal{I}}} : \underline{(\pi^{\diamond})^{\mathcal{I}}} \longrightarrow \mathsf{Hlso}^{(\mathsf{Id}^{\diamond})^{\mathcal{I}}}_{\underline{(\mathcal{U}^{\diamond})^{\mathcal{I}}}}(\underline{(\widetilde{\mathcal{U}}^{\diamond})^{\mathcal{I}}}) \in \widehat{\mathbb{C}}^{\mathcal{I}}$$

因此， $\pi_{\mathcal{I}}$-单值性在 $((\pi_{\diamond})^{\mathcal{I}}, (\mathsf{Id}^{\diamond})^{\mathcal{I}})$ 上成立，这是由 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}}^{\mathcal{I}}$ 的全忠实性推出的，因为对于任意 $X \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$， $X \times \mathsf{trv}^{\mathcal{I}}$ 相对于 $\pi^{\mathcal{I}}$ 的所有提升问题都可以在 $\widehat{\mathbb{C}}^{\mathcal{I}}$ 中解决，而且解实际上已经位于 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ 中。— ■

参考文献

[ABCHHL21] Carlo Angiuli、Guillaume Brunerie、Thierry Coquand、Robert Harper、Kuen-Bang Hou（Favonia）和 Daniel R. Licata。《笛卡尔立方类型论的语法与模型》。载于：《计算机科学数学结构》31.4（2021），第 424–468 页。[AHH18] Carlo Angiuli、Kuen-Bang Hou（Favonia）和 Robert Harper。《笛卡尔立方计算类型论：以路径与等式进行构造性推理》。载于：第 27 届 EACSL 计算机科学逻辑年会（CSL 2018）。第 119 卷。莱布尼茨信息学国际会议论文集（LIPIcs）。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心，2018 年，6:1–6:17。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2018.6。[Awo18] Steve Awodey。《同伦类型论的自然模型》。载于：《计算机科学数学结构》28.2（2018），第 241–286 页。网址：https://doi.org/1 0.1017/S0960129516000268。[BL11] Andrej Bauer 和 Peter LeFanu Lumsdaine。《单值性公理蕴含函数外延性的 Coq 证明》。2011 年。网址：https://ncatlab.org/nlab / files/BauerLumsdaineUnivalence.pdf。[CCHM15] Cyril Cohen、Thierry Coquand、Simon Huber 和 Anders Mörtberg。《立方类型论：对单值性公理的一种构造性解释》。载于：FLAP 4（2015），第 3127–3170 页。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/docum ent/10.4230/LIPIcs.TYPES.2015.5。[Cis19] Denis-Charles Cisinski。《高阶范畴与同伦代数》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2019 年。网址：https://cisinski.app.uni-regensburg.de/CatLR.pdf。[Dyb96] Peter Dybjer。《内在类型论》。载于：《证明与程序的类型》。施普林格柏林海德堡，1996 年，第 120–134 页。网址：https://www.cse.chalmers.se/~pet erd/papers/InternalTT.pdf。[FKL24] Marcelo Fiore、Krzysztof Kapulkin 和 Yufeng Li。《逆函子范畴上的逻辑结构》。2024 年。arXiv：2410。11728 [math.CT]。[GK13] Nicola Gambino 和 Joachim Kock。《多项式函子与多项式单子》。载于：《剑桥哲学学会数学学报》154.1（2013）。网址：https://doi.org/doi:10.1017/S0305004112000394。[Hov99] Mark Hovey。《模型范畴》。第 63 卷。数学调查与专著。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1999 年。网址：https://b ookstore.ams.org/surv-63-s。

[Jel24] Vít Jelínek. “Type theory and its semantics”. Master’s thesis. Brno: Masaryk University, Faculty of Informatics, 2024. URL: https://is.muni.cz/th/fl75q/%7D.

[KL21] Krzysztof Kapulkin and Peter LeFanu Lumsdaine. “The Simplicial Model of Univalent Foundations (after Voevodsky)”. In: *Journal of the European Mathematical Society* 23.6 (2021), pp. 2071–2126. URL: https://ems.press/journals/jems/articles/274693.

[KL25a] Chris Kapulkin and Yufeng Li. *Pushforwards in Inverse Homotopical Diagrams*. 2025. arXiv: 2506.04472 [math.CT]. URL: https://arxiv.org/abs/2506.04472.

[KL25b] Krzysztof Kapulkin and Yufeng Li. *A Toolkit for Structured Lifts*. 2025. arXiv: 2512.14988 [math.CT]. URL: https://arxiv.org/abs/2406.18497.

[LOPS18] Daniel R. Licata, Ian Orton, Andrew M. Pitts, and Bas Spitters. “Internal Universes in Models of Homotopy Type Theory”. In: *3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018)*. Ed. by Hélène Kirchner. Vol. 108. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany, 2018, 22:1–22:17. URL: https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSCD.2018.22.

[Nie82] Susan B. Niefield. “Cartesianness: topological spaces, uniform spaces, and affine schemes”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 23.2 (1982), pp. 147–167. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404982900044.

[OP16] Ian Orton and Andrew M. Pitts. “Axioms for Modelling Cubical Type Theory in a Topos”. In: *25th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2016)*. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2016, 24:1–24:19. URL: https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2016.24.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Vol. No. 43. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[Shu15a] Michael Shulman. *Reedy categories and their generalizations*. 2015. arXiv: 1507.01065 [math.AT]. URL: https://arxiv.org/abs/1507.01065.

[Shu15b] Michael Shulman. “The univalence axiom for elegant Reedy presheaves”. In: *Homology, Homotopy and Applications* 17.2 (2015), pp. 81–106. URL: https://dx.doi.org/10.4310/HHA.2015.v17.n2.a6.

[Shu15c] Michael Shulman. “Univalence for inverse diagrams and homotopy canonicity”. In: *Mathematical Structures in Computer Science* 25.5 (2015), pp. 1203–1277. URL: http://doi.org/10.1017/S0960129514000565.

[Shu17] Michael Shulman. “Univalence for inverse EI diagrams”. In: *Homology, Homotopy and Applications* 19.2 (2017), pp. 219–249. URL: https://dx.doi.org/10.4310/HHA.2017.v19.n2.a12.

[Shu19] Michael Shulman. *All $(\infty, 1)$-toposes have strict univalent universes*. 2019. arXiv: 1904.07004 [math.AT]. URL: https://arxiv.org/abs/1904.07004.

[Uem23] Taichi Uemura. “A general framework for the semantics of type theory”. In: *Mathematical Structures in Computer Science* 33.3 (2023), pp. 134–179. URL: https://doi.org/10.1017/S0960129523000208.

[Uni13] 单价基础计划。《同伦类型论：数学的单价基础》。高等研究院：https://homotopytype theory.org/book，2013 年。[Voe15a] Vladimir Voevodsky。《宇宙范畴定义的 C-系统中的 Martin-Löf 恒等类型》。2015 年。arXiv：1505.06446 [math.CT]。网址：https://arxiv.org /abs/1505.06446。[Voe15b] Vladimir Voevodsky。《由宇宙范畴定义的 C-系统》。载于：《范畴论与应用》30.37（2015），第 1181–1214 页。网址：http://www.t ac.mta.ca/tac/volumes/30/37/30-37abs.html。[Voe17] Vladimir Voevodsky。《由宇宙范畴定义的 C-系统上的（Π，λ）-结构》。载于：《范畴论与应用》32.4（2017），第 113–121 页。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/32/4/32-04abs.html。