arXiv:2512.16751v1 [math.CA] 18 Dec 2025

傅里叶比：紧支撑测度的不确定性、限制与逼近

A. IOSEVICH、Z. LI、E. PALSSON 和 A. YAVICOLI

Abstract. 我们引入并系统研究紧支撑博雷尔测度的傅里叶比的连续类比。对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的测度 μ 和 $f \in L^2(\mu)$，我们将傅里叶比定义为

$$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) = \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)},$$

其中 $X_{p,\mu,R}(f)$ 是尺度为 R 的正则化傅里叶变换的 L^p 范数。这个量在 L^1 与 L^2 傅里叶信息之间进行插值，是连接不确定性原理、傅里叶限制理论和三角多项式逼近的基本参数。

我们的首要贡献是提出一个分形不确定性原理（定理 3.3），它根据 $f\mu$ 的空间支撑和频率支撑的覆盖数，对 $\mathcal{FR}_{\mu,R}(f)$ 给出双侧界。这进一步导出在自然几何条件下的精确信号恢复结果（定理 3.5）。

其次，我们证明，傅里叶比小意味着能够高效地进行低次三角逼近：平滑化测度 $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 可以在 L^1、 L^2或 L^∞中由一个三角多项式逼近，其次数上界可由$\mathcal{FR}_{\mu}$显式给出 $_R(f)$ （定理4.1、4.4和4.6）。

第三，我们通过限制理论揭示确定性情形与随机情形之间的鲜明差异。对于圆上的弧长测度，我们证明$\mathcal{FR}_{\sigma,R}(f) \lesssim R^{-1/4}$, 而对于维数为 1 的 Laba–Wang 随机康托测度，我们证明次多项式下界$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) \gtrsim R^{-\epsilon}$对任意 $\epsilon > 0$成立（定理5.3）。因此， $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 无法在 L^2 中以固定精度由次数为$o(R^2)$的三角多项式逼近，这与曲线情形形成鲜明对比。

最后，在凸几何中，我们证明，凸体上表面测度的多项式逼近次数由其外向单位法向量集合的上闵可夫斯基维数决定（推论6.2）。

这些结果统一了离散与连续傅里叶分析，表明傅里叶比率是连接几何测度论、调和分析与逼近论的核心对象。

Contents

1. 引言 31.1. 核心问题与主要定义 31.2. 主要贡献概述 3

日期：2025年12月19日。A. I. 的部分研究经费由美国国家科学基金会资助（NSF DMS - 2154232）。A. Y. 的部分研究经费由加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）（GR030571 和 GR030540）资助。

1.3. 联系与更广泛的背景 5 1.4. 本文结构 5 1.5. 符号与约定 5 2. 先前结果 6 3. 傅里叶比率的上下界 11 3.1. 傅里叶比率的一个上界与分形不确定性原理 12 3.2. L^1 集中不能被 L^2 集中取代 13 3.3. 信号恢复的应用 13 4. 通过随机傅里叶采样进行逼近 14 4.1. 本节结果证明背后主要思路的阐述 16 5. 限制理论与傅里叶比率 18 6. 凸几何的应用 20 7. 与离散傅里叶比率理论的比较 22 7.1. 下界 22 7.2. 上界与不确定性原理 22 7.3. 三角多项式逼近 23 7.4. 随机与确定性例子 23 7.5. 总结 23 8. 结果总结与进行中的工作 24 8.1. 开放问题 25 9. 主要结果的证明 25 9.1. 命题 3.1 的证明 25 9.2. 定理 3.3 的证明 26 9.3. 命题 3.4 的证明 26 9.4. 定理 4.1 的证明 29 9.5. 定理 4.4 的证明 30 9.6. 定理 4.6 的证明 32 9.7. 定理 5.3 的证明 33 9.8. 命题 5.4 的证明 34 9.9. 定理 6.1 的证明 35 9.10. 推论 6.2 的证明 36

参考文献 38

1. Introduction

离散信号 $h\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 的傅里叶变换之 L^1-L^2 比率（即傅里叶比）定义为

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{h}(m)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{h}(m)|^2\right)^{1/2}},$$

它已成为衡量伪随机性与结构的敏感指标 [1]。Talagrand [14] 和 Bourgain [2] 的经典不等式表明，集中在随机子集上的函数通常具有较大的傅里叶比，而较小的比率则意味着该信号可以用稀疏三角多项式很好地近似。一个根本问题是，这种离散现象是否反映了连续调和分析中的更广泛原理。

1.1. 核心问题与主要定义。 将这一理论推广到欧几里得空间会立即遇到一个障碍：对于一般的博雷尔测度 μ，对象 $f\mu$ 可能不可积，从而无法直接类比。本文的主要贡献是通过引入傅里叶变换的尺度相关正则化来解决这一问题，由此得到一个稳健的连续傅里叶比，既能刻画 μ 的几何性质，也能体现 f的解析性质。

设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的紧支撑博雷尔测度，且 $f \in L^2(\mu)$。设 ψ 是一个光滑的紧支撑逼近恒等算子，满足 $\int\psi = 1$，并定义 $\psi_\delta(x) = \delta^{-d}\psi(x/\delta)$。我们研究傅里叶变换在尺度 R 处的正则化 L^p-范数：

$$X_{p,\mu,R}(f) := \left(R^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\widehat{(f\mu)*\psi_{R^{-1}}}(\xi)\right|^p d\xi\right)^{1/p}, \quad p\in[1,\infty). \tag{1.1}$$

f 的**傅里叶比率**（相对于 μ，尺度为 R）为

$$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) := \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)}. \tag{1.2}$$

对于所有 $f\in L^2(\mu)$，该量都有定义，并继承了其离散前身的关键不变性和缩放性质，同时与 $\mathrm{spt}(\mu)$ 的 R^{-1}-尺度几何密切相关。

1.2. 主要贡献概述。我们提出了四组相互关联的结果，确立了傅里叶比率在分析学中的核心地位。

1.2.1. 分形不确定性原理与精确恢复。 我们证明，$\mathcal{FR}_{\mu,\,R}(f)$ 介于由 f 的空间支撑和 $f\mu$的频率集-中程度所决定的几何量之间。

- **几何下界（命题 3.1）：** 对于任意 f,

$$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) \gtrsim \frac{1}{\sqrt{R^d |E_f^{R^{-1}}|}} \approx \frac{1}{\sqrt{\#\{R^{-1}\text{-balls covering supp}(f)\}}}.$$

- **通过 L^1 集中（定理3.3）：** 若 $(f\mu)_{R^{-1}}$ 在集合 L^1上是 X-集中态，则

$$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) \lesssim \sqrt{\frac{|X \cap B_R|}{R^d}}.$$

- **分形不确定性原理：** 结合以上结果可得

$$(1-\eta)^2 \lesssim |E_f^{R^{-1}}| \cdot |X \cap B_R|,$$

这是 Bourgain–Dyatlov 框架的连续类比。当空间支撑和频率支撑足够稀疏时，即使缺失某些高频数据，也能实现**精确的信号恢复**（定理3.5）。

1.2.2. 低次三角多项式逼近。较小的傅里叶比意味着平滑化测度$(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 具有较低的解析复杂度。

- L^2 **逼近（定理4.1）：** 对于任意 $\eta > 0$，都存在一个三角多项式 P，其

$$\|(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P\|_2 \leqslant \eta \|(f\mu) * \psi_{R^{-1}}\|_2$$

且次数不超过$\eta^{-2}(R^d \cdot \mathcal{FR}_{\mu,\ R}(f)^2 - 1)$。类似结果也适用于 L^1（定理4.6）和 L^∞（定理4.4）。

- 这种近似具有构造性，通过**随机傅里叶采样方案** 按照分布 $|(f\mu)_{R^{-1}}|$选择频率。

1.2.3. 限制理论与确定性—随机二分。 傅里叶比率能鲜明地区分出支持经典限制估计的测度与源自随机分形构造的测度。

- **确定性曲率（圆）：** 对于 S^1 上的弧长测度 σ，以及支撑在长度为 $R^{-1/2}$, 的圆弧上的 f

$$\mathcal{FR}_{\sigma,R}(f) \lesssim R^{-1/4}$$

（定理5.3），反映了曲率所导致的多项式傅里叶衰减。

- **随机分形（Laba–Wang）：** 对于他们在 $\mathbb{R}^2$ 中的维数为 1 的随机康托尔测度 μ，以及任意 $f \geqslant 0$,

$$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) \gtrsim_\epsilon R^{-\epsilon} \quad \text{for every } \epsilon > 0$$

（定理 5.3），这是其近最优延拓估计的推论。这一亚多项式界迫使逼近次数很高：$(f\mu)*\psi_{R^{-1}}$ **无法** 在 L^2 中以固定精度通过次数为 $o(R^2)$ 的三角多项式进行逼近（命题 5.4）。

1.2.4. 凸几何与表面测度的复杂性。 对于凸体 $K \subset \mathbb{R}^d$边界上的表面测度μ ， 傅里叶比率能够检测其法向集的几何复杂性。

- **驻相分析（定理 6.1）：** 傅里叶变换 $\widehat{\mu_{R^{-1}}}$ 本质上集中在靠近外向单位法向量集合 $N(K)$ 的方向上。• **通过闵可夫斯基维数确定的逼近阶（推论 6.2）：** 若 $N(K)$的上闵可夫斯基维数为 a，则对于任意 $\epsilon > 0$，平滑化测度 $\mu_{R^{-1}}$都可以用次数为 $\lesssim_{\eta,\epsilon} R^{a+1+\epsilon}$的三角多项式进行近似，且在 L^2 中的相对误差为 η 。

1.3. **关联与更广泛的背景**。我们的工作在离散傅里叶分析与测度的连续理论之间架起了一座桥梁。傅里叶比 $\mathcal{FR}_{\mu,\ R}(f)$ 发挥着与其离散对应物完全相同的作用：它控制不确定性原理，衡量伪随机性与结构之间的关系，并决定三角多项式逼近的复杂度。连续情形自然融入了几何信息——覆盖数、闵可夫斯基维数和曲率——在保留离散理论核心思想的同时，使其更加丰富。

这些结果还揭示了一个统一图景，将若干活跃领域联系起来：分形不确定性原理 [3]，傅里叶限制理论 [11, 10]，随机三角逼近[14]，以及凸集上的几何测度论 [4, 6]。傅里叶比率是贯穿其中的共同参数，使这些不同现象彼此关联。

1.4. **论文结构**。 第 2节回顾离散傅里叶比率理论。第3 节确立基本界并介绍分形不确定性原理。第4节给出三角逼近定理。第5节通过限制理论探讨确定性—随机二分。第 6 节将该理论应用于凸曲面。第 7节系统比较离散理论与连续理论。第 8节总结研究结果。所有证明均见第 9节。

1.5. **记号与约定**。 这里汇集了本文中使用的主要记号和约定。

背景空间。 我们在欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ 中工作。 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度记作 $|\cdot|$。

测度与函数。 在全文中， μ 表示 $\mathbb{R}^d$上的紧支撑博雷尔测度，且 $f \in L^2(\mu)$。 f 的支撑（相对于 μ）记为

$$E_f := \operatorname{supp}(f).$$

傅里叶变换。 对于 $\mathbb{R}^d$上的有限博雷尔测度 ν ，我们采用如下归一化

$$\widehat{\nu}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\nu(x).$$

特别地， $f\mu$ 表示测度 $f\, d\mu$ 的傅里叶变换。

近似恒等元。设 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是满足$\int \psi = 1$的一个固定非负函数。对于 $\delta > 0$，定义

$$\psi_\delta(x) := \delta^{-d}\psi(x/\delta).$$

在本文中，我们 研究尺度 $\delta = R^{-1}$，其中 $R \geqslant 1$ 是频率参数。

正则化傅里叶范数。 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，我们将尺度 R 下的正则化傅里叶 L^p范数定义为

$$X_{p,\mu,R}(f) := \left(R^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \widehat{f\mu} * \psi_{R^{-1}}(\xi) \right|^p d\xi \right)^{1/p},$$

当 $p = \infty$时，按通常方式作相应修改。

傅里叶比。 f 关于 μ在尺度 R 下的（连续）傅里叶比为

$$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) := \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)}.$$

邻域与覆盖尺度。 对于集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 和 $r > 0$，我们用 E_r 表示 E 的 r–邻域。特别地，

$$E^f_{R^{-1}} := (E_f)_{R^{-1}}.$$

数量 $R^d|E^f_{R^{-1}}|$ 与覆盖 E_f 所需的半径为 R^{-1} 的球的个数相当。

渐近记号。 若 $A \leqslant CB$，我们记作 $A \lesssim B$，其中常数 C 仅依赖于维数等固定参数。记号 $A \approx B$ 表示 $A \lesssim B \lesssim A$。

2. Previous results

上述傅里叶比的离散类比被用于研究时间序列的复杂度，见 [1]。我们将相当详细地介绍这些结果，因为它们直接影响本文的研究。作者的出发点是 Bourgain 和 Talagrand（[14]）的以下结果。

定理 2.1。 设 $(\varphi_j)_{j=1}^n$ 是 $L^2(\mathbb{Z}_N)$ 中的一个正交归一系统，且对于 $1 \leqslant j \leqslant n$ 有 $\|\varphi_j\|_{L^\infty} \leqslant K$。存在一个常数 $\gamma_0 \in (0、1)$ 以及一个子集 $I \subset \{1,\ldots,n\}$，满足 $|I| \geqslant \gamma_0 n$，使得对每个 $a = (a_i) \in \mathbb{C}^n$，

$$\left(\sum_{i \in I} |a_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant C_T\, K \left(\log(n)\, \log\log(n) \right)^{1/2} \left\| \sum_{i \in I} a_i \varphi_i \right\|_{L^1},$$

其中 $C_T > 0$ 是一个普适常数。

$\widehat{}$ 我们需要一个适用于 $\mathbb{Z}_N$ 上信号的版本，其中 h 和 h 的作用互换（见 [7]）。首先，我们需要给出一个定义。

定义 2.2。 设 $0 < p < 1$。则，随机集 $S \subset [n] = \{0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\}$ 是一般的，当且仅当 $[n]$ 中的每个元素都以概率 p独立选取。

以下结果可由定理 2.1 （见 [7]）推导得到。

定理 2.3. 存在 $\gamma_0 \in (0,1)$，使得若 $h:\ \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 支撑于一个大小为 $\gamma_0\ {}^{N}{}_{\log(N)}$的一般集合$M$中（定义 2.2 的意义下），则以概率 $1-o_N(1)$,

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}\left|\widehat{h}(m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_T(\log(N)\log\log(N))^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{h}(m)|, \tag{2.1}$$

其中 $C_T>0$ 是一个仅取决于 γ_0的常数，并且

$$\widehat{h}(m)=N^{-\frac{1}{2}}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}\chi(-xm)h(x),\ \chi(t)\equiv e^{\frac{2\pi it}{N}}.$$

注 2.4. 众所周知（见 [14]），$\sqrt{\log(N)}$ in (2.1) 一般情况下无法去除，而剩余的 $\sqrt{\log\log(N)}$ 是否可以去除，目前尚不清楚。

在某些情况下，可以去掉项 $(\log(N)\log\log(N))^{\frac{1}{2}}$。Bourgain [2]给出了以下在此情形下的结果。

定理 2.5. 设 M如上所述是一般的，且 $|M|=\lceil N^{\frac{2}{q}}\rceil$，$q>2$。那么对所有$h:\ \mathbb{Z}_N\to\mathbb{C}$，若其支撑于 M,

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}\left|\widehat{h}(m)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C(q)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}\left|\widehat{h}(m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

不难从证明中推得，如果随机选择 M，那么当将 $C(q)$ 替换为 $\frac{C(q)}{\epsilon}$ 时，该界以概率 $1-\epsilon$ 成立。

我们从 William Hagerstrom [9]，处了解到以下观察结果，它可以利用 H¨older 不等式证明。

引理 2.6。 假设对于 $h:\ \mathbb{Z}_N\to\mathbb{C}$,

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}\left|\widehat{h}(x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C(q)\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}\left|\widehat{h}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

对于某个 $q>2$。

Then

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}\left|\widehat{h}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (C(q))^{\frac{q}{q-2}}\cdot\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{h}(x)|.$$

注记 2.7。由此可知，若定理 M 2.3 中 $O(N^{1-\epsilon})$ 的期望大小为$\epsilon>0$，则 $C_T\sqrt{\log(N)}\log\log(N)$在（2.2）中的项可以替换为 C_T'，且与 N无关。

我们来稍微探讨一下上述设定。设 $S \subset \mathbb{Z}_N$，随机选取。根据定理2.3 和注记 2.7，以极高概率，我们有

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{1}_S(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_T\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{1}_S(x)|. \tag{2.4}$$

利用帕塞瓦尔等式，我们看到

$$\frac{1}{C_T}\sqrt{\frac{|S|}{N}} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{1}_S(x)|. \tag{2.5}$$

另一方面，让我们考虑 S 远非随机的情形。假设$S = \{0\}$。那么 $\widehat{1}_S(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}}$，不难验证，在这种情况下，我们有$\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{1}_S(x)| = \frac{1}{\sqrt{N}}\cdot\sqrt{\frac{1}{N}}$，因此对于固定的 $S \subseteq \mathbb{Z}_N$，$\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{1}_S(x)| = \frac{1}{\sqrt{N}}\cdot\sqrt{\frac{|S|}{N}}$，这是一个比一般情形下由（2.5）所得结果小得多的量。当 f 是 $\mathbb{Z}_N$的一个子群的示性函数时，也可以进行类似的计算。这表明，量 $\frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{1}_S(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{1}_S(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ 可能包含有关集合 S 的随机程度的信息。

更一般地，在定理 2.5的假设下，再加上假设 $|M| = O(N^{1-\delta})$对某个 $\delta > 0$成立，我们有

$$\frac{1}{C_T} \leqslant \frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.6}$$

再一次，上述例子表明，将这个量用作信号 f随机程度的指标或许是合理的。由于常数 C_T 在实际应用中具有重要意义，下面我们进行一些数值实验，以了解它的取值可能是多少。

2.0.1. 傅里叶比率的下界。 假设

$$\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(m)| \leqslant \epsilon\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(m)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据三角不等式，

$$|f(x)| \leqslant N^{-\frac{1}{2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(m)| = N^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(m)|.$$

$$\leqslant \sqrt{N}\cdot\epsilon\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(m)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

将两边平方，对 $\mathbb{Z}_N$ 求和并开平方，得到 $\epsilon \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}}$，可以看出，常数函数 **1** 达到了这一界。我们刚刚证明了

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \leqslant \frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1,$$

其中，上界由柯西-施瓦茨不等式得出。

同样的论证表明，如果 f 支撑于 $E \subset \mathbb{Z}_N$，那么

$$\frac{1}{\sqrt{|E|}} \leqslant \frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.7}$$

要证明（2.7）可以实现，令 $E = \mathbb{Z}_p$， p 为素数，以显然的方式嵌入 $\mathbb{Z}_{pq}$ 中。接着，令 $N = pq$，我们有

$$\widehat{1}_E(m) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i k m}{p}} = \frac{p}{\sqrt{N}}1_S(m),$$

其中 S 是 $\mathbb{Z}_q$，以自然的方式嵌入 $\mathbb{Z}_{pq}$ 中。令 $f = 1_E$，由此可得 at

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{|E|}}.$$

2.0.2. 主要结果 [1]。第一个结果表明，如果 $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 集中在一个随机集上，那么傅里叶比以高概率非常大。

定理 2.8。设 f： $\mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$。假设存在一个一般集合 M 使得

$$\|f\|_{L^2(M^c)} \leqslant r\|f\|_2$$

对于某个 $r \in (0, 1)$，其中 $|M| \leqslant \gamma_0 \frac{N}{\log(N)}$，这里 γ_0 与定理 *2.3*中的定义相同。假设

$$r < \frac{1-r}{C_T\sqrt{\log(N)\log\log(N)}}. \tag{2.8}$$

Then

$$\frac{1 - r\frac{C_T\sqrt{\log(N)\log\log(N)}}{1-r}}{\frac{C_T\sqrt{\log(N)\log\log(N)}}{1-r}} \leqslant \frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.9}$$

概率为 $1 - o_N(1)$。

利用备注 2.7 中的观察，我们可以用 $r < \frac{1-r}{C_T}$ 替换（2.8），并可以用—

$$\frac{\left(1 - r\frac{C_T}{1-r}\right)}{\frac{C_T}{1-r}} \leqslant \frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

在 [1] 中确立的下一个结果表明，如果傅里叶比足够小，那么信号就可以用低次数的三角多项式很好地近似。

定理 2.9. 设 $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$，并设 $\eta > 0$。令

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

那么，对于任意满足以下条件的 k

$$k > \frac{N\epsilon^2 - 1}{\eta^2},$$

存在一个三角多项式

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i\chi(m_i x)$$

使得

$$\|f - P\|_2 < \eta\|f\|_2.$$

T下一个结果在 L^∞ 中确立了这种类型的近似 m.

定理 2.10。 设 f： $\mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ 并设 $\eta > 0$。那么对于任意满足以下条件的 k

$$k > 8\left(\frac{\|\widehat{f}\|_{L^1(\mu)}}{\|f\|_\infty}\right)^2 \frac{N\log(4N)}{\eta^2},$$

存在一个三角多项式

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i\chi(m_i x)$$

使得

$$\|f - P\|_\infty < \eta\|f\|_\infty.$$

注 2.11。 注意，三角不等式表明 $\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\|f\|_\infty} \geqslant N^{-\frac{1}{2}}$，因此在最理想的情况下，定理 2.10 确实给出了一个次数为 $O(\log(N))$ 的多项式。

以下结果表明，离散傅里叶比是经典不确定性原理中的控制参数。

定理 2.12. 设 $f\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$, L^2-集中于 $E \subset \mathbb{Z}_N$，其集中程度为 $a \in (0,1)$，即

$$||f||_{L^2(E^c)} \leqslant a||f||_{L^2(\mathbb{Z}_N)},$$

其中 $\widehat{f}$ L^1- 集中于 $S \subset \mathbb{Z}_N$，在 $b \in (0,1)$ 级别上，意指

$$||\widehat{f}||_{L^1(S^c)} \leqslant b||\widehat{f}||_{L^1(\mathbb{Z}_N)}.$$

Then

$$(1-a)^2 \cdot \frac{N}{|E|} \leqslant \mathcal{FR}(f)^2 \leqslant \frac{|S|}{(1-b)^2}. \tag{2.10}$$

特别地,

$$(1-a)^2 \cdot (1-b)^2 \cdot N \leqslant |E| \cdot |S|, \tag{2.11}$$

经典不确定性原理的一个版本（例如参见 [8]）。虽然 (2.11) 广为人知，但 (2.10) 表明，傅里叶比率是傅里叶不确定性原理中一个自然的控制参数。

本文的主要目标是理解这些思想在欧几里得空间中更为复杂的紧支撑测度情形下能够推广到何种程度。

3. Lower and upper bounds on the Fourier ratio

我们的第一个结果是 (2.7) 的连续类比，即对 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 的一个下界 .

命题 3.1. 设 μ 是一个紧支撑博雷尔测度，并设 $f \in L^1 \cap L^2(\mu)$。令 E_f 表示 f 的支撑。则

$$\sqrt{\frac{1}{R^d |E_f^{\frac{1}{R}}|}} \leqslant \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)}, \tag{3.1}$$

[1]其中，E_f^R表示 f的支撑的 $\frac{1}{R}$-邻域。

注3.2。 观察下式即可看出命题 3.1与 (2.7) 类似:

$$|E^{\frac{1}{R}}| \sim R^{-d} \cdot \#\text{ balls of radius } R^{-1} \text{ needed to cover } E.$$

(3.1) 右侧因此可以替换为

$$\sqrt{\frac{1}{\#\text{ balls of radius } R^{-1} \text{ needed to cover } E}},$$

与 (2.7) 类似。

若 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 中凸超曲面上的曲面测度， $d \geqslant 2$，命题 3.1 表明

$$\frac{c}{R^{\frac{d-1}{2}}} \leqslant \frac{X_{1,\mu,R}(1)}{X_{2,\mu,R}(1)},$$

which 表明，鉴于（6.1），多面体几乎达到了这一不等式的最优值。

3.1. 傅里叶比的上界与分形不确定性原理。现在，我们得到了一个上界，与前面得到的结果相辅相成。为此，我们有如下结果。

定理 3.3。 假设按照以下意义，$(f\mu)_{R^{-1}}$ 在 $X \subset \mathbb{R}^d$ 中是 L^1集中型的：存在某些 $\eta \in (0、\ 1)$,

$$||\widehat{f\mu_{R^{-1}}}||_{L^1(X_R^c)} \leqslant \eta \cdot ||\widehat{f\mu_{R^{-1}}}||_{L^1}, \tag{3.2}$$

其中 $X_R = X \cap B_{100R}$。于是

$$\sqrt{\frac{1}{R^d|E_f^{\frac{1}{R}}|}} \leqslant \mathcal{FR}(f\mu) \leqslant \sqrt{\frac{|X_R|}{R^d(1-\eta)^2}}. \tag{3.3}$$

由此可得

$$(1-\eta)^2 \leqslant |E_f^{R^{-1}}| \cdot |X_R|. \tag{3.4}$$

如果我们假设存在 c、C_X 个普适常数，以及 s_f、$\alpha_X \in (0、\ d)$，使得

$$|X_R| \leqslant C_X R^{\alpha_X}, \tag{3.5}$$

and

$$|E_f^{R^{-1}}| \leqslant cR^{-d+s_f}, \tag{3.6}$$

对所有充分大的 R，那么为了确保条件（3.4）对所有充分大的 R成立，我们可以要求更强的条件

$$d < s_f + \alpha_X.$$

3.1.1. ***{v?}***（3.6） 和 （3.5）。 我们将从几何角度解释方程（3.6）：

$E \subseteq \mathbb{R}^d$ 的上盒维数可定义为

$$\overline{\dim}_B(E) := d - \liminf_{R\to\infty} \frac{\log(|E^{R^{-1}}|)}{\log(R^{-1})}.$$

注意，如果对所有 $R \geqslant R_0$ 都有 $|E_f^{R^{-1}}| \leqslant cR^{s_f-d}$，那么 $\overline{\dim}_B(E) \leqslant s_f$。另一方面，如果 $\overline{\dim}_B(E) < s_f$，那么存在一个较大的 R_0，使得对所有 $R \geqslant R_0$ 都有 $|E_f^{R^{-1}}| \leqslant R^{s_f-d}$。

因此，方程（3.6）可以替换为稍强的条件 $\overline{\dim}_B(E) < s_f$。

我们还可以从几何角度理解方程（3.5）：

我们将 X 的对数上渐近密度定义为

$$\overline{d}_{\log}(X) := \limsup_{R\to\infty} \frac{\log(X \cap B_{100R})}{\log(R)}.$$

注意，如果将分子替换为 $\log(X \cap B_R)$，定义并不会改变；这也是人们自然会用来定义它的表达式。

注意，如果 $|X_R| := |X \cap B_{100R}| \leqslant C_X R^{\alpha_X}$，那么 $\overline{d}_{\log}(X) \leqslant \alpha_X$。另一方面，如果 $\overline{d}_{\log}(X) < \alpha_X$，那么对于所有足够大的 R，$|X_R| := |X \cap B_{100R}| < R^{\alpha_X}$。

因此，方程（3.5）可以替换为稍强的条件 $\underline{d}_{\log}(X) < \alpha_X$。

3.2. **L^1 集中不能替换为 L^2 集中**。在定理3.3中，傅里叶比的上界

$$\mathcal{FR}(f\mu) = \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)}$$

本质上取决于 L^1 集中假设

$$\|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^1(S_R^c)} \leqslant \eta \|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^1}.$$

本小节旨在说明，这一假设不能替换为 L^2 集中。事实上，即使 $(f\mu)_{R^{-1}}$ 几乎完全支撑于 S_R，按 L^2 意义理解，也无法推出 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 的任何非平凡上界，而且定理3.3的不确定性不等式完全失效。我们有如下定理2.12中离散变体的连续版本。

命题 3.4。设 μ 是 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度，并设 $R \geqslant 1$。设 $S_R \subset \mathbb{R}^d$ 是半径为 R 且测度有限正的开球。

那么，对每个常数 $C > 0$，都存在 $b \in (0、1)$ 以及一个函数 $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$，使得

$$\|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^2(S_R^c)} \leqslant b \|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

but

$$\mathcal{FR}(f\mu) > \frac{C}{1-b} |S_R|^{1/2} R^{-d/2}.$$

特别是，即使对于这个固定的测度 μ，也无法推出形如

$$\mathcal{FR}(f\mu) \leqslant \frac{C}{1-b} |S_R|^{1/2} R^{-d/2}$$

的估计 L^2 仅凭集中条件，并且常数 C 与 f 及 b无关。因此，定理 L^1 *3.3* 中的集中假设一般而言不能弱化为 L^2 集中。

3.3. **信号恢复的应用**。本小节中，我们将把定理 3.3 中推导的不确定性原理应用于如下情形下的信号恢复问题：定义在 $\mathbb{R}^d$上的紧支撑博雷尔测度。

定理 3.5。设 μ 是集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的紧支撑博雷尔测度，满足

$$|E^{R^{-1}}| \leqslant C_E R^{s_E - d} \tag{3.7}$$

对于某个与 $R > 1$ 无关的 C_E，其中 $E^{R^{-1}}$ 是 E 的 R^{-1} 邻域。

假设存在 $X \subset \mathbb{R}^d$ 使得

$$|X \cap B_R| \leqslant C_X R^{\alpha_X}, \tag{3.8}$$

对于某个 $\alpha_X \geqslant 0$ 和与 $R > 1$无关的 C_X，其中 B_R 是以原点为中心、半径为 R 的球。

假设频率 $\{\widehat{\mu}(\xi)\}_{\xi \in X \cap B_R}$ 未被观测到，其中 B_R 是以原点为中心、半径为$R > 0$ 的球。那么，只要满足以下条件，就可以精确且唯一地恢复 μ

$$s_E + \alpha_X < d$$

且 R 足够大。

注3.6。我们使用3.5 Logan 著名的 L^1-最小化思想来证明定理。感兴趣的读者可以验证，我们也可以利用不确定性原理（3.4）来证明该定理；这一原理沿用了 Donoho 和 Stark 在离散情形下的经典论证（[8]）。具体细节留给感兴趣的读者。

4. Approximation via random Fourier sampling

现在我们将看到，较小的傅里叶比意味着 $f \in L^2(\mu)$ 可以很好地近似为低次数的三角多项式。

定理 4.1。设 μ 表示限制在 E上的 s维豪斯多夫测度。设 $f \in L^2(\mu_E)$。那么存在一个三角多项式 P，使得

$$||(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P||_2 \leqslant \eta \cdot ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_2. \tag{4.1}$$

此外，该多项式的次数为

$$\leqslant \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{R^d X^2_{1,\mu,R}(f)}{X^2_{2,\mu,R}(f)} - 1\right). \tag{4.2}$$

注 4.2. **(定理 4.1 中多项式的次数估计)** 根据命题 3.1，式 **(4.2)** 中的逼近多项式次数至多为

$$C\frac{R^d}{\eta^2} \tag{4.3}$$

且至少为

$$\frac{1}{\eta^2} \cdot \frac{1}{|E_f^{R^{-1}}|},$$

其中，与前面一样，E_f 是 f的支撑，$E_f^{R^{-1}}$ 表示它的 R^{-1} 邻域，而 $|E_f^{R^{-1}}|$ 是该邻域的勒贝格测度。

下界表明，逼近$(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 的多项式可能达到的最小次数为

$$\approx \frac{1}{\eta^2} \cdot \frac{R^d}{\#\text{ balls of radius } R^{-1} \text{ needed to cover the } support(f)}. \tag{4.4}$$

不难验证，当 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 中某个 k-平面上一个紧子集的自然测度时，4.4）即可实现，$1 \leqslant k \leqslant d-1$。由（4.3）给出的最高可能次数为

例如， $\mathbb{R}^d$ 上单位球面的自然测度即可实现， $d \geqslant 2$，其中 $f \equiv 1$。我们简要概述一下。令 σ 表示 S^{d-1}上的曲面测度。利用球面曲面测度的傅里叶变换公式直接计算（例如参见[11], [13]）可得

$$\mathcal{FR}(f\mu) \geqslant c > 0,$$

因此（4.3）给出了 $\sim \frac{R^d}{\eta^2}$，作为逼近多项式次数的上界。不难看出，这一次数还可以大幅降低，因为将 σ 限制在一个 R^{-1} 球上并与尺度为R^{-1} 的单位近似进行卷积后，其傅里叶变换集中在一个圆锥上，该圆锥的长度为 $\approx R$ 、张角为$\frac{1}{R}$，且指向球中心处球面的法向方向。

备注 4.3。 上文已指出，如果 μ是某个具有有限条边的凸多边形上的弧长测度，那么傅里叶比为 $\approx R^{-\frac{1}{2}} \log(R)$，其中隐含常数取决于边数。应用定理4.1，可得到次数为 $\approx \log^2(R)$ 的逼近多项式。乍看之下，这似乎有悖直觉，因为我们应当能够用仅含有限项的三角多项式，在具有有限条边的凸多边形上逼近函数 $\mathbf{1}$。然而，必须牢记，输入是傅里叶比，而不是多边形本身。不难看出，如果我们考虑一个内接于单位圆的多边形，其各条边以稀疏方式在某一点处聚集，那么傅里叶比再次为$\approx R^{-\frac{1}{2}} \log^2(R)$。这表明，在此情形下，对数次数的多项式是合理的。

下一个结果确立了一个 L^∞ 版本的定理4.1。

定理 4.4。令 μ 表示限制在 E上的 s维豪斯多夫测度。令 $f \in L^\infty(\mu_E)$。则存在一个三角多项式 P，使得

$$\left\|(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P\right\|_\infty \leqslant \eta \left\|(f\mu) * \psi_{R^{-1}}\right\|_\infty. \tag{4.5}$$

此外，可以选择该多项式的次数，使其满足

$$\leqslant \frac{32||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2}{\eta^2 \|(f\mu) * \psi_{R^{-1}}\|_\infty^2} \left(\log 4C_d + d \log \left(\frac{8\pi R \|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}\|_1}{\eta \|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}\|_\infty} \right) \right) \tag{4.6}$$

注4.5。（定理4.4中的多项式次数计数）由柯西-施瓦茨不等式和普朗歇尔不等式可得：

$$\frac{\|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}\|_1}{\|f\|_\infty} \leqslant R^{\frac{d}{2}} |E_f^{R^{-1}}|^{\frac{1}{2}},$$

因此，如果我们 代入后，逼近多项式的次数有一个上界

$$\approx \frac{R^d |E_f^{R^{-1}}|}{\eta^2} \log \left(\frac{R^d |E_f^{R^{-1}}|}{\eta^{\frac{2d}{d+2}}} \right).$$

在我们的情形下，省略仅依赖于维数 d 的常数后，可以看到次数至多为

$$R^d|E_f^{R^{-1}}| \approx \#\ \text{ balls of radius } R^{-1} \text{ needed to cover the support of } f,$$

相差一个对数因子。

定理 4.6。令 μ 表示限制在 E上的 s维豪斯多夫测度。令 $f \in L^2(\mu_E)$。那么存在一个三角多项式 P，使得

$$||(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P||_1 \leqslant \eta \cdot ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_1. \tag{4.7}$$

此外，这个多项式的次数为

$$\leqslant \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1}{||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_1}\right)^2. \tag{4.8}$$

4.1. 本节结果证明中主要思想的阐述。我们简要介绍本节三角多项式逼近论证背后的主要思想。为方便起见，记

$$g(x) = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x),$$

于是

$$g(x) = \int \widehat{g}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

第一步是将这个傅里叶反演公式视为一个随机指数函数的期望。我们在频率空间上定义一个概率测度:

$$d\mathbb{P}(\xi) = \frac{|\widehat{g}(\xi)|}{||\widehat{g}||_1} d\xi,$$

并对每个 ξ，我们关联随机变量

$$Z(x) = ||\widehat{g}||_1 \operatorname{sgn}(\widehat{g}(\xi)) e^{2\pi i x\cdot\xi}.$$

直接计算可知，对每个 x,

$$\mathbb{E}(Z(x)) = g(x).$$

换言之， g 是随机特征 Z 的期望，其频率按照 $|\widehat{g}|$ 分布。

接着，我们取 k 个 Z 的独立副本 Z_1，.....， Z_k，并设

$$P(x) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Z_j(x).$$

函数 P 是次数至多为 R 的随机三角多项式（精确到依赖于 ψ 的常数），由构造可知

$$\mathbb{E}(P(x)) = g(x) \quad \text{for all } x.$$

误差 $g-P$ 由 Z 的方差控制。对于 L^2 定理 4.1 中的结果，计算可得

$$\mathbb{E}(|g(x)-P(x)|^2)=\frac{1}{k}\operatorname{Var}(Z(x))$$

并在 x上积分。这得到

$$\mathbb{E}||g-P||_2^2=\frac{1}{k}\left(||\widehat{g}||_1^2\cdot|E_f^{R^{-1}}|-||g||_2^2\right),$$

或者在整个空间上的类似表达式。将 $||\widehat{g}||_1$ 和 $||\widehat{g}||_2$ 用$X_{1,\mu,R}(f)$和$X_{2,\mu,R}(f)$表示，可得

$$\mathbb{E}||g-P||_2^2\leqslant\frac{1}{k}\left(R^dX_{1,\mu,R}(f)^2-X_{2,\mu,R}(f)^2\right),$$

由此得到定理4.1 中的次数界，取

$$k\approx\eta^{-2}\left(\frac{R^dX_{1,\mu,R}(f)^2}{X_{2,\mu,R}(f)^2}-1\right).$$

对于 L^∞ 定理4.4中的结果，我们采用相同的随机构造，但在每个固定空间点 x处应用Hoeffding不等式（或类似的集中不等式），以高概率控制 $|P(x)-g(x)|$。由于 $\widehat{g}$ 支撑于 $\{|\xi|\lesssim R\}$中， g 和P 都是利普希茨函数，其利普希茨常数有一个常数倍的 $R||\widehat{g}||_1$上界。我们用一个 δ网覆盖相关的空间区域，其 N_δ 为

$$|N_\delta|\leqslant C_d\frac{|E_f^{R^{-1}}|}{\delta^d},$$

并结合网格上的逐点集中、利普希茨性质和并集界。取 δ 与 $\eta/(R||\widehat{g}||_1)$ 成正比，可得到次数界中的对数因子，并最终得到 L^∞ 近似，其次数由 $||\widehat{g}||_1$、$||g||_\infty$ 和 $|E_f^{R^{-1}}|$ 估计，如定理4.4所述。

该 L^1 定理 4.6 中的近似同样从相同的随机多项式 P出发。我们结合 L^2 方差估计、詹森不等式以及¨空间变量中的霍尔德不等式，推导得出

$$\mathbb{E}||g-P||_1\leqslant\frac{|E_f^{R^{-1}}|^{1/2}}{\sqrt{k}}||\widehat{g}||_1,$$

然后选取足够大的 k，使其不超过 $\eta||g||_1$。与之前一样，次数界自然地用比值 $||\widehat{g}||_1/||g||_1$, 来表示，它是傅里叶比类型的量。

在这三种情形中，关键在于通过对 $(f\mu)*\psi_{R^{-1}}$ 的傅里叶变换进行采样来获得近似，而所需的频率数量取决于傅里叶变换的 L^1 和 L^2 大小之间的关系，这种关系由傅里叶比 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 来概括。

5. Restriction theory and the Fourier ratio

本节将探讨傅里叶比率 $\mathcal{FR}(f\mu)$与限制现象之间的关系。重点是揭示离散情形与确定性情形之间的区别。

首先回顾一下圆的 Stein-Tomas限制定理。参见[15], 而关于端点情形，例如参见 [11]。

定理 5.1. 设 σ 表示圆上的弧长测度。那么

$$||\widehat{g\sigma}||_{L^6(\mathbb{R}^2)} \leqslant C||g||_{L^2(\sigma)}. \tag{5.1}$$

Izabella Laba 和 Hong Wang ([10]) 给出了一个漂亮的例子，展示了这一设定下随机集的限制定理；这是一个影响深远的结果。

定理 5.2. 设 $d \in \mathbb{N}$ 且 $0 < \alpha < d$。那么存在一个概率测度，其支撑包含于 $[0,\ 1]^d$ 的豪斯多夫维数为 α，并且满足：

- *i)* 对每个 $0 < \gamma < \alpha$，都存在一个常数 $C_1(\gamma)$，使得
$$\mu(B(x,r)) \leqslant C_1(\gamma) r^\gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ r > 0.$$
- *ii)* 对于每个 $\beta <$ 最小值$(\alpha/2, 1),$，存在常数 $C_2(\beta) > 0$，使得
$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leqslant C_2(\beta)(1 + |\xi|)^{-\beta} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$
- *iii)* 对于每个 $\epsilon > 0$，存在 $C_\epsilon > 0$，使得 $\mu(B(x,r)) \geqslant C_\epsilon r^{\alpha+\epsilon}$。
- *iv)* 对于每个 $q > \frac{2d}{\alpha}$，我们有估计
$$\|\widehat{g\mu}\|_q \leqslant C_3(q)\|g\|_{L^2(\mu)} \quad \forall g \in L^2(\mu). \tag{5.2}$$

若取 $d = 2$ 和 $\alpha = 1$，可见 Laba 和 Wang 构造出一个博雷尔测度μ，其支撑于 $\mathbb{R}^2$ 的子集上，且该子集的豪斯多夫维数为 1，使得延拓算子$f \to \widehat{f\mu}$ 从 $L^2(\mu) \to L^p(\mathbb{R}^2)$ 映射到 $p > 4$。若将 μ 替换为 σ，即球面上的弧长测度，则延拓算子从 $L^2(\sigma) \to L^6(\sigma)$映射到 5.1，如定理所述。此外，经典的 Knapp 齐次性论证表明，指数 6 不能进一步降低。现在，我们用傅里叶比来说明这一现象。

定理 5.3. 设 μ 是定理 *5.2* 中的 ***Laba-Wang*** 测度，满足 $d = 2$ 和 $\alpha = 1$。设 σ 表示圆上的弧长测度。

i) 若 f是长度为 $R^{-\frac{1}{2}}$的圆弧的示性函数，则

$$\mathcal{FR}(f\sigma) \leqslant cR^{-\frac{1}{4}}. \tag{5.3}$$

ii) 若 f 是任意非负函数，则对任意 $\epsilon > 0$，存在 $C_\epsilon > 0$ 使得

$$\mathcal{FR}(f\mu) \geqslant C_\epsilon R^{-\epsilon}. \tag{5.4}$$

简要说明定理 5.3(ii) 中的次多项式下界为何构成低次数逼近的根本障碍，是很有启发性的。对于确定性的曲线测度，例如圆上的弧长测度，曲率会迫使

傅里叶变换在频率空间中高效分散，从而产生多项式衰减，并因此使傅里叶比迅速下降。这种分散意味着，只需相对较少的频率就能捕获$\widehat{f\mu * \psi_{R^{-1}}}$的傅里叶质量，从而实现低次数三角逼近。

相比之下，Laba–Wang 随机康托测度在缺乏相应几何结构的情况下，仍表现出近乎最优的延拓估计。尽管 $f\mu$ 逐点衰减，但其质量在频率空间中的分布仍高度不规则，并未集中在复杂度受多项式界约束的集合上。界

$$\mathcal{FR}_{\mu,R}(f) \gtrsim R^{-\varepsilon} \quad \text{for every } \varepsilon > 0$$

反映了这一现象：傅里叶比会衰减，但衰减得太慢，无法使近似所需频率的数量获得多项式级的节省。从$\widehat{\ }$随机傅里叶采样的角度来看，这意味着任何以固定精度近似 $f\mu * \psi_{R^{-1}}$ 的尝试，都必然需要采样数量达到 R^2 个频率的量级，与环境频率尺度相当。命题5.4 通过证明，不存在利用次数为 L^2的三角多项式实现固定相对误差的$o(R^2)$-近似，从而精确刻画了这一障碍。

根据定理 5.3 的 i) 部分和定理 4.1，我们看到，若 f 是长度为 $R^{-\frac{1}{2}}$的圆弧的示性函数，那么 $(f\sigma)_{R^{-1}}$可以用次数为 L^2的三角多项式以精度 η进行$_3$近似，其次数远小于 $\approx \frac{R^2}{\eta^2}$，后者是可能达到的最大次数。定理 5.3 的 ii) 部分表明，或许无法用次数较小的三角多项式近似 $(f\mu)_{R^{-1}}$，但并未给出证明。下一个结果将弥补这一空缺。

命题 5.4。 设 μ 为定理 5.3中的 *Laba-Wang* 测度，且设 f 为半径为 R^{-1}的球的示性函数。那么不存在 η，其与 R无关，使得$(f\mu)_{R^{-1}}$ 能够由次数为$o(R^2)$的三角多项式以精度 η 进行 L^2近似。

总之，在本节中，我们考察了傅里叶比$\mathcal{FR}(f\mu)$ 与 $\mathbb{R}^2$中的一维测度的经典限制定理和随机限制定理之间的关系。对于 σ 圆上的弧长测度，Stein–Tomas 估计（定理 5.1）给出了如下界

$$\mathcal{FR}(f\sigma) \lesssim R^{-1/4}$$

当 f 是长度为 $R^{-1/2}$, 的圆弧的示性函数时，如 [定理 5.3的第 i）部分所示）。对于 μ 这一维数为 1 的 Laba–Wang 随机康托测度，定理 5.3 的第 ii）部分给出

$$\mathcal{FR}(f\mu) \geqslant C_\epsilon R^{-\epsilon}$$

对于每个 $\epsilon > 0$。这揭示了确定性情形与随机情形之间的显著差距：对于 σ ，傅里叶比按多项式速率衰减，而对于 μ，其衰减速度仅为次多项式级别。相关的离散确定性–随机差距已在 [10]中得到确立。最后，命题5.4 表明， $\mathcal{FR}(f\mu)$ 的这一行为对逼近造成了强障碍：函数$g = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 无法在 L^2 中通过以下方式以固定的相对精度进行逼近：

次数为 $o(R^2)$ 的三角多项式；这与确定性曲率情形形成鲜明对比。

本节的例子表明，傅里叶比揭示了一种真实的解析差异：一类测度支持经典曲率限制估计，另一类则源自随机分形构造。对于圆上的弧长测度，式（5.3）中的衰减反映了曲率迫使傅里叶变换以强劲且定量的多项式方式扩散。相比之下，Laba–Wang 测度仅呈现式（5.4）所确立的次多项式衰减，而命题 5.4 表明，这种较慢的衰减会对 L^2 低次三角多项式逼近构成重大障碍。这两种现象在离散情形中也有对应的体现（见 [10]），而傅里叶比为描述二者提供了统一的语言。

下一节我们将转向凸几何。这里的基础测度是凸体边界上的豪斯多夫测度限制，曲率再次发挥核心作用。与随机分形情形不同，这类测度的傅里叶变换在大多数方向上快速衰减，但衰减的速率和方向性微妙地取决于该凸体法向集合的结构。傅里叶比为这些几何特征与相应平滑化测度的多项式逼近次数之间搭建了一座自然的定量桥梁。具体而言，$(f\mu)_{R^{-1}}$可由低次三角多项式逼近到何种程度，取决于边界外法向量集合的上闵可夫斯基维数，正如我们将在下文推论 6.2中看到的那样。

6. Applications to convex geometry

本节将研究在 $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$中支撑于凸体边界上的自然测度所对应的傅里叶比结果。$K \subseteq \mathbb{R}^d$ 中的凸体是一个紧凸集。若超平面 H 使得 K 完全包含在由 H确定的两个闭半空间之一中，且H 与 K相交，但不穿过 K的内部，则称 H 为 K的支撑超平面。

如果凸集是一个球，那么

$$X_{1,\mu,R}(1) \leqslant CR^{-\frac{d-1}{2}},$$

其中 C 与 R无关，这与 L^∞ 情形相同。由于$X_{2,\ \mu,\ R}(f)$ 满足相同的界（常数可能略有不同），

$$\frac{X_{1,\mu,R}(1)}{X_{2,\mu,R}(1)} \geqslant c > 0,$$

其中 c 与 R无关。由柯西-施瓦茨不等式，既然$X_{1,\ \mu,\ R}(1) \leqslant X_{2,\ \mu,\ R}(1)$，我们看到，球的边界使比值 $\frac{X_{1\ \mu\ R}(1)}{X_{2\ \mu\ R}(1)}$达到最大，至少在相差一个常数的意义下。

另一方面，如果凸集是一个多面体（参见例如 [4], [5]），

$$X_{1,\mu,R}(1) \leqslant CR^{-(d-1)} \log^{d-1}(R),$$

与 C 无关 ..... R的.....。已知在凸类别中（不一定光滑 ），

$$X_{2,\mu,R}(1) \leqslant CR^{-\frac{d-1}{2}}$$

且无法做得更好。在这种情况下，比值

$$\frac{X_{1,\mu,R}(1)}{X_{2,\mu,R}(1)} \sim R^{-\frac{d-1}{2}} \log^d(R). \tag{6.1}$$

我们对比了球和多面体这两种情形，但一般情况下会怎样？我们的第一个结果表明，所考虑凸集边界的法向量集的上闵可夫斯基维数，决定了这些测度的复杂程度；其含义将在下文精确定义。

定理 6.1. 设 K 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界凸体，令 μ 表示 ∂K 上的 $(d-1)$ 维豪斯多夫测度。设 $N(K)$ 为 K 的支撑超平面的所有外单位法向量组成的集合。对于 $R>1$，定义

$$X_R = \{\xi \in \mathbb{R}^d : R/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2R,\ \xi/|\xi| \in N(K)_{R^{-1}}\},$$

其中 $N(K)_{R^{-1}}$ 表示单位球面中 $N(K)$ 的 R^{-1} 邻域 $e.$

那么，对每个整数 $N \geqslant 1$，都存在一个仅依赖于 N 和 K 的常数 C_N，使得

$$\int_{\{|\xi|\sim R,\ \xi/|\xi|\notin N(K)\}} |\widehat{\mu}(\xi)|\, d\xi \leqslant C_N R^{-N}.$$

特别地，对于任意固定的 $\eta \in (0、1)$，以及所有充分大的 R,

$$\|\widehat{\mu}_{R^{-1}}\|_{L^1(X_R^c)} \leqslant \eta \|\widehat{\mu}_{R^{-1}}\|_{L^1}. \tag{6.2}$$

根据定理6.1，我们可以证明，逼近多项式的次数随着上述法向量集 $N(K)$ 的上闵可夫斯基维数增大而降低。更确切地说，有如下结果。

推论 6.2。 设 K 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界凸体，并令 μ 表示 ∂K 上的 $(d-1)$ 维豪斯多夫测度。设 $N(K)$ 为 K 的支撑超平面的所有外单位法向量构成的集合。假设 $N(K)$ 的上闵可夫斯基维数等于 $a \in [0,\ d-1]$。那么存在一个三角多项式 P，其次数为

$$C_\epsilon \eta^{-2} R^{a+1+\epsilon}$$

使得

$$||\mu_{R^{-1}} - P||_2 \leqslant \eta \cdot ||\mu_{R^{-1}}||_2.$$

注记 6.3. 由于凸多面体边界上的曲面测度的傅里叶变换集中在垂直于边界的方向上，可以证明推论 6.2 中逼近多项式的次数在常数因子和 ϵ的幂次意义下是尖锐的。具体细节留给感兴趣的读者。

7. Comparison with the discrete Fourier ratio theory

本节将第 2 节中得到的离散傅里叶比结果与本文发展的连续理论进行比较。尽管两种情形有所不同，傅里叶比所起的作用本质上相同。主要区别在于几何内容：在离散情形中，支集大小是 $\mathbb{Z}_N$ 的一个子集的基数；而在连续情形中，相应的量是支撑在尺度 R^{-1} 下的覆盖数。

7.1. **下界。** 在离散情形下，若 f 支撑于 $E \subset \mathbb{Z}_N$，则（2.7）表明

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|}{\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}_N}|\widehat{f}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|E|}}.$$

在连续情形下，命题3.1 给出了相应的结论

$$\mathcal{FR}(f\mu) \geqslant \sqrt{\frac{1}{R^d|E_f^{\frac{1}{R}}|}},$$

[1]其中 E_f^R 表示 f 的支撑的 R^{-1} 邻域。由于

$$R^d|E_f^{\frac{1}{R}}| \approx \#\text{ balls of radius } R^{-1} \text{ needed to cover } \operatorname{supp}(f),$$

连续下界与离散下界直接对应，只需将 $|E|$ 替换为尺度为 R^{-1} 的覆盖数。

7.2. **上界与不确定性原理。** 在定理2.12中，若 f 在 L^2 上 E 且 $\widehat{f}$ 在 L^1 上 S，则

$$(1-a)^2\frac{N}{|E|} \leqslant \mathcal{FR}(f)^2 \leqslant \frac{|S|}{(1-b)^2},$$

因此

$$|E|\cdot|S| \geqslant (1-a)^2(1-b)^2N.$$

连续 ——版本见定理 3.3。若 $(f\mu)_{R^{-1}}$ 是 L^1–集中于 X，则

$$\mathcal{FR}(f\mu) \leqslant \sqrt{\frac{|X_R|}{R^d(1-\eta)^2}},$$

而命题 3.1给出

$$\mathcal{FR}(f\mu) \geqslant \sqrt{\frac{1}{R^d|E_f^{\frac{1}{R}}|}}.$$

结合这些结果，我们得到连续分形不确定性原理

$$|E_f^{\frac{1}{R}}|\cdot|X_R| \geqslant (1-\eta)^2,$$

它是离散乘积估计的对应形式，其中 $|E|$ 和 $|S|$ 被尺度 R^{-1} 上的几何量所取代。

7.3. **用三角多项式逼近**。 离散结果2.9 和 2.10表明，若离散傅里叶比

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{N}\sum|\widehat{f}|}{\left(\frac{1}{N}\sum|\widehat{f}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

较小，则 f 可以用次数约为$\epsilon^2 N$的三角多项式很好地逼近，误差至多相差对数因子。

连续情形的对应结果是定理 4.1。该定理指出， $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 可以在 L^2 中用次数至多为

$$\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{R^d X_{1,\mu,R}(f)^2}{X_{2,\mu,R}(f)^2} - 1\right) = \frac{R^d}{\eta^2}\mathcal{FR}(f\mu)^2 - \frac{1}{\eta^2}.$$

根据命题3.1，这满足

$$\frac{c}{\eta^2} \leqslant \deg(P) \leqslant \frac{R^d |E_f^{\frac{1}{R}}|}{\eta^2}.$$

因此，连续情形的次数界由支撑在尺度 R^{-1} 下的覆盖数控制，正如 $|E|$ 控制了 $\mathbb{Z}_N$中的离散次数界。

7.4. **随机与确定性例子**。 第2 节的一个重要主题是 $\mathbb{Z}_N$中一般（随机）集与具有结构的确定性集之间的二分现象。随机集以高概率产生较大的傅里叶比（定理 2.8），而单点集或子群等确定性集则产生可能的最小傅里叶比。

连续理论呈现出类似的二分现象。由曲面超曲面产生的确定性测度通常具有相对较小的傅里叶比，而随机康托尔型测度（例如 Laba 和 Wang 构造的测度）的傅里叶比衰减速度慢于任何幂次，正如定理 5.3所示。这与离散情形直接平行，而傅里叶比为统一表达这两种情形中随机对象与结构化对象之间的差异提供了一种机制。

7.5. **总结**。总而言之，傅里叶比在离散情形和连续情形中发挥的作用基本相同：

- 上下界取决于空间支撑和频率集中程度；
- 不确定性原理具有相同的乘积形式；
- 较小的傅里叶比迫使其可由低次数三角多项式逼近；
- 随机性与确定性表现迥异。

区别在于，连续情形自然地纳入了尺度 R^{-1}上的几何信息，例如覆盖数和闵可夫斯基维数，而这些概念在其中没有对应物

。这些几何量与傅里叶比率的相互作用方式与离散理论相似，但内容丰富得多。

8. Summary of results and work in progress

本文的结果表明，傅里叶比

$$\mathcal{FR}(f\mu) = \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)}$$

决定了平滑化测度 $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 在分析、几何和逼近理论方面的诸多性质。

在第 3 节中，我们确立了 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 的基本上下界。命题 3.1 和不等式（3.1）表明，$\mathcal{FR}(f\mu)$ 被夹在 1 与一个几何量之间，该几何量取决于 R^{-1}-邻域 $E_f^{R^{-1}}$ 的大小，而 f 是 $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 的支撑。因此， E_f 的度量复杂性直接决定了 $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 的扩散程度。

第 3.1 节进一步收紧了上界。定理 3.3 表明， L^1 在频率集 X 上的集中会导致上界（3.3），进而得到不确定性不等式（3.4）。几何条件（3.6）和（3.5）用 E_f 的盒维数和 X 的对数密度来刻画这种集中。二者共同导出一个连续分形不确定性原理，其中 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 衡量空间与频率同时局部化的程度。

在小节 3.3 中，我们将不确定性原理应用于信号恢复。定理3.5表明，如果空间侧条件（3.7）和频率侧稀疏性条件（3.8）满足 $s_E + \alpha_X < d$，那么 μ 便可以根据观测到的傅里叶数据被精确恢复。这将不确定性原理重新诠释为一种用于测度的可恢复性而非函数可恢复性的工具。

第 4 节为 $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$提出了一种概率逼近方案。在定理4.1中，随机傅里叶采样给出了一个 L^2 逼近，其三角多项式的次数由（4.2）限定。该界仅取决于 $\mathcal{FR}(f\mu)$，因此较小的傅里叶比会带来次数更低的逼近。定理 L^∞ 中的逼近4.4结合了 $(f\mu) * \psi_{R^{-1}}$ 的 Lipschitz 界和覆盖论证，从而产生预期的对数项。定理 4.6 给出了相应的 L^1 逼近。在所有情况下，所需频率的数量都由比值 $\|\widehat{g}\|_1/\|g\|_p$控制，即由傅里叶比控制。

在第5 节中，我们比较了 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 在两种截然不同情形下的表现：圆上的弧长测度 σ 与豪斯多夫维数为 1 的 Laba–Wang 随机康托测度 μ 。对于 σ，Stein–Tomas 估计（5.1）给出了多项式界$\mathcal{FR}(f\sigma) \lesssim R^{-1/4}$ （5.3），其中 f 支撑在长度为 $R^{-1/2}$的圆弧上。对于 Laba–Wang 测度，定理5.3 给出了次多项式下界（5.4）。这种确定性与随机情形之间的差距直接影响逼近：命题5.4 表明， $(f\mu) *\psi_{R^{-1}}$ 无法通过次数为 L^2 的三角多项式以固定精度在 $o(R^2)$中逼近，这与 σ的曲率驱动行为形成对比。

最后，第6 节讨论 μ为凸体边界上的曲面测度的情形。定理6.1中的驻相估计表明， $\widehat{\mu}$ 远离外法向量集合时快速衰减。该法向集合的闵可夫斯基维数控制频率集 X_R的大小，进而限制了式（3.3）中可能出现的集中程度。推论6.2继而将 $(f\mu)*\psi_{R^{-1}}$的三角逼近次数直接与法向集合的几何复杂性联系起来。

综上，这些结果表明，傅里叶比为不确定性原理、限制理论、三角多项式逼近以及测度的几何性质提供了一个统一的分析框架。量 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 是衡量所有这些情形下分析复杂性和几何复杂性的有效指标。

8.1. **开放问题**。本文结果引出的一些问题仍在积极研究中。

- 首先，定理 3.5 给出了一个单向恢复结果，其中缺失的信息位于频率侧。在离散情形中，通过对偶性可立即得到相应的空间侧信息缺失的结论，但对于 $\mathbb{R}^d$中的紧支撑测度，这种对称性不再成立。要建立一个连续类比的“反向”恢复定理，即缺失数据位于物理域中的定理，似乎需要更深入地理解 $\mathcal{FR}(f\mu)$与 $(f\mu)*\psi_{R^{-1}}$的空间集中之间的相互作用。这个问题目前仍在研究中。

- 其次，第 4 节中的逼近结果提出了自然的尖锐性问题。特别是，对于广泛的测度类别，确定定理 4.1、4.4和4.6 中的次数界是否在常数因子和对数因子意义下最优，将很有价值 μ。第 5 节中的例子表明，随机测度和确定性测度可能呈现不同的极值行为。完整的刻画仍有待解决。

- 第三，在第 6 节中，我们将$(f\mu)*\psi_{R^{-1}}$ 的逼近次数与凸体法向集合的上闵可夫斯基维数联系起来。接下来一个自然的问题是：在凸类别中，法向集合的维数是否是决定 $\mathcal{FR}(f\mu)$ 大小的唯一几何障碍，还是说更精细的尺度上还存在其他曲率或振荡现象。这或许能导出推论 6.2的更强版本。

9. Proofs of the main results

本节将证明本文的主要结果。

9.1. **命题3.1的证明**。 注意到

$$|(f\mu)_{R^{-1}}(x)| \leqslant \int |\widehat{\psi}(R^{-1}\xi)|\cdot|\widehat{f\mu}(\xi)|d\xi = R^d X_{1,\mu,R}(f) = R^d X_{2,\mu,R}(f)\cdot\frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)}.$$

[1]由于 $(f\mu)_{R^{-1}}$ 支撑于 E_f^R，将两边平方后积分，再除以 R^d，开平方并约去相关项，可得

$$\sqrt{\frac{1}{R^d|E_f^{\frac{1}{R}}|}} \leqslant \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)},$$

如所需。

9.2. **定理 3.3 的证明。** (3.3) 中的下界已在命题 3.1 中得到证明。为得到上界，注意到假设 (3.2) 意味着

$$||\widehat{(f\mu)}_{R^{-1}}||_1 \leqslant \frac{1}{1-\eta} \cdot ||\widehat{(f\mu)}_{R^{-1}}||_{L^1(X_R)}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\eta} \cdot |X_R|^{\frac{1}{2}} \cdot ||\widehat{(f\mu)}_{R^{-1}}||_{L^2(X_R)} \leqslant \frac{1}{1-\eta} \cdot |X_R|^{\frac{1}{2}} \cdot ||\widehat{(f\mu)}_{R^{-1}}||_2.$$

由此可得

$$\mathcal{FR}(f\mu) \leqslant \frac{1}{1-\eta} \cdot |X_R|^{\frac{1}{2}} \cdot R^{-\frac{d}{2}}.$$

估计式 (3.3) 得证。去掉不等式中的傅里叶比后，即得估计式 (3.4)。

9.3. **命题 3.4 的证明。** 固定 $R \geqslant 1$，一个半径为 S_R 的球 R，以及一个常数 $C > 0$。我们先在频率侧构造一个函数 h，然后将 h 表示为 $(f\mu)_{R^{-1}}$，其中 f 适当选取。

令 $A = S_R$。选取一个稍后指定的参数 $L > 1$，并令

$$B = B_{LR} \backslash S_R.$$

那么， A和 B 都是有限正测度。定义 r 为

$$r = \sqrt{\frac{|B|}{|A|}}.$$

注意到 $r > 0$，通过取足够大的 L，我们可以使 r 任意大 .

固定一个数 $b \in (0, 1)$。为具体起见，令$b = \frac{1}{2}$。

定义 h: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 为

$$h(\xi) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \xi \in A, \\ \beta & \text{if } \xi \in B, \\ 0 & \text{if } \xi \notin A \cup B, \end{cases}$$

其中， $\alpha, \beta > 0$ 的选取使得 $\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$，且 h 在 B 上的 L^2 质量等于 b。这些条件相当于

$$\beta^2|B| = b^2$$

and

$$\alpha^2|A| + \beta^2|B| = 1.$$

Let

$$\beta = \frac{b}{|B|^{1/2}},$$

and

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-b^2}}{|A|^{1/2}}.$$

于是 $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$，我们有 $\|h\|_2 = 1$，并且

$$\|h\|_{L^2(A^c)} = \|h\|_{L^2(B)} = b.$$

因此， h 在 $A = S_R$ 处以 b的水平 L^2 集中。

现在计算范数。我们有

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \alpha|A| + \beta|B|.$$

根据对 α 和 β的选择,

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \sqrt{1-b^2}|A|^{1/2} + b|B|^{1/2}.$$

利用 r的定义，我们可以将其写成

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = |A|^{1/2}\left(\sqrt{1-b^2} + br\right).$$

由于 $\|h\|_2 = 1$，比值 $\|h\|_1/\|h\|_2$ 等于

$$\frac{\|h\|_1}{\|h\|_2} = |A|^{1/2}\left(\sqrt{1-b^2} + br\right).$$

暂且假设存在 f ，使得

$$\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}} = h.$$

根据 $X_{1、\mu、R}(f)$ 和 $X_{2、\mu、R}(f)$ 的定义,

$$X_{1,\mu,R}(f) = R^{-d}\|h\|_1$$

and

$$X_{2,\mu,R}(f) = R^{-d/2}\|h\|_2 = R^{-\frac{d}{2}}.$$

因此

$$\mathcal{FR}(f\mu) = \frac{X_{1,\mu,R}(f)}{X_{2,\mu,R}(f)} = R^{-\frac{d}{2}}\frac{\|h\|_1}{\|h\|_2}.$$

代入 代入 $\|h\|_1/\|h\|_2$ 的表达式，并回忆起 $A = S_R$，我们得到 n

$$\mathcal{FR}(f\mu) = |S_R|^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{1-b^2} + br\right).$$

我们希望得到不等式

$$\mathcal{FR}(f\mu) > \frac{C}{1-b}|S_R|^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{d}{2}}.$$

利用上一行，这等价于

$$\sqrt{1-b^2} + br > \frac{C}{1-b}.$$

取 $b = 1/2,$ ，左边为

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{r}{2}.$$

因此我们需要

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{r}{2} > 2C,$$

这等价于

$$r > 4C - \sqrt{3}.$$

由于 $r = \sqrt{|B|/|A|}$ 且 $|B| = |B_{LR}| - |S_R|$，我们有

$$r = \sqrt{L^d - 1}.$$

取足够大的 L ，例如任意满足条件的 L

$$\sqrt{L^d - 1} > 4C,$$

我们有

$$\sqrt{1-b^2} + br > \frac{C}{1-b}$$

对于 $b = 1/2$。对于这一选择的 L 和 b，一旦我们将 h表示为傅里叶变换，不等式

$$\mathcal{FR}(f\mu) > \frac{C}{1-b}|S_R|^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{d}{2}}$$

便可得出。

现在我们需要将 h 表示为 $(f\mu)_{R^{-1}}$。我们先选择单位近似 ψ ，使其傅里叶变换 $\widehat{\psi}$ 在 $\mathbb{R}^d$上没有零点。例如，我们可以取 ψ为高斯函数。于是，对所有 ξ， $\widehat{\psi}(R^{-1}\xi)$ 都非零。

定义函数 h 如下:

$$\widetilde{h}(\xi) = \frac{h(\xi)}{\widehat{\psi}(R^{-1}\xi)}.$$

由于 h 的支撑包含于球 B_{LR} 中，且 $\widehat{\psi}(R^{-1}\xi)$ 在该集合上光滑并且有正的下界，因此有 $\widetilde{h} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$。

设 g 是 $\widetilde{h}$ 的傅里叶逆变换。那么 $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$。令 $f = g$ 和 $\mu = dx$ （勒贝格测度）。根据定义，

$$(f\mu)_{R^{-1}} = f * \psi_{R^{-1}}.$$

对两边进行傅里叶变换，得到

$$\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}(R^{-1}\xi).$$

根据构造，$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$，因此

$$\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}(\xi) = \widetilde{h}(\xi)\widehat{\psi}(R^{-1}\xi) = h(\xi).$$

首先， L^2 在 S_R 上的集中由 h的构造可知:

$$\|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^2(S_R^c)} = \|h\|_{L^2(A^c)} = \|h\|_{L^2(B)} = b\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = b\|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

因此， L^2 集中条件以 b为水平成立。

其次，由恒等式 $(f\mu)_{R^{-1}} = h$，我们得到

$$\mathcal{FR}(f\mu) = |S_R|^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{1-b^2} + br\right) > \frac{C}{1-b}|S_R|^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{d}{2}}.$$

由于 $C > 0$ 是任意的，因此无法推出形如

$$\mathcal{FR}(f\mu) \leqslant \frac{C}{1-b}|S_R|^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{d}{2}}$$

仅凭 L^2 集中无法推出这一结论，即使 μ是勒贝格测度也是如此。证明至此完成。

9.4. **定理 4.1的证明.** 定义取值为

$$Z(x) = ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1 \operatorname{sgn}(\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}})e^{2\pi i x\cdot\xi},$$

$|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}(\xi)|$ 其概率为 $\dfrac{}{\circ\, ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_1}$

通过直接计算，

$$\mathbb{E}(Z(x)) = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x).$$

计算方差。我们有

$$\mathbb{E}(Z^2(x)) = \int \left| ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1 \operatorname{sgn}(\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}})e^{2\pi i x\cdot\xi} \right|^2 \frac{|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}|}{||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1} d\xi$$

$$= ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2.$$

这表明

$$Var(Z(x)) = ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2 - |(f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x)|^2.$$

设 $Z_1, \ldots, Z_k$为分布为 Z 的独立同分布随机变量，并定义随机三角多项式 P 如下:

$$P(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i(x).$$

独立同分布性质意味着

$$\mathbb{E}(P(x)) = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x),$$

and

$$Var(P(x)) = \frac{1}{k} Var(Z(x)) = \frac{1}{k}\left(||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2 - |(f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x)|^2 \right).$$

现在我们来计算

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]^d} |(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P(x)|^2 dx \right) = \int_{[0,1]^d} \mathbb{E}(|(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P(x)|^2) dx$$

$$= \int_{[0,1]^d} Var(P(x)) dx = \frac{1}{k} \int_{[0,1]^d} \left(||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2 - |(f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x)|^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{k}\left(||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2 - ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_2^2 \right).$$

要使这个量

$$< \eta ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_2,$$

必须满足

$$k > \frac{1}{\eta}\left(\frac{||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2}{||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_2^2} - 1 \right) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{R^d X_{1,\mu,R}^2(f)}{X_{2,\mu,R}^2(f)} - 1 \right),$$

如所述。

9.5. **定理 4.4.** 定义随机变量，其取值为

$$Z(x) = ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1 \operatorname{sgn}(\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}) e^{2\pi i x\cdot\xi},$$

$|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}(\xi)|$，概率为 $\frac{}{||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1}$。

通过直接计算，

$$\mathbb{E}(Z(x)) = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x).$$

设 $Z_1, \ldots, Z_k$ 为分布为 Z 的独立同分布随机变量，注意，对于每个i，我们有

$$|Z_i(x)| = ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1,$$

或为 0，因此我们有

$$-||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1 \leqslant \operatorname{Re}(Z_i(x)) \leqslant ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1$$

$$-||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1 \leqslant \operatorname{Im}(Z_i(x)) \leqslant ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1$$

定义随机三角多项式 P 如下：

$$P(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i(x) = \mathrm{RE}(P) + \mathrm{IM}(P),$$

wh在此定义 $\mathrm{RE}(P) := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Re}(Z_i(x))$ 和 $\mathrm{IM}(P) := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(Z_i(x))$.

那么，对于固定的 x，有如下不等式:

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(P(x))-P(x)|\geqslant\epsilon\right)\leqslant\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(\mathrm{Re}(P(x)))-\mathrm{Re}(P(x))|\geqslant\frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$+\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(\mathrm{Im}(P(x)))-\mathrm{Im}(P(x))|\geqslant\frac{\epsilon}{2}\right).$$

根据Hoeffding不等式，我们发现右侧有界于

$$4\exp\left(\frac{-2(\frac{\epsilon k}{2})^2}{k(2||\widehat{(f\mu)*\psi_{R^{-1}}}||_1)^2}\right)=4\exp\left(\frac{-\epsilon^2k}{8||\widehat{(f\mu)*\psi_{R^{-1}}}||_1^2}\right)$$

考虑到 $((f\mu)*\psi_{R^{-1}}-P)^\wedge=\widehat{f\mu}\,\widehat{\psi_{R^{-1}}}-\widehat{P}$属于 L^1 且支撑于 $\{|\xi|\leqslant R\}$，可知 $(f\mu)*\psi_{R^{-1}}-P$是利普希茨函数，其常数为

$$2\pi R\|\widehat{(f\mu)*\psi_{R^{-1}}}-P\|_1\leqslant4\pi R\|\widehat{(f\mu)*\psi}_{R^{-1}}\|_1.$$

令 $\delta\in(0,\ 1)$，我们可以构造有限集 $N_\delta=\{x_1,\ x_2,\ ...x_k\}\subset[0,\ 1]^d$，使得$E_1^f$ 中的每个点都与某个 $x_j\in N_\delta$ 的距离不超过 δ，且其大小满足$_R$

$$|N_\delta|\leqslant\frac{C_d}{\delta^d},\tag{9.1}$$

C_d 是仅依赖于维数的常数。

那么我们有

$$\min_{x_j\in N_\delta}|\left((f\mu)*\psi_{R^{-1}}(x)-P(x)\right)-\left((f\mu)*\psi_{R^{-1}}(x_j)-P(x_j)\right)|\leqslant\min_{x_j\in N_\delta}4\pi R\|\widehat{(f\mu)*\psi}_{R^{-1}}\|_1\|x-x_j\|$$

$$\leqslant4\pi R\|\widehat{(f\mu)*\psi}_{R^{-1}}\|_1\delta.$$

令 $\delta=\frac{\epsilon}{8\pi R\|\widehat{(f\mu)*\psi_{R^{-1}}}\|_1}$。若对所有 x_j，$|\left((f\mu)*\psi_{R^{-1}}(x_j)-P(x_j)\right)|\leqslant\frac{\epsilon}{2}$均成立，则对每个 $x\in[0,\ 1]^d$，我们有

$$|\left((f\mu)*\psi_{R^{-1}}(x)-P(x)\right)|\leqslant|\left((f\mu)*\psi_{R^{-1}}(x_j)-P(x_j)\right)|+\frac{\epsilon}{2}\leqslant\epsilon$$

因此，我们有

$$\mathbb{P}\left(\|(f\mu)*\psi_{R^{-1}}-P\|_{L^\infty}\geqslant\epsilon\right)\leqslant\mathbb{P}\left(\bigcup_{N_\delta}\{|(f\mu)*\psi_{R^{-1}}(x_j)-P(x_j)|\geqslant\frac{\epsilon}{2}\}\right)$$

然后根据　　关于 N_δ 的并界不等式，我们可知右端小于　　n

$$|N_\delta|4\exp\left(\frac{-(\frac{\epsilon}{2})^2k}{8||\widehat{(fmu)*\psi}_{R^{-1}}||_1^2}\right).$$

令 $\epsilon=\eta\|(f\mu)*\psi_{R^{-1}}\|_\infty$。

如果我们假设右侧小于 1，那么就可以确定地选取Z_1， Z_2， ...Z_k ， 使得

$$\|(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P\|_\infty < \eta \|(f\mu) * \psi_{R^{-1}}\|_\infty.$$

因此，通过计算

$$|N_\delta| 4 \exp\left(\frac{-(\frac{\epsilon}{2})^2 k}{8||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2}\right) \leqslant \frac{C_d}{\delta^d} 4 \exp\left(\frac{-\epsilon^2 k}{32||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2}\right) < 1$$

我们有

$$k > \frac{32||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2}{\eta^2 \|(f\mu) * \psi_{R^{-1}}\|_\infty^2} \left(\log 4C_d + d \log\left(\frac{8\pi R \|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}\|_1}{\eta \|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}\|_\infty}\right)\right).$$

9.6. **定理 4.6 的证明**。 定义随机变量，使其取值为

$$Z(x) = ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1 \operatorname{sgn}(\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}) e^{2\pi i x \cdot \xi},$$

$|\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}(\xi)|$，其概率为 $\frac{}{\circ ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_1}$

通过直接计算，

$$\mathbb{E}(Z(x)) = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x).$$

$$Var(Z(x)) = ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2 - |(f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x)|^2.$$

设 $Z_1, \ldots, Z_k$ 为分布为 Z 的独立同分布随机变量，并定义随机三角多项式 P 为

$$P(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Z_i(x).$$

独立性意味着

$$\mathbb{E}(P(x)) = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x).$$

现在我们来计算

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]^d]} |(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P(x)| dx\right) = \int_{[0,1]^d} \mathbb{E}(|(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P(x)|) dx$$

根据詹森不等式，我们有

$$\leqslant \int_{[0,1]^d} \sqrt{\mathbb{E}(|(f\mu) * \psi_{R^{-1}} - P(x)|^2)} dx.$$

然后，利用 H¨older 不等式，我们有

$$= \int_{[0,1]^d} \sqrt{Var(P(x))} dx \leqslant \left(\int_{[0,1]^d} Var(P(x)) dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[0,1]^d} 1 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{k} \int_{[0,1]^d} \left(||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2 - |(f\mu) * \psi_{R^{-1}}(x)|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{k} \left(||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1^2 - ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_2^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} ||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1$$

要使该量

$$< \eta ||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_1,$$

必定有

$$k > \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{||\widehat{(f\mu) * \psi_{R^{-1}}}||_1}{||(f\mu) * \psi_{R^{-1}}||_1} \right)^2,$$

如所述。

9.7. **定理5.3的证明。** 第 i) 部分的证明可由经典 Knapp 齐次性论证中的计算得出（例如参见 [11]），因此我们只略述证明。不难验证，$\widehat{f\sigma}$是 $\approx R^{-\frac{1}{3}}$倍的一个函数，该函数集中在由 $R^{\frac{1}{2}}$和 R构成的矩形内。因此，L^1范数 $\widehat{(f\sigma)}_{R^{-1}}$为 $\approx R^{-\frac{1}{2}} \cdot R^{\frac{3}{2}} = R$。$L^2$范数为 $\approx R^{-\frac{1}{2}} ||f||_{L^2(\sigma)} \approx R^{-\frac{3}{4}}$.由此可得

$$\mathcal{FR}(f\sigma) \leqslant cR^{-\frac{1}{4}}$$

对于某个普适常数 c，如所述。

为证明第 ii) 部分，我们使用 Laba-Wang 测度的限制估计。根据定理5.2，对于任意 $q > 4$，存在 $C(q)$ 使得

$$\|\widehat{g\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leqslant C(q) \|g\|_{L^2(\mu)}.$$

取 $g = f$，其中函数非负。对适当的 ξ_0 （满足$|\xi_0| \sim R$）令 $g_R(x) = g(x) e^{2\pi i x \cdot \xi_0}$，我们可以假设傅里叶变换本质上支撑在频率 $\sim R$ 处。于是

$$\|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^q} \lesssim \|\widehat{f\mu}\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)}.$$

另一方面，根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^2} \gtrsim R^{-1} |f\|_{L^2(\mu)}.$$

现在应用引理2.6，其中 $h = (f\mu)_{R^{-1}}$，$p = q > 4$:

$$\|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^2} \leqslant C(q)^{\frac{q}{q-2}} \|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^1}.$$

由于 $\|f\|_{L^2(\mu)} \approx R \|(f\mu)_{R^{-1}}\|_{L^2}$，我们得到

$$\mathcal{FR}(f\mu) = \frac{R^{-2} \|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^1}}{R^{-1} \|\widehat{(f\mu)_{R^{-1}}}\|_{L^2}} \gtrsim R^{-1} C(q)^{-\frac{q}{q-2}}.$$

对于每个 $\epsilon > 0$，选择 q 充分接近 4，使得 $C(q)^{\frac{q}{q-2}} \leqslant C_\epsilon R^{\epsilon}$ 这给出

$$\mathcal{FR}(f\mu) \geqslant C_\epsilon R^{-\epsilon}.$$

9.8. **命题的证明 5.4**。 设 $d = 2$ 并设 μ 为豪斯多夫维数为 $\alpha = 1$的 Laba–Wang 随机康托测度，该测度构造于 [10]的第 2–3 节。设 $f = 1_{B_{R^{-1}}}$并设

$$g = (f\mu) * \psi_{R^{-1}}.$$

根据定义，

$$X_{1,\mu,R}(f) = R^{-2}\|g\|_1$$

and

$$X_{2,\mu,R}(f) = R^{-1}\|g\|_2,$$

so

$$\mathcal{FR}(f\mu) = R^{-1}\frac{\|g\|_1}{\|g\|_2}.$$

Thus

$$\frac{\|g\|_1}{\|g\|_2} = R\,\mathcal{FR}(f\mu).$$

根据定理 5.3，对于每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$\mathcal{FR}(f\mu) \geqslant C_\varepsilon R^{-\varepsilon}.$$

因此

$$\frac{\|g\|_1}{\|g\|_2} \geqslant C_\varepsilon R^{1-\varepsilon}.$$

现在我们描述 μ 的傅里叶结构。令 N_j 为 [10] 中 (2.7)–(2.10) 定义的尺度。在第 j 阶，近似测度 μ_j 在 M_j 个边长为 N_j^{-1} 的正方形上均匀分布，其中 $M_j \approx N_j$ 由 (2.11)–(2.12) 给出。傅里叶变换满足乘积恒等式 (3.1)，

$$\widehat{\mu_{j+1}}(\xi) = \widehat{\mu_j}(\xi)\,\widehat{\nu_{j+1}}(\xi).$$

对于 $|\xi| \sim N_j$， [10] 中的公式 (3.3) 将 $\widehat{\nu_j}(\xi)$ 表示为 M_j 个独立相位的平均值，而 (3.4) 给出

$$\mathbb{E}\,|\widehat{\nu_j}(\xi)|^2 \approx M_j^{-1} \approx N_j^{-1}.$$

一个标准的概念 应用于 (3.3) 的集中论证表明，以概率 $1 - o(1)$ ，

$$|\widehat{\nu_j}(\xi)|^2 \gtrsim N_j^{-1}$$

至少对于 cN_j^2 个频率 ξ 满足 $|\xi| \sim N_j$。

固定 R 并选择 j 使得 $N_j \approx R$。由于当 $|\xi| \sim R \ll N_k$ 时，对于 $k > j$ $\widehat{\nu_k}(\xi) \approx 1$ ，恒等式 (3.1) 给出

$$\widehat{\mu}(\xi) = \widehat{\mu_j}(\xi)(1 + o(1))$$

对于 $|\xi| \sim R$。因此，至少对于 cR^2 个频率 ξ 满足 $|\xi| \sim R$ ，我们有

$$|\widehat{\mu}(\xi)|^2 \gtrsim R^{-1}.$$

由于 $\widehat{g}(\xi) = \widehat{\mu}(\xi)\widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}(R^{-1}\xi)$ ，且 $\widehat{f}$ 和 $\widehat{\psi}$ 在 $\{|\xi| \lesssim R\}$ 上都有下界，因此可得

$$|\widehat{g}(\xi)|^2 \gtrsim R^{-1}$$

对于至少 cR^2 个频率，且满足 $|\xi| \sim R$。此外，对于所有 $|\xi| \lesssim R$ ，我们都有一致界

$$|\widehat{g}(\xi)|^2 \lesssim R^{-1},$$

因为对于 $|\xi| \sim R$， $|\widehat{\mu}(\xi)|^2 \lesssim R^{-1}$，且 $\widehat{g}$ 在 $|\xi| \gg R$时为零。

现在设 P 为次数为 k 的三角多项式，因此 P 支撑在一个至多包含 k 个 Λ频率的集合上。若

$$\|g - P\|_2 \leqslant \eta \|g\|_2$$

对于某个固定的 $\eta \in (0,\ 1)$，则 g 的几乎全部 L^2 能量都必须集中在 Λ 中。 g 的总 L^2质量满足

$$\|g\|_2^2 = \sum_{\xi} |\widehat{g}(\xi)|^2 \approx R^2 \cdot R^{-1} = R.$$

对于来自 Λ中频率的贡献，我们利用 $|\widehat{g}|$上的一致上界，得到

$$\sum_{\xi \in \Lambda} |\widehat{g}(\xi)|^2 \leqslant \sum_{\xi \in \Lambda} CR^{-1} \leqslant k \cdot CR^{-1}.$$

若 $k = o(R^2)$，则

$$\frac{\sum_{\xi \in \Lambda} |\widehat{g}(\xi)|^2}{\|g\|_2^2} \leqslant \frac{k \cdot CR^{-1}}{cR} = o(1).$$

因此

$$\frac{\sum_{\xi \notin \Lambda} |\widehat{g}(\xi)|^2}{|g\|_2^2} = 1 - o(1),$$

从而

$$\|g - P\|_2 \geqslant (1 - o(1))^{1/2} \|g\|_2.$$

这与 $\|g - P\|_2 \leqslant \eta \|g\|_2$ 矛盾，只要 R 足够大，对于任意固定的 $\eta < 1$ 都成立。因此，任何此类逼近都要求 $k \geqslant c(\eta) R^{2-o(1)}$。证明完毕。

9.9. **定理 6.1 的证明**。 我们在局部坐标中写出傅里叶变换。由于∂K 是凸的，因此可以用有限个坐标图覆盖，使得在每个坐标图中 ∂K 都是一个凸函数的图像。在每个坐标图中，我们可以用利普希茨映射 ∂K 对Γ进行参数化： $U \subset \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^d$ 并写为

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_U e^{-2\pi i \Gamma(u) \cdot \xi} J(u)\, du,$$

其中 $J(u)$ 是曲面雅可比，它有界且可测。

取定 ξ，使得 $|\xi| \sim R$ 且 $\xi/|\xi| \notin N(K)$。由于 ξ 与所有外法向量均分离，因此存在一个常数 $c > 0$ 和一个指标 $j \in \{1,\ \ldots\ldots,\ d-1\}$，使得

$$|\partial_{u_j} (\Gamma(u) \cdot \xi)| \geqslant c|\xi|$$

对所有 $u \in U$ 都成立。（这里只用到凸性：在 ∂K 的一个紧覆盖上， ξ 与每个外法向量之间的夹角都一致地大于零。）

现在我们对 Γ 进行光滑化。令 $\Gamma_\varepsilon = \Gamma * \rho_\varepsilon$，其中 ρ_ε 是标准光滑核。那么 Γ_ε 是光滑的，$\Gamma_\varepsilon \to \Gamma$ 一致收敛，并且 $\partial_{u_j} \Gamma_\varepsilon \to \partial_{u_j} \Gamma$ 在 L^∞ 中成立，因为 Γ 是利普希茨的。定义

$$I_\varepsilon(\xi) = \int_U e^{-2\pi i \Gamma_\varepsilon(u) \cdot \xi} J(u)\, du.$$

由于 $\partial_{u_j}(\Gamma_\varepsilon(u)\cdot\xi)$ 一致收敛到 $\partial_{u_j}(\Gamma(u)\cdot\xi)$，且后者有下界 $c|\xi|$，因此我们有

$$|\partial_{u_j}(\Gamma_\varepsilon(u)\cdot\xi)| \geqslant c|\xi|/2$$

对于所有充分小的 ε。

由于 Γ_ε 是光滑的，我们可以反复分部积分：

$$I_\varepsilon(\xi) = \int_U \left(L_\varepsilon^N e^{-2\pi i\Gamma_\varepsilon(u)\cdot\xi}\right) J(u)\,du,$$

其中

$$L_\varepsilon = \frac{1}{-2\pi i\,\partial_{u_j}(\Gamma_\varepsilon(u)\cdot\xi)}\,\partial_{u_j}.$$

L_ε 每次作用都会贡献一个由 $C|\xi|^{-1}$ 控制的因子，因此

$$|I_\varepsilon(\xi)| \leqslant C_N|\xi|^{-N}.$$

现在我们令 $\varepsilon\to 0$ 趋于极限。由于 $\Gamma_\varepsilon\to\Gamma$ 一致收敛且 J 有界，由控制收敛定理可得

$$I_\varepsilon(\xi)\to\widehat{\mu}(\xi).$$

Thus

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \leqslant C_N|\xi|^{-N}.$$

参见 [12]（引理 2.2）中的类似论证。

在环带 $\{|\xi|\sim R\}$ 上积分，得到

$$\int_{\{|\xi|\sim R,\ \xi/|\xi|\notin N(K)\}} |\widehat{\mu}(\xi)|\,d\xi \leqslant C_N R^{d-1}R^{-N} = C_N R^{-(N-d+1)}.$$

由于 N 是任意的，这就证明了第一个结论。

对于第二个结论，由于 $N(K)\subset N(K)_{R^{-1}}$，我们有 $X_R^c\subset\{\xi\colon |\xi|\sim R,\ \ \xi/|\xi|\notin N(K)\}$。因此，上述衰减估计控制了 X_R的整个补集。

此外，$\|\widehat{\mu}_{R^{-1}}\|_{L^1}$ 是 $\gtrsim R^{(d-1)/2}$（来自∂K任意光滑点的贡献）。因此，该比值

$$\frac{\|\widehat{\mu}_{R^{-1}}\|_{L^1(X_R^c)}}{\|\widehat{\mu}_{R^{-1}}\|_{L^1}}$$

趋于零，当 $R\to\infty$，所需的 L^1 集中（6.2）即得证。

9.10. **推论 6.2 的证明**。由定理3.3，

$$\mathcal{FR}(f\mu) \leqslant 2\cdot\sqrt{\frac{|X_R|}{R^d}},$$

其中我们设$\eta=\frac{1}{2}$在定理6.1中。

根据假设和上闵可夫斯基维数的定义，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $C_\epsilon>0$，使得

$$|X_R| \leqslant C_\epsilon R^{a+1+\epsilon},$$

其中 a 是 $N(K)$ 的上闵可夫斯基维数。由此可得

$$\mathcal{FR}(f\mu) \leqslant 2 \cdot C_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{R^{a-(d-1)+\epsilon}}.$$

根据定理 4.1，存在一个次数为

$$\eta^{-2} \cdot C_{\epsilon} \cdot R^{a-(d-1)+\epsilon} \cdot R^{d} = \eta^{-2} \cdot C_{\epsilon} \cdot R^{a+1+\epsilon},$$

使得

$$||(f\mu)_{R^{-1}} - P||_2 \leqslant \eta \cdot ||(f\mu)_{R^{-1}}||_2.$$

证明至此完成。

References

[1] K. Aldaleh、W. Burstein、G. Garza、A. Iosevich、J. Iosevich、A. Khalil、J. King、T. Le、I. Li、A. Mayeli、K. Nguyen 和 N. Shaffer，《傅里叶比率与信号复杂度》，（准备中），（2025年）。3, 6, 9, 10[2] J. Bourgain，有界正交系统与 $\Lambda(p)$-集问题，《数学学报》162 (1989年)，第3-4期，227–245。3, 7[3] J. Bourgain 和 S. Dyatlov，不满足压力条件的谱隙，《数学年刊》（第2辑）187 (2018年)，第3期，825-867。5[4] L. Brandolini、L. Colzani 和 G. Travaglini，傅里叶变换的平均衰减与多面体中的整点，《数学档案》35 (1997年)，第2期，253–275。5, 20[5] L. Brandolini、A. Iosevich 和 G. Travaglini，平面凸体、傅里叶变换、格点与分布不规则性，《美国数学会汇刊》355 (2003年)，第9期，3513–3535。20[6] L. Brandolini、M. Rigoli 和 G. Travaglini，傅里叶变换的平均衰减与凸集几何，《伊比利亚美洲数学评论》14 (1998年)，第3期，519–560。5[7] W. Burstein、A. Iosevich、A. Mayeli 和 H. Nathan，傅里叶最小化与时间序列插补，（arXiv:2506.19226），（2025年）。6, 7[8] D. Donoho 和 P. Stark，不确定性原理与信号处理，《SIAM 应用数学杂志》，（1989年），工业与应用数学学会，第49卷，第3期，第906-931页。11, 14[9] W. Hagerstrom，关于信号恢复的若干观点，罗切斯特大学荣誉学位论文（2025年）。7[10] I. Laba 和 H. Wang，康托尔集的解耦与近最优限制估计，（英文摘要）《国际数学研究通报》（2018年），第9期，2944–2966。5, 18, 19, 20, 34[11]E.M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学丛书，第43卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993年。5, 15, 18, 33[12] R. S. Strichartz，傅里叶变换在二次曲面上的限制与波动方程解的衰减，《杜克数学杂志》50 (1983年)，549–567。36[13] R.S. Strichartz，与在球面上具有奇点的核的卷积，《美国数学会汇刊》148 (1970年)，461-471。15[14] M. Talagrand，选取一定比例的特征，《以色列数学杂志》108 (1998年)，173-191。3, 5, 6, 7[15] P. A.Tomas，傅里叶变换的限制定理，《美国数学会通报》81 (1975年)，第2期，477-478。18

Department of Mathematics, University of Rochester, Rochester, NY, USA电子邮箱: iosevich@gmail.comDepartment of Mathematics, University of Rochester, Rochester, NY, USA电子邮箱: zli154@ur.rochester.eduDepartment of Mathematics, Virgina Tech, Blacksburg, VA, USA电子邮箱: palsson@vt.eduDepartment of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada电子邮箱: yavicoli@math.ubc.ca