arXiv:2512.16805v1 [cs.CC] 18 Dec 2025

集合覆盖重新优化的困难性

Klaus Jansen*基尔大学
kj@informatik.uni-kiel.de,
Tobias M¨omke 奥格斯堡大学
moemke@informatik.uni-augsburg.de,
Bj¨orn Schumacher*基尔大学
bsch@informatik.uni-kiel.de,

2025年12月19日

摘要

我们研究基础性且难以近似的集合覆盖问题的重新优化困难性。重新优化考虑一个实例及其解，以及一个修改后的实例；其目标是在利用通过求解相关实例获得的信息的同时，对修改后的实例进行近似。我们研究（加权）集合覆盖的四种不同类型的重新优化：添加集合、删除集合、向全集添加元素，以及从全集中删除元素。其中一些情形已知比经典集合覆盖问题更容易近似。我们证明，其他所有情形在本质上都与集合覆盖问题一样难以近似。

已知，对于无权情形，在全集中添加和删除元素的再优化问题存在多项式时间近似方案。针对这些情形，我们通过一种新颖的方法，将证明再优化问题为NP困难的经典方法与EPTAS和固定参数可处理之间的关系结合起来，证明在常见的困难性假设下不存在EPTAS。

1 引言

我们根据以下定义来讨论集合覆盖问题。

*由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助——项目编号 528381760

定义1 (加权集合覆盖)。给定一个全集 U、一个集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(U)$，使得$\bigcup \mathcal{S} = U$，以及一个权重函数 w：$\mathcal{S} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$，求一个能够覆盖全集 U的集合 $S \subseteq \mathcal{S}$，使其权重最小，即最小化 $\sum_{s \in S} w(s)$。该问题的无权版本（集合覆盖）的定义相同，但 w 为常值为1的函数；换言之，目标是从 $\mathcal{S}$ 中选取尽可能少的集合来覆盖 U。」

集合覆盖问题是一项基础问题，也是 Karp 的 21 个 NP 完全问题之一。一种简单算法（贪心地选择能够覆盖最多未覆盖元素的集合）可达到 $\mathcal{O}(\ln|U|)$ [Joh74；Lov75]，并可扩展到加权情形[Chv79]。 [Sla97] 分析了贪心算法的精确近似比。关于集合覆盖，已有若干不可近似结果表明，贪心算法基本上是最优的 [LY94；Fei98；RS97；AMS06；DS14]。在已知结果中，假设条件最弱的最佳结果由 Dinur 和 Steurer 给出 [DS14]：对于任意 $\varepsilon > 0$，除非 P $=$ NP，否则不存在近似比为 $(1-\varepsilon)\ln|U|$ 的集合覆盖多项式近似算法。关于参数化复杂度，当参数取解中集合的数量时，集合覆盖已知为 $W[2]$-完全问题[DF95]；而当参数取 $|U|$ 或 $|\mathcal{S}|$ 时，该问题是固定参数可解的。

由于集合覆盖不仅是一个困难问题，而且难以进行近似，因此研究哪些额外信息有助于获得更好的近似比是很有意义的。重新优化所提供的额外信息包括一个相关实例和一个具有一定质量的解。待求解的实例通过对相关实例执行指定修改而获得。典型的修改包括添加或移除输入的某些部分（顶点、边、项目），或改变权重或收益。

此前已有关于（加权）集合覆盖重新优化的研究，见 [BWZ08；Zyc12；Mik10]。Bil`o、Widmayer 和 Zych [BWZ08] 研究了以下重新优化设置：向 U 添加数量固定的新元素，并将其任意地添加到 $\mathcal{S}$ 中的集合；从 $\mathcal{S}$ 的集合中移除数量固定的元素；完全移除数量固定的元素，即从 U 以及其中的所有集合中移除；以及将 U 中的一个元素添加到 $\mathcal{S}$ 的某个集合中。他们为重新优化提供了一个通用框架，并展示了该框架如何应用于这些设置以获得近似算法。对于不改变 U 的设置，他们基于支配集中的边添加和移除给出了近似下界，这利用了两个问题之间的紧密联系。Mikhailyuk [Mik10] 证明，当从 $\mathcal{S}$ 中的某个集合添加或移除至多 $|\mathcal{S}|$ 个来自$\overline{U}$的元素时，该重新优化设置存在一个 $(2 - \quad ^{1}\ln|\mathcal{S}|+1)$-近似算法。

我们研究集合覆盖的四种不同类型的重新优化：添加集合（S^+）、删除集合（S^-）、向全集添加元素（e^+）以及从全集删除元素（e^-）。这些修改的具体定义见第2节。设定 e^+ 和e^- 与 [BWZ08中研究的设定有所重叠；Zyc12]但这些设定并没有给出近似下界。

1.1 相关工作

一般而言，NP困难问题的再优化问题仍然是NP困难的，正如 [BHMW08]所述。证明的基本思路如下：对于每个实例，从某个平凡的（可在多项式时间内求解的）实例出发，反复应用局部修改（以及再优化

算法），直到得到所需的实例（及其解）。同理，强 NP困难问题仍然是强 NP困难的。这在许多情况下排除了全多项式时间近似方案，所能期望的最佳结果是 EPTAS。

众所周知，在许多情况下，如果再优化问题的最优值仅发生常数量级的变化，就可以通过简单的分类讨论得到一个多项式时间近似方案：要么最优值较小，我们可以在多项式时间内找到一个最优解（例如通过枚举）；要么最优值较大，此时可以轻松地将给定的最优解转化为修改后的实例的一个足够好的解。一般性描述可参见 [Zyc12] 或 [BWZ08] 中的引理 2。如果所考虑的问题关于解的规模是 固定参数可处理 的，那么可以加速第一种情况，从而得到 EPTAS。例如，APX-完全问题 顶点覆盖就是如此。另一个例子是集合覆盖 的特殊情形，即 $\mathcal{S}$ 中的集合两两交集的大小有常数上界 Δ [RS08]；或者所有集合的大小都有常数上界的特殊情形。有趣的是，即使在这种情况下，该问题仍然难以近似 [Tre01],；也就是说，除非 $\ln \Delta - \mathcal{O}(\ln \ln \Delta)$，否则难以在 $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ 下实现该近似因子。

1.2 结果

已知结果和我们的结果概述见表 1。这里的“困难”是指该问题无法获得明显优于 集合覆盖的近似解（最多只能提升一个常数因子）。集合覆盖 的精确结果见推论 3 和 5以及引理 8和 9。加权集合覆盖 的结果见推论 11 和 13、引理 14以及推论 17。

表 1：结果概述。“困难”表示其不可近似结果实质上与集合覆盖相同。灰色结果为此前已知。

	S^+	S^-	e^+	e^-
集合覆盖	困难	困难	多项式时间近似方案/无 EPTAS	多项式时间近似方案/无EPTAS
加权集合覆盖	在 APX 中困难		且没有多项式时间近似方案	hard

大多数困难性结果都遵循相同的模式：对于给定的集合覆盖实例，我们构造一个具有简单最优解的重新优化实例，使得再优化算法实际上必须求解原始的集合覆盖实例。排除存在 EPTAS 的证明则更为复杂。与上述证明再优化问题为NP困难的思路类似，我们从一个简单实例出发，并在每一步都使用假定存在的 EPTAS，构造一个以解的大小为参数的固定参数可处理算法。这与经典结果类似：优化问题的 EPTAS 蕴含一个以解的大小为参数的固定参数可处理算法（参见 [FG06]中的定理 1.32）。我们在引理6中给出这一结果的一般性陈述。

论文概要 我们首先介绍符号，并在第2节定义重新优化的设定。然后，我们将在

第3 节和第 4 节分别讨论非加权情形和加权情形的结果。我们将在第5节讨论未来研究中一些有趣的问题。

2 预备知识

对于任意 $n \in \mathbb{N}_0$，令 $[n] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$，且 $[n]_0 \coloneqq [n] \cup \{0\}$。我们用 $\langle \cdot \rangle$ 表示编码长度。

对于优化问题 $\mathcal{I}$ 的一个实例 $I \in \mathcal{I}$，我们用 $\mathsf{sol}(I)$ 表示有效解的集合，用 $\mathsf{val}(S)$ 表示解 $S \in \in \mathsf{sol}(I)$ 的值。实例 I 的最优解的最优值记为 $\mathsf{OPT}(I)$。

本文将重新优化问题定义如下。设 $\mathcal{I}$ 是一个具有最小化目标的优化问题。最大化目标的定义类似。设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ 是实例集合上的一个关系（若 $(I, I') \in \mathcal{M}$，则记作 $I \sim_{\mathcal{M}} I'$），该关系形式化了有效修改。我们将其记为 $(\mathcal{M}, \rho)$-$\mathcal{I}$，其中 $\mathcal{I}$ 是问题，$\mathcal{M}$ 是修改，ρ 是给定解的质量。该问题的一个实例是三元组 (I, S, I')，满足 $(I, I') \in \mathcal{M}$，$S \in \in \mathsf{sol}(I)$，且 $\mathsf{val}(S) \leq \rho\, \mathsf{OPT}(I)$。若给定的是一个最优解，我们用 $\mathcal{M}$-$\mathcal{I}$ 作为 $(\mathcal{M}, 1)$-$\mathcal{I}$ 的简写。

接下来，我们精确定义要研究的加权集合覆盖修改。集合覆盖的定义相同，只是将权重函数限制为恒等于 1 的常数函数。设 $(U, \mathcal{S}, w)$ 为一个加权集合覆盖实例。

添加集合（S^+）给定 $s' \in \mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{S}$ 和一个值 $w_{s'} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，修改后的实例为 $(U, \mathcal{S}' \coloneqq \mathcal{S} \cup \{s'\}, w')$，其中

$$w' : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}, s \mapsto \begin{cases} w_{s'} & \text{if } s = s' \\ w(s) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

删除集合（S^-）给定 $s' \in \mathcal{S}$，修改后的实例为 $(U, \mathcal{S}' \coloneqq \mathcal{S} \setminus \{s'\}, {}^{w}|_{\mathcal{S}'})$。

添加元素（e^+）给定 $e \notin U$ 和 $S_e \subseteq \mathcal{S}$，修改后的实例为 $(U \cup \{e\}, \mathcal{S}' \coloneqq (\mathcal{S} \setminus S_e) \cup \{s \cup \{e\} : s \in S_e\}, w')$，其中 $w' : \mathcal{S}' \to \mathbb{Q}_{\geq 0}, s \mapsto w(s \setminus \{e\})$。

删除元素 (e^-) 给定 $e \in U$ 修改后的实例为 $U \setminus \{e\}$，$\mathcal{S}' \coloneqq \{s \setminus \{e\} : s \in \mathcal{S}\}$，$w'$) 其中

$$w' : \mathcal{S}' \to \mathbb{Q}_{\geq 0}, s \mapsto \begin{cases} w(s) & \text{if } s \in \mathcal{S} \\ w(s \cup \{e\}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

请注意，由于我们在定义1中要求每个集合覆盖实例都是可行的，因此初始实例和修改后的实例都必须可行，即 $\bigcup \mathcal{S} = U$。这并不构成限制，因为我们可以在多项式时间内检验 $\bigcup \mathcal{S} = U$。

3 无权集合覆盖

在无权情形下，仅使最优值改变一个常数的变化包括添加/删除一个大小为常数的集合，以及添加/删除常数个元素。因此，所有这些情形都可以采用第1.1节所述的多项式时间近似方案。

3.1 S^+-集合覆盖

我们将不可近似结果表示为全集大小的函数，使其与集合覆盖的不可近似结果相兼容。通常，f会是$x \mapsto \ln x$的一个轻微变体，例如$x \mapsto \frac{1}{3}\ln x$。请注意，这种表示法仍允许通过使用常数函数实现常数因子近似。

为了构造一个具有显而易见最优解的集合覆盖实例，我们将全集中的每个元素都复制一份，并为全集中的每个元素添加一个集合，使其及其副本都被覆盖。因此，所有新添加的集合构成一个最优解；再添加一个覆盖这些副本的新集合，就能显露出原始集合覆盖实例。

我们总是以这样的方式构造重新优化实例，使其具有显而易见的最优解，从而证明针对$\rho = 1$的结论。但由于对于任意$\rho > 1$，最优解也是一个ρ-近似解，因此我们证明该结论对每个$\rho \geq 1$都成立。

引理1。 设 $\rho \geq 1$。设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$。一个针对 (S^+, ρ)-集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法意味着存在一个针对集合覆盖的 $2f(2|U|)$-近似算法。

证明。 设 $(U, \mathcal{S})$ 是一个集合覆盖实例。不失一般性，假设 $|U| \geq 1$ 且 $\mathrm{OPT}((U, \mathcal{S})) < |U|$，即 $\mathcal{S}$ 中存在一个大小至少为 2 的集合。通过为每个满足 $|U'| = 2|U|$ 的元素添加一个副本，得到 U'。对于每个 $u \in U$，令 u' 为添加到 U' 的副本。接下来，定义

$$\mathcal{S}' \coloneqq \mathcal{S} \cup \{\{u, u'\} : u \in U\}.$$

该集合覆盖实例的最优解 集合覆盖 为 $S^* \colon = \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S} = \{\{u, u'\} \colon u \in U\}$。构造如图所示1。

现在，考虑这个 (S^+, ρ)-集合覆盖实例，其实例为 $(U', \mathcal{S}')$，（最优）解为 S^*，修改后的实例为 $(U', \mathcal{S}' \cup \{U' \setminus U\})$。假设修改后实例的某个解包含形如 $\{u, u'\}$ 的集合，那么实际上有两种情况：该解只包含这种形式的集合，或者包含集合 $U' \setminus U$。在这两种情况下，我们都能得到一个值更小或相等、且不包含任何形如 $\{u, u'\}$ 的集合的解：对于第一种情况，注意到 U 中的所有元素都可以轻易地用至多 $|U| - 1$ 个集合覆盖，并且我们再添加集合 $U' \setminus U$。对于第二种情况，注意到 $U' \setminus U$ 已经在解中，这意味着 U' 中的所有元素都已被覆盖。因此，我们只需将每个形如$\{u, u'\}$ 的集合替换为 $\mathcal{S}$ 中覆盖 u 的集合，同时不增加解的大小。因此，可以假设没有解包含形如 $\{u, u'\}$ 的集合。直接可得，$\mathrm{OPT}((U', \mathcal{S}' \cup \{U' \setminus U\})) = \mathrm{OPT}((U, \mathcal{S})) + 1$。

我们将假定的 $f(|U|)$-近似算法应用于重新优化实例，并得到一个解 S，满足 $\{U' \setminus U\} \subseteq S \subseteq \mathcal{S} \cup \{U' \setminus U\}$，如前所述。注意，

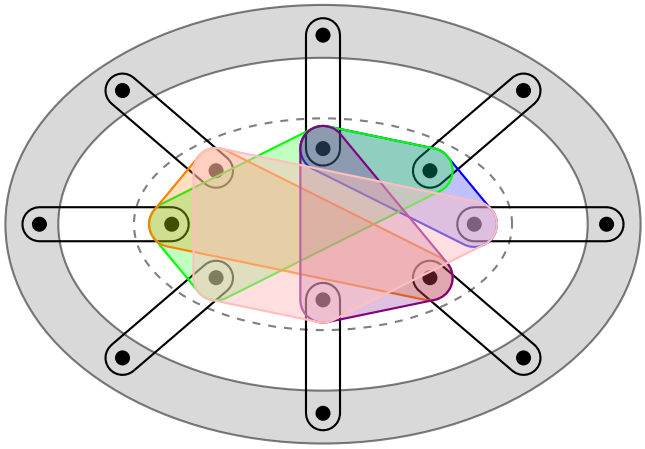


图1：引理1中的构造。彩色中心是原始实例，外围的点是重复项，黑色集合与其重复项一起覆盖每个元素。灰色集合是作为局部修改添加的，用于覆盖所有重复项。

$S' := S \setminus \{U' \setminus U\}$是原始实例的一个解。我们有

$$\begin{aligned}|S'| = |S| - 1 &\le f(|U'|)\,\mathrm{OPT}((U', \mathcal{S}' \cup \{U' \setminus U\})) - 1 \\ &= f(2|U|)(\mathrm{OPT}((U, \mathcal{S})) + 1) - 1 \le 2f(2|U|)\,\mathrm{OPT}((U, \mathcal{S}))\end{aligned}$$

从而证明该命题。 □

注 2。 该证明还表明，(S^+, ρ)-集合覆盖的精确算法意味着集合覆盖的精确算法。通过分析当 $f = 1$ 时的最后一串不等式即可看出这一点。

对于每个 $\alpha > 0$，引理1表明，(S^+, ρ)-集合覆盖的 $\alpha \ln|U|$ 近似算法意味着集合覆盖的 $2\alpha \ln(2|U|)$ 近似算法。对于 $\alpha < \frac{1}{2}$ 和 $|U| > \exp(\frac{2\alpha \ln 2}{(1-2\alpha)^2})$，该近似比优于 $(1-2\alpha)\ln|U|$。结合 [DS14] 结果，我们得到以下推论。

推论 3. 对于任意 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$以及 $\rho \ge 1$，除非P $=$ NP，否则不存在针对 (S^+,ρ)-集合覆盖的 $\alpha \ln|U|$-近似算法。

3.2 S^--集合覆盖

引理 4. 设 $\rho \ge 1$。设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\ge 1}$。针对 (S^-, ρ)-集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法意味着存在一个针对集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法。

证明。 给定任意集合覆盖实例。不失一般性，假设没有任何一个集合覆盖整个全集。我们向这些集合中添加一个包含整个全集的新集合。这个新添加的集合是一个最优解。因此，我们构造了一个 (S^-, ρ)-集合覆盖实例（移除新添加的集合），而该实例必须精确求解原始实例。因此，我们得到了集合覆盖的一个$f(|U|)$-近似算法。 □

这意味着，集合覆盖所成立的相同不可近似性结果也适用于 S^--集合覆盖。因此，在假设 P $\neq$ NP 的情况下，已知的 $\mathcal{O}(\ln|U|)$-近似算法就是我们所能期望的最佳结果。正式表述如下推论。

推论 5. 对于任意 ε 和 $\rho \geq 1$，除非P $=$ NP，否则不存在针对 (S^-,ρ)-集合覆盖的$(1-\varepsilon)\ln|U|$-近似算法。

3.3 e^+-集合覆盖

此前已经讨论过 e^+-集合覆盖存在多项式时间近似方案的可能性。这里我们重点说明，EPTAS 不太可能存在。首先，我们给出一般框架，随后通过给出适当的构造，将其应用于 e^+-集合覆盖。

与证明再优化问题 NP-困难的方式类似（如第 1.1 节所述），在某些条件下，我们可以排除 EPTAS 存在的可能性。引理 6 说明，如何利用再优化问题的 EPTAS 为原优化问题构造一个固定参数可处理FPT 算法。

引理 6 (EPTAS 蕴含参数化算法)。 设 $\mathcal{I}$ 是一个解值为整数的优化问题， $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ 是一次修改。给定再优化问题 $\mathcal{M}$-$\mathcal{I}$的 *EPTAS*，以及可计算函数 f、f'： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，对于每个 $I \in \mathcal{I}$，我们都能在$\mathrm{poly}(\langle I\rangle)$ 时间内找到I_0、I_1、.....、$I_n \in \mathcal{I}$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有

- 若 $\mathrm{OPT}(I) \leq k$，则对所有 $i \in [n]_0$，$\mathrm{OPT}(I_i) \leq f(k)$
- 我们可以在 $f'(k)\,\mathrm{poly}(\langle I\rangle)$ 时间内找到 I_0 的一个最优解，或者判定 $\mathrm{OPT}(I_0) > f(k)$
- $I_{i-1} \sim_{\mathcal{M}} I_i$ 对所有 $i \in [n]$，并且
- $\mathrm{OPT}(I_n) \leq f(k) \implies \mathrm{OPT}(I) \leq k$

那么 $\mathcal{I}$ 关于解的大小参数化是固定参数可解的。

证明。 假设我们有一个针对 $\mathcal{M}$-$\mathcal{I}$ 的 EPTAS，其运行时间为 $g(\frac{1}{\varepsilon})\,\mathrm{poly}(\langle I\rangle)$。我们构造一个针对 $\mathcal{I}$ 的算法，该算法给定一个实例 $I \in \mathcal{I}$和一个 $k \in \mathbb{N}$，要么计算出一个最优解，要么判定 $\mathrm{OPT}(I) > k$。这意味着 $\mathcal{I}$ 关于解的大小参数化是固定参数可解的。

令 $k \in \mathbb{N}$ 和 $I \in \mathcal{I}$ 为任意实例。首先，我们计算 I_0的一个最优解 S_0，或者判定 $\mathrm{OPT}(I_0) > f(k)$，所需时间为 $f'(k)\,\mathrm{poly}(\langle I\rangle)$。如果 $\mathrm{OPT}(I_0) > f(k)$，我们便知道 $\mathrm{OPT}(I) > k$，于是问题解决。

令 $\varepsilon := \frac{1}{f(k)+1}$。令 $\mathcal{A}_\varepsilon(I,\ S,\ I')$ 为 EPTAS 在精度为 ε时针对实例 I'计算出的解。对所有 $i \in [n]$，令 $S_i := \mathcal{A}_\varepsilon(I_{i-1},\ S_{i-1},\ I_i)$。我们有

$$|\mathrm{val}(S_i) - \mathrm{OPT}(I_i)| \leq \varepsilon\,\mathrm{OPT}(I_i) = \frac{\mathrm{OPT}(I_i)}{f(k)+1} < 1$$

对于任意 $i \in [n]$，假设 $\mathrm{OPT}(I) \leq k$。因此，EPTAS 在每一步都会计算一个最优解。因此，我们可以在时间 $\mathcal{O}(f''(k)\,\mathrm{poly}(\langle I\rangle))$ 内判定 I，即 $\mathrm{OPT}(I) \leq k$（因为 $\mathrm{OPT}(I_n) \leq f(k) \implies \mathrm{OPT}(I) \leq k$），其中

$$f'' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, k \mapsto f'(k) + g(f(k)+1)$$

这是一个可计算函数。 □

由于引理 6 表明，当再优化问题允许使用 EPTAS 时，原问题存在一个固定参数可解算法，因此，在问题对于某个 $W[t]$-困难且 $t \geq 1$ 以及引理 6的前提条件均得到满足时，可以有条件地排除 EPTAS 的存在。我们在下面的推论中对此进行正式表述。

推论 7。 设 $t \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。给定 $W[t]$难解问题、该问题的再优化变体以及满足引理 6 前提的构造，则除非 $W[t] =$ 固定参数可处理，否则该再优化问题不存在 *EPTAS*。

$W[t] \neq$ 固定参数可处理 对于任意 $t \geq 1$ 是参数化复杂度中的经典假设。注意，$W[t] =$ 固定参数可处理 意味着 ETH 不成立（参见 [DF13] 中的定理 29.4.1）。

现在我们给出 e^+-集合覆盖的构造，以应用推论 7。

引理 8。 除非固定参数可处理 $= W[2]$，否则 e^+-集合覆盖不存在 *EPTAS*。

证明。 设 $I = (U, \mathcal{S})$ 是任意一个集合覆盖实例，并设 $m := |\mathcal{S}|$ and $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_m\}$。我们取 $m+1$ 个新元素 e_1，……，$e_{m+1} \notin U$，并定义新实例 $I' = (U', \mathcal{S}')$。

$$U' := U \sqcup \{e_1, \ldots, e_{m+1}\} \qquad \mathcal{S}' := \{s_i \sqcup \{e_i\} : i \in [m]\} \sqcup \{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$$

我们有 OPT(I) $+1 =$ OPT(I')，因为解始终必须包含集合 $\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$。接下来考虑实例 $I_0 = (U'', \mathcal{S}'')$，其中

$$U'' := \{e_1, \ldots, e_{m+1}\} \qquad \mathcal{S}'' := \{\{e_i\} : i \in [m]\} \sqcup \{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$$

其最优解为 $\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$。现在，我们通过逐个添加 $|U|$ 的元素来定义实例 $I_1, \ldots, I_{|U|}$。由于引入了元素 e_i，这一构造保证了在每个阶段所有集合都互不相同，并且我们有 $I_{|U|} = I'$。此外，对所有 $i \in [|U|]_0$，都有 OPT(I_i) $\leq$ OPT(I) $+1$。

这一系列实例满足引理 6 的条件，因此不存在e^+-集合覆盖 的 EPTAS，除非 固定参数可处理 $= W[2]$ 根据推论 7，因为 集合覆盖 是 $W[2]$-完全的。 □

3.4 e^--集合覆盖

与前一节关于 e^+-集合覆盖的讨论类似，我们仅在通常假设下排除 e^--集合覆盖存在 EPTAS 的可能性。在此情况下，我们无法直接应用推论7，但证明结构仍然相似。本例中的挑战在于找到一个更大的实例，使得最优解不会任意增加，同时仍然存在一个显而易见的最优解。为解决这一问题，我们转而证明：如果存在 EPTAS，则另一个不同但密切相关的问题是固定参数可解的。具体而言，该问题是单位圆盘图上的支配集问题，该问题具有多项式时间近似方案 [NH05]，但仍然是 $W[1]$-困难的 [Mar06]。在证明中，我们利用这样一个事实：一个支配集实例总是可以视为一个集合覆盖实例，并使用多项式时间近似方案来处理上述问题。我们从一个支配集实例的近似解开始，并添加元素使该解成为最优解。接下来，我们逐步移除所添加的元素，直到回到原始实例。

引理 9。 除非固定参数可处理 $= W[1]$，否则不存在适用于 e^{-}-集合覆盖的 *EPTAS*。

证明。 假设我们有一个针对 e^{-}-集合覆盖的 EPTAS。

设 $(G = (V, E)\ k)$ 是单位圆盘图上支配集问题的一个参数化实例。不失一般性，假设不存在顶点 $u, v \in V$ 满足 $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$。我们将多项式时间近似方案 [NH05] 用作 2-近似算法，并得到一个解 $S \subseteq V$。如果 $|S| > 2k$，我们知道 OPT $> k$，且不存在大小至多为 k 的解。否则，我们按如下方式构造一个集合覆盖实例。令 $U := V$，并令 $\mathcal{S} := f[V]$，其中

$$f : V \to \mathcal{P}(U), v \mapsto N(v) \cup \{v\}$$

注意， f 是一个单射，因此支配集问题与所构造的集合覆盖实例的解之间存在一一对应关系，并且保持解中元素的数量不变。因此，只需在所构造的实例中找到一个值至多为 k 的解，或者判定 OPT$((U,\ \mathcal{S}))\ > k$。为此，我们使用假定存在的 EPTAS。

首先，我们添加 $|S|$个新元素，以固定解 S 并使其成为唯一的最优解。对于每个 $v \in S$，我们向全集中添加一个额外的 v'，并将其加入 $f(v)$。将所得实例称为 I'。对应于 S 中各元素的集合构成了 I'的最优解。现在，我们逐个移除添加的元素，直到得到 $(U, \mathcal{S})$ 的一个解，如引理 6的证明所示。这样做可行，因为每一步的最优值都不超过 $2k$。

因此，我们证明了单位圆盘图上的 支配集 问题以解的大小为参数时是固定参数可解的，这意味着 固定参数可处理 $= W[1]$，因为该问题是 $W[1]$-困难的[Mar06]。 □

4 加权集合覆盖

4.1 S^{+}-加权集合覆盖

在加权情形下，我们可以通过移除 1前的因子 2，来改进引理 f 中得到的结果，从而相较于推论 3提高不可近似性界。

引理 10. 设 $\rho \geq 1$。设 $f\colon\ \ \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$。针对 (S^{+}, ρ)-加权集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法意味着存在一个针对集合覆盖的 $f(2|U|)$-近似算法。

证明概要。 证明与引理 1 的证明基本相同，只是所有集合的权重均为 1，除了集合 $U' \setminus U$ 的权重为 0。因此，原始实例和重新优化实例的最优值相同，从而得到更紧的结果。 □

推论 11. 对于任意 $\varepsilon \in (0、1)$ 且 $\rho \geq 1$，除非P $=$ NP，否则不存在针对 (S^{+}, ρ)-加权集合覆盖的$(1 - \varepsilon) \ln${*v14*}-近似算法。

证明概要。论证与推论3中的相同。 □

4.2 S^{-}-加权集合覆盖

我们可以直接由引理4推出以下推论。

推论 12。令 $\rho \geq 1$。令 $f\colon \ \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$。对于 (S^{-},ρ)-加权集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法意味着存在一个针对集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法。

推论 13。对于任意 ε 和 $\rho \geq 1$，除非P $=$ =NP，不存在针对 (S^{-},ρ)-加权集合覆盖的 $(1-\varepsilon)\ln|U|$-近似算法。

4.3 e^{+}-加权集合覆盖

$(e^{+},\ \rho)$-加权集合覆盖 可以在多项式时间内以 $1+\rho$的近似比进行近似。这是由 [Zyc12] 中的结论 3 得出的，他们在那里证明了添加常数个元素时的这一结果。

我们证明，对于 e^{+}-加权集合覆盖，近似比低于$3\,2$ 的近似算法意味着存在一个针对集合覆盖的常数因子近似算法。其核心思想是添加一个覆盖整个全集的额外集合，该集合代价高昂，但仍属于某个最优解。然后，我们向该实例中添加一个元素，但不将其加入这个高代价集合。我们证明，任何选取该高代价集合的解，其权重至少是最优值的 1.5 倍，因此，近似比小于 1.5 的 e^{+}-加权集合覆盖近似算法无法选取该集合。此外，为了达到 1.5 的近似比，该算法必须在比率为 2 的范围内找到原始集合覆盖实例的一个近似解。

引理 14. e^{+}-加权集合覆盖无法在多项式时间内以小于1.5 的因子进行近似，除非P $=$ NP。

证明。假设我们有一个针对 e^{+}-加权集合覆盖的近似算法，其近似比低于$3\,2$。

设 $I = (U,\mathcal{S})$是一个集合覆盖实例。不失一般性，假设其中没有单元素集合。如果全集中有某个元素仅被一个单元素集合覆盖，那么我们知道该单元素集合始终属于解，因此可以将它及相应的元素从实例中移除。之后再将它们加回实例，并将该单元素集合加入解，只会改善近似保证。如果还有其他单元素集合，我们可以将它们移除，因为任何包含单元素集合的解都可以轻易修改为只包含非单元素集合，且不增加解的大小。

接下来，我们为所有元素添加一个单元素集合，得到实例 $I' = (U,\mathcal{S}')$，使得OPT(I') $=$ OPT(I)且 $|\mathcal{S}'| \geq 2$OPT(I)，因为存在一个不含单元素集合的最优解，并且 $|U| \geq$ OPT(I)。这对于后续的分析很重要。

我们可以假设已知 OPT(I')，因为我们会针对 $[|U|]$ 中的每个值执行以下构造，并输出由此得到的最佳有效解。我们只分析猜对时的构造，从而得出所构造算法输出的上界。

我们按如下方式构造一个加权集合覆盖实例 I''。对于每个 $s \in \mathcal{S}'$，我们向全集中引入一个新元素e_s。将新的全集记为 $U'' = U \cup \{e_S\colon \ S \in \mathcal{S}'\}$。集合为

$$\mathcal{S}'' \coloneqq \{s \cup \{e_s\} : s \in \mathcal{S}'\} \cup \{G, R\}$$

其中 $G := U''$，且 $R := \{e_s : \ s \in \mathcal{S}'\}$，权重函数为

$$w : \mathcal{S}'' \to \mathbb{Q}_{\geq 0}, s \mapsto \begin{cases} 2\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}')) & \text{if } s = G \\ \mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}')) & \text{if } s = R \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该构造如图 2 所示。对于 $I'' = (U'', \mathcal{S}'', w)$ 的最优解，有三种候选方案：首先，仅使用集合 G，其权重为 $2\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}'))$；其次，使用集合 R 以及实例 $(U,\mathcal{S}')$ 的一个最优解，其权重为 $2\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}'))$；最后，由于引入了上方的单元素集合，使用除 G 和 R 之外的所有集合，其权重至少为 $2\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}'))$。因此， G是一个最优解。

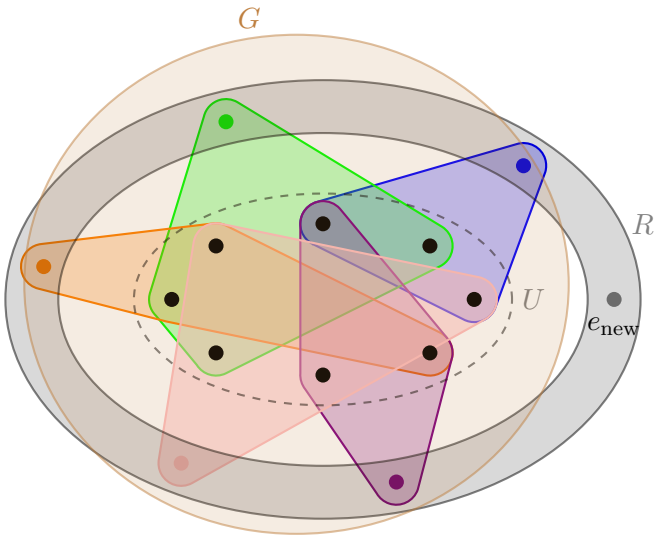


图 2：引理 14 中的构造。黑点表示集合覆盖 实例中的原始元素。彩色集合是原始实例中的集合，但每个集合都扩展了一个对应颜色的元素。额外的集合 G 和 R 分别是棕色集合和灰色集合。作为局部修改所添加的元素标记为 e_{new}。

局部修改是添加一个新元素 e_{new}，且该元素只添加到集合 R 中。将此实例称为 I^*。我们在实例 $(I'', \{G\}, I^*)$ 上应用假定的算法，得到一个解 S。对于 I^* 的任何解，都必须包含 R 的修改版本，这意味着所有元素 e_s 都已被覆盖。将 $(U,\mathcal{S}')$ 的一个最优解与 R 的修改版本结合起来，我们便得到一个权重为 $2\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}'))$ 的最优解。由于每个解都必须包含集合 R，包含 G 的解的值至少为 $3\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}'))$。因此，解 S 不包含集合 G。解 S 中来自 $\mathcal{S}'$ 的集合数量为

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(S) - w(R) &< \frac{3}{2}\,\mathrm{OPT}(I^*) - w(R) \\ &= 3\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}')) - \mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}')) \\ &= 2\,\mathrm{OPT}((U,\mathcal{S}')). \end{aligned}$$

因此，我们构造出了集合覆盖问题的一个 2-近似算法。 □

备注15。 通过调整集合 R 和 G 的取值，这个结果或许可以针对 $\rho > 1$ 的 (e^+, ρ)-加权集合覆盖进一步改进。

对于 $\rho = 1$，如果存在常数 $c > 2$，使得 $|\mathcal{S}'| \geq c\,\mathrm{OPT}((U, \mathcal{S}'))$，那么通过将权重调整为 $w(G) = c\,\mathrm{OPT}((U, \mathcal{S}'))$ 和 $w(R) = (c-1)\,\mathrm{OPT}((U, \mathcal{S}'))$，就可以提高界。

4.4 e^--加权集合覆盖

引理 16。 设 $\rho \geq 1$。设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 1}$。一个针对 (e^-, ρ)-加权集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法可得一个针对加权集合覆盖的 $f(|U|)$-近似算法。

证明。 给定一个加权集合覆盖实例 $(U, \mathcal{S}, w)$，我们按如下方式构造一个 e^--加权集合覆盖实例。设 $u' \notin U$ 是一个新元素。新实例的全集为 $U' := U \cup \{u'\}$，我们保留 $\mathcal{S}$ 中的集合，并添加一个包含 U' 中所有元素的新集合，其权重为 $W := (f(|U|) + 1) \sum_{S \in \mathcal{S}} w(S)$。新增的集合是一个最优解，因为它包含 U 中的所有元素，而且是唯一包含 u' 的集合。现在，在构造出的 (e^-, ρ)-加权集合覆盖实例上使用一个 $f(|U|)$-近似算法，即可求解原始实例，近似因子为 $f(|U|)$，因为 $W > f(|U|)\,\mathrm{OPT}((U, \mathcal{S}, w))$. □

推论 17. 对于任意 ε 和 $\rho \geq 1$，除非P $=$ NP，否则不存在$(1-\varepsilon)\ln|U|$-近似算法可用于（e^-，ρ）-加权集合覆盖。

请注意，在引理的证明中，我们构造了一个算法 16 来计算 $f(|U|)$，或者至少需要计算 $f(|U|)$ 的近似值。如果无法在多项式时间内完成这一计算，我们就不会构造多项式时间算法。这对推论 17 并无影响，因为我们只需要计算自然对数。

5 结论

对于我们讨论的所有重新优化情形，近似上界和下界基本相匹配，唯独（e^+， ρ）-加权集合覆盖 的上界为 $1+\rho$，但下界仅为 1。5。这个问题的最佳近似比是多少，是一个值得探讨的问题。由于引理中的构造似乎有望得到改进14，因此最佳近似比可能与1。5相差不小。

其他值得考虑的角度包括有界集合大小和有界元素频率；这两种情形的近似保证更好，但仍然存在强困难性结果。当集合大小有常数上界时，对于第1.1节讨论的集合覆盖情形，我们可以得到一个 EPTAS。值得考虑在加权情形下研究这一限制，因为我们的大多数困难性构造都使用大小达到或接近 U的集合。对于有界集合大小以及有界频率，[BWZ08；Zyc12] 中的结果与一般情形相比，给出了更好的近似保证。

参考文献

[AMS06] Noga Alon、Dana Moshkovitz 和 Shmuel Safra。“k-限制集合的算法构造”。载于：ACM 算法汇刊 2.2（2006）。doi：10.1145/ 1150334.1150336。[BHMW08] Hans-Joachim B¨ockenhauer、Juraj Hromkovic、Tobias M¨omke 和 Peter Wid- mayer。“重新优化的困难性”。载于：SOFSEM 2008：计算机科学理论与实践，计算机科学理论与实践当前趋势第34届会议，Nov´y Smokovec，斯洛伐克，2008年1月19日至25日，论文集。第4910卷。计算机科学讲义。Springer，2008。doi：10.1007/978- 3-540-77566-9_5。[BWZ08] Davide Bil`o、Peter Widmayer 和 Anna Zych。“加权图与覆盖问题的重新优化”。载于：近似与在线算法，第六届国际研讨会，WAOA 2008，卡尔斯鲁厄，德国，2008年9月18日至19日。修订论文。第5426卷。计算机科学讲义。Springer，2008。doi：10.1007/978-3-540-93980-1_16。[Chv79] Vasek Chv´atal。“集合覆盖问题的贪心启发式”。载于：Math. Oper. Res. 4.3（1979）。doi：10.1287/MOOR.4.3.233。[DF13] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性基础》。计算机科学文本。Springer，2013。doi：10.1007/978-1-4471- 5559-1。[DF95] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。“固定参数可处理性与完备性 I：基本结果”。载于：SIAM 计算杂志 24.4（1995）。doi：10.1137/ S0097539792228228。[DS14] Irit Dinur 和 David Steurer。“平行重复的分析方法”。载于：计算理论研讨会，STOC 2014，美国纽约州纽约市，2014年5月31日至6月3日。ACM，2014。doi：10.1145/2591796.2591884。[Fei98] Uriel Feige。“近似集合覆盖的 ln n 阈值”。载于：ACM 杂志 45.4（1998）。doi：10.1145/285055.285059。[FG06] J¨org Flum 和 Martin Grohe。《参数化复杂性理论》。理论计算机科学文本：EATCS 丛书。Springer，2006。doi：10.1007/3-540-29953-X。[Joh74] David S. Johnson。“组合问题的近似算法”。载于：计算机与系统科学杂志 9.3（1974）。doi：10.1016/S0022-0000(74)80044-9。[Lov75] L´aszl´o Lov´asz。“最优整数覆盖与分数覆盖之比”。载于：离散数学 13.4（1975）。doi：10.1016/0012-365X(75)90058-8。[LY94] Carsten Lund 和 Mihalis Yannakakis。“最小化问题近似的困难性”。载于：ACM 杂志 41.5（1994）。doi：10.1145/185675.306789。

[Mar06] D´aniel Marx。《几何图中独立集与支配问题的参数化复杂性》。载于：《参数化与精确计算》，第二届国际研讨会，IWPEC 2006，苏黎世，瑞士，2006年9月13日至15日，论文集。第4169卷。《计算机科学讲义》。Springer，2006年。doi: 10.1007/11847250_14.[Mik10] VA Mikhailyuk。《集合覆盖问题的再优化》。载于：《控制论与系统分析》46.6（2010年）。[NH05] Tim Nieberg和Johann L. Hurink。《单位圆盘图中最小支配集问题的多项式时间近似方案》。载于：《近似与在线算法》，第三届国际研讨会，WAOA 2005，帕尔马，西班牙，2005年10月6日至7日，修订论文。第3879卷。《计算机科学讲义》。Springer，2005年。doi: 10.1007/11671411_23.[RS08] Venkatesh Raman和Saket Saurabh。《短环使W困难问题变得困难：无短环图中W困难问题的固定参数算法》。载于：Algorithmica 52.2（2008年）。doi: 10.1007/S00453-007-9148-9。[RS97] Ran Raz和Shmuel Safra。《次常数错误概率的低次数测试，以及NP的次常数错误概率PCP刻画》。载于：第二十九届ACM计算理论研讨会年会论文集，埃尔帕索，得克萨斯州，美国，1997年5月4日至6日。ACM，1997年。doi: 10.1145/258533.258641。[Sla97] Peter Slav´ík。《集合覆盖贪心算法的紧确分析》。载于：《算法杂志》25.2（1997年）。doi: 10.1006/JAGM.1997.0887。[Tre01] Luca Trevisan。《有界度实例上的优化问题不可近似结果》。载于：第三十三届ACM计算理论研讨会年会论文集。STOC '01。赫索尼索斯，希腊：计算机协会，2001年。doi: 10.1145/380752.380839。[Zyc12] Anna Zych。《NP难问题的再优化》。博士学位论文。苏黎世联邦理工学院，苏黎世，瑞士，2012年。doi: 10.3929/ETHZ-A-007161496。