arXiv:2512.16820v1 [math.GN] 18 Dec 2025

超度量空间与对数比率

H. MOVAHEDI-LANKARANI

Abstract. 本文证明，若紧致度量空间 (X,d) 与某个超度量空间双重 Hölder 等价，则对数比 $R(X,d)$ 有限。反过来，若对数比 $R(X,d)$ 有限，且 $\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$ 对某个$p \in (1,\infty)$ 成立，则 (X,d) 与某个超度量空间双重 Hölder 等价。

此外，本文还证明，对任意 $s \in [0,\infty]$，都存在一个紧可数度量空间 (X,d)，它有唯一聚点，且对数比$R(X,d)$ 等于 s。此外，我们还证明了某类紧全不连通度量空间的双重 Hölder 嵌入结果。

1. Introduction

度量空间之间的映射 $f : X \to X'$ 若存在常数 $c > 0$，使得对所有 $x_1, x_2 \in X$，均有 $d'(f(x_1)\ f(x_2)) \leq c\, d(x_1,x_2)^s$，则称其为指数为 $s > 0$ 的 Hölder 映射。若此外，f 在 $f(X)$ 上的逆映射存在，且为指数为 $t > 0$ 的 Hölder 映射，则称 f 为双重 Hölder 映射（其上方指数为 s，下方指数为 $1/t$）。双利普希茨映射是上下指数均为 1 的双重 Hölder 映射。

本文证明了两个结果。第一个结果（定理 2.6）刻画了与超度量空间双 Hölder 等价的紧致度量空间。我们回顾一下，超度量空间是这样一种度量空间：其度量 X 满足强三角不等式 $d(x_1,x_2) \leq \max\{d(x_1,x_3)\ d(x_2,x_3)\}$，对所有 x_1、x_2、$x_3 \in X$均成立。我们的第二个结果（定理 4.2）讨论了嵌入欧几里得空间中的双 Hölder 嵌入。我们的主要技术工具是 [21] 中引入的对数比；定义见第 2 节。对数比不是双 Hölder 映射的不变量，但有限对数比空间的双 Hölder 像具有有限对数比。我们还建立了对数比的一些进一步性质。我们的大多数结果都假设存在 X 的某个既开又闭划分族。具体而言，对于每个紧致度量空间（X,d）和每个实数 $p \in (1,\infty)$，我们定义集合 $\mathcal{A}_p^*(X)$，它由 X 的所有嵌套既开又闭划分序列组成；这些划分的直径在 p 中的下降速度不超过指数速度，并且其对数比收敛于（X,d）的对数比。（精确定义见第 2 节。）

本文结构如下。第 2 节中，我们首先回顾 [21]，对数比的定义及其一些性质，然后证明定理 2.6。具体而言，我们证明，若紧致度量空间 $(X,\ d)$ 与某个超度量空间双赫尔德等价，则对数比 $R(X,\ d)$ 有限。反过来，若对数比 $R(X,\ d)$ 有限，且对某个 $p \in (1,\ \infty)$，$\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$，则 $(X,\ d)$ 与某个超度量空间双赫尔德等价。由此可得（推论 2.7），同时满足这两个条件的紧致度量空间

Date: 2025 年 12 月 19 日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类 54E40；次分类 54F45、54F50。*Key words and phrases.* 对数比，Assouad 维数，度量维数，超度量，H¨older, Lipschitz。

可双赫尔德嵌入为单侧双无限有限空间序列的逆极限中的稠密子集，该逆极限带有比较超度量。

在第3节中，我们首先证明（定理 3.2）：对于每个 $s \in [0,\infty]$，都存在一个紧可数度量空间，其具有唯一聚点，且其对数比等于 s。接着，我们证明对数比保持包含关系（命题 3.3），并且对于笛卡尔积具有良好的性质。

第4节 посвящено有限维双 H¨older 嵌入。我们的目标是为其他类的全不连通空间建立类似于 [18] 中针对超度量空间的嵌入结果。刻画所有能够通过双 H¨older 嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中的度量空间（其中某个 $N \in \mathbb{N}$）的问题仍未解决。然而，该问题已经取得了显著进展。事实上，在 [3, 4] 中，Assouad 定义了一种称为 Assouad 维数的双 Lipschitz 不变量，记作 $\dim_A$（见第4节），它是 Bouligand 维数阶 [?] 的推广。ouligandBy 利用这一维数概念，并结合其在 [2], 中的工作，他证明：如果 (X,d) 是具有有限 Assouad 维数的度量空间，且 $s \in (0,1)$，那么存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得 (X, d^s) 可以双 Lipschitz 嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中。在定理 4.2 中，我们给出了双 H¨older 嵌入 f 到 $\mathbb{R}^N$ 中存在的充分条件，其中 f 和 f^{-1} 都是具有相同指数 $s > 0$ 的 H¨older 空间。此外，我们还给出了整数 N 大小的估计。我们的结果适用于一类紧致度量空间：其对数比 R 有限（但 > 1），且 Assouad 维数 D 有限。对 N 的估计同时取决于 R 和 D，在特殊情况下可化为 $N > (D+R-1)(2R+1)$。最后，我们在第5节中给出一些备注。本文的工作本质上是对 [18] 和 [21] 的延续。

最后，由于我们只处理紧致度量空间，因此假设所有空间的直径均为 ≤ 1。此外，作者感谢 Jouni Luukkaninen 和一位匿名读者，他们仔细阅读了本文的早期版本，并提出了若干修正和建议。

2. Spaces bi-Hölder equivalent to ultrametric spaces

本节首先回顾 [21] 中对数比的定义及其若干性质。为此，设 $\alpha = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ 是紧致度量空间 (X,d) 的一个既开又闭的划分，且 $n = \operatorname{card}\alpha$。定义 α 的直径$\delta(\alpha) \in [0,\infty)$ 如下：令 $\delta(\alpha) = \max\{\operatorname{diam}(A_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ if $n \geq 1$and $\delta(\alpha) = 0$ if $n = 0$。定义 α 的间隙 $\gamma(\alpha) \in [0,\infty)$ 如下：令 $\gamma(\alpha) = \min\{d(x,y) \mid x \in A_i, y \in A_j, i \neq j\}$ if $n > 1$，而当 $n \leq 1$时，令 $\gamma(\alpha) = \operatorname{diam}(X)$（约定 $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$）。此外，定义 α 的对数比$R(\alpha) \in [0,\infty]$ 如下：当 $0 < \delta(\alpha) < 1$ 且 $(0 <)\gamma(\alpha) < 1$时，令 $R(\alpha) = \log \gamma(\alpha)/\log \delta(\alpha)$；当 $\delta(\alpha) = 0$ 时，令 $R(\alpha) = 0$；若 $0 < \delta(\alpha) < 1$且 $\gamma(\alpha) \geq 1$，或 $\delta(\alpha) \geq 1$，则令 $R(\alpha) = +\infty$。于是，X 的对数比（相对于度量 d）定义为

$$R(X,d) = \lim_{r\to 0} \inf\left\{R(\alpha) \;\middle|\; \alpha \text{ is a clopen partition of } X \text{ and } \delta(\alpha) < r\right\}$$

约定 $\inf\emptyset = +\infty$。以下结果在 [21] 中得到了证明：

(1) 如果 X 是一个有限集，那么 $R(X, d) = 0$.(2) 如果 $R(X, d) < \infty$，那么 (X, d) 是全不连通的。(3) 如果 (X, d) 和 (X', d') 双利普希茨等价，那么 $R(X, d) = R(X', d')$。(4) 如果 (X, d) 是一个紧致超度量空间，那么 $R(X, d) \leq 1$。

(5) 设 $R(X,\ d)\ \leq 1$，并假设存在 X 的既开又闭划分序列 $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$，满足：(a) 对所有 $n\ \geq\ 1,\ \ \alpha_{n+1}$ 都是 α_n 的细化，且 $0\ <\ \delta(\alpha_n)\ \rightarrow\ 0$ 当 $n\rightarrow\infty$ 时；(b) 存在常数 $C\in[1,\infty)$，使得对所有 $n\geq 1,\ \ \delta(\alpha_n)/\delta(\alpha_{n+1})\ \leq C$；(c) $\lim_{n\rightarrow\infty} R(\alpha_n)\ =R(X,\ d)$。那么 $(X,\ d)$ 与某个超度量空间双-H¨older 等价。

若存在一个既开又闭子集 $A\subset X$，使得 $x_1\in A, x_2\in X\setminus A$，并且对于划分 $\alpha=\{A,X\setminus A\}$，有 $\gamma(\alpha)\ =\ d(x_1,\ x_2)$，则称两点 $x_1,\ x_2\in X$ 为 X 的关联端点。于是，X 中的最大间隙 定义为 $\Gamma(X)\ =\sup\{d(x,\ x')\ \big|\ x,\ x'\in X$ 是 $X\}$ 的关联端点。

(6) 假设存在一个由 $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ 构成的既开又闭划分序列，满足 (a) $0<\delta(\alpha_n)\ \searrow 0$ 作为 $n\rightarrow\infty$，且 (b) 存在常数 $C\in[1,\infty)$，使得对所有 $n\geq 1$，均存在 $A\in\alpha_n$，满足 $\mathrm{diam}(A)\ =\delta(\alpha_n)$ 且 $\Gamma(A)\leq C\gamma(\alpha_{n+1})$。那么 $R(X,\ d)\ =\ \liminf_{n\rightarrow\infty} R(\alpha_n)$。

稍作修改，采用与上文（3）类似的证明，可得以下结果。

引理 2.1. 设(X,d)和(X',d')为紧致度量空间。若存在一个双向 *H¨older* 等价$(X,d)\ \longrightarrow(X',d')$，其上方指数为 *s*、下方指数为 *t*，$0<s\leq t$，则

$$\frac{s}{t}R(X,d)\ \leq\ R(X',d')\ \leq\ \frac{t}{s}R(X,d).$$

推论 2.2. 设(X,d) 为紧致度量空间，并设 $0\ <\ s\ \leq\ 1$。那么$R(X,d^s)\ =R(X,d)$。

结合引理 2.1 与上文的陈述（4），可知若紧致度量空间（X,d）与某个超度量空间双向 H¨older 等价，则 R（X,d）$\ <\ \infty$。这一陈述也有一个部分逆命题。具体而言，设（X,d）为紧致度量空间，并令，参见 [22],

$$\mathcal{A}(X)=\left\{\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}\ \big|\ \alpha_n\text{ is a clopen partition of }X\text{ and }\lim_{n\rightarrow\infty}\delta(\alpha_n)=0\right\}.$$

显然，$\mathcal{A}(X)\neq\emptyset$ 当且仅当 X 是全不连通的。此外，根据 [21, 引理 2，2], 若 (X,d) 是非离散的，则对于每个序列 $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}\in\mathcal{A}(X)$，$\lim_{n\rightarrow\infty}\gamma(\alpha_n)\ =0$。显然，因此若 (X,d) 是全不连通且非离散的，则以下两个性质恰有一个成立：

(1) 存在一个序列 $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}\in\mathcal{A}(X)$，使得对所有 $n\in\mathbb{N},\ \ \gamma(\alpha_n)\ >\delta(\alpha_n)$。
(2) 每个序列 $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}\in\mathcal{A}(X)$ 都有一个子序列 $\left(\alpha_{n_k}\right)_{k\geq 1}\in\mathcal{A}(X)$，使得对所有 $k\in\mathbb{N},\ \gamma(\alpha_{n_k})\ \leq\delta(\alpha_{n_k})$。

Let

$$\hat{\mathcal{A}}(X)=\left\{\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}\in\mathcal{A}(X)\ \big|\ \alpha_{n+1}\text{is a refinement of }\alpha_n\text{ and}\liminf_{n\rightarrow\infty}R(\alpha_n)=R(X,d)\right\}.$$

若 α 和 β 是 X 的既开又闭划分，且 $\delta(\beta)\ <\ \gamma(\alpha)$，则 β 是 α的细化。因此，若 $\mathcal{A}(X)\ \neq\ \emptyset$，则 $\hat{}\mathcal{A}(X)\ \neq\ \emptyset$。由此，若 $R(X,d)\ <\ \infty$,

则 $\hat{\mathcal{A}}(X) \neq \emptyset$。此外，若 $1 < R(X,d) < \infty$，则存在一个序列$(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \hat{\mathcal{A}}(X)$，使得 $\gamma(\alpha_n) < (\alpha_n)$。类似地，若 $R(X,d) < 1$，则存在一个序列 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \hat{\mathcal{A}}(X)$，使得 $(\alpha_n) < \gamma(\alpha_n)$。对于 $p \in (1,\infty)$，我们定义

$$\hat{\mathcal{A}}_p(X) = \Big\{ (\alpha_n)_{n\geq 1} \in \hat{\mathcal{A}}(X) \;\Big|\; \text{there is } a>0 \text{ with } a\,\delta(\alpha_n)^p \leq \delta(\alpha_{n+1}) \leq \delta(\alpha_n) \text{ for all } n \geq 1 \Big\}$$

并且我们注意到，对于 $q \geq p$，$\hat{\mathcal{A}}_p(X) \subset \hat{\mathcal{A}}_q(X)$。然而，这个集合的嵌套族

$$\emptyset \subset \cdots \subset \hat{\mathcal{A}}_p(X) \subset \cdots \subset \hat{\mathcal{A}}_q(X) \subset \cdots \subset \hat{\mathcal{A}}(X), \quad 1 \leq p \leq q$$

不一定构成一个滤子，因为可能有 $\bigcup_{1<p} \hat{\mathcal{A}}_p(X) \neq \hat{\mathcal{A}}(X)$。一般而言，对于给定的 $p \in (1,\infty)$，集合 $\hat{\mathcal{A}}_p(X)$ 可能为空。事实上，条件

$$\hat{\mathcal{A}}_p(X) \neq \emptyset \quad \text{for some} \quad p \in (1,\infty)$$

在某个双 H¨older 映射族下是不变量；另请参见下文的例 3.1 和 6.1。

引理 2.3。设 (X,d) 是一个紧致度量空间。那么对于每个 $p > 1$，条件 $\hat{\mathcal{A}}_p(X) \neq \emptyset$在具有上述和下述相同指数的双 *H¨older* 映射下是不变量；特别地，对于双 *Lipschitz* 映射也是如此。

证明。设 $f(X,d) \longrightarrow (X',d')$ 是一个指数为s的上方和指数为t的下方双 H¨older 映射，其中 $0 < s \leq t$。因此，我们有

$$c_1\, d(x_1,x_2)^t \leq d'\big(f(x_1),f(x_2)\big) \leq c_2\, d(x_1,x_2)^s$$

对于某些常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$ 以及所有 $x_1, x_2 \in X$。假设对于某个 $p \in (1,\infty)$，有 $\hat{\mathcal{A}}_p(X) \neq \emptyset$。那么存在 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \hat{\mathcal{A}}(X)$，且 $a > 0$ 满足：对于所有 $n \geq 1$，$a\,\delta(\alpha_n)^p \leq \delta(\alpha_{n+1}) \leq \delta(\alpha_n)$。此外，对于每个 $n \geq 1$，$f(\alpha_n) = \{f(A) \mid A \in \alpha_n\}$是 X' 的既开又闭的划分，并且 $c_1\gamma(\alpha_n)^t \leq \gamma\big(f(\alpha_n)\big) \leq c_2\gamma(\alpha_n)^s$ 且 $c_1\delta(\alpha_n)^t \leq \delta\big(f(\alpha_n)\big) \leq c_2\delta(\alpha_n)^s \to 0$作为 $n \to \infty$。而且，对于每个 $n \geq 1$，$f(\alpha_{n+1})$是 $f(\alpha_n)$的细化，并且 $a'\delta\big(f(\alpha_n)\big)^{p'} \leq \delta\big(f(\alpha_n)\big)$满足 $p' = (t/s)\, p$且 $a' = (c_1/c_2^{p'})\, a^t$。若 (X,d) 是离散的，则对所有充分大的 n，有 $\delta(\alpha_n) = 0$且 $\delta\big(f(\alpha_n)\big) = 0$，使得 $R(\alpha_n) = 0 = R(X,d)$ 且 $R\big(f(\alpha_n)\big) = 0 = R(X',d')$。若 (X,d) 不是离散的，则有

$$\frac{s}{t}\, R(X,d) \leq R(X',d') \leq \liminf_{n\to\infty} R\big(f(\alpha_n)\big) \leq \frac{t}{s}\, R(X,d).$$

这就证明了该引理。 □

引理 2.4。设(X,d)是一个紧致度量空间，且有 $0 < R(X,d) \leq 1$。如果(X,d) 与一个超度量空间双利普希茨等价，那么对于任意$p \in (1/R(X,d)\ \infty)$，$\hat{\mathcal{A}}_p(X) \neq \emptyset$。

证明。如果 (X,d) 是一个紧致超度量空间，且 $0 < R(X,d)$，那么度量d的取值属于集合 $\{0\} \cup \{r_1 > r_2 > \cdots\}$，并且满足 $r_n \searrow 0$。我们回顾一下，在超度量空间中，任意两个球要么不相交，要么其中一个包含于另一个。于是，令 α_n 为由闭 r_n-球构成的 X 的既开又闭的划分，我们看到 $\delta(\alpha_n) = r_n$，并且 $\gamma(\alpha_n) = r_{n-1}$，从而 $R(\alpha_n) = \log r_{n-1}/\log r_n$ 对于 $n > 1$。此外，

对于 $n > 1$，存在 $A \in \alpha_n$，使得 $\mathrm{diam}(A) = r_n$，且 $\Gamma(A) = r_n = \gamma(\alpha_{n+1})$。于是可得

$$R(X,d) = \lim_{k\to\infty} \inf_{k\le n} R(\alpha_n) = \lim_{k\to\infty} \inf_{k\le n} \frac{\log r_{n-1}}{\log r_n};$$

引理现在得证。 □

$1 < R(X, d)$ 的情形仍未解决；见下文的猜想 2.8。现在，令

$$\mathcal{A}^*(X) = \left\{ (\alpha_n)_{n\ge1} \in \hat{\mathcal{A}}(X) \;\middle|\; \liminf_{n\to\infty} R(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = R(X,d) \right\},$$

并且，对于 $p \in (1, \infty)$，令 $\mathcal{A}_p^*(X) = \mathcal{A}^*(X) \cap \hat{\mathcal{A}}_p(X)$。也就是说，若 $(\alpha_n)_{n\ge1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$，则对所有 $n \ge 1$，若 α_{n+1} 是 α_n 的细化，则存在 $a > 0$，使得 $a\,\delta(\alpha_n)^p \le \delta(\alpha_{n+1}) \le \delta(\alpha_n)$，且 $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = R(X, d)$。此外，我们有

$$\frac{1}{p} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \gamma_n}{\log \gamma_{n+1}} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \gamma_n}{\log \gamma_{n+1}} \le 1.$$

引理 2.5。设 (X, d) 是一个紧致度量空间，满足 $R(X, d) < \infty$，并假设对某个 $p \in (1, \infty)$，有 $\mathcal{A}_p^*(X) \ne \emptyset$。那么存在一个与之相容的超度量 ρ，定义在 X 上，使得 (X, ρ) 与 (X, d) 双-*H¨older* 等价。

证明。如果 X 是离散的，引理显然成立。否则，令 $R(X, d) = R < \infty$，并令 $(\alpha_n)_{n\ge1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$ 为 X 的一个划分序列。那么我们有

(1) 对所有 $n \ge 1$，α_{n+1} 是 α_n 的细化；(2) $\delta(\alpha_n) \to 0$ 且 $\gamma(\alpha_n) \to 0$；(3) $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = R(X, d) = R$；

(4) 对某个 $a > 0$ 及所有 $n \ge 1$，$a\,\delta(\alpha_n)^p \le \delta(\alpha_{n+1})$。

此外，给定 $\varepsilon > 0$，性质 (3) 意味着存在某个固定的 $m \ge 1$，使得对于 $n > m$，我们有

$$\delta(\alpha_n)^{R+\varepsilon} < \gamma(\alpha_n) < \delta(\alpha_n)^{R-\varepsilon}.$$

现在令 $\alpha_0 = \{X\}$。设 x_1 和 x_2 是 X 中的不同点，并令 $\rho(x_1, x_2) = \delta(\alpha_n)$，当且仅当 x_1 和 x_2 属于 α_n 的同一个成员、但属于 α_{n+1}的不同成员时成立。显然，ρ 是 X 上的超度量，且与其相容。此外，我们有

$$d(x_1, x_2) \le \delta(\alpha_n) = \rho(x_1, x_2).$$

为了得到下界方向的不等式，令 x_1、x_2 和 $n \ge m$ 如上所述，并注意到

$$d(x_1, x_2) \ge \gamma(\alpha_{n+1}) > \delta(\alpha_{n+1})^{R+\varepsilon} \ge a^{R+\varepsilon}\delta(\alpha_n)^{p(R+\varepsilon)} = a^{R+\varepsilon}\rho(x_1, x_2)^{p(R+\varepsilon)}.$$

因此，如果 x_1 和 x_2 属于 α_m 的同一个成员，则有

$$a^{R+\varepsilon}\rho(x_1, x_2)^{p(R+\varepsilon)} \le d(x_1, x_2) \le \rho(x_1, x_2).$$

如果 x_1 和 x_2 不属于 α_m 中的同一个成员，那么

$$\rho(x_1, x_2)^{p(R+\varepsilon)} \le \delta(\alpha_0)^{p(R+\varepsilon)} \le \frac{\delta(\alpha_0)^{p(R+\varepsilon)}}{\gamma(\alpha_m)}\, d(x_1, x_2).$$

因此，如果 $K = \min\{a^{R+\varepsilon}, \gamma(\alpha_m)\delta(\alpha_0)^{-p(R+\varepsilon)}\}$，那么

$$K\rho(x_1,x_2)^{p(R+\varepsilon)} \le d(x_1,x_2) \le \rho(x_1,x_2)$$

对所有 $x_1, x_2 \in X$。 □

在上述引理中，若 $R(X,d) = R$，则 $R/p(R+\varepsilon) \le R(X,\rho) \le 1$。此外，我们有[1] $\dim_H(X,d) \le \dim_H(X,\rho) \le p(R+\varepsilon)\dim_H(X,d)$。注意，上述引理与 [21, 命题 2.12] 有关。由此引理和引理 2.1 可立即推出以下结果。

定理 2.6。设 (X,d) 是一个紧致度量空间。

(1) 若 (X,d) 与某个超度量空间双-*H¨older* 等价，则 $R(X,d) < \infty$。*(2)* 若 $R(X,d) < \infty$，且 $\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$，其中 $p \in (1,\infty)$，则 (X,d) 与某个超度量空间双-*H¨older* 等价。

在 [18, 定理 2.2 和注记 2.31] 中已证明，每个紧致超度量空间都可以通过双 Lipschitz 嵌入，作为稠密子集嵌入到一列有限离散空间的逆极限中，并配备所谓的比较超度量。该结果与定理 2.6 结合，得到以下推论。

推论 2.7。设 (X,d) 是一个紧致度量空间，满足 $R(X,d) < \infty$，并假设对于某个 $p \in (1,\infty)$，有 $\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$。则 (X,d) 可以通过双 *H¨older* 嵌入，作为稠密子集嵌入到一列有限离散空间的逆极限中，并配备一个比较超度量。

由此可知，如果下面的猜想 2.8 成立，那么在某种意义上，[18, 构造 2.1] 中构造的紧致超度量空间类，对于具有有限对数比和双 H¨older 嵌入的紧致度量空间范畴而言是普适的。

猜想 2.8。如果 (X, d) 是一个紧致度量空间，且 $0 < R(X, d) < \infty$，那么对于某个 $p \in (1, \infty)$，$\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$。

3. 对数比的更多性质

本节将确立对数比的一些进一步性质。我们从以下一类例子开始。

例 3.1。设 $(r_n)_{n\ge1} \subset (0,1]$ 是一个极限为 0 的严格递减序列，并且对所有 $n > 1$ 都有 $r_{n-1} - r_n \le r_n + r_{n+1}$。令 $X = \{0\} \cup \{r_n \mid n \ge 1\}$，赋予诱导度量 $|\cdot|$。对于每个 $n > 1$，令 α_n 为由下式给出的 X 的划分

$$\alpha_n = \{X \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}\}, \{r_1\}, \{r_2\}, \ldots, \{r_{n-1}\}\}.$$

于是，对于每个 $n > 1$，都有 $\delta(\alpha_n) = r_n$，且 $\gamma(\alpha_n) = r_{n-1} - r_n$，从而 $R(\alpha_n) = \log(r_{n-1} - r_n)/\log r_n$。同样，对于 $n > 1$ 和 $A = X \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}\} \in \alpha_n$，我们有 $\operatorname{diam}(A) = r_n = \delta(\alpha_n)$，而 A 中的最大间隙为 $\Gamma(A) = r_n - r_{n+1} = \gamma(\alpha_{n+1})$。现在可以推出

$$R(X,|\cdot|) = \lim_{k\to\infty} \inf_{k\le n} R(\alpha_n) = \lim_{k\to\infty} \inf_{k\le n} \frac{\log(r_{n-1} - r_n)}{\log r_n}.$$

我们考虑五种情形：

[1]全文中，$\dim_H$ 表示豪斯多夫维数。

情形 *3.1.1*。令 $r_n = 2^{-n!}$。则 $R(X, |\cdot|) = 0$。这是一个具有非离散度量空间和零 对数比的紧致度量空间示例。[2] 此外，对于每个 $p > 1$以及每个 $n(p) \in \mathbb{N}$，我们有 $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = 0$，但 $(\alpha_n)_{n\geq n(p)} \notin \mathcal{A}_p^*(X)$。[3] 不过，我们注意到，$(X, |\cdot|)$ 与某个超度量空间双利普希茨等价。事实上，令 ρ 为 X 上的超度量，定义为令

$$\rho(r_n, r_n) = 0, \quad \rho(0, r_n) = r_n, \quad \text{and} \quad \rho(r_m, r_n) = \max\{r_m, r_n\} \text{ for } m \neq n.$$

那么我们有 $|\cdot| \leq \rho \leq 2\,|\cdot|$。

情形 *3.1.2.* 对于 $0 < s < 1$，令 $r = 2^{-s^2/(1-s)}$，并令 $r_n = r^{1/s^n}$。那么我们有 $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = s$，因此 $R(X, |\cdot|) = s$。此外，$(X, |\cdot|)$ 与某个超度量空间双利普希茨等价。事实上，如果令 ρ 为情形 3.1.1 中定义在 X 上的超度量，那么我们有 $|\cdot| \leq \rho \leq \left(2^{1/s}/(2^{1/s}-1)\right)|\cdot|$。如果 $p > 1/s$，那么对于 $n \geq 1$，我们有 $\delta(\alpha_n)^p \leq \delta(\alpha_{n+1})$，因此 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$。

情形 *3.1.3*。令 $r_n = 2^{-n}$。于是 $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = 1$，从而 $R(X, |\cdot|) = 1$。此外，若 $p > 1$，则 $2^{p-2}\delta(\alpha_n)^p \leq \delta(\alpha_{n+1})$，从而 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$，这意味着 $(X, |\cdot|)$ 与某个超度量空间双 -H¨older 等价。事实上，$(X, |\cdot|)$ 与某个超度量空间双 -Lipschitz 等价；若令 ρ 为情形 3.1.1 中定义在 X 上的超度量，则有 $|\cdot| \leq \rho \leq 2\,|\cdot|$。

情形 *3.1.4*。对于 $1 < s < \infty$，设 $r_n = n^{1/(1-s)}$。于是 $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = s$，从而 $R(X, |\cdot|) = s$。此外，若 $p > 1$，则 $2^{1/(1-s)}\delta(\alpha_n)^p \leq \delta(\alpha_{n+1})$，从而 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$，这意味着 $(X, |\cdot|)$ 与某个超度量空间双-H¨older 等价。

案例 *3.1.5.* 对于 $n \geq 3$，令 $r_n = 1/\log n$。于是 $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = \infty$，因此 $R(X, |\cdot|) = \infty$，这意味着 $(X, |\cdot|)$ 与某个超度量空间并非双 Hölder 等价。然而，对于 $p > 1$，我们有 $(\log 3/\log 4)\delta(\alpha_n)^p \leq \delta(\alpha_{n+1})$，因此 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$。这是一个全不连通的紧致度量空间，其对数比为无穷大。

定理 3.2. 对于任意 $s \in [0, \infty]$，存在一个紧可数度量空间(X, d)，它有唯一聚点，使得 $R(X, d) = s$。事实上，空间 X 可以取为区间$(0, 1]$ 中的一个严格递减序列，再加上它的极限点0。

以下结果归功于 Jouni Luukkainen[4]。

命题 3.3。 [J.Luukkainen] 设 Y 是紧致度量空间(X, d)的一个闭子集。那么 $R(Y, d) \leq R(X, d)$。

证明。我们可以假设 $R(X, d) < \infty$，并且 $R(Y, d) > 0$。由此可知，X 和 Y都是全不连通且非离散的。设 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}^*(X)$，其中对所有 $n \geq 1$，$\delta(\alpha_n) \in (0, 1)$，且 $\gamma(\alpha_n) \in (0, 1)$。那么 $\delta(\alpha_n) \to 0$，$\gamma(\alpha_n) \to 0$，并且 $R(\alpha_n) = \log \gamma(\alpha_n)/\log \delta(\alpha_n) \to R(X, d)$。对每个 $n \geq 1$，我们有，$\beta_n = \{A \cap Y \mid A \in \alpha_n\} \setminus \{\emptyset\}$ 是 Y的既开又闭的划分，且 $0 < \delta(\beta_n) \leq \delta(\alpha_n)$，并且 $0 < \gamma(\alpha_n) \leq \gamma(\beta_n)$。因此，$\delta(\beta_n) \to 0$，从而根据引理 2.2]，有 $\gamma(\beta_n) \to 0$。

---

[2]另请参见例 5.1。[3]当然，这远不能说明 $\mathcal{A}_p^*(X) = \emptyset$ 对所有 $p > 1$都成立。[4]私人通信

因此，我们可以假设对每个 n， $\gamma(\beta_n) < 1$ 。于是，对每个 $n \geq 1$ ，我们有$R(\beta_n) \leq R(\alpha_n)$，这意味着

$$R(Y,d) \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{k\leq n} R(\beta_n) \leq \lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = R(X,d).$$

□

接下来，给定一个非空的度量空间族，在该族的集合论意义下的积上定义度量有许多选择。仿照 [23, 24] ，我们在集合论意义下的积上赋予上确界度量 $d_{\sup}$，并称其为该族的度量乘积。具体而言，设 $S \neq \emptyset$ 为一个集合，且对每个 $s \in S$，令 (X_s, d_s) 为一个度量空间。那么，该族的度量乘积为 $(\prod_{s\in S} X_s, d_{\sup})$，其中

$$d_{\sup}(x,x') = \sup_{s\in S} d_s(x_s, x'_s),$$

其典范投影为 $\pi_t : \prod_{s\in S} X_s \longrightarrow X_t$。这里有两个问题需要注意。第一，一般来说，$d_{\sup}$ 是一个扩展度量，因为 ∞ 可以作为其取值；例如考虑$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$。不过这并不是问题，因为我们关注的是紧致度量空间以及直径可以任意小的既开又闭划分。显然，例如，若该族（X_s）$_{s\in S}$的直径存在一个统一上界，那么 $d_{\sup}$ 就是一个度量。第二，在无限个度量空间的积上，由 $d_{\sup}$ 诱导的拓扑未必是积拓扑； $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, d_{\sup})$ 是离散的。不过，度量乘积对于 Lipschitz 映射满足以下泛性质：

(1) 对任意 $t \in S$, $g: X_t \longrightarrow Y$ 和 $f: Y \longrightarrow \prod_{s\in S} X_s \neq \emptyset$ ，有 Lip $(\pi_t) = 1$、Lip$(g\circ\pi_t)$ = Lip (g)、diam$\big((g\circ\pi_t)(\prod_{s\in S} X_s)\big)$ = diam$\big(g(X_t)\big)$，且 diam$\big(f(Y)\big)$ = sup$_{s\in S}$diam$\big((\pi_s \circ f)(Y)\big)$。(2) 给定一族映射 $(f_s : Y \longrightarrow X_s)_{s\in S}$，存在唯一映射 $f : Y \longrightarrow \prod_{s\in S} X_s$，使得对所有 $s \in S$，均有 $\pi_s \circ f = f_s$，且满足 Lip (f) $\leq$sup$_{s\in S}$ Lip (f_s)。

以下结果是定理 3.3 的直接推论。

推论 3.4. 设 $S \neq \emptyset$ 为一个集合，对每个 $s \in S$，设 (X_s, d_s) 为紧且非空的度量空间。若 $(\prod_{s\in S} X_s, d_{\sup})$ 是紧的，则 $R\big(\prod_{s\in S} X_s, d_{\sup}\big) \geq \sup_{s\in S} R(X_s, d_s)$。

下面的例子表明，一般而言，这个推论中的不等式无法进一步改进。

例3.5。 设 $(r_n)_{n\geq 1} \subset (0,1]$ 是一个严格单调递减且收敛于 0 的序列。对每个 $n \geq 1$，令 $X_n = r_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，并赋予显然的超度量$d_n$。于是，对所有 $n \geq 1$，都有 $R(X_n, d_n) = 0$ ；并且 $R\big(\prod_{n\geq 1} r_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ d_{\sup}\big) \leq 1$，因为一族超度量空间的度量乘积仍是超度量空间。对每个 $n \geq 1$，令 α_n 为 $\big(\prod_{k\geq 1} r_k(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ d_{\sup}\big)$ 按半径为 r_n 的球所作的划分。由此可得 $R(\alpha_n) = \log r_{n-1}/\log r_n$. 同样，对于 $n \geq 1$ 和 A，任意半径为 $r_n \in \alpha_n$ 的球， A 中的最大间隙为 $\Gamma(A) = r_n = \gamma(\alpha_{n+1})$。于是可得

$$R\Big(\prod_{n\geq 1} r_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), d_{\sup}\Big) = \lim_{k\to\infty} \inf_{k\leq n} R(\alpha_n) = \lim_{k\to\infty} \inf_{k\leq n} \frac{\log r_n}{\log r_{n+1}} \leq 1.$$

假设 $r_1 < 1$，并对任意 $t \in$ （0，1）及所有 $n \geq 1$ 令 $r_{n+1} = r_n^{1/t}$，则可得

$$R\big(\prod_{n\geq 1} r_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), d_{\sup}\big) = t \in (0,1). \ \square$$

此外，以下结论也成立：回顾一下，对于度量空间中的两个子集 A 和 A'，我们定义

$$\operatorname{gap}(A, A') = \inf\big\{d(x, x') \,\big|\, x \in A \text{ and } x' \in A'\big\}.$$

如果 $\alpha \neq \emptyset$ 和 $\alpha' \neq \emptyset$ 分别是紧致度量空间 (X, d) 和 (X', d') 的既开又闭划分，那么 $\alpha \times \alpha' = \big\{A \times A' \mid A \in \alpha$ 和 $A' \in \alpha'\big\}$ 是 $(X \times X', d_{\sup})$ 的既开又闭划分，且 $\delta(\alpha \times \alpha') = \max\{\delta(\alpha)\ \delta(\alpha')\}$。此外，如果 $\operatorname{card}(\alpha) > 1$ 且 $\operatorname{card}(\alpha') > 1$，那么

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha \times \alpha') &= \min\big\{\operatorname{gap}(A_1 \times A_1', A_2 \times A_2') \,\big|\, A_1, A_2 \in \alpha, A_1', A_2' \in \alpha', A_1 \times A_1' \neq A_2 \times A_2'\big\} \\
&= \min\big\{\max\big\{\operatorname{gap}(A_1, A_2), \operatorname{gap}(A_1', A_2')\big\} \,\big|\, A_1, A_2 \in \alpha, A_1', A_2' \in \alpha', A_1 \neq A_2 \text{ or } A_1' \neq A_2'\big\} \\
&= \min\big\{\min\big\{\max\{\operatorname{gap}(A_1, A_2), \operatorname{gap}(A_1', A_2')\} \,\big|\, A_1 \neq A_2 \in \alpha, A_1' \neq A_2' \in \alpha'\big\}, \\
&\quad \min\big\{\operatorname{gap}(A_1, A_2) \,\big|\, A_1 \neq A_2 \in \alpha\big\}, \min\big\{\operatorname{gap}(A_1', A_2') \,\big|\, A_1' \neq A_2' \in \alpha'\big\}\big\} \\
&= \min\big\{\max\{\gamma(\alpha), \gamma(\alpha')\}, \gamma(\alpha), \gamma(\alpha')\big\} \\
&= \min\big\{\gamma(\alpha), \gamma(\alpha')\big\}.
\end{aligned}$$

因此，我们有 $\max\big\{R(\alpha)\ R(\alpha')\big\} \leq R(\alpha \times \alpha')$。

现在假设 $\max\big\{R(X, d)\ R(X', d')\big\} < \infty$。设 $\big(\alpha_n\big)_{n\geq 1}$ 和 $\big(\alpha_n'\big)_{n\geq 1}$ 分别是 (X, d) 和 (X', d') 的两个既开又闭划分序列，满足 $\delta(\alpha_n) \to 0$, $\delta(\alpha_n') \to 0$, $R(\alpha_n) \to R(X, d)$，以及 $R(\alpha_n') \to R(X', d')$。因此，$R(\alpha_n \times \alpha_n') \geq R(X \times X', d_{\sup})$，从而

$$R(X \times X', d_{\sup}) \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{k\leq n} R(\alpha_n \times \alpha_n').$$

4. Bi-Hölder embedding into Euclidean space

本节考虑将有限对数比的紧致度量空间双重 H¨older 嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中。我们尤其关注满足 f 和 f^{-1} 均为相同指数 s 的 H¨older 映射的嵌入 f，其中某个 $s > 0$ 成立。我们还根据对数比和 Assouad 维数 $\dim_A$，给出整数 N 的一个估计；参见 [2, 3, 4] 以及 [17, 18]。以下关于**度量维数** $\dim_m$ 的定义取自 [20]，对于全有界度量空间，该定义与 Assouad 维数一致；另见 [18, 定义 3.2 和注释 3.4] 以及 [17]。设 (X, d) 为一个度量空间，对于 $0 < r_2 < r_1$，令 $\mathcal{J}(r_1, r_2)$ 表示闭 r_1 球内一个极大 r_2-分离集的基数。则 X 的度量维数，记为 $\dim_m(X, d)$，定义为

$$\dim_m(X, d) = \lim_{r\to 0} \lim_{t\to\infty} \sup\left\{\frac{\log \mathcal{J}(r_1, r_2)}{\log(r_1/r_2)} \,\middle|\, 0 < r_2 < r_1 < r \text{ and } r_1/r_2 > t\right\}.$$

这些极限之所以存在，是因为它们具有单调性，但它们可能为无穷大。

我们采用这一定义，是因为它对于下文定理 4.2 的证明更为方便。 [18, 推论 3.9] 表明，每个具有有限 Assouad 维数的超度量空间都可以双 H¨older 嵌入到 $\mathbb{R}^1$中。然而，Assouad 维数有限并不是度量空间能够双 H¨older 嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中的必要条件，其中 $N \in \mathbb{N}$为某个值。事实上， [18, 例 3.6] 表明，存在一个具有无限 Assouad 维数的紧致超度量空间，它可以双 H¨older 嵌入到 $\mathbb{R}^1$中。因此，对于某个 $N \in \mathbb{N}$而言，可以双 H¨older 嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中的度量空间，不一定能双 Lipschitz 嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中，且不一定存在任何 $N \in \mathbb{N}$。

现在设 (X, d) 是一个有限对数比的紧致度量空间，并假设 $\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$，其中某个 $p \in (1, \infty)$ 成立。根据定理 2.6，我们知道存在 X 上的相容超度量 ρ，使得 (X, ρ) 与 (X, d) 双 Hölder 等价。于是立即得到以下结果。

推论 4.1。 设 (X, d) 是一个有限对数比的紧致度量空间，并假设 $\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$，其中某个 $p \in (1, \infty)$ 成立。如果超度量空间 (X, ρ) 具有有限 *Assouad* 维数，那么存在一个将 (X, d) 嵌入 $\mathbb{R}^1$ 的双 *Hölder* 映射。

如上所述，Assouad 维数在双 Hölder 映射下的性质并不理想。因此，(X, d) 的 Assouad 维数可能有限，而 (X, ρ) 的 Assouad 维数却是无限的。然而，如果 $\dim_m(X, d) < \infty$，并且对于某个 $p \in (1, \infty)$，集合 $\mathcal{A}_p^*(X)$ 包含一种非常特殊的序列，[5] 那么只要 $1 < R(X, d) < \infty$，对充分大的 $N \in \mathbb{N}$，就存在一个将 (X, d) 嵌入 $\mathbb{R}^N$ 的双 Hölder 映射。

定理 *4.2*。设 (X, d) 是一个 *Assouad* 维数为 $D < \infty$、对数比为 R 且满足 $1 < R < \infty$ 的紧致度量空间。假设对于某个 $p \in (1, \infty)$ 和某个 $s \in (0, p-1]$，存在一个序列 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$，满足 $\delta(\alpha_{n+1}) \leq \delta(\alpha_n)^{1+s}$。那么对于任意 $N > (D+R-1)\lceil (1+s)(2R-1)-1 \rceil / s$ 以及任意 $\varepsilon \in (0, \min\{1, R-1\})$，存在一个双 H¨*older* 嵌入 $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$，并且 f 和 f^{-1} 都是指数为 $1/p(R+\varepsilon)$ 的 H¨*older* 函数。

在 $s = R - 1 \in (0, p]$ 的特殊情形下，关于 N 的估计化简为 $N > (D + R - 1)(2R + 1)$。

证明。 设 $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_p^*(X)$ 满足所需的假设。不妨假设 $\delta(\alpha_n) = \delta_n < 1$对所有 $n \in \mathbb{N}$都成立。那么显然，我们有 $\delta_n \to 0$ 且$\gamma(\alpha_n) = \gamma_n \to 0$，当 n 在 $a\,\delta_n^p \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n^{s+1}$ 条件下趋于无穷时，对于某个 $a > 0$ 和所有 $n \geq 1$ 均成立，并且 $\lim_{n\to\infty} R(\alpha_n) = R(X, d) = R$。注意，对每个 $n \geq 1$，我们都有

$$\max\big\{\mathrm{card}(\alpha_{n+1} \cap A) \;\big|\; A \in \alpha_n\big\} \leq \mathcal{J}(\delta_n, \gamma_{n+1}),$$

其中 $\alpha_{n+1} \cap A = \big\{A' \in \alpha_{n+1} \;\big|\; A' \subset A\big\}$，并且显然对所有 $n \geq 1$，都有 $\delta_n/\gamma_{n+1} \geq \delta_{n+1}/\gamma_{n+1}$。给定 $\varepsilon > 0$，存在 n_0，使得 $n_0 \leq n$ 蕴含 $\delta_n^{R+\varepsilon} < \gamma_n < \delta_n^{R-\varepsilon}$。这意味着，对于 $n_0 \leq n$，我们有

$$\delta_{n+1}^{1-(R-\varepsilon)} < \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} < \delta_{n+1}^{1-(R+\varepsilon)}.$$

[5] $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in$ 增加这 $\mathcal{A}_p^*$ X $\mathcal{A}_q^*$ X $q \geq p$ 一假设的原因在于，给定的 () 的真子序列不一定对任何 都属于 ()。

通过选取 $0<\varepsilon<R-1$，我们得到

$$\frac{\delta_n}{\gamma_{n+1}} \geq \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}} > \delta_{n+1}^{1-(R-\varepsilon)}$$

当 n 趋于无穷时，其趋于无穷。因此，根据定义，存在常数 $n_1 \geq n_0$ 和 $K(\varepsilon)$，使得 $n_1 \leq n$ 且 $K(\varepsilon) < \delta_n/\gamma_{n+1}$ 蕴含

$$\mathcal{J}(\delta_n, \gamma_{n+1}) \leq \left(\frac{\delta_n}{\gamma_{n+1}}\right)^{D+\varepsilon}.$$

因此，若 $n_1 \leq n$ 且 $K(\varepsilon) < \delta_n/\gamma_{n+1}$，则

$$\max\big\{\mathrm{card}(\alpha_{n+1} \cap A) \;\big|\; A \in \alpha_n\big\} \leq \left(\frac{\delta_n}{\gamma_{n+1}}\right)^{D+\varepsilon}. \tag{1}$$

证明的其余部分分为两个步骤。

步骤*1.* 利用 $\mathbb{R}^N$ 中的盒范数 $\|\cdot\|$，很容易看出，在半径为 δ_n 的闭球中可以放入

$$\left\lfloor \frac{\delta_n + \gamma_{n+1}/2}{\delta_{n+1} + \gamma_{n+1}/2} \right\rfloor^N$$

个半径为 δ_{n+1}、间隙为 γ_{n+1} 的互不相交的闭球。因此，我们需要满足

$$\max\big\{\mathrm{card}(\alpha_{n+1} \cap A) \;\big|\; A \in \alpha_n\big\} \leq \left\lfloor \frac{\delta_n + \gamma_{n+1}/2}{\delta_{n+1} + \gamma_{n+1}/2} \right\rfloor^N.$$

由 (1)，只需满足

$$\left(\frac{\delta_n}{\gamma_{n+1}}\right)^{D+\varepsilon} \leq \left\lfloor \frac{\delta_n + \gamma_{n+1}/2}{\delta_{n+1} + \gamma_{n+1}/2} \right\rfloor^N. \tag{2}$$

不等式 (2) 成立的条件是：当 n 充分大时，有

$$\delta_{n+1} < \delta_n^{[N-(D+\varepsilon)]/[N-(R+\varepsilon)(D+\varepsilon)]}.$$

但是，由于 $0<\varepsilon<R-1$ 和 $N > (D+R-1)\big[(1+s)(2R-1) - 1\big]/s$，我们可得

$$1+s > \frac{N-(D+\varepsilon)}{N-(R+\varepsilon)(D+\varepsilon)}$$

因此，当 n 充分大时，有

$$a\,\delta_n^p \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n^{1+s} < \delta_n^{[N-(D+\varepsilon)]/[N-(R+\varepsilon)(D+\varepsilon)]}$$

这正是所需的。

步骤*2*。以下构造是 [20] 中构造的一种变体。对于每个 $n \geq 1$，定义 g_n：$\alpha_{n+1} \to \alpha_n$，令 $g_n(A) =$ 为包含 A 的 α_n 中的成员；$A \in \alpha_{n+1}$。在 $\mathbb{R}^N$ 中，令 $\mathcal{B}_1$ 表示由 $(\mathrm{card}\,\alpha_1)$ 个半径为 δ_1 的两两不交闭球组成的族，且对于 $B' \neq B''$，$\mathrm{dist}(B',\ B'') \geq \gamma_1$。由 (2)，在每个 $B \in \mathcal{B}_1$ 内，我们可以选取 $\mathrm{card}(\alpha_2 \cap B)$ 个半径为 δ_2 的两两不交闭球，且对于 $B' \neq B''$，$\mathrm{dist}(B',\ B'') \geq \gamma_2$。令 $\mathcal{B}_2$ 表示这些球构成的族。根据归纳法，若已选定族 $\mathcal{B}_n$，则在每个球 $B \in \mathcal{B}_n$ 内，我们可以选取 $\mathrm{card}(\alpha_{n+1} \cap B)$ 个半径为 δ_{n+1} 的两两不交闭球，使得 $\mathrm{dist}(B',\ B'') \geq \gamma_{n+1}$

对于 $B' \neq B''$。令 $\mathcal{B}_{n+1}$ 表示这些球构成的族，至此归纳法完成。

接下来，对于每个 $n \geq 1$，令 $h_n\colon\ \mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{B}_n$，定义 $h_n(B) =$ 为包含 B 的 $\mathcal{B}_n$ 中的那个成员； $B \in \mathcal{B}_{n+1}$。令 $f_1\colon\ \alpha_1 \to \mathcal{B}_1$ 为任意双射，并选取一个双射 $f_2\colon\ \alpha_2 \to \mathcal{B}_2$，使得 $f_1 g_1 = h_1 f_2$。类似地，若已选取 $f_n\colon\ \alpha_n \to \mathcal{B}_n$，我们可以选取一个双射 $f_{n+1}\colon\ \alpha_{n+1} \to \mathcal{B}_{n+1}$，使得 $f_n g_n = h_n f_{n+1}$。总之，我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & \xleftarrow{g_1} & \alpha_2 & \xleftarrow{g_2} & \alpha_3 & \xleftarrow{g_3} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\ \mathcal{B}_1 & \xleftarrow[h_1]{} & \mathcal{B}_2 & \xleftarrow[h_2]{} & \mathcal{B}_3 & \xleftarrow[h_3]{} & \cdots \end{array}$$

最后，定义 $f\colon\ X \longrightarrow \mathbb{R}^N$，令

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n\geq 1} f_n\left(\alpha_n(x)\right),$$

其中 $\alpha_n(x) =$ 为包含 x 的 α_n 中的那个成员。若 $x_1,\ x_2 \in X$ 属于 α_n 的同一个成员，但属于 α_{n+1} 的不同成员，则 $\gamma_{n+1} \leq d(x_1,\ x_2) \leq \delta_n$。此外，$f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 属于 $\mathcal{B}_n$ 的同一个成员，但属于 $\mathcal{B}_{n+1}$ 的不同成员，这意味着 $\gamma_{n+1} \leq \| f(x_1) - f(x_2) \| \leq 2\,\delta_n$。但是，存在 $a > 0$，使得

$$a\,\delta_n^p < \delta_{n+1} < \gamma_{n+1}^{1/(R+\varepsilon)} \leq d(x_1, x_2)^{1/(R+\varepsilon)}$$

使得 $\delta_n < a^{-1/p} d(x_1,\ x_2)^{1/p(R+\varepsilon)}$。此外，我们有 $\gamma_{n+1} > \delta_{n+1}^{R+\varepsilon} \geq a^{R+\varepsilon}\delta_n^{p(R+\varepsilon)}$，由此得到 $\gamma_{n+1} \geq d(x_1,\ x_2)^{p(R+\varepsilon)}$。因此，

$$a^{R+\varepsilon} d(x_1, x_2)^{p(R+\varepsilon)} \leq \left\| f(x_1) - f(x_2) \right\| \leq 2a^{-1/p}\, d(x_1, x_2)^{1/p(R+\varepsilon)}.$$

□

5. 备注

I. 为了与推论 2.2 进行比较，我们注意到，由 [17, 定理 A.5]可得 $\dim_A(X,\ d^s) = (1/s)\dim_A(X,\ d)$。

II. 如果猜想 2.8 成立，那么引理 2.5 和定理 4.2 将得到显著加强。特别是，定理 2.6 将表明，对数比可以完整刻画所有 与超度量空间双 Hölder 等价的紧致度量空间。

III. 存在一个紧致超度量空间 $(X,\ d)$，它同胚于 $[0, 1]$ 的康托三分集，并且 $R(X,\ d) = 0$。

例 5.1. 令 $X = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$，并赋予其如下定义的超度量 d：固定 $0 < r < 1$，并令 $r_n = r^{(n!)}$。对于 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 和 $x' = (x_1', x_2', \cdots)$，其中 X，若 $x_i = x_i'$，则令 $d(x, x') = r_n$，其中 $1 \leq i \leq n$ 且 $x_{n+1} \neq x_{n+1}'$。现在，对于每个 $n > 1$，令 α_n 为将 X 划分为 r_n–球所得的划分。于是，$\delta(\alpha_n) = r_n$，且 $\gamma(\alpha_n) = r_{n-1}$，从而 $R(\alpha_n) = 1/n$。因此，$0 \leq R(X, d) \leq \liminf_{n\to\infty} R(\alpha_n) = 0$。我们注意到，与例 3.1 的情形 3.1.1 一样，有

$\delta(\alpha_{n+1})/\delta(\alpha_n)^p \geq 1$ 当且仅当 $p \geq n+1$。因此，对于每个 $p > 1$ 以及每个$n(p) \in \mathbb{N}$，序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq n(p)} \notin \mathcal{A}_p^*(X)$。 □

IV. 尽管情形 $R(X,d) = 1$ 看起来颇为反常（例如参见 [21,命题 2.12、2.13] 和 [22]），但在这种情形下，仍然可以得到一些部分结果（其思路与定理 4.2 相同）。

V. [21] 指出，一般而言，要计算紧（全不连通、非离散）度量空间 (X,d) 的对数比并不容易。事实上，我们的大多数计算都使用 [21, 定理 2.7]，因为这是我们仅有的计算性结果。不过，我们可以如下得到对数比的上界和下界：定义两个函数 $G, g\colon [0, \text{直径}X] \longrightarrow [0, \text{直径}X]$，令

$$G(r) = \inf\{\gamma(\alpha) \,\big|\, \alpha \text{ is a clopen partition of } X \text{ with } \delta(\alpha) \geq r\} \text{ and}$$
$$g(r) = \sup\{\gamma(\alpha) \,\big|\, \alpha \text{ is a clopen partition of } X \text{ with } \delta(\alpha) \leq r\}.$$

显然，函数 G 和 g 均单调递增，且 $\lim_{r\to 0} G(r) = 0$，$\lim_{r\to 0} g(r) = 0$。令

$$\underline{\mathcal{R}}(X,d) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log g(r)}{\log r} \qquad \text{and} \qquad \overline{\mathcal{R}}(X,d) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log G(r)}{\log r}.$$

于是有

$$\underline{\mathcal{R}}(X,d) \leq R(X,d) \leq \overline{\mathcal{R}}(X,d).$$

VI. 在定理 4.2 中，我们有 $R/p^2(R+\varepsilon)^2 \leq R\big(f(X)\ \|.\|\big) \leq Rp^2(R+\varepsilon)^2$ 以及 $\dim_H(X)/p(R+\varepsilon) \leq \dim_H\big(f(X)\big) \leq p(R+\varepsilon)\dim_H(X)$。

VII. 设 (X,d) 是一个紧致度量空间，并设 $f\colon X \longrightarrow \{0\}$。那么，显然，$f$ 是 Lipschitz 的，且 $0 = R(\{0\}) \leq R(X,d)$。然而，请考虑以下问题：紧致度量空间之间的利普希茨映射能否提高对数比？下面这个由一位匿名读者给出的例子表明，答案是肯定的。

引理 5.2. [匿名读者] 存在一个利普希茨满射 $f\colon (X,d) \longrightarrow (X',d')$，其定义在紧致度量空间上，并且满足 $R(X,d) < R(X',d')$。

证明。令 $X = \{0\} \cup \{1/n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$ 带有拓扑相容超度量$d(x,\ y) = \max\{\sqrt{x}, \sqrt{y}\}$。对于每个 $n > 1$，令 $A_n = X \setminus \{1/k \,\big|\, 1 \leq k \leq n-1\}$并且如例 3.1 中所示，令划分 $\alpha_n = \big\{A_n, \{1\}, \{1/2\}, \cdots, \{1/(n-1)\}\big\}$。于是 $\delta(\alpha_n) = 1/\sqrt{n}$ 且 $\gamma(\alpha_n) = 1/\sqrt{n-1}$。此外，$\overline{\operatorname{diam}(A_n)} = \Gamma(A_n) = 1/\sqrt{n} = \gamma(\alpha_{n+1})$。因此，

$$R(X,d) = \liminf_{n\to\infty} R(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n-1)}{\log n} = 1.$$

此外，如果 $x,\ y \in X$ 满足 $x > y$，则 $|x-y| = x - y \leq x \leq \sqrt{x} = d(\overline{x},\ y)$，因此恒等映射 $\mathrm{id}\colon (X,\ d) \longrightarrow (X,\ |\cdot|)$ 是 1-利普希茨的。然而，根据例 3.1 中情形 3.2.4 的情形 $s = 2$，我们有 $R(X,\ |\cdot|) = 2$。□

VIII. 对于一个度量空间 (X,d)，令 $\mathcal{H}(X)$ 表示由 (X,d) 的所有非空紧子集组成、配备 Hausdorff度量的空间。$\mathcal{H}(X)$ 的拓扑结构已得到广泛研究；参见 [14, 25] 及其中的参考文献。例如，

已知若 (X,d) 是完备的（分别为紧的），则 $\mathcal{H}(X)$ 也完备（分别为紧的）。此外，若 (X,d) 是可分的，则 $\mathcal{H}(X)$ 也可分。事实上，Schori 和 West [25] 的一项著名结果表明，$\mathcal{H}([0,1])$ 与希尔伯特立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 同胚。

$\mathcal{H}(X)$ 的度量结构也已得到广泛研究 [5, 6, 8, 9, 10,11, 12, 13, 19, 28]。例如，[13] 证明了 $\mathcal{H}([0,1])$ 与多种度量希尔伯特立方体并非双利普希茨等价。[28] 通过证明 $\mathcal{H}([0,1])$ 无法双 Lipschitz 嵌入到任何一致凸Banach空间中，进一步展示了其内在度量复杂性。然而，也有一些正面结果。具体而言，根据定义可立即得出，若 (X,d) 是超度量空间，则 $\mathcal{H}(X)$ 也是超度量空间。由于每个可分超度量空间都可等距嵌入希尔伯特空间 [1, 15, 16, 26, 27]，且紧致度量空间之间的双 Hölder 等价会诱导其超空间之间的双 Hölder 等价，以下结果便是定理 2.6 的直接推论。

推论5.3。设(X,d) 是一个有限对数比的紧致度量空间，并假设 $\mathcal{A}_p^*(X) \neq \emptyset$ 对某个 $p \in (1,\infty)$成立。那么存在一个将 $\mathcal{H}(X)$ 嵌入希尔伯特空间的双 ***Hölder*** 嵌入。

例5.4。设 (X,d) 是例 3.1、情形 3.1.1中的度量空间。由 [28, 定理 2.8] 以及直接计算可知，存在一个双 Hölder（事实上是双 Lipschitz）嵌入 $f\colon \mathcal{H}(X) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$。

References

[1] M. Aschbacher、P. Baldi、E. B. Baum 和 R. M. Wilson, *Embeddings of ultrametric spaces in finite-dimensional structures* **8** 1987 564 577 , 《SIAM代数与离散方法杂志》（），–。[2] P. Assouad, *Espaces métriques, plongements, facteurs* Th`博士论文，´国家，奥赛，1977年。[3] ————, *Étude d'une dimension métriques liée à la possibilité de plongements dans* $\mathbb{R}^n$, 《巴黎科学院报告》A辑288（1979），731–734。[4] ————, *Plongements Lipschitziens dans* $\mathbb{R}^n$, 《法国数学会通报》（1983），429–448。[5] C. Bandt, *On the metric structure of hyperspaces with Hausdorff metric*, 《数学新闻》129，（1986），175–183。[6] E. Boardman, *Some Hausdorff measure properties of the space of compact subsets of* $[0,1]$, 《牛津季刊数学杂志》第2辑24（1973），333–341。[7] G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, 《数学科学通报》第2辑52（1928），320–344及361–376。[8] P. R. Goodey, *Some results concerning the dimension of the space of compact subsets of the unit interval* 2 **27** 1976 467 473 , 《牛津季刊数学杂志》（）（），–。[9] ————, *Hausdorff measure functions in the space of compact subsets of the unit interval*, 《美国数学会汇刊》226（1977），203–208。[10] P. M. Gruber, *The space of compact subsets of* E^d, 《几何专题》9（1980），87–90。[11] P. M. Gruber 和 G. Lettl, *Isometries of the space of compact subsets of* E^d, 《匈牙利数学科学研究》14（1979），169–181。[12] P. M. Gruber 和 R. Tichy, *Isometries of the spaces of compact or compact convex subsets of metric manifolds* **93** 1982 117 126 , 《数学月刊》（），–。[13] A. Hohti, *On Lipschitz homogeneity of the Hilbert cube*, 《美国数学会汇刊》291（1985），75–86。[14] A. Illanes 和 S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, 《纯数学与应用数学专著和教材》第216卷，Marcel Dekker，纽约，1999年。[15] J. B. Kelley, *Metric inequalities and symmetric differences*, 载于：《不等式 II》，O. Shisha（编），Academic Press，纽约，1970年，193–212。

[16] A. Y. Lemin, *Isometric imbedding of isosceles (non-Archimedean) spaces in Euclidean spaces*, 《苏联科学院通报》**285** （1985），558–562（俄文）；英文译本：《苏联数学通报》**32** （1985），740–744。[17] J. Luukkainen, *Assouad dimension: Antifractal metrization porous sets and homogeneous measures*, **35** 1998 23 76, 《韩国数学会志》（），–。[18] J. Luukkainen 和 H. Movahedi-Lankarani, *Minimal bi-Lipschitz embedding dimension of ultrametric spaces*, **144** 1994 181 193, 《数学基础》（），–。[19] M. McClure, *The Hausdorff dimension of the hyperspace of compact sets*, 《实分析交流》**22** （1996/97），611–625。[20] H. Movahedi-Lankarani, *On the inverse of Mañé's projection*, 《美国数学会会刊》**116** （1992），555-560。[21] ————, *An invariant of bi-Lipschitz maps*, 《数学基础》**143** （1993）），1–9。[22] H. Movahedi-Lankarani 和 R. Wells, *Ultrametrics and geometric measures*, 《美国数学会会刊》**123** （1995），2579–2584。[23] ————, *Metric inverse limits revisited*, 《阿拉哈巴德数学会通报》**24** （2009），143–198。[24] ————, *Hausdorff-Gromov inverse limits*, 《阿拉哈巴德数学会通报》**24** （2009），199–231。[25] R. M. Schori 和 J. E. West, *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube*, 《美国数学会汇刊》**213** （1975），217–235。[26] A. F. Timan, *On the isometric mapping of some ultrametric spaces into L_p-spaces*, 《斯捷克洛夫数学研究所学报》**134** （1975），314–326（俄文）；英文译本：《斯捷克洛夫数学研究所论文集》**134** （1975），357–370。[27] A. F. Timan 和 I. A. Vestfrid, *Any separable ultrametric space can be isometrically imbedded in ℓ_2*, **17** 1 1983 85 86, 《泛函分析及其应用》：（），–（俄文）；英文译本：《泛函分析及其应用》**17** （1983），70–71。[28] J. Tyson, *Bi-Lipschitz embeddings of hyperspaces of compact sets*, 《数学基础》**187** （2005），229–254。

Department of Mathematics and Statistics, Penn State Altoona, Altoona, PA 16601-3760

Email address: hxm9@psu.edu