arXiv:2512.16996v1 [math.QA] 18 Dec 2025

余切李代数的双 Yangian、因子化与量子 Knizhnik–Zamolodchikov 方程

Raschid Abedin & Wenjun Niu

2025年12月22日

摘要

本文构造了余切李代数 $\mathfrak{d} = T^*\mathfrak{g}$ 对应的 Yangian $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的对偶 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 和双 Yangian $DY_\hbar(\mathfrak{d})$。我们为带有反余乘的对偶 Yangian $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 定义了相干因子化代数版本。此外，我们在该双 Yangian 的中心扩张 $DY_{\hbar,\,\ell}(\mathfrak{d})$ 的量子真空模 $\mathcal{V}_{\hbar,\,k}(\mathfrak{d})$ 上定义了量子 $\widehat{}$ 顶点代数结构，并证明其共形块满足量子 KZ 方程。我们讨论了通过 Costello-Gaiotto 的工作从三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论中得到的 $\mathfrak{d}$ 示例。这些示例包括 Takiff 李代数 $T^*\mathfrak{g}$；其仿射顶点算子代数是 G 的手征微分算子代数的一个大子代数；以及最小的 A 型李超代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$。

目录

1 引言 **2**

1.1 主要结果.2 1.2 动机：量子顶点代数与三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论 4

2 余切李代数的双 Yangian 6

2.1 由双商构造量子群.6 2.2 余切 Yangian 的对偶与双 Yangian.9 2.3 中心扩张.17

3 谱 R-矩阵与因子化 **21**

3.1 与对偶余切 Yangian 相关的局部因子化.22 3.2 从李代数层得到的因子化.23 3.3 相干因子化.27

4 量子　　顶点代数与量子 KZ 方程 34
4.1 由余切 Yangian 得到的量子顶点代数.34 4.2 量子 KZ 方程.43 4.3 三维规范理论中的例子.47

A 记号 **50**

1 引言

1.1 主要结果

设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维复李代数，$\mathfrak{d} := T^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*$ 是其余切李代数。在 [AN24b]，中，我们构造了一个量子群 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$，称之为余切 Yangian，因为它是 Yang 在 $\mathfrak{d}(\mathcal{O}) = \mathfrak{d} \otimes \mathcal{O}$ 上的李双代数结构的一种量子化，其中 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\![t]\!]$ 是关于变量 t 的形式泰勒幂级数代数。在 [AN24a]，中，我们还在曲线 Σ 上的 G-丛的模空间 $\mathrm{Bun}_G(\Sigma)$ 上局部构造了这个量子代数的动力学扭子，它们为 [Fel98、Abe25] 的经典动力学 r-矩阵提供了量子化。本文沿着 [EK96、EK98a、EK98b] 的思路，研究与 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 相关的因子化结构。

在 [AN24b]，中，我们提出了一种构造方法：根据任意李代数分解 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$，构造一个霍普夫代数，使其量子化余法丛 $N^*\mathfrak{p}_+$ 上的李双代数结构；该方法仿照双陪集 $\exp(\mathfrak{p}_+)\backslash\exp(\mathfrak{p})/\exp(\mathfrak{p}_+)$ 的幺半结构。我们将在第 2.1 节回顾这一构造。我们的 Yangian $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 定义为通过这种方式与数据 $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}(\mathcal{K})$、$\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ 和 $\mathfrak{p}_- = t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$ 相对应的霍普夫代数。在第 2.2 节中，我们以类似方式构造 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的霍普夫对偶和双。[1]

定理 1.1（第 2.2 节）。以下陈述成立。

1. $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的对偶霍普夫代数 [2] $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 是与数据 $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}(\mathcal{K})$、$\mathfrak{p}_+ = t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$ 和 $\mathfrak{p}_- = \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ 相对应的霍普夫代数。2. $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的双 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 是与数据 $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}(\mathcal{K}) \times \mathfrak{g}(\mathcal{K})$、$\mathfrak{p}_+ = \mathrm{diag}(\mathfrak{g}(\mathcal{K})) := \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{g}(\mathcal{K})\}$ 和 $\mathfrak{p}_- = \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \times t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$ 相对应的霍普夫代数。3. 双 Yangian $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 与 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!]$ 的双 $DU(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!]$ 扭曲等价（作为拟三角霍普夫代数）。

我们还在第 2.2.3 节给出了 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的 R-矩阵的显式公式。此外，通过将 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的伪三角 R-矩阵 $R(z)$ 转换为 Hopf 代数映射 $\rho(z)$：$DY_\hbar(\mathfrak{d}) \to$

[1] 对偶与双的构造适用于任何与李代数分裂相关联的霍普夫代数。[2] 在此及下文中，$(-)^*$ 表示拓扑对偶。

$Y_\hbar(\mathfrak{d})((z^{-1}))$，我们通过范畴化的态算符对应来诠释范畴 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$–Mod^{sm} （光滑模的范畴）上的代数结构。

命题 1.2（第 2.2.4 节）。沿着 $\rho(z)$ 的限制给出一个幺半函子

$$\mathcal{Y}(-,z)\colon Y_\hbar(\mathfrak{d})-\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}} \longrightarrow DY_\hbar(\mathfrak{d})-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{End}(Y_\hbar(\mathfrak{d})-\mathrm{Mod}) \tag{1.1}$$

使得我们有以下函子性同构

$$\mathcal{Y}(M,z)\mathcal{Y}(N,w)P \cong \mathcal{Y}(N,w)\mathcal{Y}(M,z)P, \qquad M,N,P \in Y_\hbar(\mathfrak{d})-\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}. \tag{1.2}$$

在 [EK96], 中，作者使用 R-矩阵 $R(z)$ 证明，对偶霍普夫代数$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 在 $\mathbb{C}=\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}$ 上具有局部分解 Hopf 代数结构。在我们的情形中，借助 $\mathbb{P}^1$ 上适当的李代数层，可以非常明确地写出这些局部分解 Hopf 代数；参见第 3.1 节。在第 3.2 节和第 3.3 节中，我们使用这一方法以及双商代数堆栈 $\mathfrak{g}(\mathcal{O})\backslash\mathfrak{g}(\mathcal{K})/\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ 的因子化结构，构造一个真正的层因子化结构：

定理 1.3（第 3 节）。存在一个因子化代数 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$，定义在 $\mathbb{P}^1$ 的 $\hbar$-进扩张上，使得：

1. 将 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 限制到不同点的构形空间上，得到一个 Hopf 代数层，其余代数结构与因子化结构相容。2. 在 $\mathbb{C}=\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}$ 的不同点上， $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 的纤维同构于 *[EK96]* 所给出的对偶 Yangian $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 的局部因子化版本。

最后，我们应用与定理 1.1 的证明相同的策略，也构造 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的中心扩张 $\widehat{\ }(DY_\hbar)$, $\ell(\mathfrak{d})$。这些扩张将 $\mathfrak{d}(\mathcal{K})$ 的经典中心扩张量子化，其中所用双线性形式为 $\kappa_\ell=\kappa_0+\ell\kappa_{\mathfrak{g}}$ for $\ell\in\mathbb{C}$，这里 κ_0 是 $\mathfrak{d}$ 的典范配对形式，而 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型，并将其以 0 延拓到 $\mathfrak{d}$。我们将 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 在层 k 上的量子真空模 $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})$ 定义为

$$\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}) := \mathrm{Ind}_{Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes\mathbb{C}[c_\ell]}^{\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})}\mathbb{C}_k[\![\hbar]\!], \tag{1.3}$$

w这里 $\mathbb{C}_k[\![\hbar]\!]$ 是这样一个表示： c_ℓ 通过乘以 k作用于其上。我们证明了 t:

定理 1.4（定理 4.3 和定理 4.15）。以下陈述成立。

1. 空间 $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})$ 具有量子顶点代数的结构。

2. 在对双线性形式和层施加限制后，存在一个量子 Segal-Sugawara 算子Q，它作用于 $DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})$ 的模上。 Q 在量子共形块上的作用产生了

到以下量子 Knizhnik–Zamolodchikov（qKZ）方程

$$\nabla_i(\mathbf{z}) = R^{i-1,i}(z_{i-1} - z_i + k\hbar)\cdots R^{1,i}(z_1 - z_i + k\hbar)\cdot R^{n,i}(z_n - z_i)\cdots R^{i+1,i}(z_{i+1} - z_i), \quad (1.4)$$

其中 $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{P}^1$ 是黎曼球面上一组有限的有序互异点。

本定理中的第二个结论是通过仿照 [EK98b] 中的证明得到的。然而，对于第一个结论，我们的推导独立于 [EK98b], ，因为我们无法复现其中省略的部分计算步骤。我们新证明的一个优点是，它具有相当清晰的概念性，并且显然可以推广到配备幂零导子的伪三角 Hopf 代数。因此，我们实质上证明了所有这类 Hopf 代数都可用于构造量子顶点代数。

值得指出的是，我们的构造非常一般，实际上也适用于微分分次李代数，只要仔细遵循 Koszul 符号规则即可。因此，对于每个微分分次李代数 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{d} = T^*\mathfrak{g}$，我们的构造都会给出一个量子顶点代数 $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})$，它量子化了与 $\mathfrak{d}$ 相关联的经典真空顶点代数 $V_k(\mathfrak{d})$。这是一个全新的、规模庞大的量子顶点代数类。现在我们将介绍一类 $\mathfrak{d}$ ，它们源自 Costello-Gaiotto [CG19], 的研究：这些对象通过 3d $\mathcal{N} = 4$ 规范理论的拓扑 B 扭曲而来，并启发了本研究。他们的工作表明， $V_k(\mathfrak{d})$ 与希格斯分支的几何密切相关，并且可以通过三维镜像对称与手征微分算子联系起来。因此，我们希望能够利用本文结果构造这些顶点代数的量子化。下面我们将更详细地探讨这一方向。

1.2 动机：量子顶点代数与三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论

在 [CG19], Costello-Gaiotto 描述了三维$\mathcal{N} = 4$ 规范理论的拓扑扭曲中的全纯边界条件。边界顶点代数如今已成为研究三维镜像对称的重要组成部分。我们考虑由一对 (G, T^*V) 定义的三维 $\mathcal{N} = 4$理论，其中包括李群 G 和表示 V 的余切空间（ G）。该规范理论的 B 扭曲对应的（微扰）顶点算子代数被确定为与某个有限维李超代数的仿射李超代数相关联的顶点算子代数。这应当会受到非微扰修正，从而得到非微扰顶点算子代数。在阿贝尔规范理论[BCDN23], 中，这些问题最容易理解；这些理论可用于证明阿贝尔镜像对称。

对于上述由 (G, T^*V) 定义的理论，底层 VOA 的李超代数 $\mathfrak{d}_{G,\ T^*V}$属于余切型。更确切地说，令 $\mathfrak{h} \coloneqq \mathfrak{g} \ltimes V[-1]$，其中 V 的同调次数为 1，则$\mathfrak{d}_{G,\ T^*V} = T^*[-2]\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{h}^*[-2]$。Niu24]（见 [）证明了这个李超代数是辛约化 $T^*V////G$ 的切李代数，也就是三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论的希格斯支。对于层 [Gar23], 的一个特定取值，中心扩张$\widehat{\mathfrak{d}}_{G,\ T^*V}$ 的真空模 $V_k(\mathfrak{d}_{G,\ T^*V})$ 是 [CG19] 的微扰 VOA。将我们的构造应用于 $\mathfrak{d}_{G,\ T^*V} = T^*[-2]\mathfrak{h}$，得到该微扰 VOA 的量子化 $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d}_{G,\ T^*V})$。

这与以下直觉相符。我们在 [AN24b] 中对 $\mathfrak{d}_{G,\ T^*V}$ 的 Yangian 的研究，受到四维 $\mathcal{N}=2$ 规范理论的启发。专家们都知道（例如见 [ESW22]），由 (G, T^*V) 定义的四维 $\mathcal{N}=2$ 规范理论经过 S^1-约化后，就是由相同数据定义的三维 $\mathcal{N}=4$ 理论。经典 VOA $V_k(\mathfrak{d}_{G,\ T^*V})$ 是三维规范理论的（微扰）边界顶点算子代数。直观地说，量子 VOA $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d}_{G,\ T^*V})$ 是S^1-缠绕四维规范理论[3]，的边界顶点算子代数，因此，共形块满足的微分方程被差分方程取代，而边界反常抵消则完全相同（见注 4.14）。自然地，我们可以期待将关于 $V_k(\mathfrak{d}_{G,\ T^*V})$ 和三维 B 扭曲的已知结果提升到这一量子／差分情境中。这里先列举其中一些，更多详细内容将在第 4.3 节介绍。

考虑 G 是一个约化代数群且 $V=0$的情形。在这种情况下，李代数 $\mathfrak{d}=T^*\mathfrak{g}$ 也称为 Takiff 李代数。事实证明，相应的顶点算子代数$V_k(\mathfrak{d})$可以嵌入到 $D_{G,\ k}$中；后者是 G 上层k[4]的手征微分算子（CDOs）代数。此外，$D_{G,\ k}$ 是 $V_k(\mathfrak{d})$的一个扩张，形式为

$$D_{G,k}=\bigoplus_{V\in \mathrm{Irred}(G)} \mathrm{Ind}(V)\otimes V^*, \tag{1.5}$$

其中 $\mathrm{Ind}(V)$ 表示将 V 从 $\mathfrak{d}(\mathcal{O})$ 诱导到 $\widehat{\mathfrak{d}}(\mathcal{K})$。因此，我们可以期待 $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})$也存在类似的量子顶点代数扩张，它可以为$G$中的手征微分算子提供一种量子化。我们在第 4.3 节提出这一猜想。借助镜像对称， $V_k(\mathfrak{d})$的非微扰完备化应与手征普适中心化子顶点算子代数 $I_{G,\ k}$相关（更确切地说，二者 Morita 等价），因此我们也期待存在相应的量子顶点算子代数版本。

对于一般的规范理论，目前尚不清楚如何计算$V_k(\mathfrak{d}_{G,T^*V})$的微扰完备化。 [DGP18]中提出了一种基于仿射格拉斯曼量 Gr_G 上的上同调的方案。当 $G=(\mathbb{C}^\times)^r$ 为阿贝尔时，这种完备化已知是一个简单流扩张 [BCDN23]。已证明，该扩张与 β-γ 顶点算子代数的 BRST 约化 $V_{\beta\gamma}$ （又称希格斯分支上的手征微分算子）有关。具体而言，设 $G=\mathbb{C}^\times$和 $V=\mathbb{C}$ 的权为 1。则$\mathfrak{d}_{G,T^*V}=\mathfrak{gl}(1|1)$是最简单的 A 型李超代数，且众所周知 [CR13] ， $V_{\beta\gamma}\otimes V_{bc}$ 是 $V_k(\mathfrak{gl}(1|1))$的一个简单流扩张。因此，我们猜想$\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{gl}(1|1))$存在类似的扩张，并且该扩张为 $V_{\beta\gamma}\otimes V_{bc}$提供一种量子化。一般而言，对于阿贝尔 G，我们预期存在$\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}_{G,T^*V})$的一个扩张，类似于 [BCDN23], 中研究的扩张，并且它为许多份 $V_{\beta\gamma}\otimes V_{bc}$所对应的 BRST 上同调提供一种量子化。这些猜想也在第 4.3 节中作了更精确的表述。

很遗 遗憾的是，我们并不清楚这些量子手征微分算子的作用或含义 or

[3]从物理角度看，两者的区别在于是否将 S^1 的大小缩小至零。从数学角度看，这相当于 S^1 与其仿射化 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon])$之间的区别。[4]关于这一点以及后续一些有关手征微分算子（CDOs）的事实，我们是通过与 S. Nakatsuka 的讨论了解到的。

物理学中的顶点算子代数。

致谢

R.A. 感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过 SFB 1624——“高阶结构、模空间与可积性”项目——提供支持，项目编号为 506632645。
W.N. 感谢 K. Costello 和 S. Nakatsuka 的有益讨论，也感谢他的朋友 Don Manual 一直以来的支持。W.N. 的研究得到了周界理论物理研究所的支持；该研究所则部分获得了加拿大政府通过加拿大创新、科学与经济发展部以及安大略省通过学院与大学部提供的资助。

2 余切李代数的双杨扬量子

在本节中，我们计算余切 Yangian $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的对偶 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 和双 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$，以及 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的 R-矩阵。此外，我们构造 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的中心扩张，它们类似于 [EK98a] 中普通杨氏代数的中心扩张。

本文安排如下。第 2.1 节回顾如何从形式群的双商构造 Hopf 代数（见 [AN24b] ），并说明以这种方式构造的 Hopf 代数的对偶与双的计算思路。我们还回顾如何从适当的双商构造余切 Yangian $Y_\hbar(\mathfrak{d})$。第 2.2 节明确计算对偶 Yangian $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 和双 Yangian $DY_\hbar(\mathfrak{d})$。此外，我们在第 2.2.3 节给出双的 R-矩阵的显式公式，并在第 2.2.4 节说明，在 [AN24b] 中构造的 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的谱 R-矩阵，现在可以通过范畴 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$–Mod 的范畴化态算符对应来理解。第 2.3 节中，我们利用 $\mathfrak{d}$ 上的某些双线性形式构造 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的中心扩张。

2.1 从双陪集构造量子群

2.1.1 基本思路

沿用我们此前在 [AN24b]，中的工作，我们使用与李代数分解相关的形式群的双陪集来构造各种量子群。为此，我们简要重述这一构造，并概述我们在第 2 节中将采用的策略。在下文的第 2.2 节中，我们将针对所关注的情形，具体阐明本节较为粗略的概述。

对于任意一个底空间为复归纳极限向量空间的李代数 $\mathfrak{p}$，都可以关联一个形式群 $\exp(\mathfrak{p}) := \widehat{\mathfrak{p}}_0$。在我们的设定中，可以用 $\hbar$-进语言方便地理解这个形式群：我们通过 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 扩展这一设定，并将 0 处的极大理想按 $\hbar$缩放。于是

exp(𝔭) 由 $e^{\hbar x}$ 生成，其中 $x \in \mathfrak{p}$，乘法由 Baker-Campbell-Hausdorff 级数给出。

现在设 $\mathfrak{p}_+ \subseteq \mathfrak{p}$ 为一个子代数。那么，双商代数堆栈 exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_+$) 上的拟凝聚层具有自然的幺半结构，该结构由沿对应图表的推前-拉回给出，而该图表由 exp(𝔭) 的乘法诱导。这个范畴通常称为 Hecke 范畴。

如果 $\mathfrak{p}_+$ 具有一个补子代数 $\mathfrak{p}_- \subseteq \mathfrak{p}$，即 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$，那么我们可以为这个幺半结构构造一个纤维函子，并利用它通过一个霍普夫代数表示上述层范畴。该纤维函子由 exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_+$) 对 exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_-$) 的 Hecke 作用给出，其中后者等于一个单点。

在代数层面，我们可以将 exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭) $\cong$ exp($\mathfrak{p}_-$) $\cong$ Spf($U(\mathfrak{p}_-)^*$) $=$ Spf($S(\hbar\mathfrak{p}_-^*)$) 识别为，因此

$$U_\hbar(\mathfrak{p}_+ \ltimes \mathfrak{p}_-^*) = U(\mathfrak{p}_+) \ltimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathfrak{p}_-^*) \tag{2.1}$$

是一个代数，其模是双商代数堆栈上的层。现在可以用显式的余乘 $\Delta_\hbar$ of $U_\hbar(\mathfrak{p}_+ \ltimes \mathfrak{p}_-^*)$ 来表示幺半结构，从而使其具有霍普夫代数结构。

正如记号所示，这个霍普夫代数是李双代数的量子化，即一个量子群。事实上，李代数分解 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ 诱导出一个 Manin 三元组 $\mathfrak{p} \ltimes \mathfrak{p}^* = (\mathfrak{p}_+ \ltimes \mathfrak{p}_-^*) \oplus (\mathfrak{p}_- \ltimes \mathfrak{p}_+^*)$。霍普夫代数 $U_\hbar(\mathfrak{p}_+ \ltimes \mathfrak{p}_-^*)$ 量子化了由这个 Manin 三元组确定的$\mathfrak{p}_+ \ltimes \mathfrak{p}_-^*$ 上的李双代数结构。

请注意，选择另一个补子代数 $\mathfrak{p}_-$ 会得到一个扭曲等价的霍普夫代数。这一点很直观，因为双商并不依赖于这一选择，因此幺半结构也不应依赖于这一选择，但纤维函子确实依赖于它。

本文希望通过描述 $U_\hbar(\mathfrak{p}_+ \ltimes \mathfrak{p}_-^*)$ 的对偶与双，扩展迄今为止勾勒出的图景。这也可以借助双商的直觉来实现。特别是，对偶的一个自然候选是霍普夫代数 $U_\hbar(\mathfrak{p}_- \ltimes \mathfrak{p}_+^*)$，它由“相反的”双商 exp($\mathfrak{p}_-$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_-$) 确定。事实上，这个栈对 exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_-$) 的右 Hecke 作用，与 exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_+$) 的左 Hecke 作用相交换。此外，通过调整 [BZFN10], 中的计算，可以证明 QCoh (exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_+$)) 和 QCoh (exp($\mathfrak{p}_-$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_-$)) 是对偶范畴（即它们互为交换子），并作用于 Vect $=$ QCoh (exp($\mathfrak{p}_+$)\exp(𝔭)/exp($\mathfrak{p}_-$))。此外，[BZFN10] 中的计算表明，这两个范畴的中心相同，且同构于 exp(𝔭)/exp(𝔭) 上拟凝聚层构成的范畴，其中的商是按伴随作用取的。

从代数角度来看，我们可以考虑由.....诱导的霍普夫代数 $U_\hbar(\mathfrak{p} \ltimes \mathfrak{p}^*)$

$$\exp(\mathrm{diag}(\mathfrak{p}))\backslash\exp(\mathfrak{p} \times \mathfrak{p})/\exp(\mathrm{diag}(\mathfrak{p})) \tag{2.2}$$

其定义是考虑子代数 $\mathrm{diag}(\mathfrak{p}) := \{(a,a) \mid a \in \mathfrak{p}\} \subset \mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$和 $\mathfrak{p}_+ \times \mathfrak{p}_- \subseteq \mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$，它们互为补子代数。我们可以自然地将 $U_\hbar(\mathfrak{p}_- \ltimes \mathfrak{p}_+^*)$ 和 $U_\hbar(\mathfrak{p}_- \ltimes \mathfrak{p}_+^*)^{\text{co-op}}$ 嵌入$U_\hbar(\mathfrak{p} \ltimes \mathfrak{p}^*)$，并且它们在该代数中互为对偶。特别地，这个 $U_\hbar(\mathfrak{p} \ltimes \mathfrak{p}^*)$ 就成为那个双，而 $U_\hbar(\mathfrak{p}_- \ltimes \mathfrak{p}_+^*)$ 则成为 $U_\hbar(\mathfrak{p}_+ \ltimes \mathfrak{p}_-^*)$ 的对偶

为了描述 $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} = \mathrm{diag}(\mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{p}_+ \times \mathfrak{p}_-)$ 的霍普夫代数结构，值得记住的是，更换与 $\Delta_\mathfrak{p}$ 互补的子代数会得到一个扭曲等价的霍普夫代数。现在，$\mathrm{diag}(\mathfrak{p})$ 的互补李代数 $\mathfrak{p} \times \{0\}$ 要简单得多。由这个子代数得到的霍普夫代数与 [Niu24] 中的量子群一致，因此我们的双与这个霍普夫代数扭曲等价。特别是，这两个霍普夫代数虽然不同构，但作为代数同构，且与它们相伴的幺半范畴等价。

2.1.2 余切杨氏算子

设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数，其基为 $\{I_\alpha\}_{\alpha=1}^d \subseteq \mathfrak{g}$，而 $\{I^\alpha\}_{\alpha=1}^d \subset \mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对偶基。余切李代数 $\mathfrak{d} = T^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*$ 的 Yangian $Y_\hbar(\mathfrak{d})$，作为对应于李代数分解 $\mathfrak{g}(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \oplus \mathfrak{g}_{<0}$ 的量子群，已在 [AN24b] 中引入，其构造遵循第 2.1 节概述的方案。这里，

$$\mathfrak{g}_{<0} \coloneqq t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}], \ \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \coloneqq \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathcal{K} =: \mathfrak{g}(\mathcal{K}) \quad \text{for} \quad \mathbb{C}[\![t]\!] = \mathcal{O} \subset \mathcal{K} = \mathbb{C}(\!(t)\!). \tag{2.3}$$

以类似的方式，我们定义 $\mathfrak{d}_{<0}, \mathfrak{d}(\mathcal{O}) \subseteq \mathfrak{d}(\mathcal{K})$，并对任意 $a \in \mathfrak{d}\,\text{and} n \in \mathbb{Z}$，记作 $a_n = a \otimes t^n \in \mathfrak{d}(\mathcal{K})$。

更明确地说， $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的构造如下：

1. 考虑典范不变元 $C_\mathfrak{d} = \sum_{a=1}^d (I^\alpha \otimes I_\alpha + I_\alpha \otimes I^\alpha) \in \mathfrak{d} \otimes \mathfrak{d}$，其中$\{I_\alpha\}_{\alpha=1}^d \subseteq \mathfrak{g}$, $\{I^\alpha\}_{\alpha=1}^d \subseteq \mathfrak{g}^*$ 是互为对偶的基。于是表达式

$$\gamma(t_1,t_2) = \frac{C_\mathfrak{d}}{t_1 - t_2} \in (\mathfrak{d} \otimes \mathfrak{d}) \left[t_1, t_2, \frac{1}{t_1 - t_2}\right] \tag{2.4}$$

满足谱参数经典杨–巴克斯特方程。因此，

$$\delta^\gamma(x) = [x(t_1) \otimes 1 + 1 \otimes x(t_2), \gamma(t_1,t_2)] \tag{2.5}$$

定义了一个拓扑李双代数结构 δ^γ: $\mathfrak{d}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{d}(\mathcal{O}) \otimes \mathfrak{d}(\mathcal{O})$。这个李双代数结构由 Manin 三元组 $\mathfrak{d}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d}(\mathcal{O}) \oplus \mathfrak{d}_{<0}$ 定义，而 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 最终将对这个李双代数结构进行量子化。

2. 分解 $\mathfrak{g}(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \oplus \mathfrak{g}_{<0}$ 给出了 $U(\mathfrak{g}_{<0})$ 在 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$ 上的右作用 $\triangleleft$，以及 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$ 在 $U(\mathfrak{g}_{<0})$ 上的左作用 $\triangleright$。此外，我们有一个典范同构

$S(\hbar\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!] = S(\hbar(\mathfrak{g}_{<0})^*)[\![\hbar]\!] = U(\mathfrak{g}_{<0})^*[\![\hbar]\!]$。对偶化 $\triangleright$ 并按 $\hbar^{-1}$ 缩放后，我们得到 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$ 在 $S(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$ 上的一个作用。作为一个代数

$$Y_\hbar(\mathfrak{d}) \coloneqq U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!] \ltimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O})))[\![\hbar]\!]. \tag{2.6}$$

3. $\Delta_\hbar^\gamma$ $Y_\hbar(\mathfrak{d})$的余乘法可以利用 $U(\mathfrak{g}_{<0})$在$U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$上的右作用 $\lhd$ 来定义。具体而言，

$$\Delta_\hbar^\gamma(x) = 1 \otimes x + \phi_\lhd(x)\,, \qquad x \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \tag{2.7}$$

对于 $\phi_\lhd(x)$，存在某个指标集 I以及某些 $x_i \in U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]$和 $h_i \in S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]$，满足 $\sum_{i\in I}\langle h_i, e^{\hbar y}\rangle x_i = x \lhd e^{\hbar y}$对所有 $y \in \mathfrak{g}_{<0}$均成立。(2.7)的一个简便描述方式是

$$\Delta_\hbar^\gamma(x) = \exp(\hbar\gamma_<)(x\otimes 1 + 1\otimes x)\exp(-\hbar\gamma_<), \tag{2.8}$$

其中 $\gamma_<$ 是 $\gamma = \gamma(t_1,t_2)$关于 $t_1 < t$的泰勒展开的$(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*)$分量 $_2$:

$$\gamma_< = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d} I_{\alpha,n}\otimes I^\alpha_{-n-1}. \tag{2.9}$$

注 2.1. 请注意，与 [AN24b]相比，本文使用的是反余乘 .

注 2.2. 请注意， $Y_\hbar(\mathfrak{d})$含有一个稠密霍普夫子代数 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$，即由多项式元素 $\mathfrak{d}[t] \subset \mathfrak{d}(\mathcal{O})$生成的子代数。它可以视为与李代数分裂 $\mathfrak{d}[t,t^{-1}] = \mathfrak{d}[t] \oplus t^{-1}\mathfrak{d}[t^{-1}]$相对应的霍普夫代数。在某些情况下，需要使用 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$而非 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$。

2.2 余切 Yangian 的对偶与双

2.2.1 对偶

现在我们希望构造最终将成为 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的对偶 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$。本质上，它是与 $\mathfrak{g}(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}_{<0}\oplus\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ 相关的霍普夫代数的余对立，即描述双陪集 $\exp(\mathfrak{g}_{<0})\backslash\exp(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))/\exp(\mathfrak{g}_{<0})$ 的幺半结构的量子群。更准确地说：

1. 对于 $x \in \mathfrak{d}_{<0}$，(2.5) 的负值在 $\mathfrak{d}_{<0}$ 上定义了对偶李双代数结构；

2. 我们有一个典范同构 $S(\hbar\mathfrak{g}^*_{<0})[\![\hbar]\!] = S(\hbar\mathfrak{g}(\mathcal{O})^*)[\![\hbar]\!] = U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))^*[\![\hbar]\!]$。 $\hbar^{-1}$-重标度对偶化的 $\lhd$ 定义了 $U(\mathfrak{g}_{<0})$ 在 $S(\mathfrak{g}^*_{<0})$ 上的作用，并将对偶 Yangian 作为代数定义为

$$Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \coloneqq S(\mathfrak{g}^*_{<0})[\![\hbar]\!] \rtimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} U(\mathfrak{g}_{<0})[\![\hbar]\!]. \tag{2.10}$$

3. $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 上的余乘法[5] $\Delta^{\gamma,\hbar}{}^{\mathrm{op}}$ 定义为取 $\Delta^{\gamma,\hbar}{}^{\mathrm{op}}$ 关于 $S(\mathfrak{g}^*_{<0})[\![\hbar]\!]$ 上 Baker-Campbell-Hausdorff 级数的对偶，并通过以下方式在 $U(\mathfrak{g}_{<0})[\![\hbar]\!]$ 上定义 $\Delta^{\gamma,\hbar}{}^{\mathrm{op}}$

$$\Delta_\hbar^{\gamma,\mathrm{op}} = x\otimes 1 + \phi_\triangleright(x)\,, \qquad x\in\mathfrak{g}_{<0} \tag{2.11}$$

对于 $\phi_\triangleright(x) = \sum_{i\in I} h_i\otimes x_i$，其中 I是某个指标集，$x_i\in U(\mathfrak{g}_{<0})[\![\hbar]\!]$ 和 $h_i\in S((\mathfrak{g}^*)_{<0})[\![\hbar]\!]$满足 $\sum_{i\in I}\langle h_i, e^{\hbar y}\rangle x_i = e^{\hbar y}\triangleright x$，对所有 $y\in\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ 均成立。另一种便于描述 (2.11) 的方式是

$$\Delta_\hbar^{\gamma,\mathrm{op}}(x) = \exp(\hbar\gamma_<^{21})(x\otimes 1 + 1\otimes x)\exp(-\hbar\gamma_<^{21}), \tag{2.12}$$

其中我们用 $\gamma_<^{21} = \sum_{n=0}^\infty\sum_{a=1}^d I_n^a\otimes I_{a,-n-1}$ 表示逐系数的张量翻转。

命题 2.3. 由 $\hbar^{-1}$ 缩放的典范配对定义了一个同构

$$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})\cong Y_\hbar(\mathfrak{d})^*. \tag{2.13}$$

证明。根据定义，$U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]$ 与 $U(\mathfrak{g}_{<0})[\![\hbar]\!]$ 的乘法分别与 $S(\mathfrak{g}^*_{<0})[\![\hbar]\!]$ 和 $S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]$上的余乘对偶。特别地，余单位与单位互为对偶。

现在只需检验它们的交换关系。令 $x\in U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$ $f\in S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))$ $y\in\mathfrak{g}_{<0}$，且 $g\in S(\mathfrak{g}^*_{<0})[\![\hbar]\!]$，则

$$\langle xf, yg\rangle = \langle\Delta_\hbar^\gamma(xf), y\otimes g\rangle \tag{2.14}$$

我们可以假设 $g\in\mathfrak{g}^*_{<0}$，因为它生成整个对称代数，因此可以假设 $x\in\mathfrak{g}(\mathcal{O})$。利用 (2.7)，我们得到

$$\Delta_\hbar^\gamma(xf) = (1\otimes x + \phi_\triangleleft(x))\Delta_\hbar^\gamma(f) = \sum_{(f),i\in I}\left(f^{(1)}\otimes xf^{(2)} + x_i f^{(1)}\otimes h_i f^{(2)}\right). \tag{2.15}$$

将此与 $y\otimes g$ 配对，并利用 g 与 $S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))$ 的配对为零这一事实，我们得到

$$\sum_{(f)}\langle f^{(1)}, y\rangle\langle g, x\rangle\epsilon(f^{(2)}) = \langle f, y\rangle\langle g, x\rangle. \tag{2.16}$$

[5]这样选择记号，是为了使 $\Delta_\hbar^\gamma$ 在后文表示整个双 Yangian 的余乘法。

另一方面，如果将此与 $g \otimes y$ 配对，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{(f),i\in I} \langle g, x_i\rangle \epsilon(f^{(1)})\langle h_i f^{(2)}, y\rangle \\
&= \sum_{(f),i\in I} \Big(\langle g, x_i\rangle \epsilon(f^{(1)})\langle h_i, y\rangle \epsilon(f^{(2)}) + \langle g, x_i\rangle \epsilon(f^{(1)})\epsilon(h_i)\langle f^{(2)}, y\rangle\Big) \\
&= \sum_{i\in I} \langle g, x_i\rangle\langle h_i, y\rangle\epsilon(f) + \langle g, x\rangle\langle f, y\rangle.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.16) 与 (2.17) 的差为

$$\sum_{i\in I} \langle g, x_i\rangle\langle h_i, y\rangle\epsilon(f). \tag{2.18}$$

现在我们断言，这等于根据 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 计算得到的 $\langle xf, [y, g]\rangle$。事实上，我们有

$$\langle xf, [y, g]\rangle = \langle g, x \lhd y\rangle\epsilon(f) = \sum_{i\in I} \langle g, x_i\rangle\langle h_i, y\rangle\epsilon(f), \tag{2.19}$$

这要归功于 $\phi(x) = \sum_{i\in I} x_i \otimes h_i$ 的定义。由此便完成了将 $Y_\hbar(\mathfrak{d})^*$ 的代数结构与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 的余代数结构相识别。

接下来，让我们将 $Y_\hbar(\mathfrak{d})^*$ 的余代数结构与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 的代数结构相识别。因此，对于 $\phi_\triangleright(y) = \sum_{i\in I} r_i \otimes y_i$，我们转而考虑

$$\begin{aligned}
\langle xf, yg\rangle &= \sum_{(g),i\in I} \langle x \otimes f, yg^{(1)} \otimes g^{(2)} + r_i g^{(1)} \otimes y_i g^{(2)}\rangle = \sum_{(g),i\in I} \langle \Delta_\hbar^\gamma(x), r_i \otimes g^{(1)}\rangle\langle f, y_i\rangle\epsilon(g^{(2)}) \\
&= \sum_{(g),i\in I} \Big(\langle r_i, x\rangle\epsilon(g^{(1)})\langle f, y_i\rangle\epsilon(g^{(2)}) + \epsilon(r_i)\langle g^{(1)}, x\rangle\langle f, y_i\rangle\epsilon(g^{(2)})\Big) \\
&= \sum_{i\in I} \langle f, y_i\rangle\langle r_i, x\rangle\epsilon(g) + \langle g, x\rangle\langle f, y\rangle.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

对于 $\phi_\triangleright(y) = \sum_{i\in I} r_i \otimes y_i$。另一方面，我们得到

$$\langle fx, yg\rangle = \langle f \otimes x, \Delta_\hbar^{\gamma,\mathrm{op}}(yg)\rangle = \sum_{(g),i\in I} \langle f \otimes x, yg^{(1)} \otimes g^{(2)} + r_i g^{(1)} \otimes y_i g^{(2)}\rangle = \langle f, y\rangle\langle g, x\rangle \tag{2.21}$$

A如前所述，两者之差等于 $\langle [x, f], yg\rangle$，这正如在 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 中计算所得，sin ce

$$\langle [x, f], yg\rangle = -\langle f, x \triangleright y\rangle\epsilon(g) = -\sum_{i\in I} \langle f, y_i\rangle\langle r_i, x\rangle\epsilon(g), \tag{2.22}$$

这得益于 $\phi_{\triangleright}(y) = \sum_{i\in I} r_i \otimes y_i$ 的定义。由此完成了对 $Y_\hbar(\mathfrak{d})^*$ 与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 的代数结构的识别。

□

2.2.2 双

现在我们希望将 Drinfeld 双 $DY_\hbar(\mathfrak{d}) := D(Y_\hbar(\mathfrak{d})) = Y_\hbar(\mathfrak{d}) \otimes Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ of $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 识别为一个代数。为此，我们回顾一下 [Niu24] 提出的与余切李代数相关的量子群，并将其应用于余切李代数 $\mathfrak{d}(\mathcal{K}) = T^*\mathfrak{g}(\mathcal{K})$。作为一个代数，

$$U_\hbar(\mathfrak{d}(\mathcal{K})) = U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!] \ltimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!], \tag{2.23}$$

w这里， $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$ 对 $S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{K}))$ 的作用是由 $\mathfrak{g}(\mathcal{K})^* = \mathfrak{g}^*(\mathcal{K}$ 所诱导的典范作用).

若赋予它 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!]$ 上的通常余乘，以及由 Baker-Campbell-Hausdorff 级数在 $S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!]$ 上定义的余乘，则该代数成为一个霍普夫代数，并量子化了 $\mathfrak{d}(\mathcal{K})$ 上的李余括号；此李余括号是对 $\mathfrak{g}(\mathcal{K})$ 上平凡李双代数结构取双而得到的。

我们的目标是证明以下结论。

定理 2.4。Hopf 代数 $U_\hbar(\mathfrak{d}(\mathcal{K}))$ 和 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 扭曲等价。特别地，存在一个代数的典范同构 $U_\hbar(\mathfrak{d}(\mathcal{K})) \cong DY_\hbar(\mathfrak{d})$。

证明。容易看出， $U_\hbar(\mathfrak{d}(\mathcal{K}))$ 是由以下李代数分解定义的

$$\mathfrak{g}(\mathcal{K}) \times \mathfrak{g}(\mathcal{K}) = \mathrm{diag}(\mathfrak{g}(\mathcal{K})) \oplus (\mathfrak{g}(\mathcal{K}) \times \{0\}) \tag{2.24}$$

就我们的量子群一般构造而言。这里，diag: $\mathfrak{g}(\mathcal{K}) \to \mathfrak{g}(\mathcal{K}) \times \mathfrak{g}(\mathcal{K})$ 是对角嵌入。

我们希望确认 $D(Y_\hbar(\mathfrak{d}))$ 与由以下李代数分解定义的霍普夫代数 H 同构

$$\mathfrak{g}(\mathcal{K}) \times \mathfrak{g}(\mathcal{K}) = \mathrm{diag}(\mathfrak{g}(\mathcal{K})) \oplus (\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{g}_{<0}). \tag{2.25}$$

于是，利用 [AN24b, 第 3.1 节.3] 中的扭曲过程即可得出结论。

我们先更详细地描述 H 。 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$在 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$和 $U(\mathfrak{g}_{<0})$上的作用结合为 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$在 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \times \mathfrak{g}_{<0}) \cong U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \otimes U(\mathfrak{g}_{<0})$上的作用，因而也作用于其对偶（$U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \otimes U(\mathfrak{g}_{<0})$）*。然后

$$H = U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!] \ltimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} (U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \otimes U(\mathfrak{g}_{<0}))^*[\![\hbar]\!] \tag{2.26}$$

现在来描述双 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$。根据定义，它是双交叉积

$$\begin{aligned} DY_\hbar(\mathfrak{d}) &:= Y_\hbar(\mathfrak{d}) \bowtie_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} \\ &= ((U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!] \ltimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]) \bowtie_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} (S(\mathfrak{g}_{<0}^*)[\![\hbar]\!] \rtimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} U(\mathfrak{g}_{<0})[\![\hbar]\!])) \end{aligned} \tag{2.27}$$

其余乘由 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的余乘与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 的反余乘之积给出。这里，双交叉积的代数结构由下式确定：

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = \sum_{(x_2),(y_1)} x(x_2^{(1)} \triangleright y_1^{(1)}) \otimes (y_1^{(2)} \triangleleft x_2^{(2)})g. \tag{2.28}$$

对于 x_1、$y_1 \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 和 x_2、$y_2 \in Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$；例如参见 [Kas95, 《第九章》]。

现在显然，Hopf 子代数 $S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O})) \bowtie S(\mathfrak{g}_{<0}^*) \cong (U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))\otimes U(\mathfrak{g}_{<0}))^*$。因此，我们有余代数同构 $DY_\hbar(\mathfrak{d}) \to H$，其定义如下：

$$x \otimes f \otimes y \mapsto x\sigma(y) \otimes f, \tag{2.29}$$

其中 $x \in U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]$、$y \in U(\mathfrak{g}_{<0})[\![\hbar]\!]$、$f \in S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O})) \bowtie S(\mathfrak{g}_{<0}^*) \cong (U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \otimes U(\mathfrak{g}_{<0}))^*$，并且$\sigma$：$U(\mathfrak{g}_{<0}) \to U(\mathfrak{g}_{<0})$ 是自然的反对合。这里需要注意，$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 的余乘法使用了 $U(\mathfrak{g}_{<0})$ 在 $S(\mathfrak{g}_{<0}^*)$ 上的右作用，因此余反使用相反作用，这与 $U(\mathrm{diag}(\mathfrak{g}_{<0})) \subseteq U(\mathrm{diag}(\mathfrak{g}(\mathcal{K})))$ 在 $S(\mathfrak{g}_{<0}^*) \subseteq S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O})) \bowtie S(\mathfrak{g}_{<0}^*)$ 上的左作用相一致；后者用于构造 H 的余乘法。

现在，$U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \bowtie U(\mathfrak{g}_{<0}) \cong U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$ 作为代数成立，因此余代数同构 $DY_\hbar(\mathfrak{d}) \to H$ 在 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$、$(U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \otimes U(\mathfrak{g}_{<0}))^* \subseteq H$ 上也是代数同构。接下来只需对应混合乘法。但由于这些乘法是利用 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$ 在 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$ 和 $U(\mathfrak{g}_{<0})$ 上的作用定义的，而这等价地由 $U(\mathrm{diag}(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$ 在 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \times \mathfrak{g}_{<0})$ 上的作用来描述，因此我们得到，所定义的映射确实是霍普夫代数同构。唯一需要注意的是，$U(\mathfrak{g}_{<0}) \subseteq U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))$ 从左侧作用于 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$，因此在应用反对合 σ 后，我们得到 $U(\mathrm{diag}(\mathfrak{g}_{<0})) \subseteq U(\mathrm{diag}(\mathfrak{g}(\mathcal{K})))$ 在 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \subseteq U(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) \otimes U(\mathfrak{g}_{<0})$ 上的左作用。

□

2.2.3 $R(DY_\hbar)$ 的 $\mathfrak{d}$ 矩阵

作为一个霍普夫代数的双，$DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 是拟三角的，也就是说，它存在一个 R 矩阵。我们希望推导出这个 R 矩阵的显式公式。事实证明，它本质上是 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的谱 R 矩阵的非谱版本，该矩阵在 [AN24b] 中被证明为

$$R(z) = \exp(\hbar\gamma_{<,\mathrm{sing}}^{21}(z)) \exp(-\hbar\gamma_{<,\mathrm{sing}}(-z)) \in Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \otimes Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})(\!(z^{-1})\!). \tag{2.30}$$

这里，$\gamma_{<,\ \mathrm{sing}}(z)$ 是 $\frac{\sum_{a=1}^d I_\alpha \otimes I^\alpha}{t_1 - z - t_2}$ 在 $z = \infty$ 中的泰勒展开，即

$$\gamma_{<,\mathrm{sing}}(z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^i \binom{i+j}{i} \frac{I_{a,i} \otimes I_j^a}{z^{i+j+1}}. \tag{2.31}$$

代数 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$ 是由 $\mathfrak{d}[t]$ 生成的 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的稠密 Hopf 子代数。下文中，我们用 $DY^\circ(\mathfrak{d})$ 表示由 $\mathfrak{d}[t,t^{-1}]$ 生成的 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的稠密 Hopf 子代数。

定理 2.5。 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的 R-矩阵为

$$R = \exp(\hbar\gamma_<^{21})\exp(-\hbar\gamma_<) \in Y_\hbar(\mathfrak{d})\widehat{\otimes}Y_\hbar^*(\mathfrak{d}), \tag{2.32}$$

其中 $\gamma_<$ 在 (2.9) 中定义。特别地，我们有

1. 对所有 $x \in DY_\hbar(\mathfrak{d})$， $R\Delta_\hbar^\gamma(x)R^{-1} = \Delta^{\gamma,\ {}^{\mathrm{op}}}_{\hbar}(x)$；
2. $(\Delta_\hbar^\gamma \otimes 1)R = R^{13}R^{23}$ 和 $(1\otimes\Delta_\hbar^\gamma)R = R^{13}R^{12}$；
3. $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$。

证明。对于 $x \in \mathfrak{g}(\mathcal{K})$，我们有

$$\Delta_\hbar^\gamma(x) = \exp(\hbar\gamma_<)(x\otimes 1 + 1\otimes x)\exp(-\hbar\gamma_<), \tag{2.33}$$

因此显然 $\Delta^{\gamma,\ {}^{\mathrm{op}}}_{\hbar}(x) = R\Delta_\hbar^\gamma(x)R^{-1}$ 成立。同理，我们得到关于 $x \in \mathfrak{g}_{<0}$ 的结果。

另一方面，注意到对于所有 $x, y \in \mathfrak{g}(\mathcal{K})$，我们有

$$e^{\hbar y}e^{\hbar x} = e^{\hbar x}e^{-\hbar\mathrm{ad}(x)}e^{\hbar y} = e^{\hbar\mathrm{ad}(y)}e^{\hbar x}e^{\hbar y}. \tag{2.34}$$

成立。此外，映射

$$U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!]\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!] \to \mathrm{End}(U(\mathfrak{g}(\mathcal{K}))[\![\hbar]\!]), \qquad a\otimes f \to \langle f, -\rangle a \tag{2.35}$$

将 $\exp(\hbar\gamma_<)$ 映射为投影 $a \mapsto a_{\geq 0}$ 的自然映射 $U(\mathfrak{g}(\mathcal{K})) \to U(\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$。类似地，$\exp(\hbar\gamma_<^{21})$ 被视为自然映射 $a \mapsto a_{<0}$。利用这一点，以及形式为 (2.35) 的映射与乘积的相容性（见 [AN24b，引理 3.4.]），可得

$$\begin{aligned}\langle R\Delta_\hbar^\gamma(f)R^{-1}, e^{\hbar x}\otimes e^{\hbar y}\rangle &= \langle (e^{-\hbar\mathrm{ad}(y_{\geq 0})}\otimes e^{\hbar\mathrm{ad}(x_{<0})})\Delta_\hbar^\gamma(f), e^{\hbar x}\otimes e^{\hbar y}\rangle \\ &= \langle \Delta_\hbar^\gamma(f), e^{\hbar\mathrm{ad}(y_{\geq 0})}e^{\hbar x}\otimes e^{-\hbar\mathrm{ad}(x_{<0})}e^{\hbar y}\rangle.\end{aligned} \tag{2.36}$$

对于 $x, y \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ 和 $x, y \in \mathfrak{g}_{<0}$，最后一个恒等式等于

$$\langle f, e^{\hbar y}e^{\hbar x}\rangle = \langle \Delta_\hbar^{\gamma,\mathrm{op}}(f), e^{\hbar x}\otimes e^{\hbar y}\rangle \tag{2.37}$$

考虑到 (2.34)。由于 $R\Delta_\hbar^\gamma(f)R^{-1} \in S(\mathfrak{g}_{<0}^*)[\![\hbar]\!]\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathfrak{g}_{<0}^*)[\![\hbar]\!]$ 和 $R\Delta_\hbar^\gamma(f)R^{-1} \in S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]$ 分别对 $f \in S(\mathfrak{g}_{<0}^*)[\![\hbar]\!]$ 和 $f \in S(\mathfrak{g}^*(\mathcal{O}))[\![\hbar]\!]$ 成立，因此我们可以推得 $R\Delta_\hbar^\gamma(f)R^{-1} = \Delta^{\gamma,\ {}^{\mathrm{op}}}_{\hbar}(f)$ 在这两种情况下均成立。

余循环条件由 [AN24b 中 exp($\hbar\gamma_{<0}$) 对应的恒等式推出，引理 3.6.2.]。Yang-Baxter 方程 3. 由余循环条件推出。 □

2.2.4 范畴态算符对应

回顾一下，范畴 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$–Mod 是幺半范畴 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$–Mod 的 Drinfeld 中心。Drinfeld 中心中的对象由一对 (M, c) 给出，其中 M 是 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的一个模，而 c 是一个函子同构

$$c\colon N \otimes M \xrightarrow{\cong} M \otimes N, \qquad \forall N, \tag{2.38}$$

称为半编织。

我们还回顾一下，对于任意光滑对象 $M \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$–Mod，亚纯谱$R$-矩阵给出了一个函子同构

$$c(z)\colon N \otimes \tau_z(M) \xrightarrow{\cong} \tau_z(M) \otimes N, \qquad \forall N. \tag{2.39}$$

因此，对于 $z \neq 0$，对 $(\tau_z(M)\ c(z))$ 给出 Drinfeld 中心中对象的一个单参数族，进而给出 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的模的一个单参数族。要指定这个模，我们需要指定 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 的作用。下面的结论显然成立。

引理 2.6. 设 M 是 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的一个光滑模。公式

$$x * \tau_z(m) = \langle R(z)(1 \otimes m), x \otimes 1\rangle \tag{2.40}$$

定义了 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 在 $M[z, z^{-1}]$上的作用。

证明。显然，由于 M的光滑性，这是定义良好的。该作用定义了一个代数作用这一事实，可由与余伪三角结构 [EK96]中相同的论证得到。

□

根据 [EGNO16，第 7.14], 节， $R(z)$的余循环条件意味着 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$和 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$的作用可以合并为 $DY_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$在 $M[z, z^{-1}]$上的作用。这里， $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{d})$是由注 2.2 中的 $\mathfrak{d}[t]$ 生成的稠密霍普夫子代数，而其双 $DY_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$是 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$中由 $\mathfrak{d}[t, t^{-1}]$生成的稠密霍普夫子代数。这定义了一个从 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$的光滑模到 $DY_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$的模的函子。我们将此函子称为 $\mathcal{Y}(-, z)$。

命题 2.7. 存在一个 Hopf 代数之间的映射

$$DY_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \longrightarrow Y_\hbar(\mathfrak{d})(\!(z^{-1})\!), \tag{2.41}$$

使得 $\mathcal{Y}(-, z)$ 是沿该代数映射的限制函子。

证明。映射 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} \longrightarrow Y_\hbar(\mathfrak{d})((z^{-1}))$ 由下式给出

$$x \mapsto \langle R(z), x \otimes 1\rangle \in Y_\hbar(\mathfrak{d})((z^{-1})). \tag{2.42}$$

映射 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \longrightarrow Y_\hbar(\mathfrak{d})((z^{-1}))$ 由 τ_z 给出。它们组合成从 $DY_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$ 出发的霍普夫代数映射这一事实，也可由 $R(z)$ 的余循环条件推出。

□

注 2.8。上述代数同态可以显式描述。具体而言，在拓扑生成 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的 $\mathfrak{d}[t,t^{-1}] \subseteq DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 上，该映射由自然的幂级数展开确定

$$x_n \mapsto \begin{cases} (t+z)^n x = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} t^m z^{m-n} x \in \mathfrak{d}[t,z] \subseteq \mathfrak{d}[t]((z^{-1})) & \text{if } n \geq 0; \\ \sum_{m=-n-1}^\infty \binom{m-n-1}{m} (-1)^m \frac{t^m}{z^{m-n}} x \in \mathfrak{d}[t][\![z^{-1}]\!] \subseteq \mathfrak{d}[t]((z^{-1})) & \text{if } n < 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

确实，对于 $n \geq 0$，这正是 τ_z 的定义。另一方面，对于 $n < 0$，这可由$R(z) = \exp(\hbar\gamma_{<,\,\mathrm{sing}}^{21}(z))\exp(-\hbar\gamma_{<,\,\mathrm{sing}}(-z)) \in 1 + \hbar\gamma_{\mathrm{sing}}(z) + \hbar^2\mathfrak{d}(\mathcal{K})^2 Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 得出，其中

$$\gamma_{\mathrm{sing}}(z) = \sum_{i,j=0}^\infty (-1)^i \binom{i+j}{i} \frac{I_{a,i} \otimes I_j^a + I_i^a \otimes I_{a,j}}{z^{i+j+1}}. \tag{2.44}$$

我们来谈谈 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$–$\mathbf{Mod}^{\mathrm{sm}}$ 上的结构。它是光滑模构成的范畴，也就是说，对于其中的任意元素，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $t^N\mathfrak{d}$ 对所有$N \geq n$都平凡作用。将函子 $\mathcal{Y}(-,z)$ 与显然的函子结合起来

$$DY_\hbar^\circ(\mathfrak{d})\text{–Mod} \longrightarrow \mathrm{End}(Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})\text{–Mod}), \tag{2.45}$$

我们得到一个同名的函子

$$\mathcal{Y}(-,z) : Y_\hbar(\mathfrak{d})\text{–Mod}^{\mathrm{sm}} \longrightarrow \mathrm{End}(Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})\text{–Mod}). \tag{2.46}$$

这是一个依赖于 z 的函子，满足

$$\mathcal{Y}(M,z)\mathcal{Y}(N,w)P \cong \mathcal{Y}(\mathcal{Y}(M,z-w)N,w)P, \qquad \mathcal{Y}(M,z)N \cong \tau_z\mathcal{Y}(N,-z)M. \tag{2.47}$$

这些是算子乘积展开的范畴类比。我们看到，$Y_\hbar(\mathfrak{d})$–$\mathbf{Mod}^{\mathrm{sm}}$ 是顶点代数的一种范畴类比，尽管其算子乘积展开是正则的。与普通顶点代数不同，在范畴情形中，局部性由额外的数据（即编织和结合律）构成，而非一个条件。这些数据被打包在如下表述中：$\mathcal{Y}(-,z)$是一个依赖于 z的幺半函子，其定义域为

$Y_\hbar(\mathfrak{d})$–模^{sm} 到 $\mathcal{Z}(Y_\hbar(\mathfrak{d})$–模$^{\mathrm{sm}})$。

注 2.9. 上文中，我们使用了由 $\mathfrak{d}[t]$ 生成的稠密霍普夫子代数 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{d})$。我们可以避免这样做，改用形式 Laurent 级数 $M((z))$ 替代 $M[z,z^{-1}]$。这样便可使其承载 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的作用，因为 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ $^{\text{co-op}} \to Y_\hbar(\mathfrak{d})((z^{-1}))$ 的像属于 $Y_\hbar(\mathfrak{d})[z,z^{-1}]$。这使得 $\mathcal{Y}(M,z)$ 更接近顶点代数中的态-算符对应。

2.3 中心扩张

2.3.1 经典中心扩张

现在我们希望研究 $\mathfrak{d}(\mathcal{K})$ 的中心扩张，这与仿射 Kac-Moody 代数类似。在 $\mathfrak{d}$ 上有两个自然的不变双线性形式： $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 的典范配对 κ_0，将其延拓到 $\mathfrak{d}$ 上并在其余部分取零后得到的双线性形式；以及 $\mathfrak{d}$ 的 Killing 型。后者是退化的，并且等于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 $\kappa_\mathfrak{g}$ 延拓为零后的两倍。因此，对任意 $\ell \in \mathbb{C}$，我们都可以考虑非退化不变双线性形式 $\kappa_\ell := \kappa_0 + \ell\kappa_\mathfrak{g}$。利用这一形式，我们按通常方式定义中心扩张 $\widehat{\mathfrak{d}}_\ell = \mathfrak{d}(\mathcal{K}) \oplus \mathbb{C}c_\ell$，如下所示:

$$[xt^n, yt^m] = [x,y]t^{n+m} + n\delta_{n+m,0}\kappa_\ell(x,y)c_\ell \tag{2.48}$$

对于 x、$y \in \mathfrak{d}$ 和 n、$m \in \mathbb{Z}$。

类似地，李代数 $\mathfrak{d}(\mathcal{K})$ 也有两个自然导子。我们已经用过通常的时间导子 ∂_t。另一个导子记为 ∂_ϵ，其定义如下:

$$\partial_\epsilon(xt^n) = \partial_t(\psi(x)t^n) = n\psi(x)t^{n-1}, \qquad \partial_\epsilon f t^n = 0 \tag{2.49}$$

对于 $x \in \mathfrak{g}$、$f \in \mathfrak{g}^*$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。这里，ψ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ 是由 Killing 型 $\kappa_\mathfrak{g}$ 诱导的自然映射，即对所有 x、$y \in \mathfrak{g}$，它定义为 $\kappa_0(\psi(x)\ y) = \kappa_\mathfrak{g}(x,y)$。请注意以下结论。

引理 2.10。$(\mathfrak{d}(\mathcal{K})\ \delta^\gamma)$ 的典范导数为 $2\partial_\epsilon$。

证明。李双代数 $(\mathfrak{d}(\mathcal{K})\ \delta^\gamma)$ 的典范导子为

$$\begin{aligned}
([,]\circ\delta)(xt^n) &= [,]\circ\left[xt_1^n\otimes 1 + 1\otimes xt_2^n, \frac{C_\mathfrak{d}}{t_1-t_2}\right] = [,]\circ\left[1\otimes\frac{xt_2^n - xt_1^n}{t_1-t_2}, C_\mathfrak{d}\right] \\
&= \sum_{a=1}^d \left(\left[I_\alpha, \left[I^\alpha, \frac{xt_1^n - xt_2^n}{t_1-t_2}\right]\right] + \left[I^\alpha, \left[I_\alpha, \frac{xt_1^n - xt_2^n}{t_1-t_2}\right]\right]\right)\Big|_{t_1=t_2=t} \\
&= \sum_{a=1}^d \left(\left[I_\alpha, \left[I^\alpha, nxt^{n-1}\right]\right] + \left[I^\alpha, \left[I_\alpha, nxt^{n-1}\right]\right]\right)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

对所有 $x \in \mathfrak{d}(\mathcal{K})$ 和 $n \in \mathbb{Z}$ 均成立。现在，只需注意到

$$\sum_{a=1}^{d} \kappa_0([I_\alpha,[I^\alpha,I_b]]+[I^\alpha,[I_\alpha,I_b]],I_c) = \sum_{a,a'=1}^{d} \left(f_{ac}^{a'} f_{a'b}^{a} + f_{a'c}^{a} f_{ab}^{a'} \right) = 2\kappa_{\mathfrak{g}}(I_b,I_c) \tag{2.51}$$

这里，我们写作 $[I_\alpha,I_b] = \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^{c} I_c$，因此 $[I^\alpha,I_b] = \sum_{c=1}^{d} f_{bc}^{a} I^c$，并使用 Killing 型的坐标公式 $\kappa_{\mathfrak{g}}(I_b,I_c) = \sum_{a,\ a'=1}^{d} f_{ba}^{a'} f_{ca'}^{a}$。 □

不难看出，∂_t 和 ∂_ϵ 都可通过在 c_ℓ上作用为零，扩张为扩张 $\widehat{\mathfrak{d}}_\ell$ 的导子。记 $\partial_s \coloneqq \partial_t + s\partial_\epsilon$ 为 $s \in \mathbb{C}$。我们得到与 $\mathfrak{d}$相关的以下二参数仿射 Kac-Moody 代数族:

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,s} \coloneqq \mathbb{C}\partial_s \ltimes \widehat{\mathfrak{d}}_\ell. \tag{2.52}$$

引理 2.11. 配对 $\kappa_{\ell-s}$ 可扩张为 $\mathfrak{d}_{\ell,\ s}$ 上的对称非退化不变双线性形式$\sim\beta_{\ell-s}$，其定义为 $\beta_{\ell-s}(xt^n, yt^m) = \delta_{n+m,\ -1}\kappa_{\ell-s}(x,y)$，其中 x、$y \in \mathfrak{d}$ 和 m、$n \in \mathbb{Z}$，以及

$$\beta_{\ell-s}(c_\ell,\partial_s) = 1, \beta_{\ell-s}(\partial_s,\partial_s) = 0 = \beta_{\ell-s}(c_\ell,c_\ell), \tag{2.53}$$

以及 $\mathfrak{d}(\mathcal{K})^\perp = \mathbb{C}\partial_s \oplus \mathbb{C}c_\ell$

~证明。显然，给定的规则在 $\mathfrak{d}$上定义了良定的非退化对称双线性形式。我们只需检验其不变性。尚未给出不变性的表达式只有以下形式:

$$\begin{aligned} &\beta_{\ell-s}([\partial_s, xt^n], yt^{-n}) = \beta_{\ell-s}(\partial_s(xt^n), yt^{-n}) = n\kappa_{\ell-s}(x + s\psi(x), y) \\ &= ns\kappa_0(\psi(x),y) + n(\ell-s)\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y) = n\ell\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y) \end{aligned} \tag{2.54}$$

对于 x、$y \in \mathfrak{g}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。也就是说，不变性的一致性现在成立，这是因为

$$\beta_{\ell-s}(\partial_s,[xt^n,yt^{-n}]) = \beta_{\ell-s}(\partial_s,c_\ell)n\kappa_\ell(x,y) = n\kappa_\ell(x,y) = n\ell\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y). \tag{2.55}$$

证明至此完成。 □

~李代数 $\mathfrak{d}_{\ell,\ s}$ 有两个互补的拉格朗日李子代数

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,s,<0} \coloneqq t^{-1}\mathfrak{d}[t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c_\ell, \qquad \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,s,\geq 0} \coloneqq \mathbb{C}\partial_s \ltimes \mathfrak{d}[\![t]\!], \tag{2.56}$$

因此，对于每一对 $(\ell,s) \in \mathbb{C}^2$，我们都在 $\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,s}$ 上得到一个李双代数结构。

2.3.2 中心扩张的量子化

现在我们考虑如何量子化 (2.56) 中的李双代数结构。遗憾的是，我们的量子化策略无法应用于任意的 (ℓ, s)，因为双线性形式 $\kappa_{\ell-s}$ 不等于 $\mathfrak{d}(\mathcal{K})$ 上原有的双线性形式。不过，下面我们将概述 $\ell = s$ 的一种量子化方案。这已足够，因为在其他情况下，量子化与余切双 Yangian 的中心扩张并无直接关联。

记 $\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\ <0} := \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\ \ell,\ <0}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\ \geq 0} := \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\ \ell,\ \geq 0}$，以及 $\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell} := \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\ \ell}$。我们可以通过两种方式将 $Y^*_{\hbar}(\mathfrak{d})$ 的构造调整到中心扩张的情形。一种方式与[EK98a], 中的工作类似：我们在那里找到了 ∂_ϵ 的量子化，并手动定义了 $Y^*_{\hbar}(\mathfrak{d})$ 的本原中心扩张。我们将采用另一种方法，它同样使用双商量子化的思路。我们将在下一节证明，这两种方法得到的结果相同。

考虑通常的仿射 Kac-Moody 代数

$$\widetilde{\mathfrak{g}} := \mathbb{C}\partial_t \ltimes (\mathfrak{g}(\mathcal{K}) \oplus \mathbb{C}c_\epsilon) \tag{2.57}$$

其括号定义如下

$$[xt^n, yt^m] = [x, y]t^{n+m} + n\delta_{m+n,0}\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)c_\epsilon, \tag{2.58}$$

对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$ 和 $n, m \in \mathbb{Z}$ 均成立。令 $T^*\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}} \ltimes \widetilde{\mathfrak{g}}^*$ 为与 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 相关联的余切李代数。容易看出，$T^*\widetilde{\mathfrak{g}}$ 同构于以下半直积

$$(\mathbb{C}\partial_t \oplus \mathbb{C}\partial_\epsilon) \ltimes (\mathfrak{d}(\mathcal{K}) \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}c_\epsilon), \tag{2.59}$$

其中 c_t 和 ∂_ϵ 分别与 ∂_t 和 c_ϵ 对偶，而唯一新增的交换关系由

$$[xt^n, ft^m] = [x, f]t^{m+n} + n\delta_{m+n,0}\kappa_0(x, f)c_t \tag{2.60}$$

$x \in \mathfrak{g}$、$y \in \mathfrak{g}^*$ 和 n、$m \in \mathbb{Z}$确定。

特别地，李代数 $\widetilde{\mathfrak{d}}_\ell$ 是 $T^*\widetilde{\mathfrak{g}}$的一个子代数的商。具体而言，我们有

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_\ell \cong \left(\mathbb{C}(\partial_t + \ell\partial_\epsilon) \ltimes (\mathfrak{d}(\mathcal{K}) \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}c_\epsilon)\right) / \mathbb{C}(\ell c_t - c_\epsilon) \tag{2.61}$$

注意，$\mathbb{C}(\ell c_t - c_\epsilon)$ 是双线性形式 κ_0 在所考虑的子代数上的限制的核。

由该分解

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = (\mathbb{C}\partial_t \ltimes \mathfrak{g}(\mathcal{O})) \bigoplus (\mathfrak{g}_{<0} \oplus \mathbb{C}c_\epsilon), \tag{2.62}$$

我们得到一个拉格朗日分裂

$$T^*\widetilde{\mathfrak{g}} = \underbrace{((\mathbb{C}\partial_t \oplus \mathbb{C}\partial_\epsilon) \ltimes \mathfrak{d}(\mathcal{O}))}_{=N^*\widetilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}} \bigoplus \underbrace{(\mathfrak{d}_{<0} \oplus \mathbb{C}c_\epsilon \oplus \mathbb{C}c_t)}_{=N^*\widetilde{\mathfrak{g}}_{<0}}. \tag{2.63}$$

在此，我们将第一个因子与 $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ 的余法丛 $N^*\widetilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ 识别：$= \mathbb{C}\partial_t \ltimes \mathfrak{g}(\mathcal{O})$，并将第二个因子与 $\widetilde{\mathfrak{g}}_{<0}$ 的余法丛 $N^*\widetilde{\mathfrak{g}}_{<0}$ 识别：$= \mathfrak{g}_{<0} \oplus \mathbb{C}c_\epsilon$。李代数分解的一般量子化方案给出量子群

$$U_\hbar(N^*(\widetilde{\mathfrak{g}}_{<0})) \quad \text{and} \quad U_\hbar(N^*(\widetilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0})), \tag{2.64}$$

它们彼此对偶，此外还有双 $U_\hbar(T^*\widetilde{\mathfrak{g}})$，这是一个拟三角 Hopf 代数，并且与 $DU(\widetilde{\mathfrak{g}})[\![\hbar]\!]$ 扭曲等价。

L引理 2.12。与 c_t 的配对与 $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$ 上由下式给出的线性函数一致

$$U(\widetilde{\mathfrak{g}}) = \mathbb{C}[\partial_t] \ltimes U(\widehat{\mathfrak{g}}) \to \mathbb{C}[\partial_t] \to \mathbb{C} \tag{2.65}$$

*send*将 ∂_t 映射到 1，并将 ∂_t^n 映射到 0。因此， c_t 和 c_ϵ 在 $U_\hbar(T^*\widetilde{\mathfrak{g}}$ 中都是中心的和原始的$)$.

特别地，我们可以考虑商 $U_\hbar(T^*\widetilde{\mathfrak{g}})/(\ell c_t - c_\epsilon)$，并取由 $\mathfrak{d}(\mathcal{O})$ c_t、以及 $\partial_t + \ell\partial_\epsilon$ 生成的子代数。于是，这个 Hopf 子代数是 $\mathfrak{d}_\ell$ 的量子化。我们将这个 Hopf 代数记为 $DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})$。类似地，还有 Hopf 子代数 $U_\hbar(\mathfrak{d}_{\ell,\ <0})$ 和 $U_\hbar(\mathfrak{d}_{\ell,\ \geq 0})$，记作

$$\widehat{Y}^*_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) \coloneqq U_\hbar(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,<0}) \quad \text{and} \quad \widetilde{Y}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) \coloneqq U_\hbar(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\geq 0}). \tag{2.66}$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$不难看出，$Y^*_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) \cong Y^*_\hbar(\mathfrak{d}) \otimes \mathbb{C}[c_\ell]$ 是一个中心扩张，$Y_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) \cong \mathbb{C}[\partial_\ell] \ltimes Y_\hbar(\mathfrak{d})$,$\widetilde{\ \ }$而 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 是 $Y^*_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 的双。我们还记作

$$\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) = Y_\hbar(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} \widehat{Y}^*_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} \subset \widetilde{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}), \tag{2.67}$$

它是 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的一个子代数和中心扩张。

2.3.3 另一种量子化以及 R-矩阵的扩张

在 [EK98a], 中，中心扩张的另一种构造基于一个显式公式。具体来说，我们寻找 ∂_ℓ 的原始量子化，并用同一个符号表示它，然后通过规定 c_ℓ 是原始的，在代数 $Y^*_\hbar(\mathfrak{d}) \otimes \mathbb{C}[c_\ell]$ 上定义余乘

$$\widetilde{\Delta}^{\gamma,op}_\hbar(x) = \exp\left(\hbar(c_\ell \otimes \partial_\ell - \partial_\ell \otimes c_\ell)/2\right) \Delta^{\gamma,op}_\hbar(x), \qquad \forall x \in Y^*_\hbar(\mathfrak{d}) \tag{2.68}$$

h成立。要应用这一点，我们首先需要找到 ∂_ℓ 的量子化。以下显而易见 .

引理 2.13. 令 ∂_ϵ 为 $U_\hbar(N^*\widetilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}) = (Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \otimes \mathbb{C}[c_\epsilon, c_t])^*$ 中定义的元素：

$$\langle \partial_\epsilon, x c_\epsilon^n c_t^m \rangle = \delta_{m0}\delta_{n1}\epsilon(x), \qquad x \in Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \otimes \mathbb{C}[c_\epsilon, c_t]. \tag{2.69}$$

那么， ∂_ϵ 是第 2.3.1 节中导子的一个量子化，该导子也记作 ∂_ϵ。此外，它满足 $S^2 = \exp(\hbar \operatorname{ad}(\partial_\epsilon))$。

证明. ∂_ϵ 定义良好，且对第 2.3.1 节中同名元素进行量子化，这一点显而易见。现在， $S^2 = \exp(\hbar \operatorname{ad}(\partial_\epsilon))$可由以下事实推出：$2\operatorname{ad}(\partial_\epsilon)$是$(\widetilde{\mathfrak{d}}_\ell, \widetilde{\delta}^\gamma)$的典范导数。事实上， S^2 是由一个类群元定义的内自同构（参见 [Dri90]），它保持 ϵ 和 $\hbar$分次，因此它是关于一个对称次数为一、次数为零的元素的伴随作用的指数，而 $S^2 = 1 + \hbar\operatorname{ad}(\partial_\epsilon) + \hbar^2(\dots)$成立，这是因为$2\operatorname{ad}(\partial_\epsilon)$是典范导数；参见 [Dri86]。

□

因此，导子 $\partial_t + \ell\partial_\epsilon$ 提供了 ∂_ℓ的量子化。

推论 2.14. 第 2.3.2 节的量子化与方程 (2.68) 的量子化等价。

这一等价关系的另一个推论如下。

~ ‾‾推论 2.15. 设 R 为$DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$的 R-矩阵，并设 R 为 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$的 R-矩阵，它‾‾可以视为$DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})^{\otimes 2}$中的一个元素。那么

$$\widetilde{R} = \exp(\hbar\partial_\ell \otimes c_\ell/2) R \exp(\hbar\partial_\ell \otimes c_\ell/2). \tag{2.70}$$

3 谱 R-矩阵与因子化

根据 [EK96], ，带有谱参数 $\mathbb{C}^\times$ 的霍普夫代数 H 的谱 R 矩阵 $R(z)$ 会在 $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ 上诱导出 H^* 上的局部 Hopf 代数因子化结构。余切 Yangian$Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 存在这样的 R 矩阵；我们在第 2 节中明确构造了 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的对偶与双。在本节中，我们研究由 $R(z)$ 诱导的 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 上的因子化结构。我们证明，与单李代数的杨氏子的对偶不同，余切 Yangian$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 的对偶可以在 Beilinson-Drinfeld [BD25], 的意义下构造成 $\mathbb{P}^1$ 上的相干因子化代数，而且这一因子化结构与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 的余代数结构相容。我们还证明，在由互异点构成的构形空间上，这一结构将 [EK96] 的 Hopf 代数因子化结构全局化。本节重点讨论加法代数群 $\mathbb{C}$ 在无穷远点处的完备化 $X = \mathbb{P}^1$ 上的因子化，但也可以考虑以其他一维代数群代替 $\mathbb{C}$。

本节结构如下。第 3.1 节回顾与谱 R 矩阵相关的 [EK96] 因子化结构，以及它对我们的中心扩张的对偶余切杨扬子代数的意义。第 3.2 节中，我们利用李代数层及其局部截面构造同一因子化结构。第 3.3 节中，我们构造全局相干版本，使其成为具有相容余乘的真正因子化代数。

3.1 与对偶余切 Yangian 相关的局部因子化

如第 2.2.3 节中已经提到的， [AN24b] 证明了 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$，或者更准确地说，由 $\mathfrak{d}[t]$生成的稠密霍普夫子代数 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 按照 [Dri86],的意义是伪三角的，即它具有一个谱 R-矩阵 $R(z) \in (Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \otimes Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}))((z^{-1}))$，使得

(T1) $R(z)(\tau_z \otimes 1)\Delta_\hbar^\gamma(a) = ((\tau_z \otimes 1)\Delta^{\gamma,\ {}^{\mathrm{op}}}_{\hbar}(a))R(z)$ 对所有 $a \in Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$成立；

(T2) $(\Delta^\gamma_{\hbar,\ z_1} \otimes 1)R(z_2) = R^{13}(z_1+z_2)R^{23}(z_2)$，且 $(1 \otimes \Delta^\gamma_{\hbar,\ z_2})R(z_1+z_2) = R^{13}(z_1+z_2)R^{12}(z_2)$ 对于$\Delta^\gamma_{\hbar,\ z} := (\tau_z \otimes 1)\Delta^\gamma_\hbar$；

(T3) $(\tau_{z_1} \otimes \tau_{z_2})R(z_3) = R(z_3 + z_1 - z_2)$;
(T4) $(\varepsilon \otimes 1)R(z) = 1 = (1 \otimes \varepsilon)R(z)$

这里，我们记 $\tau_z = e^{z\partial_t}$: $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \to Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})[\![z]\!]$，表示形式平移 $t \mapsto t+z$。

公理 (T1)-(T4) 对偶化为 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-双线性形式的以下性质

$$B\colon Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \to \mathbb{C}(\!(z)\!)[\![\hbar]\!], \qquad B(a\otimes b) := \langle a \otimes b, R(z)\rangle \tag{3.1}$$

以及对于 $a,b,c \in Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$:
(C1) $\nabla_\hbar^\gamma\big((\tau_z\otimes 1)B^{13}(\Delta_\hbar^\gamma(a) \otimes \Delta_\hbar^\gamma(b))\big) = \nabla^{\gamma,\ {}^{\mathrm{op}}}_{,\hbar}\big((\tau_z\otimes 1)B^{24}(\Delta_\hbar^\gamma(a) \otimes \Delta_\hbar^\gamma(b))\big)$;
(C2) $B(ab,c) = B(a\otimes b, \Delta_\hbar^\gamma(c))$ 和 $B(a,bc) = B(\Delta^{\gamma,\ {}^{\mathrm{op}}}_{,\hbar}(a)\ b\otimes c)$; (C3) $B(\tau_{z_1}(a)\ \tau_{z_2}(b))(z) = B(a,b)(z_1+z-z_2)$; (C4) $B(1,a) = \varepsilon(a) = B(a,1)$.

在 [EK96], 中，配备满足 (C1)-(C4) 的配对 B 的霍普夫代数称为余伪三角的。特别地， $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 在此意义下是余伪三角的。余伪三角性本质上是 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 之间依赖谱参数 z 的Hopf配对。注意， B 的陪域实际上是 $\mathbb{C}[z,z^{-1}][\![\hbar]\!]$，因此可以在 $z \in \mathbb{C}^\times$ 上对其求值。

在 [EK96], 中，作者证明余伪三角结构使得能够在曲线上的有限点集上，为 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 定义一个规范的局部分解霍普夫代数结构（在

我们的情形中为 $\mathbb{C} = X \setminus \{\infty\}$）。更准确地说，对于由集合 I 标记的有限点集 $\mathbf{z} = \{z_i\}_{i\in I}$ indexd $\mathbb{C}$，可以考虑张量积余代数

$$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}} := Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op},\otimes|I|} = \bigotimes_{i\in I} Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_i}^{\text{co-op}}, \tag{3.2}$$

并通过规定每个 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 都是一个 Hopf 子代数，在其上诱导一个代数结构，使得 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_i}$ 与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_j}$ 之间的交换关系由带有 $z = z_i - z_j$ 的 (C1) 定义。注意，这是良定义的，因为 B 实际上取值于 $\mathbb{C}[(z_i - z_j)^{\pm}]$，而不是形式级数。

更准确地说，我们可以引入

$$X_L, X_R \colon Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \to (Y_\hbar^*(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} Y_\hbar^*(\mathfrak{d}))(\!(z)\!) \tag{3.3}$$

定义为

$$\begin{aligned} X_L(a\otimes b) &:= B^{13}(\Delta_\hbar^\gamma(a)\otimes\Delta_\hbar^\gamma(b)) = \langle \Delta_\hbar^\gamma(a)\otimes\Delta_\hbar^\gamma(b), R(z)^{13}\rangle \\ X_R(a\otimes b) &:= B^{24}(\Delta_\hbar^\gamma(a)\otimes\Delta_\hbar^\gamma(b)) = \langle \Delta_\hbar^\gamma(a)\otimes\Delta_\hbar^\gamma(b), R(z)^{24}\rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

于是，$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$被定义为由 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_i}^{\text{co-op}}$生成、其关系由$X_{L,ij} = X_{R,ij}^{21}$ 给出的自由 Hopf 代数，其中每一对 i、$j \in I$均满足这些关系。

这些交换关系与余乘的一致性，是 B 为平移等变Hopf配对这一事实的结果。注意，余伪三角结构 B只是 Hopf 代数映射 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} \to Y_\hbar(\mathfrak{d})((z^{-1}))$ 与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 和 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的典范配对的复合；前一个映射是在第 2.2.4 节中构造的。如果我们使用完备 Yangian $Y_\hbar(\mathfrak{d})$，而不是稠密子代数 $Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})$，那么就可以对 z 求值，并通过在 $z \in \mathbb{C}^\times$ 处求值，将上述映射替换为一个映射$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_z^{\text{co-op}} \to Y_\hbar(\mathfrak{d})$。由 (C1) 定义的交换关系，与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_z^{\text{co-op}}$ 的像和双 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 内部的 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 之间的交换关系一致。特别地，我们有 Hopf 代数的嵌入 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_z^{\text{co-op}}$、$_0 \to DY_\hbar(\mathfrak{d})$。$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z\,0}^{\text{co-op}}$ 的 Hopf 代数结构及其平移等变性，决定了任意 $\mathbf{z}$ 下的 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$。

注意，该结构可扩展至中心扩张的对偶Yangian，因为我们可以通过 Hopf 代数映射 $\widehat{Y}_{\hbar,\ell}^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} \to Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$，将伪三角结构扩展到 $\widehat{Y}_{\hbar,\ell}^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$。我们将相应的局部分解 Hopf 代数记为 $\widehat{Y}_{\hbar,\ell}^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$。

3.2 李代数层的因子化

现在，我们使用一个李代数层构造相同的局部分解 Hopf 代数。更确切地说，令 $\mathcal{A} := \mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}(-1)$，它具有 $X = \mathbb{P}^1$ 上的李代数层结构。李代数结构来自 $\mathfrak{g}$ 上的李代数结构以及 $\mathcal{O}(-1)$ 上的（非含幺）代数结构。这个李代数层的一个重要性质是，它的

上同调是平凡的:

$$H^0(X,\mathcal{A}) = 0 = H^1(X,\mathcal{A}). \tag{3.5}$$

令 $\mathbf{z} = \{z_i\}_{i\in I}$ 为 X中的一个有限个互异点的集合，并令 $\mathbb{D}_{\mathbf{z}}$ 为 $\mathbf{z}$ 在 X 中的形式邻域， $\mathbb{D}^\circ_{\mathbf{z}}$ 为形式去心邻域。记

$$\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{\mathbf{z}} = \Gamma(\mathbb{D}^\circ_{\mathbf{z}},\mathcal{A}),\ \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{z}} = \Gamma(\mathbb{D}_{\mathbf{z}},\mathcal{A}),\ \mathcal{A}^{\mathrm{out}}_{\mathbf{z}} = \Gamma(X\setminus\mathbf{z},\mathcal{A}). \tag{3.6}$$

于是，(3.5) 意味着存在李代数的分解

$$\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{\mathbf{z}} = \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{z}} \oplus \mathcal{A}^{\mathrm{out}}_{\mathbf{z}}. \tag{3.7}$$

若 $\mathbf{z} = \{0\}$ 且我们选择 $X\setminus\{\infty\}$上的全局坐标 t，便可看到这恰好是决定余切 Yangian 的分解 $\mathfrak{g}(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \oplus t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$。另一方面，若 $\mathbf{z} = \{\infty\}$，则得到分解 $\mathfrak{g}((t^{-1})) = t^{-1}\mathfrak{g}[\![t^{-1}]\!] \oplus \mathfrak{g}[t]$。

为了继续我们的量子化方案，我们需要 $\mathcal{A}$的一个适当对偶。为此，令$\mathcal{A}^\vee := \mathfrak{g}^*\otimes\mathcal{O}(-1)$ 为 $\mathcal{A}$ 的 Serre 对偶。我们也可以类似地为 $\heartsuit\in\{\mathcal{K},\mathcal{O},\mathrm{out}\}$ 定义 $\mathcal{A}^\vee{}_{,\,\mathbf{z}}{}^{\heartsuit}$。存在一个自然的拓扑完美配对:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{\mathbf{z}}\otimes\mathcal{A}^{\vee,\mathcal{K}}_{\mathbf{z}}\to\mathbb{C},\qquad a\otimes f\mapsto\sum_i \mathrm{Res}_{z_i}\langle a,f\rangle. \tag{3.8}$$

留数公式表明，在此配对下，我们可以将其识别为

$$(\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{z}})^* = \mathcal{A}^{\vee,\mathrm{out}}_{\mathbf{z}}\quad\text{and}\quad(\mathcal{A}^{\mathrm{out}}_{\mathbf{z}})^* = \mathcal{A}^{\vee,\mathcal{O}}_{\mathbf{z}}. \tag{3.9}$$

现在我们可以定义霍普夫代数

$$\mathscr{Y}^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{\mathbf{z}} := U(\mathcal{A}^{\vee,\mathrm{out}}_{\mathbf{z}})[\![\hbar]\!]\ltimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathcal{A}^{\vee,\mathrm{out}}_{\mathbf{z}})[\![\hbar]\!], \tag{3.10}$$

其 Hopf 结构由分解 (3.7) 得出。现在我们证明，这在 $Y^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 上诱导出一个局部分解结构。

命题 3.1. 存在一个余代数同构

$$\mathscr{Y}^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{\mathbf{z}} \cong \bigotimes_i \mathscr{Y}^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{z_i}, \tag{3.11}$$

这使得 $\mathscr{Y}^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{\mathbf{z}}$ 成为 X 上的局部分解 Hopf 代数。

证明。存在如下分解

$$\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{A}_{z_i}^{\mathcal{O}}, \qquad \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\vee,\mathrm{out}} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{A}_{z_i}^{\vee,\mathrm{out}}, \tag{3.12}$$

其中，第一个分解是李代数的分解，第二个则是向量空间的分解。前者由 (3.5) 得出，后者类似地由 $H^0(X,\mathcal{A}^\vee) = 0 = H^1(X,\mathcal{A}^\vee)$ 得出。这些分解与方程 (3.8) 的配对相容，因此确定了一个 Hopf 代数的同构

$$S(\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\vee,\mathrm{out}})[\![\hbar]\!] \cong \bigotimes_{i\in I} S(\mathcal{A}_{z_i}^{\vee,\mathrm{out}})[\![\hbar]\!]. \tag{3.13}$$

类似地，我们有如下分解

$$\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\vee,\mathcal{O}} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{A}_{z_i}^{\vee,\mathcal{O}}, \qquad \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{out}} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{A}_{z_i}^{\mathrm{out}}, \tag{3.14}$$

其中，第二个并非李代数的分解，尽管每个单独的部分都是子代数。这给出了一个分解

$$U(\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{out}})[\![\hbar]\!] = \bigotimes_{i\in I} U(\mathcal{A}_{z_i}^{\mathrm{out}})[\![\hbar]\!], \tag{3.15}$$

其中每个部分都是子代数。此外，显然 $U(\mathcal{A}_{z_i}^{\mathrm{out}})[\![\hbar]\!]$ 稳定 $S(\mathcal{A}^{\vee,\ z_i\ \mathrm{out}})[\![\hbar]\!]$，因为映射 $U(\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\mathcal{O}}) \to U(\mathcal{A}_{z_i}^{\mathcal{O}})$ 是一个 $\mathcal{A}_{z_i}^{\mathrm{out}}$-模的映射。这意味着嵌入$S(\mathcal{A}^{\vee,\ z_i\ \mathrm{out}})[\![\hbar]\!] \to S(\mathcal{A}^{\vee,\ \mathbf{z}\ \mathrm{out}})[\![\hbar]\!]$ 保持了 $\mathcal{A}_{z_i}^{\mathrm{out}}$-代数结构。这给出了所需的向量空间同构。此外，每个 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_i}^{\text{co-op}}$ 都是子代数。

接下来只需证明这是对余代数的识别。对于 $S(\mathcal{A}^{\vee,\ \mathbf{z}\ \mathrm{out}})[\![\hbar]\!]$，这显然成立，因此只需考察 $U(\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{out}})[\![\hbar]\!]$ 的余乘。选取一个本原元 $x \in \mathcal{A}_{z_i}^{\mathrm{out}}$，我们知道余乘的定义满足

$$\Delta_\hbar^{\gamma,\mathrm{op}}(x) = 1\otimes x + \phi_\triangleright(x)^{\mathrm{op}}, \qquad \phi_\triangleright(x) \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{out}}[\![\hbar]\!] \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} S(\mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\vee,\mathrm{out}})[\![\hbar]\!]. \tag{3.16}$$

这里 $\phi_\triangleright(x)^{\mathrm{op}}$ 满足 $\langle \phi_\triangleright(x)^{\mathrm{op}}, e^{\hbar y}\rangle = e^{\hbar y} \triangleright x$ 对所有 $y \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}}^{\mathcal{O}}$ 都成立。然而，当 $y \in \mathcal{A}_{\mathbf{z}_j}^{\mathcal{O}}$ 对于 $j \neq i$ 时，$e^{\hbar y} \triangleright x = x$，因为因子 z_j 中的交换子属于 $U(\mathcal{A}_{z_j}^{\mathcal{O}})$。因此， $\Delta(x)$ 属于 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_i}^{\text{co-op}}$，并且在这个子代数中与余乘相识别。 □

利用 $\mathbb{C} = X \setminus \{\infty\}$ 中的平移 τ_z，可以证明对于所有 $z \neq \infty$， $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_z^{\text{co-op}}$ 与 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 同构，而 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_\infty^{\text{co-op}} = Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d})^{\mathrm{op}}$。因此可以推得，$\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{0\ \infty}^{\text{co-op}}$，无非是由 $\mathfrak{d}[z,z^{-1}]$ 生成的 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 的双的稠密子集；参见等式 (2.25)。

现在，我们将这一因子化与由伪三角结构诱导的因子化对应起来。

定理 3.2。局部分解 Hopf 代数 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$ 与第 3.1 节中定义的 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$ 一致。

证明。我们需要证明，$\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_i}^{\text{co-op}}$与 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{z_j}^{\text{co-op}}$的交换子由 $R(z_i - z_j)$诱导。为简单起见，我们可以假设 $\mathbf{z} = \{0, z\}$，其中 $z \in X \setminus \{\infty\}$。

让我们考虑 $\mathcal{A}_0^{\text{out}}$与 $\mathcal{A}_z^{\text{out}}$在 $\mathcal{A}_{0\,z,}^{\text{out}}$中的交换子。我们有如下李代数的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_z^{\text{out}} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{0,z}^{\text{out}} & \longleftarrow & \mathcal{A}_0^{\text{out}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_0^{\mathcal{O}} & \longrightarrow & \mathcal{A}_0^{\mathcal{K}} & \longleftarrow & \mathcal{A}_0^{\text{out}} \end{array} \tag{3.17}$$

其中向下的箭头是嵌入。因此，可以在 $\mathcal{A}_0^{\mathcal{K}}$中研究 $\mathcal{A}_0^{\text{out}}$与$\mathcal{A}_z^{\text{out}}$的交换关系。上面的第三个向下箭头是恒等映射，第一个向下箭头由在 0 处的泰勒展开给出。将其与公式 (2.43)比较可知，这个泰勒展开恰好是与 $R(z)$的配对。因此，$\mathcal{A}_z^{\text{out}}$与 $\mathcal{A}_0^{\text{out}}$之间的交换关系与以下过程得到的交换关系一致：通过 $R(z)$将 $\mathcal{A}_z^{\text{out}}$展开为 $\mathcal{A}_0^{\mathcal{O}}$，然后在 $DY_\hbar^*(\mathfrak{d})$中计算它们的交换关系；这又与由 $R(z)$诱导的局部分解结构一致。

现在考虑 $\mathcal{A}_z^{\text{out}}$与 $S(\mathcal{A}^{\vee}{}_{,0}^{\text{out}})$之间的交换关系。设 $x \in \mathcal{A}_z^{\text{out}}$与 $f \in S(\mathcal{A}^{\vee}{}_{,0}^{\text{out}})$。那么，这两个生成元在 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{0\,z}^{\text{co-op}}{}_{,}$中的交换关系为：

$$[x, f] = \sum_{(f)} \left(f^{(1)} B(f^{(2)}, x) + \sum_{j \in J} B(x_j, S(f^{(1)})) f^{(2)} h_j \right), \tag{3.18}$$

其中，我们记 $\Delta(x) = 1 \otimes x + \sum_{j \in J} x_j \otimes h_j$，其中 J 是某个指标集，$x_i \in \mathcal{A}_z^{\text{out}}$、$h_j \in S(\mathcal{A}^{\vee}{}_{,z}^{\text{out}})$是其中的元素。特别地，对于 $a \in \mathcal{A}_0^{\mathcal{O}}$和 $b \in \mathcal{A}_z^{\mathcal{O}}$，有

$$\langle [x, f], e^{\hbar b} \otimes e^{\hbar a} \rangle = \sum_{(f)} \left(\langle f^{(1)}, e^{\hbar a} \rangle B(f^{(2)}, x) + \sum_{j \in J} B(x_j, S(f^{(1)})) \langle f^{(2)}, e^{\hbar a} \rangle \langle h_j, e^{\hbar b} \rangle \right). \tag{3.19}$$

回顾一下，$x|_{\mathbb{D}_0} \coloneqq \langle 1 \otimes x, R(z) \rangle$是 x在 0 处的泰勒展开。采用这一记号，上式等于

$$\langle f, e^{\hbar a} x|_{\mathbb{D}_0} \rangle - \langle f, (e^{\hbar b}) \triangleright x|_{\mathbb{D}_0} e^{\hbar a} \rangle. \tag{3.20}$$

另一方面，在 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{0\,z}^{\text{co-op}}{}_{,}$中，我们有以下交换关系

$$\langle [x, f], e^{\hbar b} e^{\hbar a} \rangle = \langle f, e^{\hbar b} e^{\hbar a} \lhd_{0,z} x \rangle = \langle f, e^{\hbar b} [e^{\hbar a}, x]) \rangle + \langle f, e^{\hbar b} \lhd_{0,z} x e^{\hbar a} \rangle, \tag{3.21}$$

其中 $\lhd_{0,\,z}$是利用分解 $\mathcal{A}_{0,\,z}^{\mathcal{K}} = \mathcal{A}_{0,\,z}^{\mathcal{O}} \oplus \mathcal{A}_{0\,z,}^{\text{out}}$计算得到的，而上文的 $\lhd$则是计算得到的

使用 $\mathcal{A}_z^{\mathcal{K}} = \mathcal{A}_z^{\mathcal{O}} \oplus \mathcal{A}_z^{\mathrm{out}}$。我们来看第二项。注意， x 对 $e^{\hbar b}$ 的作用由 b 给出 y

$$e^{\hbar b} \lhd_{0,z} x = x|_{\mathbb{D}_0} \otimes e^{\hbar b} + 1 \otimes e^{\hbar b} x|_{\mathbb{D}_z} \in U(\mathcal{A}_{0,z}^{\mathrm{out}}) \backslash (U(\mathcal{A}_0^{\mathcal{K}}) \otimes U(\mathcal{A}_z^{\mathcal{K}})) \cong U(\mathcal{A}_0^{\mathcal{O}}) \otimes U(\mathcal{A}_z^{\mathcal{O}}), \quad (3.22)$$

其中 $x|_{\mathbb{D}_z}$是 z中 x的 Laurent展开。现在我们有 $e^{\hbar b} x|_{\mathbb{D}_z} = (e^{\hbar b} \rhd x|_{\mathbb{D}_z}) e^{\hbar b} + e^{\hbar b} \lhd x|_{\mathbb{D}_z}$。当我们与 $f \in S(\mathcal{A}^{\vee,\ {}^{\mathrm{out}}}_{0})$配对时，项 $e^{\hbar Y} \lhd x|_{\mathbb{D}_z}$ 没有贡献，因为它属于$U(\mathcal{A}_z^{\mathcal{O}})$。因此，我们得到

$$x|_{\mathbb{D}_0} \otimes e^{\hbar Y} + (e^{\hbar Y} \rhd x|_{\mathbb{D}_z}) e^{\hbar Y}. \quad (3.23)$$

因此,

$$\langle [x, f], e^{\hbar b} e^{\hbar a} \rangle = \langle f, [e^{\hbar a}, x|_{\mathbb{D}_0}] \rangle + \langle f, x|_{\mathbb{D}_0} e^{\hbar a} \rangle + \langle f, (e^{\hbar b} \rhd x|_{\mathbb{D}_z}) e^{\hbar a} \rangle. \quad (3.24)$$

前两项给出 $\langle f, e^{\hbar X} x|_{\mathbb{D}_0} \rangle$，我们断言第二项等于 $-\langle f, e^{\hbar Y} \rhd x|_{\mathbb{D}_z} e^{\hbar X} \rangle$。事实上，这可由下式推出

$$e^{\hbar b} \rhd x = e^{\hbar b} \rhd x|_{\mathbb{D}_0} + e^{\hbar b} \rhd x|_{\mathbb{D}_z} \in \mathcal{A}_z^{\mathrm{out}} \subseteq \mathcal{A}_{0,z}^{\mathrm{out}} \quad (3.25)$$

根据定义，该元素与 f配对时为零。这表明，由 [EK96] 根据 (3.20) 构造的$Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{0,\ z}$ 的两个交换子与 (3.24) 中的几何构造相同。因此，我们完成了证明： $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$上的局部 Hopf 代数因子化结构与由 $R(z)$诱导的结构一致。

□

我们也可以通过应用方程 (2.68) 定义中心扩张 $\widehat{\mathscr{Y}_\hbar^*}_{,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$。这里不再详述。

3.3 相干因子化

定理 3.2 已证明 $\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$等于 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}^{\text{co-op}}$，接下来我们将按照 [BD04], 对这一构造作层化，使其成为一个因子化代数。对于单李代数的杨氏子，这一做法行不通，因为它们不具有与余乘相容的顶点代数结构。余切 Yangian 确实具有这样的结构（[AN24b，命题 4.1]），因此存在实际的因子化结构也是合理的。接下来我们仍聚焦于 $X = \mathbb{P}^1$情形。

3.3.1 因子化代数

设 I 是一个有限集，且 X^I 是 X 的 $|I|$ 次幂。空间 $X^I \times X$ 有两个投影 p_I： $X^I \times X \to X^I$ 和 q_I： $X^I \times X \to X$。记 $\Gamma_I \subseteq X^I \times X$ 和 $U_I \subseteq X^I \times X$ 为由下式定义的子概形

所定义

$$\Gamma_I \coloneqq \left\{(x_i, x)\middle| x = x_i \text{ for some } i \in I\right\}, \qquad U_I \coloneqq (X^I \times X) \setminus \Gamma_I. \tag{3.26}$$

记 $\widehat{\Gamma}_I$ 为 $X^I \times X$ 内 Γ_I 的形式邻域，记 $\widehat{\Gamma}_I^\circ$ 为 $\Gamma_I \setminus \Gamma_I$ 的形式去心邻域。此外，令 p_I°、q_I° 为投影 p_I、q_I 在 U_I、$\widehat{\Gamma}_I^\circ$ 上的限制，$\widehat{p}_I$、$\widehat{q}_I$ 为它们在 Γ_I 上的限制，$\widehat{p}_I^\circ$、$\widehat{q}_I^\circ$ 为它们进一步在 Γ_I° 上的限制。若 $\mathcal{J}_I$ 表示定义 Γ_I 的理想，则形式概形 Γ_I 定义为

$$\widehat{\Gamma}_I = \mathrm{Spf}\left(\varprojlim_n \mathcal{O}_{X^I \times X}/\mathcal{J}_I^n\right). \tag{3.27}$$

由此，我们在 X^I 上定义以下三个李代数层：

$$\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}} \coloneqq \hat{p}_{I,*}\hat{q}_I^*(\mathcal{A}), \qquad \mathcal{A}_I^{\mathcal{K}} \coloneqq \hat{p}_{I,*}^\circ \hat{q}_I^{\circ,*}(\mathcal{A}), \qquad \mathcal{A}_I^{\mathrm{out}} \coloneqq p_{I,*}^\circ q_I^{\circ,*}(\mathcal{A}). \tag{3.28}$$

这里，$\hat{q}_I^*\mathcal{A} \coloneqq \varprojlim_n q_I^*\mathcal{A}/\mathcal{J}_I^n$，$\hat{q}_{I}^{\circ,*}$ 的定义类似。它们是 X^I 上的 $\mathcal{O}$-模层，实际上是 X^I 上 $\mathcal{D}$-模范畴中的李代数层。层 $\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}}$ 和 $\mathcal{A}_I^{\mathcal{K}}$ 并非拟凝聚，而 $\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}}$ 是拟凝聚的。这些层带有因子化结构，其含义是，对于满射 $\pi\colon J \twoheadrightarrow I$，存在显然的同构

$$\Delta^{J/I,*}\mathcal{A}_J^{\heartsuit} \cong \mathcal{A}_I^{\heartsuit}, \qquad j^{J/I,*}\left(\prod_{i\in I}\mathcal{A}_{J_i}^{\heartsuit}\right) \cong j^{J/I,*}\left(\mathcal{A}_J^{\heartsuit}\right), \qquad \heartsuit = \{\mathcal{O}, \mathcal{K}, \mathrm{out}\}, \tag{3.29}$$

其中，对于每个 $i \in I$、$\Delta^{J/J}\colon X^I \to X^J$ 由 $(x_i)_{i\in I} \mapsto (x_{\pi(j)})_{j\in J}$ 定义，而 $j^{J/I}\colon U^{J/I} \coloneqq X^J \setminus \Delta^{J/I}(X^I) \to X^J$ 是开嵌入。注意，这并不会使 $\mathcal{A}_I^{\heartsuit}$ 成为因子化代数。对于 $\heartsuit \in \{\mathcal{O}, \mathcal{K}\}$，这些同构自然是李代数的同构；而对于 $\heartsuit =$ 之外的情形，它们则不是。不过，$\mathcal{A}_{J_i}^{\mathrm{out}}$ 是 $j^{J/I}$的$^*\mathcal{A}_J^{\heartsuit}$ 李子代数。$\mathcal{A}_I^{\heartsuit}$ 在 z 处的纤维恰好是上一节中构造的 $\mathcal{A}_z^{\heartsuit}$。类似地，我们可以定义 $\mathcal{A}^{\vee,\,I\,\heartsuit}$。

我们需要以下引理。

引理 3.3。层 $\mathcal{A}_I^{\heartsuit}$ 和 $\mathcal{A}^{\vee,\,I\,\heartsuit}$ 在 X^I 上是平坦的，其中 I 为有限集且 $\heartsuit \in \{\mathcal{O}, \mathcal{K},$之外$\}$。

证明。我们只证明 $\heartsuit =$out 的情形，因为其他情形的证明类似。设 $(x_i)_{i\in I} \in X^I$ 是一点。暂且假设对所有 $i \in I$ 都有 $x_i \neq \infty$。令 U_∞ 为 $X \setminus \{0\}$，并令 $U = X \setminus \{\infty\}$ 为 x_i 对所有 $i \in I$ 的一个邻域。特别地，U^I 是 $(x_i)_{i\in I} \in X^I$ 的一个邻域。我们来计算 $\Gamma(U^I, \mathcal{A}_I^{\mathrm{out}})$。取 U 的一个全局坐标 t，并将 U_∞ 写作 $z = t^{-1}$。我们可以用以下开子集覆盖 $(U^I \times X) \setminus \Gamma_I$

$$U_1 \coloneqq (U^I \times U_\infty) \setminus \Gamma_I \quad \text{and} \quad U_2 \coloneqq (U^I \times U) \setminus \Gamma_I. \tag{3.30}$$

注意到

$$U_1 \cap U_2 = (U^I \times (U \cap U_\infty)) \setminus \Gamma_I \tag{3.31}$$

我们可以使用与上述覆盖相伴的 ˇCech 复形来计算 $\Gamma(U^I, \mathcal{A}_I^{\mathrm{out}})$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I}, z]\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{1-t_i z}\right] & & \oplus & & \mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I}, t]\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{t-t_i}\right] \\ & \searrow^{z\cdot -} & & \swarrow_{t\mapsto z^{-1}} & \\ & & \mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I}, z, z^{-1}]\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{1-t_i z}\right] & & \end{array} \tag{3.32}$$

现在显然， $\Gamma(U^I, \mathcal{A}_I^{\mathrm{out}})$ 的上同调集中在 0 次，因为向下的映射是满射。其核由所有满足以下条件的有序对组成

$$A \in \mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I}, t]\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{t-t_i}\right] \quad \text{and} \quad B \in \mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I}, z]\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{1-zt_i}\right] \tag{3.33}$$

使得 $zB + A = 0$。特别地，我们有 $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$，满足此条件的子空间由下式给出

$$K \coloneqq \sum_{(k_i)_{i\in I}\in\mathbb{N}_0^I} \sum_{n<\sum_{i\in I} k_i} \mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I}] t^n \prod_{i\in I}\left(\frac{1}{t-t_i}\right)^{k_i}. \tag{3.34}$$

不难证明，对于任意元素 $A \in K$，都有

$$B((t_i)_{i\in I}, z) \coloneqq -z^{-1}A((t_i)_{i\in I}, z^{-1}) \in \mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I}, z]\left[\prod_{i\in I}\frac{1}{1-zt_i}\right]. \tag{3.35}$$

因此，(3.32) 的上同调同构于 K。作为 $\mathbb{C}[(t_i)_{i\in I}]$-模， K 是自由的，其基由下式给出

$$\left\{ I_{\alpha,n,k} \coloneqq I_\alpha t^k \prod_{i\in I}\left(\frac{1}{t-t_i}\right)^n \;\middle|\; 0 \le \alpha \le d, 0 \le k < |I|,\ n > 0 \right\}. \tag{3.36}$$

事实上，由次数考虑以及以下简单事实可知，这个集合是一个基：对于$r < |I|$， $t^{s|I|+r} = \sum_{j=0}^{s}($ $\Pi_{i\in I}(t-t_i))^j a_j(t, (t_i)_{i\in I})$ 对某些多项式 $(a_j)_{j=0}^s \subset \mathbb{C}[t, (t_i)_{i\in I}]$ 成立，其中 t 次数小于 $|I|$。

More 通常，我们可以用形如 $U^{I_1} \times U_\infty^{I_2}$ 的开子集覆盖 X^I，其中 $I = I_1 \sqcup I_2$ an d

那么， $\Gamma(U^{I_1}\times U_\infty^{I_2},\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}})$ 与如下成对元素构成的空间同构

$$\begin{aligned} &A\in\mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I_1},(z_i)_{i\in I_2},t]\left[\prod_{i\in I_1}\frac{1}{t-t_i}\prod_{i\in I_2}\frac{1}{z_it-1}\right]\\ &B\in\mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I_1},(z_i)_{i\in I_2},z]\left[\prod_{i\in I_1}\frac{1}{1-zt_i}\prod_{i\in I_2}\frac{1}{z_i-z}\right] \end{aligned}\quad \text{such that } zB+A=0. \tag{3.37}$$

同样，我们可以将这些元素所构成的空间明确描述为

$$K\coloneqq\sum_{(k_i)_{i\in I}\in\mathbb{N}_0^I}\sum_{n<\sum_{i\in I}k_i}\mathfrak{g}[(t_i)_{i\in I_1},(z_i)_{i\in I_2}]t^n\prod_{i\in I_1}\left(\frac{1}{t-t_i}\right)^{k_i}\prod_{i\in I_2}\left(\frac{1}{1-z_it}\right)^{k_i}. \tag{3.38}$$

遗憾的是，这不再是一个具有形如 (3.39) 的基的自由模，因为 $t^{s|I|+r}$不再能表示为 $\prod_{i\in I_1}(t-t_i)$ 的幂 $\prod_{i\in I_2}(z_it-1)$。然而，它仍然是平坦的，因为它是自由模的单射极限。事实上，考虑 $\mathbb{C}[(t_i)_{i\in I_1}、(z_i)_{i\in I_2}]$-张成的 K_m

$$\left\{I_{\alpha,m,k}\coloneqq I_\alpha t^k\left(\prod_{i\in I_1}\frac{1}{t-t_i}\prod_{i\in I_2}\frac{1}{z_it-1}\right)^m\;\middle|\;0\le\alpha\le d,0\le k<|I|m\right\}. \tag{3.39}$$

于是，这些空间是自由的，所给出的元素构成其基。此外，显然 $\varinjlim_m K_m=\Gamma(U^{I_1}\times U_\infty^{I_2},\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}})$。 □

这使我们能够定义一个因子化代数

$$\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})_I^{\text{co-op}}:=\mathrm{Sym}_{X_I}(\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}}[\![\hbar]\!])\otimes_{X_I}\mathrm{Sym}_{X_I}(\mathcal{A}_I^{\vee,\mathrm{out}}[\![\hbar]\!]). \tag{3.40}$$

上标“co-op”颇为矫饰，因为除了因子化之外，我们并未赋予它任何其他结构。现在我们继续定义霍普夫代数结构。然而，由于所涉及层的非自由性，这个霍普夫代数结构只能定义在构形空间上

$$\mathrm{conf}_I(X)\coloneqq X^I\setminus\left\{(x_i)_{i\in I}\;\middle|\;x_i=x_j\text{ for some }i\neq j\right\}. \tag{3.41}$$

3.3.2 Hopf代数结构

考虑李代数层的典范映射

$$\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}}\longrightarrow\mathcal{A}_I^{\mathcal{K}}\longleftarrow\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}} \tag{3.42}$$

它们显然保持了方程 (3.29) 的因子化结构。我们证明如下命题。

命题 3.4. 式 (3.42) 的嵌入将 $\mathcal{A}_I^{\mathcal{K}}$ 识别为直和 $\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}} \oplus \mathcal{A}_I^{\mathrm{out}}$.

证明。我们需要证明诱导映射 $\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}} \oplus \mathcal{A}_I^{\mathrm{out}} \to \mathcal{A}_I^{\mathcal{K}}$是一个同构。为此，只需对每个茎证明这一点。令 $(x_i)_{i\in I} \in X^I$，并暂且假设对所有 $i \in I$， $x_i \neq \infty$ 成立。令 $V \subseteq U^I$为 $(x_i)_{i\in I}$的一个开邻域，并固定与之前相同的 $U = X\backslash\{\infty\}$的全局坐标 t，再令 t_i为 V的第 i个因子的坐标。层 $\Gamma(V,\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}})$ 定义为

$$\varprojlim_n \mathfrak{g}[V][t]/\left(\prod_{i\in I}(t-t_i)^n\mathfrak{g}[V][t]\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{0\le k<|I|}\mathfrak{g}[V]t^k\prod_{i\in I}(t-t_i)^n, \tag{3.43}$$

其中的求和通常是无限的。类似地，层 $\Gamma(U^I,\mathcal{A}_I^{\mathcal{K}})$ 定义为

$$\sum_{n\gg-\infty}\sum_{0\le k<|I|}\mathfrak{g}[V]t^k\prod_{i\in I}(t-t_i)^n. \tag{3.44}$$

这里，下标 $n > -\infty$ 表示， $\mathfrak{g}[V]$ 中的系数仅在有限多个负的 n处非零。将这些局部截面与等式（3.34）中的 $\Gamma(V,\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}})$ 的局部截面（另见其在（3.39）中的基）进行比较，可见 $\Gamma(V,\mathcal{A}_I^{\mathcal{K}}) = \Gamma(V,\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}}) \oplus \Gamma(V,\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}})$ 作为向量空间。类似地，可证明对于某个 $j \in I$， $x_j = \infty$ 也成立。

□

命题 3.4 和引理 3.3 给出了万有包络代数的张量积分解

$$U(\mathcal{A}_I^{\mathcal{K}}) = U(\mathcal{A}_I^{\mathrm{out}}) \otimes_{\mathcal{O}_{X^I}} U(\mathcal{A}_I^{\mathcal{O}}) \tag{3.45}$$

并且该分解与因子化结构相容。由于涉及的所有层都是平坦的，上述万有包络代数是经典对象，并可识别为各层作为模的对称张量代数。

要将第 3.2 节中的构造层化，我们还需要最后一个要素：一个配对，而几何为此提供了恰当的补充。我们将在将这些层限制到 $\mathrm{conf}_I(X)$ 后定义该配对。

引理 3.5. 设 $\mathcal{A}^{\heartsuit}\ \mathrm{conf}_I(x)$ 和 $\mathcal{A}^{\vee,\heartsuit}\ \mathrm{conf}_I(x)$ 分别是将 $\mathcal{A}_I^{\heartsuit}$ and $\mathcal{A}^{\vee,\heartsuit}\ \mathrm{conf}_I(x)$ 限制到 $\mathrm{conf}_I(X)$ 上所得的层。那么 $\mathcal{A}^{\mathrm{out}}_{\mathrm{conf}_I}(x)$ 和 $\mathcal{A}^{\vee,\mathrm{out}}\ \mathrm{conf}_I(x)$ 是局部自由层，并且 $\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\mathrm{conf}_I}(x)$ 和 $\mathcal{A}^{\vee,\mathcal{O}}\ \mathrm{conf}_I(x)$ 以及 $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{\mathrm{conf}_I}(x)$ 和 $\mathcal{A}^{\vee,\mathcal{K}}\ \mathrm{conf}_I(x)$ 都是正则函数层的局部直积。

证明。只需证明 $\mathcal{A}_I^{\heartsuit}$ 的情形，因为 $\mathcal{A}^{\vee,\ {}_I\ \heartsuit}$ 的证明是类似的。由 $\mathcal{A}_I^{\heartsuit}$ 的因子化性质，应用于投影 $I \twoheadrightarrow I$，我们得到

$$\mathcal{A}^{\heartsuit}_{\mathrm{conf}_I(X)} = \prod_{i\in I}\mathcal{A}^{\heartsuit}_{\{i\}}\Big|_{\mathrm{conf}_I(X)}. \tag{3.46}$$

因此，我们只需证明 $\mathcal{A}^{\heartsuit}_{\{1\}}$ 的情形。我们先考虑 $\heartsuit = \mathsf{out}$。若任取一个远离 $\infty \in X$ 的开邻域，这一点已在引理 3.3 中证明。令 U_∞ 为 ∞ 的邻域，那么我们已经看到， $\Gamma(U_\infty, \mathcal{A}^{\mathrm{out}}_{\{1\}})$ 可以与 $\mathbb{C}[z_1]$-模

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{n<k} \mathfrak{g}[z_1]t^n \left(\frac{1}{1-z_1 t}\right)^k. \tag{3.47}$$

T因此，可以找到这个向量空间的一组基，使其成为 $\mathbb{C}[z_1]$上的自由模，b y

$$w_{\alpha,n} = \frac{t^{n-1}I_\alpha}{(1-z_1 t)^n}, \qquad n \geq 1, 1 \leq \alpha \leq d. \tag{3.48}$$

事实上，这些元素显然线性无关，并且利用诸如以下的恒等式

$$\frac{z_1 t^n I_\alpha}{(1-z_1 t)^{n+1}} + \frac{t^{n-1}I_\alpha}{(1-z_1 t)^n} = \frac{z_1 t^n I_\alpha + (1-z_1 t)t^{n-1}I_\alpha}{(1-z_1 t)^{n+1}} = \frac{t^{n-1}I_\alpha}{(1-z_1 t)^{n+1}} \tag{3.49}$$

归纳 地，我们可以看到这些元素生成了 (3.47)。这就证明了关于 $\heartsuit = \mathsf{ou}$的断言 t.

现在我们来关注 $\heartsuit = \mathcal{O}$，因为关于 $\heartsuit = \mathcal{K}$ 的证明完全相同。任意开子集 $V \subseteq U = X \setminus \{\infty\}$ 上的 $\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\{1\}}$的截面空间为

$$\Gamma(V, \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\{1\}}) = \prod_{n\geq 0} \mathfrak{g}[V](t-t_1)^n, \tag{3.50}$$

这正如所声称的是一个直积。类似地，对于 ∞的一个开邻域 V，我们有

$$\Gamma(V, \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\{1\}}) = \prod_{n\geq 0} z\mathfrak{g}[V](z-z_1)^n, \tag{3.51}$$

也是一个直积。 □

设 Ω 为 X 的对偶化层，$\Omega_{((I))}$ 为层

$$\Omega_{((I))} \coloneqq \hat{p}^{\circ}_{I,*}\hat{q}_I^{\circ,*}\Omega. \tag{3.52}$$

此层在 $(x_i)_{i\in I}$ 处的纤维是 $\{x_i\}_{i\in I}$ 的去心形式邻域上的微分形式空间。留数和给出一个映射 res: $\Omega_{((I))} \to \mathcal{O}_{X^I}$。结合 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 之间的典范配对，给出一个映射

$$\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_I \otimes_{\mathcal{O}_{X^I}} \mathcal{A}^{\vee,\mathcal{K}}_I \xrightarrow{\kappa} \Omega_{((I))} \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathcal{O}_{X^I} \tag{3.53}$$

引理 3.6。 上述配对在 $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{\mathrm{conf}_I(X)}$ 与 $\mathcal{A}^{\vee,\mathcal{K}}$ conf$_I$(X 之间定义了一个拓扑完美配对)，

使得可以将 $\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\mathrm{conf}_I(X)}$ 识别为 $\mathcal{A}^{\vee,\mathrm{out}\ \mathrm{conf}_I(X)}$ 的对偶层。

证明。利用因子化结构，我们可以将情形限制为 $\mathcal{A}^{\heartsuit}_{\{1\}}$。令 V 为$U = X \setminus \{\infty\}$的局部化。我们可以识别

$$\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{\{1\}}(V) = \sum_{n\gg-\infty} \mathfrak{g}[V](t-t_1)^n, \qquad \mathcal{A}^{\vee,\mathcal{K}}_{\{1\}}(V) = \sum_{n\gg-\infty} \mathfrak{g}^*[V](t-t_1)^n. \tag{3.54}$$

留数配对是典范配对

$$\langle (t-t_1)^m I_\alpha, (t-t_1)^n I^\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}\mathrm{res}_{t=t_1}(z-z_1)^{m+n} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{m+n,-1}. \tag{3.55}$$

显然，它是一个拓扑完美配对。在此配对下，$\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\{1\}}(V)$ 被识别为 $\mathcal{A}^{\vee,\ \mathrm{out}}_{\{1\}}(V)^*$，即线性对偶。

另一方面，假设 V 是 $U_\infty = X \setminus \{0\}$的局部化，则

$$\mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{\{1\}}(V) = \sum_{n\gg-\infty} \mathfrak{g}[V](z-z_1)^n, \qquad \mathcal{A}^{\vee,\mathcal{K}}_{\{1\}}(V) = \sum_{n\gg-\infty} \mathfrak{g}^*[V](z-z_1)^n. \tag{3.56}$$

此时配对由下式给出

$$\langle (z-z_1)^m I_\alpha, (z-z_1)^n I^\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}\mathrm{res}_{z=z_1}(z-z_1)^{m+n}z^{-2}. \tag{3.57}$$

这里，平移 z^{-2} 源于以下事实： $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\vee = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*\otimes\mathcal{O}(-2)$。这同样是一个完美配对。由于

$$\left\langle \frac{zI^\alpha}{(z-z_1)^{m+1}}, z(z-z_1)^n I_\beta \right\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta_{mn} \tag{3.58}$$

成立，且

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{zI^\alpha}{(z-z_1)^{m+1}} \,\middle|\, m\geq 0, 1\leq\alpha\leq d \right\} \subseteq \Gamma(V, \mathcal{A}^{\vee,\mathrm{out}}_{\{1\}}), \\ &\{z(z-z_1)^m I_\alpha \mid m\geq 0, 1\leq\alpha\leq d\} \subseteq \Gamma(V, \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\{1\}}) \end{aligned} \tag{3.59}$$

是（拓扑）基（见（3.48）和（3.51）），我们看到 $\Gamma(V, \mathcal{A}^{\vee,\ \mathrm{out}}_{\{1\}})^*$ 被识别为 $\Gamma(V, \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\{1\}})$. □

由此引理可知，我们可以将 $U(\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_{\mathrm{conf}_I(X)})$ 识别为层$S(\mathcal{A}^{\vee,\mathrm{out}\ \mathrm{conf}_I(X)})$ 的线性对偶。现在，我们可以应用构造 Yangian $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 及其对偶 $Y^*_\hbar(\mathfrak{d})$ 时所依据的一般思路，并将 (3.40) 限制到 $\mathrm{conf}_I(X)$，得到一个 Hopf 层： $\mathscr{Y}^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\text{co-op}\ \mathrm{conf}_I(X)}$

代数结构通过

$$\mathscr{Y}_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{\text{conf}_I(X)} \coloneqq S(\mathcal{A}^{\vee,\text{out}}_{\text{conf}_I(X)})[\![\hbar]\!] \rtimes_{\mathcal{O}^I_{X_\hbar}} U(\mathcal{A}^{\text{out}}_{\text{conf}_I(X)})[\![\hbar]\!]. \tag{3.60}$$

现在很清楚，我们在此定义的因子化代数，正是第 3.2 节中局部因子化的层化。

注 3.7. 上述所有构造显然都关于集合 I 在 $\mathsf{conf}_I(X)$ 上的置换 S_I 的作用是等变的，特别是，它们下降为真正构形空间 $\mathsf{Conf}_I(X) = [\mathsf{conf}_I(X)/S_I]$ 上的层。

注 3.8. 如果只想定义余代数结构，那么可以将上述内容扩展到整个 X^I。其思路是考虑作用群胚 $\widehat{G}(\mathcal{O})_{X^I} \times \widehat{\mathsf{Gr}_{G,\ X^I}}$ 在 $\widehat{\mathsf{Gr}_{G,\ X^I}}$ 上，其中 $G(\mathcal{O})_{X^I}$ 和 $\mathsf{Gr}_{G,\ X^I}$ 是单位截面处的形式完备化。设 ω_I 是该空间的对偶化层，π_I 是到 X^I 的投影，则 $\pi_{I,\ *}(\omega_I)$ 是一个具有相容余代数结构的手征代数。$\pi_{I,\ *}(\omega_I)$ 在 $\mathbf{z}$ 处的纤维可典范地识别为作为余代数的 $Y^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{\mathbf{z}}$。

4 量子顶点代数与量子 KZ 方程

在本节中，我们研究真空模

$$\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}) \coloneqq \text{Ind}^{\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})}_{Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes\mathbb{C}[c_\ell]}\mathbb{C}_k[\![\hbar]\!], \tag{4.1}$$

其中，$\mathbb{C}_k[\![\hbar]\!]$ 是一个表示，c_ℓ 通过乘以 k作用于该表示。我们将赋予这个向量空间量子顶点代数结构。此外，我们证明，在 $k\ell = -1$这一条件下，这个量子顶点代数可通过量子 Segal-Sugawara 构造得到一个共形元，其关联的差分联络就是量子 KZ 联络。总之，我们证明定理 1.4。

本节结构如下。在第 4.1 节中，我们研究与$\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})$相关的量子顶点代数结构。在第 4.2.4 节中，我们构造共形元，并从共形块构造量子 KZ 联络。在第 4.3 节中，我们考察来自三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论的 $\mathfrak{d}$ 示例。

4.1 来自余切 Yangian 的量子顶点代数

4.1.1 量子顶点代数回顾

回顾 [EK98b]，编织顶点代数 $(V, Y, T, \Omega\ S)$ 由顶点代数在 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 上的通常数据 (V, Y, T, Ω) 组成，但还额外包含一个编织元 S，它控

制局部性的失效。更确切地说， V 是一个拓扑自由的 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-模，并配备了亚纯乘法

$$V \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} V \to V(\!(z)\!)\,, \qquad x \otimes y \mapsto Y(x,z)y\,, \qquad Y(x,z) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}(V)[\![z,z^{-1}]\!], \tag{4.2}$$

一个 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-线性算子 T： $V \to V$、真空向量 $\Omega \in V$以及一个 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-线性编织映射$S = 1 + \hbar$（...）： $V \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} V \to (V \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} V)((z))$。

Th该数据随后需满足以下两个类似于通常顶点代数的公理 :

(QV1) 真空向量公理：向量 $\Omega \in V$（称为真空向量）满足 $Y(\Omega, z) = 1$以及 $Y(v,z)\Omega \in v + zV[\![z]\!]$ 对所有 $v \in V$均成立；

(QV2) 平移算子公理：算子 T（称为平移算子）满足 $T\Omega = 0$ 且 $\frac{dY}{dz}(v,z) = [T, Y(v,z)]$。

然而，与通常的顶点代数不同， V 上的亚纯乘法满足以下 S-编织的局部性调整，这在 EK98b 中称为 (QA1)] ，在我们的记号中为：

(QV3) S-局部性：满足以下版本的局部性

$$\langle Y^{13}(z_1)Y^{23}(z_2), S(z_1 - z_2)(u \otimes v)\rangle = \langle Y^{23}(z_2)Y^{13}(z_1), u \otimes v\rangle. \tag{4.3}$$

这里，我们记

$$Y(z) \in (V^* \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} \mathrm{End}_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}(V))[\![z,z^{-1}]\!], \qquad \langle v \otimes 1, Y(z)\rangle := Y(v,z) \text{ for all } v \in V \tag{4.4}$$

为与 $Y(-,z)$ 相关的元素： $V \to \mathrm{End}^{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}(V)[\![z,z^{-1}]\!]$，等式 (4.3) 的含义是：在任意向量上取值并作用任意泛函 V^* 后，将矩阵元延拓为 $\mathbb{C}[z_1, z_2, (z_1 - z_2)^{-1}][\![\hbar]\!]$ 中的函数。

此外，编织映射 S 必须满足：

(S1) 幺正性： $S^{21}(z) = S^{-1}(z)$；(S2) 与 T 的兼容性： $[T \otimes 1, S(z)] = -\frac{dS(z)}{dz}$(S3) Yang-Baxter 方程： $S^{12}(z_1)S^{13}(z_1 + z_2)S^{23}(z_2) = S^{23}(z_2)S^{13}(z_1 + z_2)S^{12}(z_1)$。

显然， $V/\hbar V$现在是一个通常的顶点代数，我们称之为 V的经典极限。

与通常的顶点代数不同，编织顶点代数并不会自动满足合理意义下的结合律。一般而言，它们只满足由 S 控制的拟结合性约束；参见 [EK98b，命题 1.1]。量子顶点代数现在被定义为满足以下附加约束的编织顶点代数

(QV4) 六边形公理： $S^{23}(z_2)Y^{12}(z_1) = Y^{12}(z_1)S^{23}(z_2)S^{13}(z_1+z_2)$。

该公理确保了结合律

$$Y(u,z_1+z_2)Y(v,z_2) = Y(Y(u,z_1)v,z_2)\,, \qquad \text{for all } u,v\in V. \tag{4.5}$$

这里，(4.3) 被理解为 $\mathbb{C}((z_2))((z_1))[\![\hbar]\!]$ 中相应矩阵系数之间的等式：先对 $V\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}V$ 的任意元素求值，然后再作用于 V^* 的任意元素。此外，(4.5) 被理解为 $\mathbb{C}[\![z_1,z_2]\!][z_1^{-1},(z_1+z_2)^{-1}][\![\hbar]\!]$ 中矩阵系数之间的恒等式：先对 V 的任意元素求值，然后再作用于 V^* 的任意元素。

4.1.2 量子真空顶点代数的构造

设 $\mathcal{V}_{\hbar,\,k}(\mathfrak{d})$ 是 $DY_{\hbar,\,\ell}(\mathfrak{d})$-模

$$\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}) = \mathrm{Ind}^{\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})}_{Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes\mathbb{C}[c_\ell]}\mathbb{C}_k[\![\hbar]\!] = \widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})\otimes_{Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes\mathbb{C}[c_\ell]}\mathbb{C}_k[\![\hbar]\!]. \tag{4.6}$$

这里，$\mathbb{C}_k[\![\hbar]\!]$ 是 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的平凡模，c_ℓ 通过与 $k\in\mathbb{C}$ 做乘法作用于其上。这$\widehat{\ }$是 $\mathfrak{d}_\ell$ 在层 k 处的真空模的量子类比。可以证明，作为向量空间，我们可以将 $\mathcal{V}_{\hbar,\,k}(\mathfrak{d}) = Y^*_\hbar(\mathfrak{d})$ 识别为。在本节中，我们希望证明 $\mathcal{V}_k(\mathfrak{d})$ 上存在一个典范的量子顶点代数结构。

令 R 为 $DY_\hbar(\mathfrak{d}) = Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}Y^*_\hbar(\mathfrak{d})^{\mathrm{co\text{-}op}}$ 在第 2.2.3 节中明确描述的量子 R-矩阵。现在我们可以将其视为 $Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}\widehat{Y}^*_{\hbar,\,\ell}(\mathfrak{d})^{\mathrm{co\text{-}op}}$ 中的一个张量。另一方面，亚纯 R-矩阵 $R(z)$ 可视为 $(Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}Y_\hbar(\mathfrak{d}))[\![z^{-1}]\!]$ 中的一个元素。令

$$T(z)\in(Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})))[\![z]\!] \quad\text{and}\quad T^\dagger(z)\in(Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})))[\![z^{-1}]\!] \tag{4.7}$$

分别通过在第二个张量因子上应用表示$\widehat{\ }$映射 $DY_{\hbar,\,\ell}(\mathfrak{d})\to\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\hbar,\,k}(\mathfrak{d}))$，由 $(\tau_z\otimes 1)R$ 和 $R(z)$ 得到的张量级数。这里回顾一下，τ_z 是与 ∂_t 相关联的平移算子 $t\mapsto t+z$。下文中，对于级数$A(z)\in Y_\hbar(\mathfrak{d})((z))$，当该表达式有定义时，我们记 $A(z+\lambda e_\ell) := e^{\lambda z\mathrm{ad}(\partial_\ell)}A(z)$，并记为 $\lambda\in\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$。

引理4.1. 以下关系成立：

$$\begin{aligned} R^{12}(z_1-z_2)T^{13}(z_1)T^{23}(z_2) &= T^{23}(z_2)T^{13}(z_1)R^{12}(z_1-z_2),\\ R^{12}(z_1-z_2-k\hbar e_\ell/2)T^{13}(z_1)T^{\dagger,23}(z_2) &= T^{\dagger,23}(z_2)T^{13}(z_1)R^{12}(z_1-z_2+k\hbar e_\ell/2). \end{aligned} \tag{4.8}$$

证明。第一个关系直接由以下事实得出：

$$\begin{aligned} R^{12}(z_1-z_2)(e^{z_1\mathrm{ad}(\partial_t)}\otimes e^{z_2\mathrm{ad}(\partial_t)}\otimes 1)(\Delta^\gamma_\hbar\otimes 1)(R)&\\ = (e^{z_1\mathrm{ad}(\partial_t)}\otimes e^{z_2\mathrm{ad}(\partial_t)}\otimes 1)(\Delta^{\gamma,\mathrm{op}}_\hbar\otimes 1)(R)R^{12}(z_1-z_2)& \end{aligned} \tag{4.9}$$

根据定理 2.5.2 以及 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的伪三角结构，该关系成立。对于第二个~关系，请回想 $R=\exp(\hbar\partial_\ell\otimes c_\ell/2)R\exp(\hbar\partial_\ell\otimes c_\ell/2)$ 是 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 的双 R-矩阵。现在我们断言如下结论成立：

$$R^{12}(z_1-z_2)\widetilde{R}[z_1]^{13}R(z_2)^{23}=R(z_2)^{23}\widetilde{R}[z_1]^{13}R^{12}(z_1-z_2), \tag{4.10}$$

其中 $\widetilde{R}[z_1]=(e^{z_1\partial_t}\otimes 1)\widetilde{R}$。从左侧和右侧分别乘以 $R^{21}(z_2-z_1)=R^{12}(z_1-z_2)^{-1}$，并交换第一和第二个张量因子，可见上述内容等价于

$$R^{12}(z_2-z_1)R^{13}(z_2)\widetilde{R}^{23}[z_1]=\widetilde{R}^{23}[z_1]R^{13}(z_2)R^{12}(z_2-z_1). \tag{4.11}$$

后一等式现在可由 $\widetilde{R}\widetilde{\Delta}^{\gamma}_{\hbar}\widetilde{R}^{-1}=\widetilde{\Delta}^{\gamma,\ \hbar}{}^{\mathrm{op}}$ 成立这一事实推出。现在，在等式 (4.8) 的两边分别从左侧和右侧乘以 $\exp(-\hbar\partial_\ell\otimes c_\ell/2)^{13}$，并利用 $c_\ell=k$，即可由 (4.10) 得到第二个恒等式。

□

引理 4.2. 张量级数

$$\mathcal{Y}_\hbar(z)=T(z)\cdot T^\dagger(z+k\hbar e_\ell/2)^{-1}\in(Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})))[\![z,z^{-1}]\!] \tag{4.12}$$

是一个定义良好的形式级数。

证明. 设 M,N 是 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的光滑模。则对于任意 $m\otimes n\in M\otimes N$，有 $T^\dagger(z+k\hbar e_\ell/2)^{-1}(m\otimes n)\in(M\otimes N)((z))$。由于 $T(z)$ 是关于 z 的形式幂级数，它在 $(M\otimes N)((z))$ 上的作用是定义良好的。

□

如 [RSTS90、EK98b]，所述，由方程 (4.8) 及 $R(z)$ 的幺正性，可以推得

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}^{13}_\hbar(z_1)R^{12}(z_1-z_2+k\hbar e_\ell)^{-1}\mathcal{Y}^{23}_\hbar(z_2)R^{12}(z_1-z_2)\\&\qquad=R^{12}(z_1-z_2)^{-1}\mathcal{Y}^{23}_\hbar(z_2)R^{12}(z_1-z_2-k\hbar e_\ell)\mathcal{Y}^{13}_\hbar(z_1).\end{aligned} \tag{4.13}$$

正如记号所示，这个 $\mathcal{Y}_\hbar(z)$ 通过对所有 $v\in\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})$ 定义 $\mathcal{Y}_\hbar(v,z):=\langle v\otimes 1,\mathcal{Y}_\hbar(z)\rangle$，从而给出 $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})(\mathfrak{d})$ 上量子顶点代数结构的态-算符对应。其中的级数 $T^\dagger$ 是湮灭算子，它们出现在产生算子T之前。真空向量 $\Omega=1$ 是 $\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})=Y^*_\hbar(\mathfrak{d})$ 的单位元，而平移算子为 ∂_t。接下来需要定义 $\mathcal{S}(z)$。为此，考虑

$$L_1(z),L_2(z)\colon Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}Y_\hbar(\mathfrak{d})\to(Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}Y_\hbar(\mathfrak{d}))((z^{-1})) \tag{4.14}$$

定义为

$$\begin{aligned} a\otimes b &\overset{L_1(z)}{\longmapsto} (a\otimes 1)R(z+k\hbar e_\ell)^{-1}(1\otimes b)R(z),\\ a\otimes b &\overset{L_2(z)}{\longmapsto} R(z)^{-1}(1\otimes b)R(z-k\hbar e_\ell)(a\otimes 1). \end{aligned} \tag{4.15}$$

公式（4.13）可以简洁地写为

$$L_1^{12}(z_1-z_2)\mathcal{Y}_\hbar^{13}(z_1)\mathcal{Y}_\hbar^{23}(z_2)=L_2^{12}(z_1-z_2)\mathcal{Y}_\hbar^{23}(z_2)\mathcal{Y}_\hbar^{13}(z_1). \tag{4.16}$$

此外，这两个自同态满足

$$L_1(-z)^{21}=\mathrm{Ad}_{R(z)}L_2(z). \tag{4.17}$$

令 $\mathcal{S}^\perp(z)$ 为 $Y_\hbar(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的自同态，使得 $L_2(z)\mathcal{S}^\perp(z)=L_1(z)$，或

$$\mathcal{S}^\perp(z)=L_2^{-1}(z)L_1(z)=L_1^{21,-1}(-z)\mathrm{Ad}_{R(z)}L_1(z). \tag{4.18}$$

这是良定义的，因为显然 L_1 和 L_2 可逆。我们将 $\mathcal{S}(z)$ 定义为 $\mathcal{S}^\perp(z)$ 的伴随。本节要证明的主要结论如下。其证明将占据本小节的其余部分。

定理 4.3. 元组 $(\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}),\ \mathcal{Y}_\hbar,\ \mathbf{1},\ \partial_t,\ \mathcal{S})$ 定义了一个量子顶点代数，其经典极限为经典顶点代数 $V_k(\mathfrak{d})$。

利用识别 $\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})\cong Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$，我们可以将 $\mathcal{Y}_\hbar$ 写得更明确一些。我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\hbar(v,z)&=\langle v\otimes 1, T(z)T^\dagger(z+k\hbar e_\ell/2)\rangle=\langle\Delta_\hbar^\gamma(v)\otimes 1, T^{13}(z)T^{\dagger,23}(z+k\hbar e_\ell/2)^{-1}\rangle\\ &=\sum_{(v)}\tau_z(v^{(2)})R(S^{-1}(v^{(1)}),z+k\hbar e_\ell/2), \end{aligned} \tag{4.19}$$

对所有的 $v\in\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$，其中我们对双使用了 Sweedler记号，因此 $\Delta^{\gamma,\ \mathrm{op}}_{,\hbar}(v)=\sum_{(v)}v^{(2)}\otimes v^{(1)}$是 v 在 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 中的余乘，并且我们写作

$$R(v,z+k\hbar\ell/2):=\langle v\otimes 1, R(z+k\hbar e_\ell/2)\rangle. \tag{4.20}$$

考虑霍普夫代数 $\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$，它包含 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 作为子代数，并考虑以下映射

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar\colon \widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})\longrightarrow\Big(\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})/(c_\ell-k)\Big)[\![z,z^{-1}]\!],\qquad v\mapsto\sum_{(v)}\tau_z(v^{(2)})R(S^{-1}(v^{(1)}),z). \tag{4.21}$$

这里，按 $R(v,z)\colon=\langle v\otimes 1,\ R(z)\rangle$ 我们指的是与 $R(z)$ 对应的映射，并采用 Sweedler 's

$\widehat{\ }$记号表示 $DY_\hbar$ 的余乘，$\ell(\mathfrak{d})$，而不是 $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 的余乘。

$\widetilde{\ }$引理 4.4。映射 $\mathcal{Y}_\hbar$ 满足 $\mathcal{Y}_\hbar(c_\ell, z) = k$ 且

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar(va, z) = \epsilon(a)\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar(v, z), \tag{4.22}$$

对所有 $a \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 和 $v \in Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} = \mathcal{V}_{\hbar,\,k}(\mathfrak{d})$ 均成立。因此，$\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar$ 可下降为从 $\mathcal{V}_{\hbar,\,k}(\mathfrak{d})$ 到$\widehat{\ }DY_{\hbar,\,\ell}(\mathfrak{d})/(c_\ell - k)$ 的映射，且此映射与 $\mathcal{Y}_\hbar$ 重合。

$\widetilde{\ }$证明。等式 $\mathcal{Y}_\hbar(c_\ell, z) = k$ 由 $R(c_\ell, z) = 0$ 推出，而（4.22）由

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar(va, z) &= \sum_{(a),(v)} \tau_z(v^{(2)})\tau_z(a^{(2)})R(S^{-1}(a^{(1)}), z)R(S^{-1}(v^{(1)}), z) \\ &= \sum_{(a)} \tau_z(a^{(2)}S^{-1}(a^{(1)})) \sum_{(v)} \tau_z(v^{(2)})R(s^{-1}(v^{(1)}), z) = \epsilon(a)\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar(v, z),\end{aligned} \tag{4.23}$$

这里我们用到了对于所有 $b \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$，$R(b, z) = \tau_z(b)$ 均成立。接下来只需证明由 $\mathcal{Y}_\hbar$ 在 $\mathcal{V}_{\hbar,\,k}(\mathfrak{d})$ 上诱导的映射$\widetilde{\ }$与 $\mathcal{Y}_\hbar$ 重合。

令 $v \in Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} \subseteq \widehat{DY}_{\hbar,\,\ell}(\mathfrak{d})$，并回顾此代数中的余乘由下式给出

$$\widetilde{\Delta}_\hbar^\gamma(v) = \sum_{(v)} \exp(\hbar/2(\partial_\ell \otimes c_\ell - c_\ell \otimes \partial_\ell))(v^{(1)} \otimes v^{(2)}). \tag{4.24}$$

$\widetilde{\ }$将此应用于 $\mathcal{Y}_\hbar$，并利用 $R(c_\ell) = 0$，可知导子的贡献仅来自 $\exp(\hbar/2(c_\ell \otimes \partial_\ell))$。因此，利用 $c_\ell = k$，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar(v, z) &= \sum_{(v)} \tau_z(v^{(2)})R(e^{\hbar k\partial_\ell/2}S^{-1}(v^{(1)}), z) \\ &= \sum_{(u)} \tau_z(v^{(2)})R(S^{-1}(v^{(1)}), z + \hbar k e_\ell/2) = \mathcal{Y}_\hbar(v, z),\end{aligned} \tag{4.25}$$

如所求，等式成立。 □

由此可知，在适当的意义下，$\mathcal{Y}_\hbar$ 是 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$-模之间的映射。

推论 4.5. 对所有 $a \in \mathcal{Y}_\hbar(\mathfrak{d})$ 和 $u, v \in \mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$，我们有

$$\sum_{(a)} \mathcal{Y}_\hbar(a^{(2)}u, z)\tau_z(a^{(1)})v = \tau_z(a)\mathcal{Y}_\hbar(u, z)v. \tag{4.26}$$

*I*换言之，$\mathcal{Y}_\hbar$ 是一个从 $(\tau_z\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} \mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}))^{\text{op}}$ 到 $\tau_z\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$ 的 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$-模映射 .

⌢证明。对于任意 $a \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 和 $v \in DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{(a)} \widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar(a^{(2)}v, z)\tau_z(a^{(1)}) \\
&= \sum_{(a),(v)} \tau_z(a^{(3)}v^{(2)})\langle S^{-1}(a^{(2)}v^{(1)}) \otimes 1, R(z)\rangle \tau_z(a^{(1)}) \\
&= \sum_{(a),(v)} \tau_z(a^{(3)}v^{(2)})\langle S(v^{(1)}) \otimes S^{-1}(a^{(2)}) \otimes 1, (\widetilde{\Delta}^\gamma_\hbar \otimes 1)R(z)\rangle \tau_z(a^{(1)}) \\
&= \sum_{(a),(v)} \tau_z(a^{(3)}v^{(2)})\langle S(v^{(1)}) \otimes S^{-1}(a^{(2)}) \otimes 1, R^{13}(z)R^{23}(z)\rangle \tau_z(a^{(1)}) \\
&= \sum_{(a),(v)} \tau_z(a^{(3)})\tau_z(v^{(2)})R(S(v^{(1)}), z)R(S^{-1}(a^{(2)}), z)\tau_z(a^{(1)}) \\
&= \tau_z(a)\widetilde{\mathcal{Y}}_\hbar(v, z).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

作用于 $\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$，即可得到所需结果。 □

接下来需要处理的问题是 $\mathcal{S}(z)$ 的作用。为了正确理解这一作用，我们需要理解复合 $L_2(z)^{-1}L_1(z)$，以及如何对这一作用取对偶。让我们通过识别 $Y_\hbar(\mathfrak{d})^* \cong \mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$，来考察 $\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$ 与 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 之间的配对。

⌢引理 4.6. 我们在 $DY_\hbar(\mathfrak{d})/(c_\ell - k)$ 中有如下交换关系：

$$av = \sum_{(a),(v)} \langle e^{\hbar k\partial_\ell/2}v^{(1)}, a^{(1)}\rangle v^{(2)}a^{(2)}\langle e^{-\hbar k\partial_\ell/2}v^{(3)}, S^{-1}(a^{(3)})\rangle, \qquad \forall a \in Y_\hbar(\mathfrak{d}), v \in Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}. \tag{4.28}$$

特别地，在 $\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$ 与 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的配对下，我们得到

$$\langle av, b\rangle = \sum_{(a)} \langle v, S^{-1}(\tau_{-\hbar k e_\ell/2}(a^{(2)}))b\tau_{\hbar k e_\ell/2}(a^{(1)})\rangle\,, \qquad \forall a, b \in Y_\hbar(\mathfrak{d}), v \in Y_\hbar^*(\mathfrak{d}), \tag{4.29}$$

其中我们记 $\tau_{\pm\hbar k e_\ell/2} = e^{\pm\hbar k\mathrm{ad}(\partial_\ell)/2}$。

证明. 我们在 Drinfeld 双中有如下交换关系

$$av = \langle \widetilde{v}^{(1)}, a^{(1)}\rangle \widetilde{v}^{(2)}a^{(2)}\langle \widetilde{v}^{(3)}, S^{-1}(a^{(3)})\rangle, \tag{4.30}$$

其中 $v \mapsto \widetilde{v}^{(1)} \otimes \widetilde{v}^{(2)} \otimes \widetilde{v}^{(3)}$ 是 $\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 中的 v 双余乘。来自 $e^{\hbar(\partial_\ell \otimes c_\ell - c_\ell \otimes \partial_\ell)/2}$ 的唯一贡献，是 c_ℓ 出现在第二个因子上，这来源于 $e^{\hbar(\partial_\ell \otimes c_\ell \otimes 1 - 1 \otimes c_\ell \otimes \partial_\ell)/2}$。由此得到所需的交换关系。

现在，由于

$$\begin{aligned}\langle av, b\rangle &= \sum_{(a),(v)} \langle e^{\hbar k\partial_\ell/2} v^{(1)}, a^{(1)}\rangle \langle v^{(2)} a^{(2)}, b\rangle \langle e^{-\hbar k\partial_\ell/2} v^{(3)}, S^{-1}(a^{(3)})\rangle \\ &= \sum_{(a),(v)} \langle e^{\hbar k\partial_\ell/2} v^{(1)}, a^{(1)}\rangle \langle v^{(2)}, b\rangle \epsilon(a^{(2)}) \langle e^{-\hbar k\partial_\ell/2} v^{(3)}, S^{-1}(a^{(3)})\rangle \\ &= \sum_{(a),(v)} \langle v^{(1)}, \tau_{k\hbar e_\ell/2}(a^{(1)})\rangle \langle v^{(2)}, b\rangle \langle v^{(3)}, S^{-1}(\tau_{-k\hbar e_\ell/2}(a^{(2)}))\rangle \\ &= \sum_{(a)} \langle v, S^{-1}(\tau_{-\hbar k e_\ell/2}(a^{(2)})) b \tau_{\hbar k e_\ell/2}(a^{(1)})\rangle\end{aligned} \tag{4.31}$$

利用交换关系 (4.30)。 □

我们将 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 对自身的如下作用记为 $\triangleright_k$

$$a \triangleright_k b \coloneqq \tau_{-\hbar k e_\ell/2}(a^{(1)}) b \tau_{\hbar k e_\ell/2}(S(a^{(2)}))\,, \qquad a, b \in Y_\hbar(\mathfrak{d}). \tag{4.32}$$

于是，方程 (4.29) 可写为

$$\langle av, b\rangle = \langle v, S^{-1}(a) \triangleright_k b\rangle\,, \qquad v \in \mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d}). \tag{4.33}$$

这使我们能够显式地理解 $\mathcal{S}(z)$。

命题 4.7. $\mathcal{S}(z)$ 在 $\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})\otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}\mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$ 上的作用，是将 (4.18) 中 $S^\perp(z)$ 的伴随作为定义的；该作用可由利用 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$-模结构的 $R(z)$ 作用给出，即

$$\langle u\otimes v, \mathcal{S}(z)^\perp(a\otimes b)\rangle = \langle R(z)\cdot(u\otimes v), a\otimes b\rangle \tag{4.34}$$

对所有 a、$b \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$ u、$v \in \mathcal{V}_{\hbar,k}(\mathfrak{d})$ 均成立。

Proof。我们计算 $L_1(z)^{-1}L_2(z)$ 对 $Y_\hbar(\mathfrak{d})^{\otimes 2}$ 的作用。为此，我们首先证明 t

$$L_1(z)^{-1}(a\otimes b) = (a\otimes 1)(S\otimes 1)(R(z+k\hbar e_\ell)^{-1}(1\otimes b)R(z)). \tag{4.35}$$

对所有 $a, b \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 均成立。为此，我们回顾

$$1\otimes 1 = (\epsilon\otimes 1)R = (\nabla_\hbar^\gamma(S\otimes 1)\Delta_\hbar^\gamma\otimes 1)R = ((S\otimes 1)R)R \tag{4.36}$$

成立。记作

$$R(z) = \sum_{i\in I} R_i^{(1)}(z)\otimes R_i^{(2)} \quad \text{and} \quad R(z)^{-1} = \sum_{i\in I} R_i^{-1,(1)}(z)\otimes R_i^{-1,(2)}. \tag{4.37}$$

那么，我们可以计算

$$
\begin{aligned}
&L_1(z)L_1(z)^{-1}(a\otimes b) = L_1(z)\left(\sum_{i_1,i_2\in I} aS(R^{(1)}_{i_1}(z))S(R^{-1,(1)}_{i_2}(z+k\hbar e_\ell))\otimes R^{-1,(2)}_{i_2} bR^{(2)}_{i_1}\right)\\
&=\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4\in I} aS(R^{(1)}_{i_1}(z))S(R^{-1,(1)}_{i_2}(z+k\hbar e_\ell))R^{-1,(1)}_{i_3}(z+k\hbar e_\ell)R^{(1)}_{i_4}(z)\otimes R^{-1,(2)}_{i_3}R^{-1,(2)}_{i_2}bR^{(2)}_{i_1}R^{(2)}_{i_4}\\
&=a\otimes b,
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

其中我们使用了适用于 $R(z)$ 的 (4.36)，以及适用于 $R(z+k\hbar e_\ell)^{-1}$ 的类似恒等式。这就证明了 (4.35)。现在，利用 (4.35) 和记号 (4.37)，对于 $a,b\in Y_\hbar(\mathfrak{d})$，$L_1(z)^{-1}L_2(z)(a\otimes b)$ 等于

$$
\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4\in I} R^{-1,(1)}_{i_1}(z)R^{(1)}_{i_2}(z-k\hbar e_\ell)aS(R^{(1)}_{i_3}(z))S(R^{-1,(1)}_{i_4}(z+k\hbar e_\ell))\otimes R^{-1,(2)}_{i_4}R^{-1,(2)}_{i_1}bR^{(2)}_{i_2}R^{(2)}_{i_3},
\tag{4.39}
$$

If 利用 (4.36)，我们可以将其改写为 $\sum O^{(1)}aS(O^{(2)})\otimes O^{(3)}bS(O^{(4)})$ 的形式，其中

$$
\begin{aligned}
&\sum O^{(1)}\otimes O^{(2)}\otimes O^{(3)}\otimes O^{(4)}\\
&=R^{23}(z+k\hbar e_\ell)^{-1}R^{24}(z)^{-1}R^{13}(z)^{-1}R^{14}(z-k\hbar e_\ell)^{-1}\\
&=\left(\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\right)\left(R^{23}(z)^{-1}R^{24}(z)^{-1}R^{13}(z)^{-1}R^{14}(z)^{-1}\right)\\
&=\left(\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\right)\left((1\otimes 1\otimes\Delta^\gamma_\hbar)(R^{23}(z))^{-1}(1\otimes 1\otimes\Delta^\gamma_\hbar)(R^{13}(z))^{-1}\right)\\
&=\left(\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\right)\left((1\otimes 1\otimes\Delta^\gamma_\hbar)(\Delta^\gamma_\hbar\otimes 1)(R(z))^{-1}\right)\\
&=\left(\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{-k\hbar e_\ell/2}\otimes\tau_{k\hbar e_\ell/2}\right)\left((\Delta^\gamma_\hbar\otimes\Delta^\gamma_\hbar)(R(z)^{-1})\right).
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

与 (4.32) 中 $\triangleright_k$ 的定义比较可知，$L_1(z)^{-1}L_2(z) = R(z)^{-1}\triangleright_k$，因此，根据 (4.18) 中的定义，$\mathcal{S}(z)^\perp = R(z)\triangleright_k$。于是，

$$
\langle u\otimes v,\mathcal{S}(z)^\perp(a\otimes b)\rangle = \langle u\otimes v,(S^{-1}\otimes S^{-1})(R(z))\triangleright_k(a\otimes b)\rangle = \langle R(z)\cdot(u\otimes v),a\otimes b\rangle,
\tag{4.41}
$$

由 (4.33) 可知，该式成立，正如所需。 □

现在我们可以证明定理 4.3。首先注意到，(QV1) 和 (QV2) 显然成立。接下来证明 (QV3)，即 $\mathcal{S}$-局部性。

引理 4.8. 自同态 $\mathcal{S}(z)$ 满足

$$
\langle\mathcal{Y}^{13}_\hbar(z_1)\mathcal{Y}^{23}_\hbar(z_2),\mathcal{S}^{12}(z_1-z_2)(u\otimes v)\rangle = \langle\mathcal{Y}^{23}_\hbar(z_2)\mathcal{Y}^{13}_\hbar(z_1),u\otimes v\rangle.
\tag{4.42}
$$

证明。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{Y}_\hbar^{13}(z_1)\mathcal{Y}_\hbar^{23}(z_2), \mathcal{S}^{12}(z_1-z_2)(u\otimes v)\rangle &= \langle L_2(z_1-z_2)^{-1}L_1(z_1-z_2)\mathcal{Y}_\hbar^{13}(z_1)\mathcal{Y}_\hbar^{23}(z_2), u\otimes v\rangle \\ &\overset{(4.16)}{=} \langle L_2(z_1-z_2)^{-1}L_2(z_1-z_2)\mathcal{Y}_\hbar^{23}(z_2)\mathcal{Y}_\hbar^{13}(z_1), u\otimes v\rangle \\ &= \langle \mathcal{Y}_\hbar^{23}(z_2)\mathcal{Y}_\hbar^{13}(z_1), u\otimes v\rangle, \end{aligned} \tag{4.43}$$

对所有 $u, v \in Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 均成立，正如所需。 □

公理 (S1)-(S3) 直接由将 $\mathcal{S}(z)$ 识别为 $R(z)$ 的作用以及它满足的恒等式得出。六边形恒等式 (QV4) 则由 $R(z)$ 的余循环条件，以及 $\mathcal{Y}_\hbar$ 是推论 4.5 意义下的 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$-模同态这一事实立即推出。定理 4.3 的证明至此完成。

注 4.9。上述证明完全一般。事实上，可以证明，对于任意霍普夫代数 A 及其幂零导子 T，若给定一个谱 R-矩阵 $R(z) \in (A\otimes A)((z^{-1}))$ 和一个适当的对偶霍普夫代数 A^*，则真空模 $\mathrm{Ind}_A^{DA}(\mathbb{C})$ 具有量子顶点代数的结构。

4.2 量子 KZ 方程

本节研究与 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的谱 R-矩阵 $R(z)$ 相关的量子 KZ 联络；见 (2.30)。该联络系统的形式为

$$\nabla_i(\mathbf{z}) = R^{i-1,i}(z_{i-1}-z_i+k\hbar)\cdots R^{1,i}(z_1-z_i+k\hbar)\cdot R^{n,i}(z_n-z_i)\cdots R^{i+1,i}(z_{i+1}-z_i), \tag{4.44}$$

对于任意 $\mathbf{z} = (z_i)_{i\in I} \in \mathrm{conf}_I(X) := X\setminus\{z_i = z_j \mid i,j\in I, i\neq j\}$，其中一如既往 $X = \mathbb{P}^1$。按照[EK98a], ，我们希望证明，对于k 和 ℓ的特定选择，这组方程自然源自与余切双 Yangian 的中心扩张相关联的量子共形块。

4.2.1 中心扩张的双的模

在 [EK98a 的第 3], 节中，作者针对 $\mathfrak{g}$ 的中心扩张的对偶 Yangian，考察了双模的各种概念。部分原因是，普通 Yangian 的双作为代数并不易于确定。不过，对于 $\mathfrak{d} = T^*\mathfrak{g}$，我们可以完全掌握这个双。因此，我们只考虑双 Yangian 上的通常模。

设 W 是 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的有限维模，且 $\mathbf{z} = (z_i)_{i\in I} \subset X$ 是一个有限点集。对于任意 $i\in I$，我们考虑嵌入 $Y_\hbar(\mathfrak{d}) \cong Y_\hbar(\mathfrak{d})_{z_i} \to Y_\hbar(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}} := Y_\hbar(\mathfrak{d})^{\otimes|I|}$，将其嵌入到第 i 个因子中，并将 W 视为 $Y_\hbar(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}$ 的模，其作用仅对 $Y_\hbar(\mathfrak{d})_{z_i}$ 非平凡。

另一方面，亚纯 R 矩阵 $R(z)$ 给出了一个代数同态

$$\widehat{Y}^{*}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{\hat{\mathbf{z}}} \to Y_{\hbar}(\mathfrak{d})_{z_i}, \qquad \hat{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z} \setminus \{z_i\} = \{z_j\}_{j\in I\setminus\{i\}}. \tag{4.45}$$

利用这个映射，对于每个 $Y_{\hbar}(\mathfrak{d})$ 的有限维模 W 以及任意 $\mathbf{z} = \{z_i\}_{i\in I} \subset X$，我们都得到一个 $\widehat{Y}^{*}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}{}_{\hat{}\mathbf{z}}$ 的模 $W(z_i)$。

引理 4.10. 设 $Y_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z},i}$ 是 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}$ 的 Hopf 子代数，由 $Y^{*}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\hat{\mathbf{z}}_i}$ 和 $Y_{\hbar}(\mathfrak{d})_{z_i}$ 生成，则上述结构使 $W(z_i)$ 成为 $Y_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z},i}$ 的模。

现在可以将 $W_k(z_i)$ 定义为 $W(z_i)$ 从 $Y_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z},i}$ 到 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}$ 的诱导。作为向量空间，我们可以将 $\widehat{W}_k(z_i)$ 与 $Y^{*}_{\hbar}(\mathfrak{d})_{z_i} \otimes W_k$ 等同，其中 W_k 是由 W 得到的 $Y^{*}_{\hbar}(\mathfrak{d})^{\text{co-op}} \otimes \mathbb{C}[c_\ell]$- 模， c_ℓ 通过乘以 k 作用于该模。

4.2.2 量子共形块

设 $\{z_i\}_{i\in I} \subset X$ 为有限子集， $\{W_i\}_{i\in I}$ 为有限维模的有限族，其中模属于 $Y_{\hbar}(\mathfrak{d})$。此外，对所有 $i \in I$，设 $W_{i,\ k}(z_i)$ 为 $DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}$ 的对应模。张量积

$$M_k(\{W_i\}_{i\in I}, \mathbf{z}) \coloneqq \bigotimes_{i\in I} \widehat{W}_{i,k}(z_i) \tag{4.46}$$

是 $DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}$ 的模，其中 $c_{\ell,\ i} = c_{\ell,\ j}$ 对所有 $i \neq j$均通过 k 作用。因此，我们可以令 $DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z},\ k}$为由理想 $(c_{\ell,\ i} - c_{\ell,\ j})$ 和 $(c_{\ell,\ i} - k)$ 所定义的商 Hopf 代数；于是 $M_k(\{W_i\}, \mathbf{z})$ 是 $DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z},\ k}$ 的模，其中心荷为 k。我们已经看到，$Y^{*}_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})$ 是 $DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z},\ k}$的子代数。

定义 4.11。定义量子共形块 $B_k(\{W_i\}, \mathbf{z})$ 为不变泛函空间

$$B_k(\{W_i\}_{i\in I}, \mathbf{z}) \coloneqq \operatorname{Hom}_{Y^{*}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}}\left(M_k(\{W_i\}_{i\in I}, \mathbf{z}), \mathbb{C}[\![\hbar]\!]\right). \tag{4.47}$$

由于我们可以将 $\bigotimes_{i\in I} W_{i,k}(z_i)$ 识别为利用诱导-限制伴随将 $\bigotimes_{i\in I} W(z_i)$ 从 $Y_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}$ 诱导到 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z},k}$，因此得到一个同构

$$\begin{aligned} B_k(\{W_i\}_{i\in I}, \mathbf{z}) &= \operatorname{Hom}_{Y^{*}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_{\mathbf{z}}}\left(M_k(\{W_i\}_{i\in I}, \mathbf{z}), \mathbb{C}[\![\hbar]\!]\right) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]}\left(\bigotimes_{i\in I} W_i, \mathbb{C}[\![\hbar]\!]\right) = \bigotimes_{i\in I} W_i^{*}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

4.2.3 Segal-Sugawara 构造

令 R $\in Y_{\hbar}(\mathfrak{d}) \otimes Y^{*}_{\hbar}(\mathfrak{d})$ 是该双的 R-矩阵。我们通过以下公式定义 $Q \in DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ la

$$Q = \widehat{\nabla}^{\gamma}_{\hbar}\left(\left(S \otimes e^{k\hbar \operatorname{ad}(\partial_\ell)/2}\right) R^{21}\right), \tag{4.49}$$

其中，$\widehat{\nabla}_\hbar^\gamma$ 是 $\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 的乘法映射。当作用于 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 的光滑$\widehat{\ }$模上时，该定义是良定的；特别地，对于所有有限维 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$-模 W，它都作用于 W_k。

$\widehat{\ }$令 α 为 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 的自同构，它由 $\exp(\hbar(k\partial_\ell+\partial_\epsilon))$ 的共轭作用定义，并令 $\widehat{\ }W_k^\alpha$ 为模 W_k 经 α 扭曲所得的模。

引理 4.12. 映射 Q 给出一个同构 $Q\colon \widehat{W}_k \xrightarrow{\cong} \widehat{W}_k^\alpha$。

$\widehat{\ }$证明。由于 c_ℓ 在 W_k 上的作用是乘以 k，我们有

$$\widehat{\nabla}_\hbar^\gamma((S\otimes 1)\widetilde{R}^{21}) = \widehat{\nabla}_\hbar^\gamma(e^{-\hbar c_\ell\otimes\partial_\ell/2}((S\otimes 1)R^{21})e^{-\hbar c_\ell\otimes\partial_\ell/2}) = e^{-k\hbar\partial_\ell}Q \tag{4.50}$$

$\widehat{\ }$作用于 W_k时。此外，利用如下描述

$$S^2 = \mathrm{Ad}_{\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})}\left(\widetilde{\nabla}_\hbar^\gamma\left((S\otimes 1)\widetilde{R}^{21}\right)\right) \tag{4.51}$$

根据 Drinfeld 的 [Dri90], ，其中 $\widehat{\nabla}_\hbar^\gamma$ 是 $\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$ 的乘法映射，而 $S^2=\exp(\hbar\mathrm{ad}(\partial_\epsilon))$，我们推出 $\mathrm{Ad}_{\widehat{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})}(Q) = \exp(\hbar\mathrm{ad}(k\partial_\ell+\partial_\epsilon)) = \alpha$。 □

4.2.4 由 Segal-Sugawara 得到的 qKZ 方程

我们可以将 $M_k(\{W_i\}_{i\in I},\mathbf{z})$ 构造成 $\mathbf{z}\in\mathrm{conf}_I(X)$ 上的无限维向量丛。此外，利用识别 $W_i(z_i) = W_i\otimes Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$，我们可以平凡化这个向量丛。设 $I_{\mathbf{z},\mathbf{z}'}\colon M_k(\{W_i\}_{i\in I},\mathbf{z}) \to M_k(\{W_i\}_{i\in I},\mathbf{z}')$ 是另一个 $\mathbf{z}'\in\mathrm{conf}_I(X)$ 的识别。同样的数据诱导出 $B_k(\{W_i\}_{i\in I},\mathbf{z})$ 的平凡化，其纤维为 $\bigotimes_{i\in I}W_i^*$。

在 $M_k(\{W_i\}_{i\in I},\mathbf{z})$ 上定义差分联络如下：

$$A_i(\mathbf{z}) = I_{\mathbf{z},\mathbf{z}+k\hbar\mathbf{e}_i}Q_i, \tag{4.52}$$

其中 Q_i 是作用于第 i 个张量因子上的量子 Segal-Sugawara 算子 (4.49)。显然，这些构成一个相容的差分方程组，因为 Q_i 在作用于张量因子时彼此对易。

现在假设 $k\ell+1=0$。那么 $\alpha=\exp(k\hbar\partial_t)$，由此可见

$$A_i(\mathbf{z})\colon M_k(\{W_i\}_{i\in I},\mathbf{z}) \to M_k(\{W_i\}_{i\in I},\mathbf{z}+k\hbar\mathbf{e}_i). \tag{4.53}$$

$\widehat{\ }$此外，∂_t 量子化为 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 的 Hopf 导子，因此在 $\widehat{Y}_{\hbar,\ell}^*(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}$ 上定义了一个 Hopf 导子。根据引理 4.12，我们得到

$$A_i(\mathbf{z})a_j(t) = a_j(t_j+\delta_{ij}k\hbar)A_i(\mathbf{z}), \qquad a\in\widehat{Y}_{\hbar,\ell}^*(\mathfrak{d}), \tag{4.54}$$

$\widehat{}$对于 $a_j \in Y$ $\overset{*}{\hbar}$, $\ell(\mathfrak{d})$余可交换z_j $\subseteq \widehat{Y}^*_{\hbar}$, $\ell(\mathfrak{d})$余可交换$\mathbf{z}$ 。这可以看作经典恒等式的量子化。 ty

$$[\partial_{t_i} + L_i, a_j] = \delta_{ij}(\partial_t a)_j\,, \qquad a \in \widehat{\mathfrak{d}}_{<0,\ell}, \tag{4.55}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$对于元素 $a_j \in \mathfrak{d}_{<0,\ \ell,\ z_j} \subseteq \mathfrak{d}_{<0,\ \ell,\ \mathbf{z}}$ 并且经典 Segal-Sugawara 算子 L_i 作用于第i个张量因子。后一个公式 (4.55) 可仿照 [FBZ04, 引理 13.2.3.] 推导。

$\widehat{}$注 4.13. 我们来讨论为什么对于任意一对 (k,ℓ), A_i(z) 不保持 $Y^*_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})$。根据引理 4.12，我们有 Ad($Q_i$) $=$exp($\hbar$ad($k\partial_\ell + \partial_\epsilon$))$^{(i)}$。在半经典极限中，即 $\hbar$ 系数，我们已经可以看出问题。 A_i(z) 的 $\hbar$ 系数等于 $k\partial_{z_i} + L^{(i)}_{-1}$，其中$[L_{-1}, a] = -(k\partial_\ell + \partial_\epsilon)a$ 对于 $a \in \widehat{\mathfrak{d}}$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$对每个 $a_{(t-z_i)^n} \in \mathfrak{d}_{<0,\ z_i}$ 相应的元素具有如下形式：

$$\frac{a}{(t-z_i)^n} = a^{(i)}_{-n} - \frac{\partial^{n-1}_{z_i}}{(n-1)!}\sum_{j\neq i}\sum_{m\geq 0}\frac{a^{(j)}_m}{(z_i-z_j)^{m+1}}. \tag{4.56}$$

现在对 $j \neq i$ 应用 $\partial_{z_j} + L^{(j)}_{-1}$，得到

$$-\frac{\partial^{n-1}_{z_i}}{(n-1)!}\sum_{j\neq i}\sum_{m\geq 0}\frac{(-(k\partial_\ell + \partial_\epsilon) + k\partial_t)a_m)^{(j)}}{(z_i-z_j)^{m+1}}. \tag{4.57}$$

$\widehat{}$除非它为零，否则它不可能来自 $\mathfrak{d}_{<0,\ \ell,\ \mathbf{z}}$中的元素；而它恰好在 $k\ell+1=$0 时为零，因此$\widehat{\mathfrak{d}}_{<0,\ \ell,\ \mathbf{z}}$ 在这种情况下仅由 A_j(z) 归一化。

注 4.14。注意， $k\ell + 1 = 0$ 意味着定义真空顶点算子代数的双线性形式具有 $k(\kappa_0 + \ell\kappa_{\mathfrak{g}})$ $= k\kappa_0 - \kappa_{\mathfrak{g}}$ 的形式。项 $-\kappa_{\mathfrak{g}}$ 正是[DGP*18*]或 [BCDN23，附录 A]中发现的边界反常。在经典情形下，这一层确保共形元是与 κ_0相对应的卡西米尔元。这一现象在量子层面依然存在。

关键的是，方程 (4.54) 意味着 Q_i 可下降到关于 $Y^*_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})^{\text{co-op}}_{\mathbf{z}}$ 的商上。将其在商上的作用取对偶，我们得到一个定义良好的算子

$$A^*_i(\mathbf{z})\colon B_k(\{W_i\}_{i\in I}, \mathbf{z} - \hbar k\mathbf{e}_i) \to B_k(\{W_i\}_{i\in I}, \mathbf{z}). \tag{4.58}$$

与 [EK98a]，类似，我们现在可以推导出以下公式。

定理 4.15。量子 KZ 联络由下式给出

$$\begin{aligned}\nabla_i(\mathbf{z}) &\coloneqq (A^*_i(\mathbf{z} + k\hbar\mathbf{e}_i))^{-1}\\ &= R^{i-1,i}(z_{i-1} - z_i + k\hbar)\cdots R^{1,i}(z_1 - z_i + k\hbar)\cdot R^{n,i}(z_n - z_i)\cdots R^{i+1,i}(z_{i+1} - z_i).\end{aligned} \tag{4.59}$$

4.3 三维规范理论中的例子

到目前为止，我们一直关注普通李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{d} = T^*\mathfrak{g}$。不过，只要仔细遵循 Koszul 符号规则，就可以轻松地将所有结果推广到微分分次李代数 $\mathfrak{h}$。现在考虑$\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \ltimes V[-1]$，其中 $\mathfrak{g}$是普通李代数，而 V是置于上同调次数 1 的有限维 $\mathfrak{g}$-模。余切 $\mathfrak{d} = T^*\mathfrak{h}$ 与辛约化 $T^*V////G$密切相关，事实上，它与其切李代数 [Niu24]等同。这个李代数出现在 [CG19],中，其仿射李代数是由 (G, T^*V) 定义的 3 维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论的 B 扭曲所对应的微扰边界顶点算子代数。因此，对于每个 $\mathfrak{h}$，我们构造杨超代数 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 和量子顶点代数$\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{d})$，后者量子化了微扰边界顶点算子代数 $V_k(\mathfrak{d})$。现在我们考察 $\mathfrak{d}$ 的两个具体例子。

4.3.1 $\mathfrak{d} = T^*\mathfrak{g}$ 对于约化李代数 $\mathfrak{g}$

设 $\kappa = \kappa_0 + k\kappa_{\mathfrak{g}}$，其中一如既往，$\kappa_{\mathfrak{g}}$是 $\mathfrak{g}$的 Killing 型，而 κ_0是 $\mathfrak{g}$与 $\mathfrak{g}^*$之间的配对。在这种情况下，李代数 $V_1(\mathfrak{d})$包含一个李子代数 $V_k(\mathfrak{g})$和一个交换子代数$\mathcal{O}(t\mathfrak{g}[\![t]\!])$，后者是 $t\mathfrak{g}[\![t]\!]$上的函数代数。这两个子代数的算子乘积展开为

$$x(z)f(w) \sim \frac{\kappa_0(x,f)}{(z-w)^2} + \frac{[x,f](w)}{z-w}, \qquad x \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*. \tag{4.60}$$

设 $D_{G,\ k}$ 是 G 在层 k [AG02, GMS01]上的手征微分算子代数。它由 $V_k(\mathfrak{g})$ 和 $\mathcal{O}(G[\![t]\!])$ 生成，并满足算子乘积展开

$$x(z)f(w) \sim \frac{x(f)(w)}{z-w}, \qquad x \in \mathfrak{g}, f \in \mathcal{O}(G). \tag{4.61}$$

这里，x 通过 G 上的左不变向量场 x_L 作用于 f，该向量场由 x定义。已知 [GMS01]，$D_{G,\ k}$ 的 0 次部分是 $\mathcal{O}_G$，而 $D_{G,\ k}$ 的一次部分同构于 $\mathrm{Der}(G) \oplus \Omega^1(G)$，作为一个 $\mathcal{O}_G$-模。它当然由这两个部分生成。专家们都知道，并且这一结论至少隐含在 [GMS01], 中： $V_1(\mathfrak{d})$ 嵌入 $D_{G,\ k}$。不过，由于我们找不到明确的证明，为求完整起见，在此给出证明。

引理4.16. 设 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $\omega \in \Omega^1(G)$，则

$$x(z)\omega(w) \simeq \frac{(x_L, \omega)(w)}{(z-w)^2} + \frac{x_L \rhd \omega(w)}{z-w}, \tag{4.62}$$

其中，$x_L \rhd \omega$ 表示左不变向量场 x 在 $\Omega^1(G)$ 上的作用。

证明。令 $\omega = f\partial(g)$，其中 f、$g \in \mathcal{O}(G)$，则

$$\begin{aligned} x(z)f(w)\partial g(w) &\sim \frac{x_L(f)(w)\partial g(w)}{z-w} + f(w)\partial\frac{x_L(g)(w)}{z-w} \\ &= \frac{f(w)x_L(g)(w)}{(z-w)^2} + \frac{x_L(f)(w)\partial g(w) + f(w)\partial(x_L(g)(w))}{z-w} \\ &= \frac{(x,\omega)(w)}{(z-w)^2} + \frac{x \rhd \omega(w)}{z-w}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

证明至此完成。

□

由此得到以下推论。

推论4.17。设 $\mathfrak{g}^* \subseteq \Omega^1(G)$为右不变1-形式的子集。那么由$D_{G,k}$ 生成的子代数与 $V_1(\mathfrak{d})$同构。

因此，我们构造了$D_{G,k}$的一个较大顶点子代数的量子化。事实上，$D_{G,k}$可以写成 $V_1(\mathfrak{d})$的扩张。[6]

命题4.18。存在一个顶点算子代数的同构：

$$\mathrm{Ind}^{\widehat{\mathfrak{d}(\mathcal{K})}}_{\mathfrak{d}(\mathcal{O})\oplus\mathbb{C}c}(\mathcal{O}_G) \cong D_{G,k}, \tag{4.64}$$

其中 $\mathcal{O}_G$ 是 G上的函数环，视为通过代数映射$U(\mathfrak{d}(\mathcal{O})) \to U(\mathfrak{g})$作用的 $U(\mathfrak{d}(\mathcal{O}))$的模。

证明。方程 (4.61) 蕴含存在一个从方程 (4.64) 左端到右端的顶点算子代数态射。另一方面，$D_{G,k}$ 作为一个向量空间，同构于

$$\mathrm{Sym}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) \otimes \mathcal{O}_{G(\mathcal{O})} = \mathrm{Sym}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) \otimes \mathrm{Sym}(t^{-1}\mathfrak{g}^*[t^{-1}]) \otimes \mathcal{O}_G, \tag{4.65}$$

因为 $G(\mathcal{O}) = G \ltimes t\mathfrak{g}(\mathcal{O})$。因此，上述态射的关联分次是一个同构。这就完成了证明。

□

因此，$D_{G,\ k}$ 可以写成如下形式的 $V_1(\mathfrak{d})$的扩张：

$$D_{G,k} = \bigoplus_{V\in\mathrm{Irrd}(G)} M_V \otimes V^*, \tag{4.66}$$

[6]感谢 S. Nakatsuka 向我们解释了 $V(\mathfrak{d})$ 与 $D_{G,\ k}$ 之间的关系。

其中，$M_V = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{d}\ \mathcal{O}\ ()\oplus\mathbb{C}c}^{\mathfrak{d}(\mathcal{K})} V$ 是与 $\mathfrak{d}$-模 V对应的韦尔模。现在我们可以定义一个类似的 $\mathcal{V}_1(\mathfrak{d})$模:

$$\mathcal{D}_{G,k} \coloneqq \bigoplus_{V\in \mathrm{Irrd}(G)} \mathcal{M}_V \otimes V^* = \mathrm{Ind}^{\widehat{DY}_{\hbar,\ell}}_{Y_\hbar(\mathfrak{d})\oplus\mathbb{C}c}(\mathcal{O}_G), \tag{4.67}$$

其中 $\mathcal{M}_V$是诱导模 $\mathcal{M}_V \coloneqq \mathrm{Ind}^{DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})\ Y_\hbar(\mathfrak{d})\oplus\mathbb{C}c} V$。我们提出以下猜想。

猜想 4.19。$DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{d})$-模 $\mathcal{D}_{G,\ k}$ 具有量子顶点代数结构，并将 $\mathcal{V}_1(\mathfrak{d})$ 的量子顶点代数结构扩展到该模上。

4.3.2 仿射 $\mathfrak{gl}(1|1)$与 $\beta\gamma$ 顶点算子代数

作为另一个例子，我们考虑 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \ltimes V[-1]$，其中 $\mathfrak{g}$是 $(\mathbb{C}^\times)^r$的李代数，而 $V = \mathbb{C}^n$是由荷矩阵 ρ 定义的 $(\mathbb{C}^\times)^r$ 的一个表示。相关的顶点代数 $V_k(\mathfrak{d})$ 已在 [BCDN23], 中研究，并被证明与 $\beta\gamma$ 顶点算子代数的 BRST 上同调有关。最简单的例子是 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ 且 $V = \mathbb{C}$ 权为 1 的情形。在这种情况下，$\mathfrak{d}$ 是最小的 A 型李超代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$。因此，我们的构造产生了$V_k(\mathfrak{gl}(1|1))$的量子化$\mathcal{V}_{\hbar,\ k}(\mathfrak{gl}(1|1))$。对于这个例子，我们设 $\ell = -1$ 和 $k = 1$。

顶点代数 $V_1(\mathfrak{gl}(1|1))$ 有由整数 $(n, e) \in \mathbb{Z}^2$ 标记的单流模，它们定义为真空模的谱流。

$$V_{n,e} \coloneqq \sigma^{n,e} V_1(\mathfrak{gl}(1|1)), \qquad \sigma^{n,e} = \exp(nN + eE), \tag{4.68}$$

其中，E 和 N 是 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的标准玻色生成元，而 $\sigma^{n,\ e}$ 是由 $nN + eE$ 生成的谱流自同构。我们有顶点算子代数的一个识别 [CR13]:

$$V_{\beta\gamma} \otimes V_{bc} \cong \bigoplus_n V_{n,0}. \tag{4.69}$$

这里，$V_{\beta\gamma}$ 是辛玻色子顶点算子代数，V_{bc} 是自由费米子顶点算子代数。对于量子代数$DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{gl}(1|1))$，对应于 $\sigma^{n,\ m}$ 的 Kac-Moody 对称性仍然存在，因此我们可以考虑模

$$\mathcal{V} \coloneqq \bigoplus_n \sigma^{n,0} \mathcal{V}_1(\mathfrak{gl}(1|1)). \tag{4.70}$$

我们提出如下猜想。

猜想 4.20。$DY_{\hbar,\ \ell}(\mathfrak{gl}(1|1))$-模 $\mathcal{V}$ 具有量子顶点代数的结构，它扩张了 $\mathcal{V}_1(\mathfrak{gl}(1|1))$。它是对 $V_{\beta\gamma} \otimes V_{bc}$ 的量子化。

令 $\mathfrak{u}$ 我们回到由 char 定义的 $G = (\mathbb{C}^\times)$ 的表示 $V = \mathbb{C}^{n\ r}$ 的一般情形。 ge

矩阵 ρ 定义的 () 的表示。假设我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{(\rho^!)^T} \mathbb{Z}^{n-r} \longrightarrow 0. \tag{4.71}$$

那么已知，与 ρ 和 $\rho^!$ 对应的三维规范理论互为镜像对偶。令 $\mathfrak{d}_\rho = T^*(\mathfrak{g} \ltimes V[-1])$ 为与 ρ对应的余切李代数。我们再次选取 $\ell = -1$和 $k = 1$。那么，顶点算子代数 $V_1(\mathfrak{d}_\rho)$ 存在由 $(\mu, \lambda) \in \mathbb{Z}^{2r}$ 标记的谱流 $\sigma^{\mu,\lambda}$，而非微扰顶点算子代数 $V_{B,\rho}$ 定义为

$$V_{B,\rho} \coloneqq \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^r} \sigma^{\mu,0} V_1(\mathfrak{d}_\rho). \tag{4.72}$$

另一方面，可以将 $V_{A,\rho^!}$ 定义为 $V^n_{\beta\gamma} \otimes V^n_{bc}$ 在 $\mathfrak{gl}(1)^{n-r}$ 指定的 $\rho^!$作用下的相对 BRST 上同调：

$$V_{A,\rho^!} \coloneqq H_{\mathrm{BRST,rel}}(\mathfrak{gl}(1)^{n-r}, V^n_{\beta\gamma} \otimes V^n_{bc}). \tag{4.73}$$

我们可以将 $V_{A,\rho^!}$ 视为辛约化 $T^*V////(\mathbb{C}^\times)^{n-r}$上的手征微分算子。 [BCDN23] 的主要结果之一是以下定理。

定理 4.21（[BCDN23] 定理 4.4）。$V_{A,\rho^!} \cong V_{B,\rho}$ 作为顶点算子代数。

同样，我们构造了量子顶点算子代数 $\mathcal{V}_1(\mathfrak{d}_\rho)$。量子双的谱流自同构 $\sigma^{\mu,\nu}$仍然存在。定义量子扩张

$$\mathcal{V}_{B,\rho} \coloneqq \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^r} \sigma^{\mu,0} \mathcal{V}_1(\mathfrak{d}_\rho). \tag{4.74}$$

我们提出以下猜想。

猜想 4.22。模 $\mathcal{V}_{B,\rho}$ 具有量子顶点算子代数的结构，它扩张了 $\mathcal{V}_{\hbar,1}(\mathfrak{d}_\rho)$。它提供了 $T^*V////(\mathbb{C}^\times)^{n-r}$ 上手征微分算子的量子化。

记号

- $\mathfrak{g}$ 是一个有限维复李代数，$\mathfrak{d} \coloneqq \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*$ 是余切李代数，其中半直积使用 $\mathfrak{g}$ 在其对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用。我们固定一组基 $\{I_\alpha\}_{\alpha=1}^d \subseteq \mathfrak{g}$，并将其对偶基记为 $\{I^\alpha\}_{\alpha=1}^d \subseteq \mathfrak{g}^*$。

- $\mathcal{O} \coloneqq \mathbb{C}[\![t]\!]$ 和 $\mathcal{K} \coloneqq \mathbb{C}((t)) = \mathcal{O}[t^{-1}]$ 分别是形式变量 t的泰勒幂级数环和（有下界的）洛朗幂级数环。我们也将 $\mathfrak{g}(\mathcal{O}) = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}$ 和 $\mathfrak{g}(\mathcal{K}) = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{K}$ 记作

$\mathfrak{d}(\mathcal{O}) = \mathfrak{d} \otimes \mathcal{O}$ 和 $\mathfrak{d}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d} \otimes \mathcal{K}$。对于 $a \in \mathfrak{d}$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，我们记作 $a_m = a \otimes t^m \in \mathfrak{d}(\mathcal{K})$。涉及 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{K}$ 上的对象的张量积，均默认采用完备化形式，并相对于这些空间的 (t)-进拓扑取完备化。

- $\partial_t\colon\ \mathfrak{d}(\mathcal{K}) \to \mathfrak{d}(\mathcal{K})$ 是关于形式变量 t 的导子，$\partial_\epsilon = \psi\partial_t$ 对于由 Killing 型 $\kappa_0\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \to \mathbb{C}$ 确定的同构 $\psi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$，并且对于每个 $s \in \mathbb{C}$，我们记作 $\partial_s = \partial_t + s\partial_\epsilon$。

- $\kappa_0\colon\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \to \mathbb{C}$ 是 $\mathfrak{g}$ 与其对偶空间的配对，而 $\kappa_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型。κ_0 和 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 都通过扩张为 0，成为双线性形式 $\kappa_0, \kappa_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \to \mathbb{C}$。对于任意 $\ell \in \mathbb{C}$，我们记作 $\kappa_\ell = \kappa_0 + \ell\kappa_{\mathfrak{g}}$。

- 对于任意 $\ell, s \in \mathbb{C}$，$\widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,s} \coloneqq \mathbb{C}\partial_s \ltimes (\mathfrak{d}(\mathcal{K}) \oplus \mathbb{C}c_\ell)$ 是关于双线性形式 κ_ℓ 和导子 ∂_s 与 $\widehat{\mathfrak{d}}_\ell$，同 $\mathfrak{d}$ 相关联的仿射 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{s}_{,<0} \coloneqq t^{-1}\mathfrak{d}[t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c_\ell, \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,s,\geq 0} = \mathbb{C}\partial_s \ltimes \mathfrak{d}(\mathcal{O}) \subset \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,s}$；参见第 2.3 节。此外，我们记作 $\widehat{\mathfrak{d}}_{\ell,<0} \coloneqq \widehat{\mathfrak{d}}_{\ell,\ell,<0}, \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\geq 0} \coloneqq \widetilde{\mathfrak{d}}_{\ell,\ell,\geq 0} \subset_\sim \quad {}_\sim\mathfrak{d}_\ell \coloneqq \mathfrak{d}_{\ell,\ell}$。

- 对于带有余乘 Δ、定义在环 R 上的霍普夫代数 H，我们使用 Sweedler记号 $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes_R h_{(2)}$。此外，若 H 在结合 R-代数 A上具有右 Hopf作用 $\triangleleft$，则半直积 $H \ltimes_R A$（也称为叉积，常记作 $H\#_R A$，例如见我们先前的工作 [AN24b]）是一个底空间为 $H \otimes_R A$、乘法为

$$(h \otimes_R 1)(1 \otimes_R a) = h \otimes_R a \quad \text{and} \quad (1 \otimes_R a)(h \otimes_R 1) = \sum_{(h)} h^{(1)} \otimes_R (a \triangleleft h^{(2)}) \tag{A.1}$$

对所有 $a \in A, h \in H$均成立。类似地，若 H 在 A上具有左 Hopf作用 $\triangleright$，我们将半直积记作 $A \rtimes_R H$。

- $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 是 $\mathfrak{d}$ 的 Yangian，$\Delta_\hbar^\gamma$ 是其余乘，而 $R(z)$ 是其谱 R-矩阵，以上内容均由 [AN24b] 引入；另请参阅第 2 节 2.1 的简要概述。此外，$Y_\hbar^\circ(\mathfrak{d}) \subset Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 是由 $\mathfrak{d}[t] \subset \mathfrak{d}(\mathcal{O})$ 生成的 Hopf 子代数。

- $Y_\hbar^*(\mathfrak{d})$ 和 $DY_\hbar(\mathfrak{d}) = Y_\hbar(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} Y_\hbar^*(\mathfrak{d})^{\text{余乘}}$ 分别是 Yangian 的对偶与双结构，已在第 2.2 节中介绍；我们用 $\Delta_\hbar^\gamma$ 表示整个双结构 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 上的余乘。R-矩阵 $DY_\hbar(\mathfrak{d})$ 记为 R。特别地，我们将其与 $Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 的谱R-矩阵 R 区分开来，方法是省略 z-依赖性；这与以下事实一致：$R(z)$ 可视为平移 $t \mapsto t + z$ 在 $z = \infty$ 处的幂级数展开，其中平移作用于 R。

- 对于任意 $\ell \in \mathbb{C}$，$\widetilde{Y}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) = \mathbb{C}[\partial_\ell] \ltimes Y_\hbar(\mathfrak{d})$ 是由导子 ∂_ℓ 扩张的 Yangian；$Y^*_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) = \widehat{\frown} Y_\hbar(\mathfrak{d}) \otimes \mathbb{C}[c_\ell]$ 是由中心元 c_ℓ 扩张的对偶 Yangian；$DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) = Y_\hbar(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} \widehat{Y}^*_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$co-op 是中心扩张双 Yangian，而 $\widetilde{DY}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) = \widetilde{Y}_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d}) \otimes_{\mathbb{C}[\![\hbar]\!]} \widehat{Y}^*_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})$co-op 是完整 Kac–Moody 双 Yangian；参见第 2.3 节。

• 我们用 $X = \mathbb{P}^1$ 表示黎曼球面。对于任意有序有限集 $\mathbf{z} = (z_i)_{i\in I} \subset X := \mathbb{P}^1$，其中 I 是一个含有 $|I| \in \mathbb{N}$ 个元素的有限指标集，我们用 $Y_\hbar(\mathfrak{d})_\mathbf{z}$ $Y^*_\hbar(\mathfrak{d})_\mathbf{z}$ 和 $DY_\hbar(\mathfrak{d})_\mathbf{z}$ 分别表示 Yangian、其对偶及其双的因子化版本，见第 3.1 节。$\widetilde{}$ $\widehat{}$ $\widetilde{}$ 类似地，我们用 $Y_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_\mathbf{z}$ $Y_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_\mathbf{z}$ 和 $DY_{\hbar,\ell}(\mathfrak{d})_\mathbf{z}$ 表示这些扩张版本的因子化版本。

参考文献

[Abe25] R. Abedin, 《通过环群一致化得到 Hitchin系统的 r-矩阵结构》, Ann. Henri Poincar´e（2025）。[AG02] S. Arkhipov 和 D. Gaitsgory, 《通过手征代数研究环群上的微分算子》, 《国际数学研究通知》2002（2002）165–210。[AN24a] R. Abedin 和 W. Niu, 《由 G-丛的模空间得到量子群胚》, arXiv 预印本 arXiv:2411.05068（2024）。[AN24b] R. Abedin 和 W. Niu, 《余切李代数的杨氏代数与谱 R-矩阵》, 2024。arXiv:2405.19906 [math.QA]。[BCDN23]A. Ballin、T. Creutzig、T. Dimofte 和 W. Niu, 《编织张量范畴的三维镜像对称性》, 2023。arXiv:2304.11001 [hep-th]。https://arxiv.org/abs/2304.11001。[BD04] A. Beilinson 和 V. G. Drinfeld, 《手征代数》, 第 51 卷, 美国数学会, 2004。[BD25] A. Beilinson 和 V. Drinfeld, 《手征代数》, 第 51 卷, 美国数学会, 2025。[BZFN10] D. Ben-Zvi、J. Francis 和 D. Nadler, 《导出代数几何中的积分变换与 Drinfeld 中心》, 《美国数学会杂志》23（2010）909–966。[CG19] K. Costello 和 D. Gaiotto, 《顶点算子代数与三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论》, 《高能物理学杂志》2019（2019）1–39。[CR13] T. Creutzig 和 D. Ridout, 《扩展 $\mathfrak{gl}(1|1)$的W代数》, 《李理论及其在物理学中的应用：第九届国际研讨会》, Springer, 2013, 第 349–367 页。[DGP18] T. Dimofte、D. Gaiotto 和 N. M. Paquette, 《三维超共形场论中的对偶边界条件》, 《高能物理学杂志》2018（2018）1–101。

[Dri86] V. Drinfeld, 《量子群》, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI 155（1986）18–49。[Dri90] ———, 《近余交换 Hopf 代数》, 列宁格勒数学杂志 1（1990）321–342。[EGNO16] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik, 《张量范畴》, 第 205 卷, 美国数学会, 2016。[EK96] P. Etingof 和 D. Kazhdan, 《李双代数的量子化，III》, 1998。arXiv:q-alg/9610030。https://arxiv.org/abs/q-alg/9610030。[EK98a] ———, 《李双代数的量子化，IV》, 1998。arXiv:math/9801043 [math.QA]。https://arxiv.org/abs/math/9801043。[EK98b] ———, 《李双代数的量子化，V》, 1998。arXiv:math/9808121 [math.QA]。https://arxiv.org/abs/math/9808121。[ESW22] C. Elliott、P. Safronov 和 B. R. Williams, 《超对称杨–米尔斯理论的扭曲分类》, Selecta Mathematica 28（2022）73。[FBZ04] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi, 《顶点代数与代数曲线》, 第 88 号, 美国数学会, 2004。[Fel98] G. Felder, 《黎曼曲面上的 KZB 方程》, 《量子对称性》（莱乌什, 1995）, North-Holland, 阿姆斯特丹（1998）687–725。´Gar[N. Garner, 《顶点算子代数与拓扑扭曲的 Chern–Simons-物质理论》, 《高能物理学杂志》2023（2023）1–47。23] GMS[V. Gorbounov、F. Malikov 和 V. Schechtman, 《齐性空间上的手征微分算子》, 《国际数学与数学科学杂志》26（2001）83–106。01] Kas[C. Kassel, 《量子群》, Springer, 1995。95] Niu[W. Niu, 《量子群与辛约化》, 2024。arXiv:2411.24]math.RT04195 [。]RSTS[N. Reshetikhin 和 M. Semenov-Tian-Shansky, 《量子流群的中心扩张》, 数学物理快报 19（1990）133–142。