arXiv:2512.17000v1 [math.QA] 18 Dec 2025

A GCartan 型提升的几何实现

D. BAGIO、G. A. GARC´IA、O. M´ARQUEZ

Abstract. 我们提出一种新方法，用于计算 Cartan 型对角型编织向量空间的 Nichols 代数玻色化的提升。该方法以与量子群相关的结构映射取代繁重的计算，从而回答了 Andruskiewitsch 和 Schneider 在 [AS3]，中提出的一个问题。他们对阶与 210 互素的有限阿贝尔群上的有限维复尖点 Hopf 代数进行了分类。作为应用，并为了给出不太技术性的例子，我们用该方法重新得到 Drinfeld-Jimbo 型编织的 A_n 型提升（在 [AS2]，中计算）、 B_2 型提升（在 [BDR]，中计算）以及 B_3 型提升（在 [BGM] 中计算）。此外，对于 $\theta \geq 2$，我们给出 B_θ 型和 D_θ 型的所有提升，由此为 Drinfeld-Jimbo 型编织提供新的显式提升无限族。

1. Introduction

本研究旨在为复有限维尖点霍普夫代数的分类问题作出贡献。霍普夫代数是含幺结合代数，配备了相容的余代数结构和一个称为反演的特殊线性映射。它们自然地出现在数学和理论物理的许多领域，因为它们通过表示范畴编码几何对象的（经典与量子）对称性。基本例子包括群代数、仿射代数群上的函数代数、李代数的普遍包络代数及其量子版本。

背景。 一般复有限维霍普夫代数的分类问题是一个艰难的问题，吸引了不同背景的多位数学家的关注。其难点可能在于一般性结构结果较少；相关进展主要针对维数固定的霍普夫代数（Kaplansky早在1975年提出的问题）、维数可分解为少数素数之积的霍普夫代数，例如 p, p^2 or pq，或者具有额外结构的霍普夫代数，例如作为代数是半单的，或作为余代数是尖点的。尽管作出了这些努力，仍有大量问题悬而未决；例如，分类问题仍未解决的最小维数是24，而目前只对维数为 $p$or p^2 的霍普夫代数完成了分类，详情及参考文献见 [BGa]。对半单霍普夫代数的研究推动了融合范畴理论的发展，并且已有若干结果通过将其应用于霍普夫代数的有限维表示范畴而得出。尖点霍普夫代数这一类或许是结构结果方面理解得最为透彻的，这得益于一种用于研究它们的通用技术的存在：Andruskiewitsch 和 Schneider [AS1]所发展的提升方法

该理论中的一个经典结果是 Milnor、Moore、Cartier、Kostant 和 Gabriel 著名的定理，该定理指出，任意余交换复 Hopf 代数都是

2010年数学主题分类：16T05、16T20、17B37、20G42*Keywords:* 尖点 Hopf 代数；量子群；提升方法。D. Bagio 曾获圣卡塔琳娜州研究与创新支持基金会（FAPESC）第21/2024号公告的部分资助。G. A. García 曾获 CAPES/PRINT计划（巴西）和 CONICET（阿根廷）的部分资助。

李代数的普遍包络代数与群代数的半直积。余交换 Hopf 代数是尖点 Hopf 代数的特例。尖点 Hopf 代数具有这样的性质：所有简单子余代数都是一维的；等价地说，它们的余根（即所有简单子余代数之和）是群代数。特别地，有限维尖点 Hopf 代数的对偶是基本代数。尖点 Hopf 代数中非平凡且具有代表性的例子包括量子普遍包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$，它们是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的普遍包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的（多参数）变形；还包括它们的有限维商，称为小量子群或 Frobenius-Lusztig 核 $u_q(\mathfrak{g})$，其中 q 为单位根。

提升方法。 提升方法是一种用于分类尖点 Hopf 代数，或更一般地说，具有*Chevalley* 性质的 Hopf 代数的程序，也就是余根为 Hopf 子代数的 Hopf 代数。粗略来说，该方法步骤如下。设 A为一个复尖点 Hopf 代数，记其余根为 A_0 。由于 A_0 是 Hopf 子代数，余根过滤是 Hopf 代数过滤，因此相关分次余代数 $\operatorname{gr} A$ 是一个 Hopf 代数。到零次分量 $\operatorname{gr} A \twoheadrightarrow A_0$ 的投影存在一个 Hopf 代数截面；根据 Majid 和 Radford 的结果（参见[Ra, 定理 11.7.1], ），Hopf 代数 $\operatorname{gr} A$ 同构于双积 或玻色化$R\#A_0$。作为代数，玻色化由半直积给出，因此这一结果与关于余交换 Hopf 代数的经典结果相似。事实证明， R 并非通常的 Hopf 代数，而是编织范畴 ${}^{A_0}_{A_0}\mathcal{YD}$ 中关于 A_0的 Yetter-Drinfeld 模所构成的 Hopf 代数。因此，假设由余根 A_0 给出的（余半单）Hopf 代数的结构已知，目标便是描述所有可能的编织霍普夫代数 R ，以及所有满足 $\operatorname{gr} L$ 同构于 $R\#A_0$的可能 Hopf 代数 L 。这些 Hopf 代数 L称为 $R\#A_0$的提升。

目前大多数已知结果都针对尖点 Hopf 代数，尤其是当余根 A_0 是某个阿贝尔群 Γ 的群代数 $\mathbb{C}\Gamma$ ，且 A 是有限维时；关于最新综述，参见 [An3] 。在这种阿贝尔 情形下，所有有限维编织霍普夫代数都是对角编织的编织向量空间上的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$。Heckenberger 对这类有限维 Nichols 代数进行了分类 [H]，这使 Andruskiewitsch 和 Schneider 得以在 [AS3] 中证明著名的分类定理：对于阶不被 210 整除的有限阿贝尔群上的有限维复尖点 Hopf 代数，该定理给出了分类，参见定理 2.9。关于群阶的这一条件确保了玻色化中的编织霍普夫代数 R 所对应的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$由与复单李代数相对应的有限 Cartan 矩阵决定。上述定理实际上通过递归公式描述了玻色化 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 的所有可能提升 L ：任何这样的 Hopf 代数都同构于一个 Hopf 代数 $u(\mathcal{D},\ \lambda,\ \mu)$，其中 $\mathcal{D}$ 是与 Cartan 矩阵及群 Γ上的主实现相关的 Cartan 数据，而 λ、 μ 是给出这些变形的参数族，参见第 2.7.2 小节。本文的主要结果提供了一种方法，无须递归即可求出所有提升；该方法使用短正合列和交换图，并涉及若干类量子群。

让我们更加技术性且明确地描述这一情形。如上文所述，任意有限维复尖点 Hopf 代数 A 都满足：其伴随分次 Hopf 代数 $\operatorname{gr} A$ 同构于玻色化 $R\#A_0$ ，其中余根 $A_0 = \mathbb{C}\Gamma$是某个有限群的群代数，而 R 是辫范畴中的 Hopf 代数 ${}^{\mathbb{C}\Gamma}_{\mathbb{C}\Gamma}\mathcal{YD}$，其对象为 Yetter-Drinfeld 模。事实证明， R 也是一个分次编织霍普夫代数，并且具有 $R^0 = \mathbb{C}$。由所有一次齐次元素组成的编织向量空间 $V = R^1$ 称为无穷小编织；由其生成的 R 的子代数 $\mathfrak{B}(V)$，即

Nichols 代数 of V。因此，要分类固定群 Γ 上的所有可能的尖点 Hopf 代数，就必须

(a) *(Nichols* 代数*)* 确定所有可能的编织向量空间 $V \in {}^{\mathbb{C}\Gamma}_{\mathbb{C}\Gamma}\mathcal{YD}$ ，使得 dim $\mathfrak{B}(V)$ 有限；(b) *(*提升*)* 找出所有满足 gr $L \simeq \mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 的尖点 Hopf 代数 L ；(c) *(*一度生成*)* 证明任意有限维编织霍普夫代数R 实际上都同构于某个 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$，其中 $V \in {}^{\mathbb{C}\Gamma}_{\mathbb{C}\Gamma}\mathcal{YD}$。

从现在起，假设群 Γ 是有限阿贝尔群，且其阶与 210 互素。在这种情况下，所有编织向量空间 $V \in {}^{\mathbb{C}\Gamma}_{\mathbb{C}\Gamma}\mathcal{YD}$ 都是对角型的，而根据 Heckenberger 关于算术根系的工作，(a) 成立。此外，可以利用有限 Cartan 矩阵，通过生成元与关系显式描述所有可能的 Nichols 代数。这类编织向量空间称为 *Cartan* 型，更多详情见第 2 节的 2.7 小节。此外，关系只涉及根向量的幂和量子 Serre 关系，参见 [AS3，定理 5.1]。同上文献的另一项主要结果是证明了 (c)，其实际表述为：这一族霍普夫代数由类群元素和斜本原元素生成。假设 Cartan 矩阵不可分解，为证明 (b)，必须找出根向量幂关系和量子 Serre 关系的所有可能变形。结果表明，后者并未发生变形，因此问题归结为求出根向量幂的显式公式；这些公式的形式如下

$$x_\alpha^N = r_\alpha(\mu),$$

其中， N 为自然数（与 210 互素的单位根的阶）， α 为与 Cartan 矩阵对应的根系相关的正根， μ 为满足某些条件的参数族。根向量 x_α 由线性生成元 $\{x_i\}_{i\in I}$ 通过迭代编织交换子得到，而 $r_\alpha(\mu)$ 是 $\mathbb{C}[g_i^{N_i} \mid i \in I] \subset \mathbb{C}\Gamma$ 的增广理想中的元素，其构造方式是递归的，如下所示

$$r_\alpha(\mu) = \mu_\alpha(1 - g_\alpha^N) + \sum_{\beta,\gamma\neq 0, \beta+\gamma=\alpha} t^\alpha_{\beta,\gamma}\mu_\beta r_\gamma(\mu),$$

其中，$_{,\ \gamma} \in \mathbb{C}$ 由余乘法确定。通过提升得到的尖点 Hopf 代数族记为 $u(\mathcal{D},\ \mu)$，其中 $\mathcal{D}$ 是所谓的 Cartan 数据。

在 [AS3]，中，作者提出了一个问题：寻找一种显式算法，用于描述任意不可分解 *Cartan* 矩阵对应的元素 $r_\alpha(\mu)$ 。尽管这种描述看似简单，但要准确写出元素 *()* 实际上相当困难。迄今为止，对于以下类型的编织，这一问题已在*AS*中针对类型、，在 *BDR*中针对类型 ，以及在 *BGM*中针对类型 得到解决。所有这些结果都依赖大量临时的计算，这表明需要采用其他技术来描述剩余情形。

另一方面，Masuoka 在 [Ma]中证明，所有提升 L 都是玻色化 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$的余循环变形。这促使人们提出一种思路：通过 Hopf-Galois 对象 [AAGMV]，利用余循环变形来描述所有提升。这种方法适用于更一般的情形，只要所有提升 L 都能通过余循环变形得到即可。事实上，人们猜想这一点始终成立，所有已知例子也证实了这一猜想。具体而言，对于阿贝尔群上的复有标 Hopf 代数这一族（其编织不一定是 Cartan 型），该结论已得到证明 [AGI]，；此外，对于若干非阿贝尔群上的有限维尖点 Hopf 代数族，例如二面体群上的情形，也已得到证明，参见例如 [GM]。在 [AAG]中，利用 Hopf-Galois 对象的技术被用于 Cartan 型对角编织的情形 A；在 [GIG] 中，则被用于 Cartan 型情形 G_2。在后一种情形下，量子 Serre 关系也可能发生变形，相应的计算会变得相当复杂。事实上， [AGI] 证明了这种方法可以得到所有可能的提升

对角型 Nichols 代数的提升。值得强调的是，该过程有两个关键特点：第一，无须显式确定变形中涉及的余循环；第二，只要存在主实现，所得结果就与群 Γ 的选择无关。不过，为了找到与这些余循环对应的 Hopf-Galois 对象，必须对 Nichols 代数的定义关系进行分层，然后计算相应的截面；正如 G_2-情形所示，这可能需要大量计算。

主要结果。本文提出一种新颖方法，以量子群的结构映射取代繁重的计算。变形关系由有限阿贝尔群到与编织相关的 Cartan 矩阵所对应的单李群的标准 Borel子群中的包含给出。随后通过正合列获得这些提升，并证明它们同构于量子化函数代数的有限维商，即所谓的量子子群。这为变形提供了一种几何解释：任何定义在此类阿贝尔群上的复有限维尖点 Hopf 代数，都可表示为小量子群被 Borel子群的有限阿贝尔子群扩张所得。

设 V 是一个有限维对角 Cartan 型编织向量空间，它与有限不可分解对称化 Cartan 矩阵 $C = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq\theta}$ 相关，并将编织记为 $c\colon V\otimes V\to V\otimes V$。设 $\{x_i\}_{1\leq i\leq\theta}$ 是 V 的一组基，使得对所有 $1\leq i,j\leq\theta$，都有 $c(x_i\otimes x_j) = q_{ij}x_j\otimes x_i$。编织矩阵 $\mathbf{q} = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq\theta}$ 满足 Cartan条件，即对所有 $1\leq i,j\leq\theta$都有 $q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}}$；并且 $q_{ii} = q$ 是阶为 N 的单位根，其中 N与 210 互素。选择一个（极小）能给出 V 主实现的有限阿贝尔群，相当于选择一个位于根格 Q 与权格 P 之间的格 M；这些格与李代数 $\mathfrak{g}$相关的根系以及与 C 相关的李代数相对应，参见第 2.7 小节和定义 2.7：给定任意一个秩为 θ 且满足 $Q\subseteq M\subseteq P$的格M，若存在群同态 $g\colon M\to\Gamma, \chi\colon M\to\Gamma$，使得对所有$i\in I$，有 $g(\alpha_i) = g_i$ 且 $\chi(\alpha_i) = \chi_i$，则称阿贝尔群 Γ 包含 M。特别地，Γ 包含元素 $g_\lambda = g(\lambda)$（$\lambda\in M$），满足$g_{\lambda+\mu} = g_\lambda g_\mu$ 和$g_0 = 1$。于是，任何属于非平凡有限 Cartan 型数据的阿贝尔群 Γ 都包含根格 Q，但当 $M\neq Q$时，Γ 不一定包含 M。对于包含格 M的有限阿贝尔群 Γ，我们将相应的数据记为 $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}(\Gamma, (g_i)_{i\in I}, (\chi_i)_{i\in I}, (a_{ij})_{i,j\in I})$，以强调其对 M的依赖。

Dinfeld-Jimbo 情形。首先假设编织矩阵 $\mathbf{q} = (q_{ij})_{1\leq i,\ j\leq\theta}$ 属于 Drinfeld-Jimbo 型，即对所有 $1\leq i,\ j\leq\theta$，均有 $q_{ij} = q^{d_ia_{ij}}$。给定一个关于 Γ、具有不可分解可对称化 Cartan 矩阵的有限 Cartan 型数据 $\mathcal{D}$，我们构造一个有限维尖点 Hopf 代数 $u(\mathcal{D},\ \mu)$，它依赖于参数族μ，其余根同构于 $\mathbb{C}\Gamma$。由于 Cartan 矩阵不可分解，在这种情况下参数族 λ不会出现。

设 N 为一个与 210 互素的正奇整数，q 为阶为 N 的单位根。给定一个不可分解且可对称化的有限 Cartan 矩阵 $C = (a_{ij})_{1\leq i,\ j\leq\theta}$ 以及任意一个秩为 θ 且满足 $Q\subseteq M\subseteq P$ 的格 M，定义量子化包络代数 $U_q^M(\mathfrak{g})$，其中 $\mathfrak{g}$ 是与 C 相关联的李代数，参见定义 2.1。$U_q^M(\mathfrak{g})$ 的量子 Borel 子代数 $U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 是由元素 K_m、E_i 生成的子代数，其中 $m\in M$、$i\in I$；事实上，它是一个 Hopf 子代数。$U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 含有一个由元素 K_m^N、E_α^N 生成的中心 Hopf 子代数 $Z_M^{\geq}$，对所有 $m\in M$ 和 $\alpha\in Q^+$ 均成立；相应的商 Hopf 代数同构于小量子群 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$，参见定义 2.3。特别地，$U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 构成一个短正合

霍普夫代数列

$$Z_M^{\geq} \hookrightarrow^{\iota_U} U_q^M(\mathfrak{b}^+) \twoheadrightarrow^{\pi_U} u_q^M(\mathfrak{b}^+).$$

我们在命题 3.1 和 3.2 中证明，给定一族根向量参数$\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha\in Q^+}$ 属于 $\mathbb{C}$，霍普夫代数 $u(\mathcal{D}, \mu)$嵌入一个霍普夫代数的交换图中，其行是正合的

$$\begin{array}{ccccc} Z_M^{\geq} & \hookrightarrow^{\iota_U} & U_q^M(\mathfrak{b}^+) & \twoheadrightarrow^{\pi_U} & u_q^M(\mathfrak{b}^+) \\ \downarrow{\scriptstyle p_0} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| \\ \mathbb{C}T_M & \hookrightarrow^{\iota_u} & u(\mathcal{D}_M, \mu) & \twoheadrightarrow^{\pi_u} & u_q^M(\mathfrak{b}^+), \end{array}$$

其中， T_M 是由 $g(m)^N$ =生成的 Γ 的子群： g_m^N，对所有 $m \in M$均成立。

现在，正如量子群理论中众所周知的，对于所有格 $Q \subseteq M \subseteq P$，存在一个霍普夫代数同构 $U_q^M(\mathfrak{b}^+) \simeq \mathcal{O}_q(B_M^+)$，其中 B_M^+是与 $\mathfrak{g}$和 M相对应的单李群 G_M的标准 Borel子群，而 $\mathcal{O}_q(B_M^+)$是相应的量子化函数代数，详见第 2.6 小节。在此同构下，中心 Hopf 子代数 $Z_M^{\geq}$与量子弗罗贝尼乌斯映射的像重合，后者同构于函数代数 $\mathcal{O}(B_M^+)$；相应的商 Hopf 代数$\mathcal{O}_q(B_M^+)$同构于 $\left(u_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)\right)^*$，后者是对偶格 M'处 Frobenius-Lusztig 核的对偶，更多细节请参见命题 2.6。利用 $\left(u_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)\right)^* \simeq u_q^M(\mathfrak{b}^+)$作为霍普夫代数这一事实，我们得到第一个主要结果——定理 3.4。该定理给出了一个霍普夫代数的交换图，其行是正合序列

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}(B_M^+) & & \hookrightarrow^{\tilde{\iota}} & \mathcal{O}_q(B_M^+) & \twoheadrightarrow^{\pi_{B^+}} & \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)} \\ & \searrow^{\simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \psi}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ & Z_M^{\geq} & \hookrightarrow^{\iota_U} & U_q^M(\mathfrak{b}^+) & \twoheadrightarrow^{\pi_U} & u_q^M(\mathfrak{b}^+) \\ {\scriptstyle k^*}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle p_0} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| \\ & \mathbb{C}^{\widehat{T_M}} & \hookrightarrow^{\tilde{\iota}_u} & u(\mathcal{D}_M, \mu) & \twoheadrightarrow^{\pi_u} & u_q^M(\mathfrak{b}^+). \end{array}$$

特别 cular，霍普夫代数 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$ 对应于 $\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 的一个量子子群。

可以利用前述交换图中的数据来描述霍普夫代数 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$。具体而言，幂根向量关系 $x_\alpha^N = r_\alpha(\mu)$ 的提升可以通过同构 ψ: $U_q^M(\mathfrak{b}^+) \to \mathcal{O}_q(B_M^+)$、代数群单态 k: $\widehat{T_M} \hookrightarrow B_M^+$，以及众所周知的公式计算；该公式给出了每种李代数中任意正根 α 用单根 α_i 表示的形式，其中 $i \in I$。事实上，对于所有 $\alpha \in \Phi^+$，都有

$$x_\alpha^N = p(E_\alpha^N) = p_\mu(\psi(E_\alpha^N)) = \varphi^{-1}k^*(\psi(E_\alpha^N)),$$

其中 φ^{-1}： $\mathbb{C}^{T_M} \to \mathbb{C}T_M$ 是霍普夫代数的自然同构。取单态 k： $\widehat{T_M} \hookrightarrow B_M^+$ 为对角矩阵中的典范包含，便得到玻色化 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$。另一方面，取 k 为典范包含与幺幂矩阵所诱导的共轭作用的复合，则得到一个提升，其关系正如 Andruskiewitch 和 Schneider 的分类定理所预测的那样。我们将在第 4 节通过 An 型 A_θ、 B_θ 和 D_θ 的例子加以说明。

作为推论（见推论 3.6），我们得到，任何这样的霍普夫代数 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$，以及由此任何定义在群 Γ （包含M）上的、具有 Drinfeld-Jimbo 型且 Cartan 矩阵为不可分解对称化有限 Cartan 矩阵的有限维复 pointed Hopf 代数，都可以构造为一个量子子群，也就是说，

$$u(\mathcal{D}_M,\mu)\simeq \mathcal{O}_q(B_M^+)/(\operatorname{Ker} k^*),$$

对于某个代数群单态射 k，作为霍普夫代数。

在本文的第二个主要结果——定理 3.7 中，我们证明，有限阿贝尔群到B_M^+ 的任意包含都会给出 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$的一个提升，其中 Γ 是包含 M 的某个阿贝尔群，而 V 是 $\mathbb{C}\Gamma$上的某个 Yetter-Drinfeld 模。

一般 *Cartan* 型情形。 一般 Cartan 型的对角编织结果完全类似，经过适当调整即可得到。此时，量子泛包络代数的作用由其一个多参数版本承担，记作 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$；小量子群的作用则由玻色化 $\mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}:=\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$承担。这里，$\Gamma:=\Gamma/T_M$ ，其中 T_M 是由满足 $\chi_{m_i}^N=\varepsilon$的元素 $g_{m_i}^N$ 生成的 Γ的子群。注意，在 Drinfeld-Jimbo 情形下，该子群与先前考虑的子群T_M 一致。

为了应用 Drinfeld-Jimbo 情形所用的技巧，我们必须假设对所有 $m\in M$ 都有 $\chi_m^N=\varepsilon$。在这一温和的假设下， $\mathbb{C}T_M$ 在 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 中是中心的，并且存在一个霍普夫代数的中心正合列

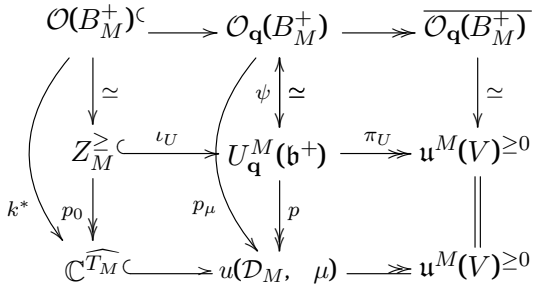
$$\mathbb{C}T_M\xhookrightarrow{\iota_u} u(\mathcal{D}_M,\mu)\xrightarrow{\pi_u}\mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0},$$

参见命题 3.11。此外，作为霍普夫代数，有 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)\ \simeq\ \widetilde{\mathfrak{B}}(V)\#\mathbb{C}\mathbb{Z}^\theta$ ，˜其中 $\mathfrak{B}(V)$ 是在 [An2 第 3], 节中定义的特征 pre-Nichols 代数，并且存在一个霍普夫代数满同态 $p\colon U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)\twoheadrightarrow u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$，使得下图中的短正合列构成正合交换图

$$\begin{array}{ccccc} Z_M^{\geq} & \xhookrightarrow{\iota_U} & U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) & \xrightarrow{\pi_U} & \mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0} \\ \downarrow{\scriptstyle p_0} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| \\ \mathbb{C}T_M & \xhookrightarrow{\iota_u} & u(\mathcal{D}_M,\mu) & \xrightarrow{\pi_u} & \mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}. \end{array}$$

详见命题 3.15。现在，关键事实是，多参数量子化普遍包络代数 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$ 同构于 $U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 的一个 2-余循环变形（由 2-余循环 σ 给出）。该同构通过霍普夫代数同构 $\psi:U_q^M(\mathfrak{b}^+)\to\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 实现，并且由此得到 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)\simeq\left(\mathcal{O}_q(B_M^+)\right)_{\tilde{\sigma}}$，其中 $\tilde{\sigma}$ 是由 σ 和 ψ 诱导的 2-余循环。霍普夫代数 $\left(\mathcal{O}_q(B_M^+)\right)_{\tilde{\sigma}}$ 是正 Borel 子群 B_M^+ 上量子化函数代数 $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)$ 的多参数版本。此外，事实证明，中心 Hopf 子代数 $Z_M^{\geq}$ 在 2-余循环下不发生变形，仍保持中心性。这引出了我们的第三个主要结果——定理 3.17，该定理给出了

具有正合行的霍普夫代数交换图



接着，我们在定理 3.18 中证明了本情形下与定理 3.7 和推论 3.6 类似的结果。与 Drinfeld-Jimbo 型编织的情形一样，这些定理为提升给出了几何解释。同样，幂根向量的提升由霍普夫代数映射的复合给出。这使得我们能够将尖点 Hopf 代数 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 解释为多参数量子群$\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)$ 的量子子群，其中 $\mathbf{q}=(q_{ij})_{i,\ j\in I}$。

展示既有结果及新结果的例子。 </style}本文最后一节通过两个 Drinfeld-Jimbo 情形的例子来阐释我们的结果。在定理 4.2 中，我们通过选取一个特定的代数群单态射 $k:\ \widehat{T_M}\hookrightarrow B_M^+$，恢复了类型为 A_θ 的提升（由 [AS2], 计算）、类型为 B_2 的提升（由 [BDR], 计算），以及类型为 B_3 的提升（由 [BGM] 计算）。该单态射由标准包含与某个幺幂矩阵的共轭复合而成。此外，为了展示这一方法的强大之处，我们计算了所有类型为 B_θ 和 D_θ 的提升，其中 $\theta\geq 2$ 取遍所有可能值。作为附带结果，我们给出了类型为 B_θ 和 D_θ 的对偶量子 Frobenius 映射的显式公式；这些公式似乎尚未见于文献，参见定理 4.4。

论文结构。下面概述本文的组织结构。第 2 节中，我们建立所需的记号，并回顾全文将用到的一些关于霍普夫代数、Nichols 代数、Yetter-Drinfeld 模、量子化包络代数、小量子群和量子化函数代数的事实。我们还在定理 2.9 中回顾 Andruskiewitsch 和 Schneider 关于有限维复指称霍普夫代数的分类定理。第 3 节中，我们证明主要结果，说明族 $u(\mathcal{D},\ \mu)$ 中的尖点 Hopf 代数如何描述为量子子群。第 3.1 小节讨论 Drinfeld-Jimbo 型的对角编织情形，而第 3.2 小节则探讨一般 Cartan 型的编织。最后，在第 4 节中，我们通过类型为 A_θ、B_θ 和 D_θ 的两个不太技术性的例子来说明我们的方法，既重现已知结果，也得到新的显式提升。

Acknowledments

作者感谢 Fabio Gavarini 就量子群上的同构问题进行了富有成果的讨论。

2. Preliminaries

2.1. 记号与约定。 我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上工作。我们用 $\mathbb{N}$ 表示正整数集，并用 $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ 表示。

设 A 是一个代数，且 $B\hookrightarrow A$ 是 A 的子代数。给定 B 的一个双边 J，我们用 (J) 表示由 $\iota(J)$ 生成的 A 的双边理想。

设 z 是一个不定元，并用 $\mathbb{Z}[z, z^{-1}]$ 表示整系数劳朗多项式环。对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，我们定义

$$(0)_z = 1, \qquad (n)_z = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \cdots + z^{n-1} \qquad (\in \mathbb{Z}[z])$$

$$(n)_z! = (0)_z(1)_z \cdots (n)_z, \qquad \binom{n}{k}_z = \frac{(n)_z!}{(k)_z!(n-k)_z!} \qquad (\in \mathbb{Z}[z])$$

$$[0]_z = 1, \quad [n]_z = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} = z^{-(n-1)} + \cdots + z^{n-1} \quad (\in \mathbb{Z}[z, z^{-1}])$$

$$[n]_z! = [0]_z[1]_z \cdots [n]_z, \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_z = \frac{[n]_z!}{[k]_z![n-k]_z!} \qquad (\in \mathbb{Z}[z, z^{-1}])$$

根据这些定义，有以下恒等式:

$$(n)_{z^2} = z^{n-1}[n]_z, \qquad (n)_{z^2}! = z^{\frac{n(n-1)}{2}}[n]_z, \qquad \binom{n}{k}_{z^2} = z^{k(n-k)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_z.$$

将劳朗多项式视为定义在 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ 上的函数，对于任意 $q \in \mathbb{C}^\times$，我们将上面的每个符号都理解为该元素在 $\mathbb{C}$ 中相应的求值 $z = q$。

我们回顾一下，代数 A 的有限对偶 A° 是 A^* 的向量子空间，其元素是泛函 $f : A \to \mathbb{C}$，满足 $\ker f$ 包含一个有限余维理想。

2.2. 霍普夫代数。关于霍普夫代数理论，我们参考 [Mo] 和 [Ra]。余乘法记作 Δ，余单位记作 ε，反演记作 S。对于 Δ，我们采用 Heyneman-Sweedler 记号，即 $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$。给定一个霍普夫代数 H，类群元素的集合记作 $G(H)$，而增广理想记作 $H^+ := \operatorname{Ker}(\varepsilon)$。对于 $g, h \in G(H)$，(g, h)-本原元的集合定义为 $P_{g,h}(H) := \{x \in H \mid \Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x\}$ and $P_{1,1}(H)$，后者简记为 $P_1(H)$。我们用 H^{op} （分别用 H^{cop}）表示通过在 H 中取反乘法（分别取反余乘法）得到的霍普夫代数。设 $\pi : H \longrightarrow A$ 是一个霍普夫代数映射。那么 H 分别通过 $(\pi \otimes \mathrm{id})\Delta : H \longrightarrow A \otimes H$ 和 $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta : H \longrightarrow H \otimes A$ 成为左、右 A-余模。左、右余不变量空间分别为

$${}^{\mathrm{co}\,\pi}H = \{h \in H \mid (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = 1 \otimes h\}, \quad H^{\mathrm{co}\,\pi} = \{h \in H \mid (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(h) = h \otimes 1\}.$$

霍普夫代数 H 是尖点的，当且仅当其余根 H_0 （即所有简单子余代数之和）是群代数 $\Bbbk G(H)$。设 H 和 K 为反演可逆的霍普夫代数。线性映射 $(\ ,\ ) : H \otimes_{\mathbb{C}} K \longrightarrow \mathbb{C}$ 称为 H 与 K之间的霍普夫配对，如果它满足：对于所有 $h \in H$、$k \in K$，

$$\big(h\,,\, k_1\,k_2\big) = \big(h_{(1)}\,,\, k_1\big)\big(h_{(2)}\,,\, k_2\big), \quad \big(h_1\,h_2\,,\, k\big) = \big(h_1\,,\, k_{(1)}\big)\big(h_2\,,\, k_{(2)}\big), \quad \big(h\,,1\big) = \epsilon(h),$$

$$\big(S(h)\,,k\big) = \big(h\,,S(k)\big), \qquad \big(S^{-1}(h)\,,k\big) = \big(h\,,S^{-1}(k)\big), \qquad \big(1\,,k\big) = \epsilon(k).$$

遵循 [AD]，一列霍普夫代数映射

$$B \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H$$

称为正合的，如果 ι 是单射，π 是满射，$\pi \circ \iota = \varepsilon$，$\operatorname{Ker}(\pi) = AB^+$ 且 $B = {}^{\mathrm{co}\,\pi}A$。如果 B 的像在 A中是中心的，我们称该序列为中心的。

设 H 是一个霍普夫代数。归一化霍普夫 2-余循环（参见 [Mo，第 7.1] 节）是一个映射 $\sigma \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(H \otimes H, \mathbb{C})$，它卷积可逆，并且对所有 $a, b, c \in H$ 都满足

$$\sigma(b_{(1)}, c_{(1)})\,\sigma(a, b_{(2)}c_{(2)}) \;=\; \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\,\sigma(a_{(2)}b_{(2)}, c), \quad \sigma(a, 1) = \varepsilon(a) = \sigma(1, a).$$

我们使用 2-余循环 σ 以如下方式定义一个新的霍普夫代数 H_σ。作为余代数，$H_\sigma = H$，而 H_σ 上的乘法为 $m_\sigma = \sigma * m * \sigma^{-1}$：$H \otimes H \to H$，也就是说，

$$m_\sigma(a,b) \;=\; a \cdot_\sigma b \;=\; \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\, a_{(2)}\, b_{(2)}\, \sigma^{-1}(a_{(3)}, b_{(3)}), \quad \text{for all } a, b \in H.$$

反 antipode 映射 $S_\sigma : H_\sigma \to H_\sigma$ 由下式给出

$$S_\sigma(a) = \sigma(a_{(1)}, S(a_{(2)}))S(a_{(3)})\sigma^{-1}(S(a_{(4)}), a_{(5)}), \quad \text{for all } a \in H.$$

霍普夫代数 H_σ 被称为 H的 2-余循环变形。

2.3. **Nichols 代数与提升**。编织向量空间 V是一个二元组 $(V,\ c)$，其中 V是一个向量空间，而 $c \in GL(V^{\otimes 2})$ 是编织方程的一个解

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

设 H 为一个霍普夫代数。H 上的一个（左）Yetter-Drinfeld 模是一个左 H-模 $(V,\ \cdot)$ 和一个左 H-余模 $(V,\ \delta)$，满足 $\delta\colon V \to H \otimes V$, $\delta(x) = x_{(-1)} \otimes x_{(0)}$ 对所有 $x \in V$成立，使得

$$\delta(h \cdot x) = h_{(1)} x_{(-1)} S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \cdot x_{(0)}, \qquad \text{for all } h \in H, x \in V.$$

Yetter-Drinfeld 模连同左 H-模和左 H-余模的态射，构成一个记作 ${}^H_H\mathcal{YD}$的编织刚性张量范畴。事实上，任意 $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 都是一个编织向量空间，其编织为 $c(x \otimes y) = x_{(-1)} \cdot y \otimes x_{(0)}$ 对所有 $x,\ y \in V$成立。对于群代数$H = \mathbb{C}\Gamma$，我们简单地将 Yetter-Drinfeld 模的范畴记作 ${}^\Gamma_\Gamma\mathcal{YD}$。

编织范畴中的霍普夫代数简称为编织霍普夫代数。在任意具有乘法 m 和编织 c 的编织霍普夫代数 R 中：$R \otimes R \to R \otimes R$，元素 x、$y \in R$ 的编织交换子由 $[x,y]_c = m(x \otimes y) - m \circ c(x \otimes y)$ 给出。如果 $x \in P_1(R)$ 是本原元，那么

$$(\mathrm{ad}_c\, x)(y) = [x,y]_c \tag{1}$$

表示 x 在 R上的编织伴随作用。

我们关注以下这类编织向量空间。若存在一个基 $(x_i)_{1 \le i \le n}$（其属于 V）和一个矩阵 $(q_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$，使得 $q_{ij} \in \mathbb{C}^\times$，则编织空间 $(V,\ c)$ 称为对角型的，并且

$$c(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i, \quad \text{for all } 1 \le i, j \le n.$$

对角型编织向量空间可以如下实现为阿贝尔群 $\widehat{\ }$ 的群代数上的 Yetter-Drinfeld 模。设 Γ 是一个阿贝尔群，Γ 是其特征群。$\mathbb{C}\Gamma$ 上的 Yetter-Drinfeld 模是 Γ- 分次的 Γ- 模 $V = \oplus_{g \in \Gamma} V_g$，满足 $\widehat{\ }$，其中对所有 g、$h \in \Gamma$ 均成立。比如，对于 $g \in \Gamma$ 和 $\chi \in \Gamma$，一维向量空间 $\mathbb{C}^\chi_g$ 是 ${}^\Gamma_\Gamma\mathcal{YD}$ 中的一个对象，具有一个次数为 g 的齐次分量，其作用由在 χ 上的求值给出。具有矩阵 (q_{ij}) 的对角型编织向量空间 V 作为 ${}^\Gamma_\Gamma\mathcal{YD}$ 中对象的一个实现，则由一组 $\widehat{\ }(g_1, \chi_1)$ ..... (g_n, χ_n) 给出，使得 $g_i \in \Gamma$、$\chi_j \in \Gamma$ 以及 $q_{ij} = \chi_j(g_i)$ 对所有 $1 \le i,\ j \le n$ 均成立。Γ-分次由 $\delta(x_i) = g_i \otimes x_i$ 给出，而 Γ-作用则由 $g \cdot x_i = \chi_i(g)\ x_i$ 给出，对所有 $1 \le i \le n$ 均成立。

设 $V \in {}^\Gamma_\Gamma\mathcal{YD}$。$V$ 的 *Nichols* 代数 是满足以下条件的唯一（在同构意义下）分次连通 Hopf代数 $\mathfrak{B}(V) = \oplus_{n \ge 0}\mathfrak{B}^n(V)$：在 ${}^\Gamma_\Gamma\mathcal{YD}$ 中，$V \simeq \mathfrak{B}^1(V) = P_1(\mathfrak{B}(V))$ 作为代数生成 $\mathfrak{B}(V)$; 关于 Nichols 代数的详细信息，请参阅 [A]。给定 $\mathfrak{B}(V) \in {}^\Gamma_\Gamma\mathcal{YD}$，玻色化 $H := \mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 是余根为$\mathbb{C}\Gamma$的普通尖点Hopf代数。若 $\mathfrak{B}(V)$ 是有限维的且 Γ 有限，则 H 也是有限维的。

假设 A 是有限维尖点 Hopf 代数，其 $G(A) = \Gamma$为阿贝尔群。那么，相对于余根过滤的分次代数 $\mathrm{gr}\, A$ 仍是尖点 Hopf 代数，并且事实证明 $\mathrm{gr}\, A \simeq B\#\mathbb{C}\Gamma$，其中 $B = \mathfrak{B}(V)$ 是以下对象的 Nichols 代数

$V := P_1(B)$。Hopf 代数 A 称为 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 的提升，并且它是 gr A 的 2-余循环变形，参见例如 [AGI]。

2.4. 李代数、根系与Cartan 矩阵。 关于李代数理论，我们遵循 [Hu] 和 [Bou]。下文固定 $\theta \in \mathbb{N}$ 和 $I := \{1, \dots, \theta\}$。设 $C = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in I}$是有限型的可对称化Cartan矩阵；也就是说，存在唯一的对角矩阵 $D = (d_i\, \delta_{ij})_{i,j\in I}$ 其元素为正整数，且 DC 是对称矩阵。

设 $\mathfrak{g}$ 是与 C相关联的定义在 $\mathbb{C}$ 上的有限维单李代数。照例， Φ表示 $\mathfrak{g}$ 的（有限）根系， Φ^+ 为正根集， $\Pi = \{\alpha_i \,|\, i \in I\}$ 是单根集， $Q = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ 是根格。我们用 $P = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\,\omega_i$ 表示权格，其基 $\{\omega_i\}_{i\in I}$ 相对于配对 $\omega_i(\alpha_j) = \delta_{ij}d_i$ 与 $\{\alpha_j\}_{j\in I}$ 对偶，对所有$i, j \in I$均成立；用 $P^+ = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\,\omega_i$表示支配积分权集 P^+。格Q 可识别为 P 的子格；特别地，对所有 $i \in I$，有 $\alpha_i = \sum_{j\in I} a_{ji}\,\omega_j$。此外，每个权 ω_i, $i \in I$都可写成根的线性组合：$\omega_i = \sum_{j\in I} a'_{ij}\,\alpha_j$，其中 $C^{-1} = (a'_{ij})_{i,j\in I}$ 是 C 的逆矩阵；这里 $aC^{-1} \in \mathbb{Z}^{\theta\times\theta}$且 $a = |\det C| = [P\colon Q]$。对于任意秩为 θ、基为 $\{m_1, \dots, m_\theta\}$ 的格 $Q \subseteq M \subseteq P$，有 $\alpha_i = \sum_{j\in I} a^M_{ji}\, m_j$，且对所有 $i, j \in I$均成立。这里的矩阵$C_M = (a^M_{ji})_{i,j}$, $\bar{C}_M = (\bar{a}^M_{kj})_{kj} \in \mathbb{Z}^{\theta\times\theta}$满足 $C = \bar{C}_M C_M$，其中 $[M\colon Q] = |\det C_M|$，且 $[P\colon M] = |\det C_M|$。由于 $a = [P\colon M][M\colon Q]$，我们有 $|\det C_M|$整除 a。令 $M^+ = M \cap P^+$。

在这一设定中，我们有一个自然的非退化 $\mathbb{Z}$–双线性配对 $(\,,\,)\colon P \times Q \to \mathbb{Z}$，由求值（将权作用于根上）给出：$(\omega_i, \alpha_j) = \omega_i(\alpha_j) = \delta_{ij}d_i$，对所有 $i, j \in I$均成立。它满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}$，对所有 $i, j \in I$均成立。

这个 $\mathbb{Z}$–双线性配对可以扩展为一个取值于 $\mathbb{Z}[a^{-1}]$的 $\mathbb{Z}$–双线性配对 $(\,,\,)\colon P \times P \to \mathbb{Q}$。若两个格 $Q \subseteq M$, $M' \subseteq P$满足 $M' = \{\beta \in P \,|\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in M\}$且 $M = \{\beta \in P \,|\, (\beta, \alpha') \in \mathbb{Z}, \forall \alpha' \in M'\}$（这两个条件等价），则称它们互为对偶。此外，给定一个格 $Q \subseteq M \subseteq P$，存在唯一一个与 M 对偶的格 $Q \subseteq M' \subseteq P$，使得 $\mathbb{Z}$–双线性配对 $(\,,\,)\colon P \times P \to \mathbb{Q}$限制为非退化的 $\mathbb{Z}$–双线性配对 $(\,,\,)\colon M \times M' \to \mathbb{Z}$。例如， Q和P 互为对偶。

2.5. 量子化包络代数与小量子群。 关于量子群的记号和约定，我们遵循 [BG] 。设 $q \in \mathbb{C}$ 是奇数阶 $N > 1$ 的本原单位根，且当 Cartan 矩阵 C 为 G_2型时， $N > 1$ 与 3 互素。下文中，对所有 $i \in I$，我们固定 $q_i = q^{d_i}$，其中 d_i 是上一小节所讨论的对角矩阵 D 的（i, i）项。

2.5.1. 量子化包络代数。 我们先回顾量子化包络代数的定义。

定义 2.1. 设 M 是秩为 θ、介于 Q 和 P 之间的格。量子化包络代数 $U^M_q(\mathfrak{g})$ 是由元素 $\{K_m\}_{m\in M}$、E_1、.....、E_θ 以及 F_1、.....、F_θ 生成的代数，满足以下关系：对所有 m、m_1、$m_2 \in M$ 和 i、$j \in I$,

$$K_0 = 1, \qquad K_{m_1}K_{m_2} = K_{m_1+m_2},$$
$$K_m E_j K_{-m} = q^{(m,\alpha_j)}E_j, \qquad K_m F_j K_{-m} = q^{-(m,\alpha_j)}F_j,$$
$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$
$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-l} E_j E_i^l = 0 \qquad (i \neq j),$$
$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-l} F_j F_i^l = 0 \qquad (i \neq j).$$

注意，对所有 $m \in M$，$K_{-m} = K_m^{-1}$。$U_q^M(\mathfrak{g})$ 是一个霍普夫代数，其余乘法、余单位和反演定义如下：对所有 $i \in I$ 和 $m \in M$，

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i, \qquad \varepsilon(E_i) = 0, \qquad S(E_i) = -K_{\alpha_i}^{-1}E_i$$
$$\Delta(F_i) = F_i \otimes K_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i, \qquad \varepsilon(F_i) = 0, \qquad S(F_i) = -F_iK_{\alpha_i}$$
$$\Delta(K_{\pm m}) = K_{\pm m} \otimes K_{\pm m}, \qquad \varepsilon(K_{\pm m}) = 1, \qquad S(K_{\pm m}) = K_{\mp m}.$$

例 2.2. 若 $M = Q$，我们记 $U_q^Q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g})$，且对所有 $i \in I$，$K_i = K_{\alpha_i}$。特别地，K_i 与 E_j、F_j 之间的交换关系为

$$K_iE_jK_i^{-1} = q^{(\alpha_i,\alpha_j)}E_j = q^{d_ia_{ij}}E_j, \qquad K_iF_jK_i^{-1} = q^{-(\alpha_i,\alpha_j)}F_j = q^{-d_ia_{ij}}F_j \quad \text{for } i,j \in I.$$

若 $M = P$，对于与基本权对应的生成元，我们记 K_{ω_i}，对所有 $i \in I$，交换关系为

$$K_{\omega_i}E_jK_{\omega_i}^{-1} = q^{(\omega_i,\alpha_j)}E_j = q^{d_i\delta_{ij}}E_j, \qquad K_{\omega_i}F_jK_{\omega_i}^{-1} = q^{-(\omega_i,\alpha_j)}F_j = q^{-d_i\delta_{ij}}F_j \quad \text{for } i,j \in I.$$

量子 Borel 子代数 $U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 和 $U_q^M(\mathfrak{b}^-)$ 是 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 的子代数，分别由元素 K_m、E_i（其中 $m \in M$、$i \in I$）以及 K_m、F_i（其中 $m \in M$、$i \in I$）生成。实际上，这两个子代数都具有由生成元和关系给出的类似表示。注意，$U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 和 $U_q^M(\mathfrak{b}^-)$ 都是 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 的 Hopf 子代数。

设 $Q \subseteq M, M' \subseteq P$ 为对偶格。则存在一个非退化霍普夫配对 $(\ ,\ ): U_q^M(\mathfrak{b}^-)^{\mathrm{cop}} \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{b}^+) \to \mathbb{C}$，其定义如下：

$$(2) \qquad (K_m, K_{m'}) = q^{-(m,m')}, \quad (K_m, E_j) = 0, \quad (F_i, E_j) = \frac{\delta_{ij}}{q_i^{-1} - q_i}, \quad (F_i, K_m) = 0,$$

对所有 $i,j \in I$ 以及 $m \in M, m' \in M'$，均成立。

与对应于 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群相关联的辫群 B_W 在 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 上作用，参见 [BG, I.6.7, III.6.2]。利用这一作用，可以构造出 $\beta_j \in Q^+$ 的根向量 E_{β_j}, F_{β_j}，从而得到 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 的 PBW 基，其基元由单项式 $M_{r,m,k} = \mathbf{F}^r K_m \mathbf{E}^k$ 给出，其中 $r,k \in \mathbb{N}_0^t$，t 为正根的个数，且 $m \in M$；这里 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{E}$ 分别是由固定顺序排列的根向量 F_{β_j}, E_{β_j} 组成的单项式。此外，对所有 $\beta_j \in Q^+$，$E_{\beta_j} \in U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 和 $F_{\beta_j} \in U_q^M(\mathfrak{b}^-)$。

2.5.2. 小量子群。令 Z_M 为由元素 K_m^N、E_α^N、F_α^N 生成的 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 的子代数，其中 $m \in M$ 和 $\alpha \in Q^+$ 遍历所有取值。事实证明，Z_M 是 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 的中心 Hopf 子代数；例如参见 [BG, 定理 III.6.2]。此外，Z_M 是一个由 $\dim \mathfrak{g}$ 个生成元构成的多项式环，其中 θ 是可逆生成元，并且 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 是秩为 $N^{\dim \mathfrak{g}}$ 的自由 Z_M-模。

定义 2.3。与格 M 相关的小量子群或*Frobenius-Luzstig* 核 $u_q^M(\mathfrak{g})$ 定义为以下商 Hopf 代数

$$u_q^M(\mathfrak{g}) = U_q^M(\mathfrak{g})/\big(U_q^M(\mathfrak{g})Z_M^+\big).$$

在 $M = Q$ 的情况下，我们简单地记作 $u_q^Q(\mathfrak{g}) = u_q(\mathfrak{g})$。

与 Borel 子代数 $\mathfrak{b}^{\pm}$ 相关联的小量子群 $u_q^M(\mathfrak{b}^{\pm})$ 是 $u_q^M(\mathfrak{g})$ 的子代数，由元素 $K_m = k_m$、$E_i = e_i$ 以及 $K_m = k_m$、$F_i = f_i$ 生成，分别对所有 $m \in M$ 和 $i \in I$ 成立。注意，对所有 $\beta \in Q^+$，有 $E_\beta = e_\beta \in u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 和 $F_\beta = f_\beta \in u_q^M(\mathfrak{b}^-)$。或者，也可以将 $u_q^M(\mathfrak{b}^{\pm})$ 定义为 Borel 量子群 $U_q^M(\mathfrak{b}^{\pm})$ 的商，

$$u_q^M(\mathfrak{b}^+) = U_q^M(\mathfrak{b}^+)/\big(U_q^M(\mathfrak{b}^+)(Z_M^{\geq})^+\big), \qquad u_q^M(\mathfrak{b}^-) = U_q^M(\mathfrak{b}^-)/\big(U_q^M(\mathfrak{b}^-)(Z_M^{\leq})^+\big),$$

其中 $Z_M^{\geq}$（分别为 $Z_M^{\leq}$）是 $U_q^M(\mathfrak{b}^+)$（分别为 $U_q^M(\mathfrak{b}^-)$）的子代数，由元素 K_m^N、E_α^N（分别为 K_m^N、F_α^N）生成，对所有 $m \in M$ 和 $\alpha \in Q^+$ 成立。我们将 $u_q(\mathfrak{b}^+)$ 的生成元记为 $K_m = h_m$ 和 $K_{\alpha_i} = h_i$，对所有 $m \in M$ 和 $\alpha_i \in \Pi$ 成立。

注 2.4. 设 $Q \subseteq M \subseteq P$ 是一个格。由于 $Z_M^{\geq}$ 是$U_q^M(\mathfrak{b}^+)$的中心 Hopf 子代数，且 $U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 是秩为 $N^{\dim \mathfrak{b}^+}$的自由 $Z_M^{\geq}$-模，由 [Mo, 命题 3.43] 可知

$$Z_M^{\geq} \xhookrightarrow{\iota_U} U_q^M(\mathfrak{b}^+) \xrightarrow{\pi_U} u_q^M(\mathfrak{b}^+). \tag{3}$$

这是一个霍普夫代数的中心正合列。

2.6. 单位根处的量子化函数代数。 本小节同样采用 [BG], 的方法，并使用 [L2] 和 [DL]中的一些关键结果。固定一个连通的复单仿射代数群 G，并令 $\mathfrak{g}$为其李代数。令 M 为与 G 的极大环面特征群对应的格，其中 $Q \subseteq M \subseteq P$。我们写作 $G = G_M$ 以强调这种关系；特别地，$G_P = G_{sc}$ 表示单连通群，$G_Q = G_{ad}$ 表示伴随群。下文将回顾 G_M 的量子化函数代数的定义以及后续将用到的一些结果。我们还将以 $G_{sc} = \mathrm{SL}_{\theta+1}(\mathbb{C})$为例，给出一个明确的表示。

令 z 为一个形式变量，并对所有 $i \in I$ 设 $z_i = z^{d_i}$。令 $\mathcal{U}_z(\mathfrak{g})$ 为 $U_z(\mathfrak{g})$ 在环 $R = \mathbb{Q}[z, z^{-1}]$ 上的 Lusztig 整形式：$= U_z^Q(\mathfrak{g})$，参见 [BG, III.7.2]。令 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, P)$ 为 $\mathcal{U}_z(\mathfrak{g})$-模范畴的严格满子范畴，其对象为最高权模$V(\lambda)$，满足 $\lambda \in P$，且 $V(\lambda)$ 是有限秩自由 R-模，并且这些算子

$$K_{\alpha_i}, \qquad \binom{K_{\alpha_i}; 0}{t} = \prod_{s=1}^{t} \left(\frac{K_{\alpha_i} z_i^{-s+1} - 1}{z_i^s - 1} \right)$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 及所有 $i \in I$，分别可对角化，特征值为 $z^{(\alpha_i, \lambda)}$ 和 $\binom{k}{t}_{z_i}$；这类模也称为 ***1*** 型模。

按照 [DL, 第 4 节.1], ，我们将 $R_z(G_{sc})$ 定义为 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{U}_z(\mathfrak{g}) R)$ 的 R-子模，由表示 V （来自 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, P)$ ）的矩阵系数 $c_{i,j}^V$ 张成。这些满足

$$c_{i,j}^V(x) = v^i(x \cdot v_j),$$

其中，$\{v_i\}_{i \in I}$是一个 R基，$\{v^j\}_{j \in I}$是对偶模的对偶基，且 $x \in \mathcal{U}_z(\mathfrak{g})$。由于子范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, P)$ 是一个张量范畴，$R_z(G_{sc})$ 是一个霍普夫代数。特别地，求值得到一个非退化霍普夫配对 $\langle , \rangle$：$R_z(G_{sc}) \otimes \mathcal{U}_z(\mathfrak{g}) \to R$，因此 $R_z(G_{sc})$ 可以被视为 $\mathcal{U}_z(\mathfrak{g})^\circ$ 的一个 Hopf 子代数。

对于一个秩为 θ 的格 $Q \subseteq M \subseteq P$，令 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, M)$ 表示 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, P)$ 的子类，它由以下模组成：这些模是最高权模 $V(\lambda)$ 的直和，其中 $\lambda \in M^+$。令 G_M 为与格 M 相对应的连通单仿射代数群。我们将霍普夫代数 $R_z(G_M)$ 定义为 $\mathcal{U}_z(\mathfrak{g})^\circ$ 的 R-子模，该子模由表示 V 的矩阵系数 c_i^V、$_j$（这些表示来自 $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, M)$）张成。令 M' 为 M 的对偶格，令 $\mathcal{U}_z^{M'}(\mathfrak{g})$ 为 $U_z^{M'}(\mathfrak{g})$ 的 Lusztig 整形式。则存在一个非退化霍普夫配对 $\langle , \rangle\colon\ R_z(G_M) \otimes \mathcal{U}_z^{M'}(\mathfrak{g}) \to R$，更多细节参见 [G₂，第 4] 节。

设 $q \in \mathbb{C}$ 是奇数阶 $N > 1$ 的本原单位根；若 Cartan 矩阵 C 属于类型 G_2，则要求 $N > 1$ 与 3 互素。设 $p_N(z)$ 是 q 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式。对于对偶格 $Q \subseteq M$、$M' \subseteq P$，考虑商代数 $\mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{g})^{\mathbb{Q}(q)} := \mathcal{U}_z^{M'}(\mathfrak{g})/(p_N(z)\mathcal{U}_z^{M'}(\mathfrak{g}))$ 和 $\mathcal{O}_q(G_M)^{\mathbb{Q}(q)} := R_z G_M/(p_N(z)R_z(G_M))$。$\mathfrak{g}$ 在 M' 上、在 q 处的 Lusztig 整形式为 $\mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(q)} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbb{C}$；而 G_M 在 q 处的量子化函数代数是霍普夫代数 $\mathcal{O}_q(G_M) := \mathcal{O}_q(G_M)_{\mathbb{Q}(q)} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbb{C}$。

特别地，存在一个非退化霍普夫配对 $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathcal{O}_q(G_M) \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$，由求值给出。

下一个结果概述了 $\mathcal{O}_q(G_M)$ 的一些性质，其证明经相应调整后可由 [BG, Section III.7], 参见 [G₂, §4.4] 得到；不过，为求完整起见，我们仍给出证明概要。

定理2.5. 采用上述记号，我们有

(a) $\mathcal{O}_q(G_M)$ 包含一个与 G_M 的坐标代数$\mathcal{O}(G_M)$ 同构的中心 ***Hopf*** 子代数。*(b)* $\mathcal{O}_q(G_M)$ 是一个秩为 $N^{\dim \mathfrak{g}}$ 的 $\mathcal{O}(G_M)$-投射模。*(c)* ***Hopf*** 代数商 $\mathcal{O}_q(G_M) = \mathcal{O}_q(G_M)/[\mathcal{O}(G_M)^+\mathcal{O}_q(G_M)]$ 的维数为$N^{\dim \mathfrak{g}}$，且它与 $\left(u_q^{M'}(\mathfrak{g})\right)^*$ 同构，后者是 $\mathfrak{g}$ 在 q 处的 ***Frobenius-Lusztig*** 核的对偶。*(d)* 量子化坐标代数 $\mathcal{O}_q(G_M)$ 构成如下中心正合列

$$\mathcal{O}(G_M) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(G_M) \twoheadrightarrow \left(u_q^{M'}(\mathfrak{g})\right)^*. \tag{4}$$

证明。（略）量子弗罗贝尼乌斯映射是一个霍普夫代数映射 $Fr\colon \mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{g})^{\mathbb{Q}(q)} \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g})^{\mathbb{Q}}$，定义在整形式上，并且对任意格 $Q \subseteq M' \subseteq P$ 均有定义，参见 [G2，第 3.4] 节。将标量扩张到 $\mathbb{C}$ 后，可得到一个霍普夫代数满同态 $Fr\colon U_q^{M'}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g})$。由于 $U(\mathfrak{g})^\circ$ 中的 $G_M(G_M)$ 是一个 Hopf 子代数，对该满同态取对偶便得到一个单态射 $Fr^\circ\colon \mathcal{O}(G_M) \to U_q^{M'}(\mathfrak{g})^\circ$。现在需要证明 $\mathrm{Im}(Fr^\circ) \subseteq \mathcal{O}_q(G_M)$，且 $\mathrm{Im}(Fr^\circ)$ 是 $U_q^{M'}(\mathfrak{g})^\circ$ 中心的。这两个结论均可由与 [BG 定理 III.7.2] 相同的证明得到。例如，对于前者，需要证明每个有限维最高权 $U(\mathfrak{g})$-模 $V(\lambda)$（其中 $\lambda \in (M')^+$）都是某个 $\mathcal{U}_z^{M'}(\mathfrak{g})$-模 z 在 q 上的特化：取最高权向量为 $v \in V(N\lambda)$ 的不可约 $U_z^{M'}(\mathfrak{g})$-模 $V(N\lambda)$，并考虑由 $\mathcal{U}_z^{M'}(\mathfrak{g})v$ 给出的 $\mathcal{U}_z^{M'}(\mathfrak{g})$-模。结论 (c) 由 [BG, III.7.10] 得出，而 (d) 是 [Mo 命题 3.4.3] 的推论。□

现在我们回顾 [AG 第 2.1 节3] 中的一些结果，这些结果涉及 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，以及它们与量子包络代数和量子化函数代数的整形式之间的关系。这些结果是针对格的对偶对 P 和 Q给出的，但对于任意对偶对 M 和 M'也成立，同样需要作相应调整。

设 $Q \subseteq M$, $M' \subseteq P$ 是秩为 θ 的格所构成的对偶对。对于包含嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 的李子代数 $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$，整形式之间的典范单同态 $\mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{l})^{\mathbb{Q}(q)} \hookrightarrow \mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{g})^{\mathbb{Q}(q)}$ 经对偶得到一个霍普夫代数满同态 Res：

$(\mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(q)})^\circ \twoheadrightarrow (\mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{l})_{\mathbb{Q}(q)})^\circ$。由于 $\mathcal{O}_q(G_M)_{\mathbb{Q}(q)} \subseteq (\mathcal{U}_q^{M'}(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(q)})^\circ$，我们定义

$$\mathcal{O}_q(L_M)_{\mathbb{Q}(q)} = \mathrm{Res}(\mathcal{O}_q(G_M)_{\mathbb{Q}(q)}).$$

此外，由于 $\mathcal{O}(G_M)_{\mathbb{Q}(q)} \subseteq \mathcal{O}_q(G_M)^{\mathbb{Q}(q)}$，可知 $\mathrm{Res}(\mathcal{O}(G_M)^{\mathbb{Q}(q)})$ 是 $\mathcal{O}_q(L_M)^{\mathbb{Q}(q)}$ 的中心 Hopf 子代数，因此存在 G_M 的代数子群 L_M，使得 $\mathrm{Res}(\mathcal{O}(G_M)^{\mathbb{Q}(q)}) = \mathcal{O}(L_M)^{\mathbb{Q}(q)}$。此外，根据 [AG，命题 2.7]，可以证明 L_M 是连通的，且相应的李子代数 $\mathrm{Lie}(L_M)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{l}$。

由于 $\mathcal{O}(L_M)^{\mathbb{Q}(q)}$ 是 $\mathcal{O}_q(L_M)^{\mathbb{Q}(q)}$ 的中心 Hopf 子代数，商

$$\overline{\mathcal{O}_q(L_M)}_{\mathbb{Q}(q)} := \mathcal{O}_q(L_M)_{\mathbb{Q}(q)}/[\mathcal{O}(L_M)^+_{\mathbb{Q}(q)}\mathcal{O}_q(L_M)_{\mathbb{Q}(q)}]$$

是一个 Hopf 代数，实际上也是有限维的。

从现在起，我们固定子代数 $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$ 为与所选根系 $\mathfrak{l} = \mathfrak{b}^+$ 对应的 Borel 子代数。根据上述讨论，存在 G_M 的 Borel 子群 B_M^+，使得 $\mathrm{Lie}(B_M^+) = \mathfrak{b}^+$。

命题 2.6. 令 $\mathcal{O}(B_M^+) = \mathcal{O}(B_M^+)_{\mathbb{Q}(q)} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbb{C}$ 以及 $\mathcal{O}_q(B_M^+) = \mathcal{O}_q(B_M^+)_{\mathbb{Q}(q)} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbb{C}$.(a) 以下霍普夫代数序列正合

$$\mathcal{O}(B_M^+) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(B_M^+) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)}.$$

(b) 存在一个霍普夫代数满同态 $\mathrm{Res}: \left(u_q^{M'}(\mathfrak{g})\right)^* \twoheadrightarrow \mathcal{O}_q(B_M^+)$ 使得以下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(G_M) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(G_M) & \xrightarrow{\pi} & \left(u_q^{M'}(\mathfrak{g})\right)^* \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Res}}} \\
\mathcal{O}(B_M^+) & \xhookrightarrow{\iota_{B^+}} & \mathcal{O}_q(B_M^+) & \xrightarrow{\pi_{B^+}} & \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)}.
\end{array}$$

(c)$\overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)} \simeq \left(u_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)\right)^* \simeq u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 作为霍普夫代数。特别地，$\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 属于中心正合列

$$\mathcal{O}(B_M^+) \xhookrightarrow{\iota_{B^+}} \mathcal{O}_q(B_M^+) \xrightarrow{\pi_{B^+}} u_q^M(\mathfrak{b}^+).$$

证明. (a) 和 (b) 两项由 [AG, 命题 2.8 (a), (b)] 作相应调整 对 $\mathfrak{l} = \mathfrak{b}^+$和 $L = B_M^+$成立，最后应用正合函子 $\otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbb{C}$。

(c) 根据 [BG, §III.7，3] 可以证明，$\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 是 $\mathcal{O}(B_M^+)$ 上秩为 $N^{\dim \mathfrak{b}^+}$ 的有限生成投射模，这意味着 $\dim \mathcal{O}_q(B_M^+) = N^{\dim \mathfrak{b}^+}$。另一方面，由该表示可知，$u_q^{M'}(\mathfrak{g})$ 的子代数 $u_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)$ 的维数也是 $N^{\dim \mathfrak{b}^+}$。因此，要证明它们同构，只需证明它们之间存在一个霍普夫代数满同态。这可由 [AG, 命题 2.8 (c)] 中所采用的类似论证得到。

最后，$\left(u_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)\right)^* \simeq u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 可由同构 $\left(u_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)\right)^* \simeq u_q^M(\mathfrak{b}^-)^{\mathrm{cop}}$ 和 $\left(u_q^M(\mathfrak{b}^-)\right)^{\mathrm{cop}} \simeq u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 推出。前者源于在 (2) 中存在非退化的霍普夫配对 $(\ ,\ ): U_q^M(\mathfrak{b}^-)^{\mathrm{cop}} \otimes U_q^{M'}(\mathfrak{b}^+) \to \mathbb{C}$，后者则可直接由该表示构造得到。□

2.6.1. 量子化函数代数（适用于 A_θ 情形）。设 $G = G_{sc} = \mathrm{SL}_{\theta+1}(\mathbb{C})$ 且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{\theta+1}$。在这种情况下，范畴 $\mathcal{C}(\mathfrak{g},\ P)$ 由标准表示生成。这使我们能够将 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})$ 表示为一个双代数模由中心元 $\det_q - 1$生成的双边理想所得的商。这里，$\det_q$ 是所谓的量子行列式。

双代数 $\mathcal{O}_q(\mathrm{M}_{\theta+1})$ 由元素 z_{ij}、 $1 \le i,\ j,\ \le \theta+1$ 生成，它们满足以下 q-矩阵关系

$$z_{is}z_{js} = qz_{js}z_{is}, \qquad z_{si}z_{sj} = qz_{sj}z_{si}, \qquad i<j, \tag{5}$$

$$z_{it}z_{js} = z_{js}z_{it}, \qquad z_{is}z_{jt} - z_{jt}z_{is} = (q-q^{-1})z_{it}z_{js}, \qquad i<j,\ s<t. \tag{6}$$

$\mathcal{O}_q(\mathrm{M}_{\theta+1})$ 中的余乘法和余单位定义如下：

$$\Delta(z_{ij}) = \sum_{t=1}^{\theta+1} z_{it}\otimes z_{tj}, \qquad \varepsilon(z_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \text{for all } 1 \le i,j, \le \theta+1.$$

量子行列式 $\det_q$ 是如下给出的中心类群元素：

$$\det_q = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{\theta+1}} (-q)^{\ell(\sigma)} z_{1\sigma(1)}\cdots z_{\theta+1\sigma(\theta+1)} \ \in\ \mathcal{O}_q(\mathrm{M}_{\theta+1}),$$

其中， $\ell(\sigma)$ 表示 σ 的长度。元素 $z_{ij} = c^V_{ij}$ 表示 $\mathcal{U}_q^P(\mathfrak{sl}_{\theta+1})$ 的标准表示 $V=\mathbb{C}^{\theta+1}$ 的矩阵系数。由于量子行列式是中心类群元素，因此可以考虑 Hopf 代数 $\mathcal{O}_q(\mathrm{M}_{\theta+1})/(\det_q - 1)$，它同构于 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})$，即在 q 处的 $\mathrm{SL}_{\theta+1}(\mathbb{C})$ 的量子化函数代数。

设 B^+ 为 $\mathrm{SL}_{\theta+1}(\mathbb{C})$ 的上三角矩阵子群。我们将 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})$ 除以由元素 $\{z_{ij}:\ i>j\}$ 生成的 Hopf 理想 $\mathcal{I}$ 后得到的 Hopf 代数商 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})/\mathcal{I}$ 记作 $\mathcal{O}_q(B^+)$。特别地， $\mathcal{O}_q(B^+)$ 由 z_{ij} 生成，其中 $i\le j$，并满足关系式 (5)、(6) 以及 $z_{11}z_{22}\cdots z_{\theta+1,\ \theta+1} = 1$。

2.7. Cartan 型的有限维尖点 Hopf 代数。 本小节回顾这样一类有限维尖点复 Hopf 代数的分类：它们定义在阿贝尔群上，其无穷小编织是对角 Cartan 型的编织向量空间。这类代数由小量子群 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 的多参数变体构成。表示法遵循 [AS2] 。

尽管所涉及的有限阿贝尔群受到某些限制，但这些限制尚未完全确定；即使在最小假设 下，仍存在一定的自由性，因此可以考虑格 M ，它们介于格 Q 与 P之间。

2.7.1. 有限 *Cartan* 型的数据。 设 Γ是一个有限阿贝尔群。 $\mathcal{D}$ 的有限 ***Cartan*** 型 数据是一个元组

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Gamma, (g_i)_{i\in I}, (\chi_i)_{i\in I}, (a_{ij})_{i,j\in I})$$

˄ 由元素 $g_i\in\Gamma$、 $\chi_i\in\Gamma$以及一个 Cartan 矩阵 $(a_{ij})_{i,\ j\in I}$ 组成，该矩阵为有限型并满足***Cartan*** 关系：

$$q_{ij}q_{ji} = q_{ii}^{a_{ij}}, \qquad \text{for all } i,j\in I, \tag{7}$$

其中，对所有 $i,j\in I$，$q_{ij} = \chi_j(g_i)$，并且我们假设对所有 $i\in I$， $q_{ii}\ne 1$。

由于我们关注的是有限维 Hopf 代数，因此进一步假设对所有 $i\in I$， q_{ii} 的阶均为奇数；对于类型为 G_2 的连通分支中的所有 i ， q_{ii} 的阶都与 3 互素。由 (7) 可得，对所有 i， $q_{ii}^{a_{ij}} = q_{jj}^{a_{ji}}, j\in I$。于是，对于 Dynkin 图的每个连通分支 J ，存在 $j_0\in I$ ，使得对某个 $e_i\in\mathbb{N}$，对所有 $i\in J$， $q_{ii} = q_{j_0j_0}^{e_i}$。特别地， q_{ii} 的阶 N_i 在每个连通分支 J 中都是常数；因此，对所有 $i\in J$，我们令 $N_J = N_i$。我们还令 $q_{j_0} = q_{j_0j_0}^{1/2}$ 和 q_i：对所有 $i\in J$，$= q_{j_0}^{e_i}$。当 Dynkin 图连通时，我们记 $q:=q_{j_0}$ ，并将阶 N_J 简记为 N。

给定一个正根 $\alpha=\sum_{i=1}^{\theta} n_i\alpha_i\in Q^+,\quad n_i\in\mathbb{N}_0$，我们记

$$g_\alpha=\prod_{i=1}^{\theta} g_i^{n_i},\qquad\qquad \chi_\alpha=\prod_{i=1}^{\theta}\chi_i^{n_i}.$$

ˆ 换句话说，存在群同态 $g:\ Q\to\Gamma$and $\chi:\ Q\to\Gamma$，分别由$g(\alpha_i)\ =\ g_i$ and $\chi(\alpha_i)\ =\ \chi_i$给出，对所有 $i\ \in\ I$均成立；对于任意 $\lambda\in Q$，我们记 $g_\lambda\ =\ g(\lambda)$ and$\chi(\lambda)\ =\chi_\lambda$。

定义 2.7. 给定任意一个秩为 θ 且满足 $Q\subseteq M\subseteq P$ 的格 M，若存在群同态 $g:M\to\Gamma$，$\chi:\ M\to\Gamma$，使得对所有 $i\in I,\quad g(\alpha_i)\ =g_i$ 且 $\chi(\alpha_i)\ =\chi_i$，则称一个阿贝尔ˆ群 Γ 包含 M。特别地，Γ 包含元素 $g_\lambda=g(\lambda)$，其中 $\lambda\in M$，且满足 $g_{\lambda+\mu}=g_\lambda g_\mu$ 和 $g_0=1$。

注意，任何属于非平凡有限 Cartan 型数据的阿贝尔群 Γ 都包含根格 Q，但对于 $M\neq Q$，它不一定包含 M。对于包含格 M 的有限阿贝尔群 Γ，我们记作 $\mathcal{D}_M=\mathcal{D}(\Gamma,\ (g_i)_{i\in I},\ (\chi_i)_{i\in I},\ (a_{ij})_{i,\ j\in I})$，以强调这一性质。

正如 [AS3], 所指出的，对于给定的有限阿贝尔群 Γ，显式分类其所有有限 Cartan 型数据是一个计算问题；至少，该问题是有界的。

给定一个具有不可分解 Cartan 矩阵的 Γ 有限 Cartan 型数据 $\mathcal{D}$，我们将在下一小节回顾如何构造一个有限维尖点 Hopf 代数 $u(\mathcal{D},\ \mu)$。该代数依赖于参数族 μ，其余根同构于 $\mathbb{C}\Gamma$。

一族根向量参数是 $\mathbb{C}$ 中的一族元素 $\mu=(\mu_\alpha)_{\alpha\in Q^+}$，满足对所有 $\alpha\in Q^+$,

$$\text{if}\quad g_\alpha^N=1\quad\text{or}\quad\chi_\alpha^N\neq\varepsilon\qquad\text{then}\quad\mu_\alpha=0. \tag{8}$$

2.7.2. 有限维尖点 *Hopf* 代数 $u(\mathcal{D},\ \mu)$。在本小节中，我们遵循 [AS3]。给定一个有限 Cartan 型数据 $\mathcal{D}$ 以及一个满足（8）的参数族 μ，定义 Hopf 代数 $u(\mathcal{D},\ \mu)$ 为由元素 g、x_i 生成的代数，其中满足 $g\in\Gamma$和 $1\le i\le\theta$，并满足以下关系：

$$\begin{aligned} gx_ig^{-1}&=\chi_i(g)x_i, && \text{for all } i \text{ and } g\in\Gamma,\\ (\operatorname{ad}_c x_i)^{1-a_{ij}}(x_j)&=0, && \text{for all } i\neq j,\\ x_\alpha^N&=r_\alpha(\mu), && \text{for all } \alpha\in Q^+. \end{aligned} \tag{9}$$

这里，$(\operatorname{ad}_c x_i)^{1-a_{ij}}(x_j)$ 表示（1）中定义的编织伴随作用的复合，x_α 是通过对元素 $\{x_i\}_{i\in I}$ 反复施加编织交换子得到的根向量，而 $r_\alpha(\mu)$ 是 $\mathbb{C}[g_i^{N_i}\mid i\in I]$ 的增广理想中的元素，它们以递归方式构造如下：

$$r_\alpha(\mu)=\mu_\alpha(1-g_\alpha^N)+\sum_{\beta,\gamma\neq0,\beta+\gamma=\alpha} t_{\beta,\gamma}^{\alpha}\mu_\beta r_\gamma(\mu), \tag{10}$$

其中 $t_{\beta,\ \gamma}^{\alpha}\in\mathbb{C}$ 是由余乘法确定的某些标量。事实上，可以对 α 的长度使用归纳法，证明元素 $r_\alpha(\mu)$属于 $\mathbb{C}[g_\alpha^N\mid\chi_\alpha^N\neq\varepsilon]$的增广理想。余代数结构通过对所有$g\in\Gamma$ 和 $x_i\in P_{1,\ g_i}$，令 $g\in G(u(\mathcal{D},\ \mu))$，以及 $u(\mathcal{D},\ \mu))$ 来定义，即

$$\Delta(x_i)=x_i\otimes1+g_i\otimes x_i,\qquad\varepsilon(x_i)=0,\qquad\Delta(g)=g\otimes g,\qquad\varepsilon(g)=1.$$

注 2.8. 设 $\mathcal{D}$ 是一个有限 Cartan 型数据，其中 Cartan 矩阵（在该数据中）不一定是不可分解的。在这种情况下，存在一个霍普夫代数 $u(\mathcal{D},\ \lambda,\ \mu)$，它取决于 Cartan 数据以及两族参数 λ 和 μ。标量族 λ 对应于一条关系；当 Cartan 矩阵不可分解时，该关系不存在，而这恰好就是我们所讨论的情形。因此，我们只写作 $u(\mathcal{D},\ \mu)$。

霍普夫代数族 $u(\mathcal{D},\ \lambda,\ \mu)$ 对有限维复尖点霍普夫代数的分类问题至关重要，原因是以下关键结果；这一结果也是霍普夫代数理论中为数不多的结构性结果之一。

定理 2.9. [AS3] 沿用上述记号，我们有：

(a) $u(\mathcal{D},\lambda,\mu)$ 是一个维数为 维数 $u(\mathcal{D},\lambda,\mu) = N^{|\Phi^+|}$ 阶 Γ 的尖点霍普夫代数，其中$u(\mathcal{D},\lambda,\mu)_0 = \mathbb{C}\Gamma$。(b) 设 A 是一个有限维尖点霍普夫代数，其阿贝尔群为 $\Gamma = G(A)$，无穷小编织矩阵为 $(q_{ij})_{1\le i,\ j\le\theta}$。假设

- $N =$ 阶 q_{ii} 对所有 $1 \le i \le \theta$ 均为奇数，
- $N =$ 阶 q_{ii} 与 3 互素，若存在某个 l 使得 $q_{il}q_{li} \in \{q_{ii}^{-3}, q_{ll}^{-3}\}$，
- $N =$ 序 $q_{ii} > 7$，对所有 $1 \le i \le \theta$ 均成立。

于是 $A \simeq u(\mathcal{D}、\ \lambda、\ \mu)$ 对于某些 $\mathcal{D}$、λ、μ 成立。

$u(\mathcal{D},\mu)$ 的伴随分次 Hopf 代数 gr $u(\mathcal{D},\mu)$ 恰好同构于某个玻色化 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$，其中 $V \in {}^{\Gamma}_{\Gamma}\mathcal{YD}$。换言之，$u(\mathcal{D},\mu)$ 是 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 的一个提升。Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$ 完全由 Cartan 数据确定；作为一个代数，它由满足以下关系的元素 $\{x_i\}_{i\in I}$ 生成：对所有 $i \ne j$，$(\mathrm{ad}_c\, x_i)^{1-a_{ij}}(x_j) = 0$；以及对所有 $\alpha \in Q^+$，$x_\alpha^N = r_\alpha(\mu)$。

注 2.10。要给出尖点 Hopf 代数族 $u(\mathcal{D},\mu)$ 的显式表示，主要障碍是递归公式 (10)：对所有 $\alpha \in Q^+$，$x_\alpha^N = r_\alpha(\mu)$。该公式隐含地包含了相应 Nichols 代数的提升数据。尽管元素 $r_\alpha(\mu)$ 的显式表示具有算法性质，但目前已完全了解的族并不多。其中包括类型 A_θ 的 [AS2，第 6] 节和 [AAG]；类型 B_2 的 [BDR]；类型 B_3 的 [BGM]；以及类型 G_2 的 [GIG]。本文的主要目标是回答关于 [AS3] 的一个问题，并利用量子子群找到一种显式算法，以描述任意连通 Dynkin 图对应的元素 $r_\alpha(\mu)$。作为示例，我们运用该方法重新得到第 4 节中类型 A_θ、B_θ 和 D_θ 的显式公式。

2.7.3. *Drinfeld-Jimbo* 编织。设 $q \in \mathbb{C}^\times$ 是一个阶为奇数 N的本原单位根；若 Cartan 矩阵 C 含有类型为 G_2的分量，则假设它与 3 互素。满足以下条件的 Cartan 型对角编织

$$q_{ij} = q^{(\alpha_i,\alpha_j)} = q^{d_i a_{ij}} = q^{d_j a_{ji}}, \quad \text{for all } i,j \in I,$$

称为 *Drinfeld-Jimbo* 型。

3. Pointed Hopf algebras as quantum subgroups

从现在起，$C = (a_{ij})_{i,\ j\in I}$ 表示一个有限型的不可分解对称化 Cartan 矩阵，$q \in \mathbb{C}^\times$ 是一个阶为奇数 N 的本原单位根；若 A 属于 G_2 型，则假设其阶大于 3；并且对所有 $i \in I$，q_{ii} 是 q 的幂，且 ord $q_{ii} = N$。

设 M是秩为 θ 的格，具有 $Q \subseteq M \subseteq P$ 和 $\mathbb{Z}$-基 $\{m_1,\dots,m_\theta\}$, $\ell_1,\dots,\ell_\theta \in \mathbb{N}$以及 $\Gamma = \mathbb{Z}^\theta/(\ell_1 N\mathbb{Z}\times\cdots\times\ell_\theta N\mathbb{Z})$。记 $g\colon M \to \Gamma$为典范群满同态，它将 M 的 $\mathbb{Z}$-基映射到 Γ 的典范生成元，并对所有$m \in M$写作 $g_m = g(m)$。注意，对所有 $i \in I$，都有 $N|\mathrm{ord}(g_{m_i})$。此外，Γ 的任意元素都可以写成g_m，其中某个 $m \in M$。特别地，Γ包含 M。

3.1. **Drinfeld-Jimbo 型的编织**。本小节中，我们假设编织$\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j\in I}$ 属于 Drinfeld-Jimbo 型。令 $q_i = q^{d_i}$；则对所有 $i \in I$，都有 $q_{ii} = q_i^2$。

任意格 M 对应的 ***Cartan*** 数据。

对于 $j \in I$，令 $\chi_j : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ 为由 $\chi_j(g_{m_i}) = q^{(m_i,\alpha_j)}$ 定义的特征，对所有 $i \in I$ 均成立。注意，对所有 $i, j \in I$，$\chi_j(g_{\alpha_i}) = q^{(\alpha_i,\alpha_j)} = q^{d_i a_{ij}}$。因此，对所有 $i \in I$ 取 $g_i = g_{\alpha_i}$，可得 $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}(\Gamma, (g_i)_{i\in I}, (\chi_i)_{i\in I}, (a_{ij})_{i,j\in I})$ 是一个有限 Cartan 型数据。

任意格 M 对应的尖点 ***Hopf*** 代数。

固定一族根向量参数 $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha\in\Phi^+}$。代数 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$ 的显式定义如下:

$$g_m x_j g_m^{-1} = q^{(m,\alpha_j)} x_j, \qquad \text{对所有 } m \in M \text{ 以及 } g \in \Gamma, \tag{11}$$

$$\mathrm{ad}_c(x_i)^{1-a_{ij}}(x_j) = 0, \qquad \text{对所有 } i \neq j, \tag{12}$$

$$x_\alpha^N = r_\alpha(\mu), \qquad \text{对所有 } \alpha \in \Phi^+, \tag{13}$$

其中 $r_\alpha(\mu)$由（10）给出。

代数 u（$\mathcal{D}_M$、 μ）作为中心扩张。

下面的命题断言，可以通过有限维群代数对小量子群作中心扩张，构造霍普夫代数 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$。为陈述该命题，我们回顾 §2.5.2 中的记号：对于 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 的生成元，我们记作 $K_m := k_m$，其中 $m \in M$，$K_{\alpha_i} = k_i$，以及 $E_i := e_i$，对所有 $i \in I$。

命题 3.1。设 M、 Γ、 $\mathcal{D}_M$ 以及 $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha\in Q^+}$ 如上所述。设 T_M 为由 $g_{m_i}^N$（对所有 $i \in I$）生成的 Γ 的子群。

(a) 存在一个霍普夫代数满同态 π_u: $u(\mathcal{D}_M, \mu) \twoheadrightarrow u_q^M(\mathfrak{b}^+)$，其定义为$\pi_u(g_{m_i}) = k_{m_i}$ 以及 $\pi_u(x_i) = e_i$，对所有 $i \in I$均成立。(b) $u(\mathcal{D}_M, \mu)^{\mathrm{co}\,\pi_u} = \mathbb{C}T_M$。(c) 存在一个霍普夫代数的中心正合列

$$\mathbb{C}T_M \xhookrightarrow{\iota_u} u(\mathcal{D}_M, \mu) \xrightarrow{\pi_u} u_q^M(\mathfrak{b}^+). \tag{14}$$

特别地，维数 $u(\mathcal{D}_M, \mu) = |T_M|$ 维数 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$。

证明。(*a*) 注意到 $k_m^N = K_m^N = 1$以及 $\pi_u(g_m) = k_m$ 对所有 $m \in M$均成立；特别地，$\pi_u(g_i) = k_i$ 对所有 $i \in I$均成立。下面验证 π_u 是一个定义良好的代数映射。对于满足 $m \in M$的 $g_m \in \Gamma$，有 $\pi_u(g_m x_j g_m^{-1}) = k_m e_j k_m^{-1} = q^{(m,\alpha_j)} e_j = \pi_u(q^{(m,\alpha_j)} x_j)$，且满足 (11)。由于 $\pi_u(x_i) = e_i$，可知 π_u 将关系 (12) 映为 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$中的量子Serre关系，因此 (12) 也成立。最后，利用递归公式 (10)，我们得到，对于所有 $\alpha \in Q^+$，$\pi_u(r_\alpha(\mu)) = 0 = \pi_u(x_\alpha)^N$，因为 $r_\alpha(\mu)$ 是 $\mathbb{C}[g_{\alpha_i}^N \mid i \in I]$ 的增广理想中的元素，且对于所有 $i \in I$，$\pi_u(g_{\alpha_i}^N) = \varepsilon(g_{\alpha_i}^N) = 1$。

我们同时证明 (*b*) 和 (*c*)。由于对所有 $i \in I$ 都有 $\pi_u(g_{m_i}^N) = 1$，因此 $\mathbb{C}T_M \subseteq u(\mathcal{D}_M, \mu)^{\mathrm{co}\,\pi}$。下面证明反向包含。因为 q 是 N 次单位根，所以 $\mathbb{C}T_M$ 是 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$ 的中心 Hopf 子代数。此外，由 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$ 和 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 的表示，以及代数 $u(\mathcal{D}_M, \mu)/u(\mathcal{D}_M, \mu)\mathbb{C}T_M^+$ 与 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 维数相同可知，$u(\mathcal{D}_M, \mu)/u(\mathcal{D}_M, \mu)\mathbb{C}T_M^+ \simeq u_q^M(\mathfrak{b}^+)$。由于 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$ 是 $\mathbb{C}T_M$ 上的自由模，因此它是忠实平坦的。由 [Mo 命题 3.4.3] 可知，$u(\mathcal{D}_M, \mu)^{\mathrm{co}\,\pi} = \mathbb{C}T_M$ 和 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$ 构成中心正合列 $\mathbb{C}T_M \xhookrightarrow{\iota_u} u(\mathcal{D}_M, \mu) \xrightarrow{\pi_u} u_q^M(\mathfrak{b}^+)$. □

下一个命题给出了正合列 (3) 和 (14) 之间的关系。特别地，代数 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 构成一个行正合的交换图。

命题 3.2. 设 M、 Γ、 T、 $\mathcal{D}_M$ 和 $\mu=(\mu_\alpha)^{\alpha\in Q^+}$ 如上。

(a) 存在一个霍普夫代数满同态 $p\colon U_q^M(\mathfrak{b}^+)\twoheadrightarrow u(\mathcal{D}_M,\mu)$，其定义为$p(K_{m_i})=g_{m_i}$ 和 $p(E_i)=x_i$，对所有 $i\in I$ 均成立。(b) 记 p_0 为 p 在子代数 $Z_M^{\geq}$ 上的限制。则 p_0 的像为$\mathbb{C}T_M$，且下图是一个具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccc} Z_M^{\geq} & \xhookrightarrow{\iota_U} & U_q^M(\mathfrak{b}^+) & \xrightarrow{\pi_U} & u_q^M(\mathfrak{b}^+) \\ {\scriptstyle p_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \Vert{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbb{C}T_M & \xhookrightarrow{\iota_u} & u(\mathcal{D}_M,\mu) & \xrightarrow{\pi_u} & u_q^M(\mathfrak{b}^+). \end{array} \tag{15}$$

证明。 (a) 很容易验证。对于 (b)，只需注意到 $p_0(K_m^N)=g_m^N$ 且 $p_0(E_\alpha^N)=x_\alpha^N=r_\alpha(\mu)\in\mathbb{C}[g_{\alpha_i}^N\,|\,i\in I]\subset\mathbb{C}T_M$。 □

备注 3.3. 根据 [G, §1.3],，对于所有格 $Q\subseteq M\subseteq P$，都有 $U_q^M(\mathfrak{b}^+)\simeq\mathcal{O}_q(B_M^+)$。例如，当 $G=SL_{\theta+1}(\mathbb{C})$（即 $M=P$）时，根据 [G, §2.4]，前述同构可明确写为

$$\psi: U_q^P(\mathfrak{b}^+)\to\mathcal{O}_q(B_P^+),\qquad K_{\omega_i}^{\pm1}\mapsto(z_{1,1}\dots z_{i,i})^{\pm1},\quad E_j\mapsto-(q-q^{-1})^{-1}z_{j,j+1}z_{j+1,j+1}^{-1}$$

对所有 $1\leq i,\ j\leq\theta$。逆映射 $\psi^{-1}\colon\mathcal{O}_q(B_P^+)\to U_q^P(\mathfrak{b}^+)$ 定义如下

$$\psi^{-1}(z_{i,i})=K_{\omega_i}K_{\omega_{i-1}}^{-1},\quad \psi^{-1}(z_{i,i+1})=-(q-q^{-1})^{-1}E_iK_{\omega_i}^{-1}K_{\omega_{i+1}},$$

按照惯例，我们假设 $K_{\omega_0}=K_{\omega_{\theta+1}}=1$。

代数 $u(\mathcal{D}_M,\mu)$ 作为量子子群。

利用　前述说明和命题 2.6 和 3.2，我们证明第一个主要结果。

定理 3.4。 设 M, T_M 和 $\mu=(\mu_\alpha)^{\alpha\in Q^+}$ 如上所述。存在一个由霍普夫代数组成的交换图，其行是正合列

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(B_M^+) & \xhookrightarrow{\tilde{\iota}} & \mathcal{O}_q(B_M^+) & \xrightarrow{\pi_{B^+}} & \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)} \\ {\scriptstyle \tilde{p}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathbb{C}^{\widehat{T_M}} & \xhookrightarrow{\tilde{\iota}_u} & u(\mathcal{D}_M,\mu) & \xrightarrow{\pi_u} & u_q^M(\mathfrak{b}^+). \end{array} \tag{16}$$

特别地，霍普夫代数 $u(\mathcal{D}_M,\mu)$ 是 $\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 的量子子群。

证明。 用 $\psi\colon U_q^M(\mathfrak{b}^+)\to\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 表示备注 3.3 中提到的霍普夫代数同构。可得 $\psi^{-1}(\mathcal{O}(B_M^+))=Z_M^{\geq}$。事实上，由命题 2.5 的证明可知，霍普夫代数 $\mathcal{O}(B_M^+)$ 是量子弗罗贝尼乌斯映射 $\mathrm{Fr}: U_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)\twoheadrightarrow U(\mathfrak{b}^+)$ 的对偶之像。因此，它由 $\mathrm{Img}\,\mathrm{Fr}^t$ 中湮灭核的元素构成（相对于 $U_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)$ 与 $\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 之间的霍普夫配对），后者由元素 $K_{m'}-1$ 和 E_j（其中 $m\in M'$ 和 $j\in I$）生成。另一方面，我们有由 (2) 给出的非退化配对 $(\ ,\ )\colon U_q^M(\mathfrak{b}^-)^{\mathrm{cop}}\otimes U_q^{M'}(\mathfrak{b}^+)\to\mathbb{C}$:

$$(K_m,K_{m'})=q^{-(m,m')},\qquad (K_m,E_j)=0,\qquad (F_i,E_j)=-\frac{\delta_{ij}}{q_i-q_i^{-1}},\qquad (F_i,K_m)=0,$$

对所有 $i,\ j \in I$、 $m \in M$ 和 $m' \in M'$ 均成立。 $U_q^M(\mathfrak{b}^-)^{\mathrm{cop}}$ 中通过此配对湮灭 Frobenius 映射之核的子代数，是由元素 $K_m^{\pm N}$、 F_α^N（对所有 $m \in M$ 和 $\alpha \in Q^+$）生成的子代数。通过同构 $U_q^M(\mathfrak{b}^-)^{\mathrm{cop}} \simeq U_q^M(\mathfrak{b}^+)$，后者对应于元素 $K_m^{\mp N}$、 E_α^N。这正是 $U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 的子代数 $Z_M^{\geq}$，见 §2.5.2。因此，我们有一个交换图，其竖行为同构

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(B_M^+) & \xhookrightarrow{\tilde{\iota}} & \mathcal{O}_q(B_M^+) & \xrightarrow{\pi_{B^+}} & \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Z_M^{\geq} & \xhookrightarrow{\iota_U} & U_q^M(\mathfrak{b}^+) & \xrightarrow{\pi_U} & u_q^M(\mathfrak{b}^+). \end{array}$$

现在，为了完成证明，我们使用命题 3.2 中的图，并证明新图是交换的。由于 T_M 是一个有限阿贝尔群，存在一个霍普夫代数同构 $\varphi\colon \mathbb{C}T_M \to \mathbb{C}^{T_M}$。考虑 $\tilde{\iota} = \psi \circ \iota_U \circ \psi^{-1}$, $\tilde{p} = p \circ \psi^{-1}$, $\tilde{p}_0 = \varphi \circ p_0 \circ \psi^{-1}$和 $\tilde{\iota}_u = \iota_u \circ \varphi^{-1}$。于是，由 (15) 可得

$$\tilde{\iota}_u \circ \tilde{p}_0 = \iota_u \circ p_0 \circ \psi^{-1} = p \circ \iota_U \circ \psi^{-1} = \tilde{p} \circ \tilde{\iota}.$$

令 $\phi\colon \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)} \to \mathfrak{u}_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 为命题2.6（c）中给出的霍普夫代数同构。由 (15) 可得

$$\pi_u \circ \tilde{p} = \pi_u \circ p \circ \psi^{-1} = \pi_U \circ \psi^{-1}.$$

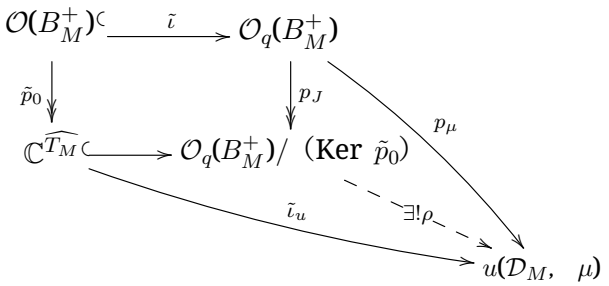
由于 $\pi_U \circ \psi^{-1} = \phi \circ \pi_{B^+}$，结论得证。 □

注3.5. 根据前一个定理，可以用短正合列 $\mathbb{C}^{\widehat{T_M}} \overset{i_u}{\rightarrowtail} u(\mathcal{D}_M, \mu) \overset{\pi_u}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{u}_q^M(\mathfrak{b}^+)$.所给出的数据来描述霍普夫代数 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$。事实上，关系式 (11) 和 (12) 对 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$的生成元 g_m, x_i 以及 $\mathfrak{u}_q^M(\mathfrak{b}^+)$的生成元 k_m, e_i 均成立。于是，关系式 (13) 实际上编码了前一个短正合列的信息。

推论 3.6. 设 $\Gamma = \big(\mathbb{Z}/\ell_1 N\mathbb{Z}\big) \times \cdots \times \big(\mathbb{Z}/\ell_\theta N\mathbb{Z}\big)$ 是一个包含M的有限阿贝尔群，其生成元为 $g_{m_1}, \cdots, g_{m_\theta}$，且阶 $g_{m_i} = \ell_i N$，$\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha \in Q^+}$ 是一族根向量参数； $\mathcal{D}_M$是 Γ 的有限 *Cartan* 数据，如 *7.1* 中所定义；而 $u(\mathcal{D}_M, \mu)$是相应的尖点 *Hopf* 代数。则存在一个有限阿贝尔群 T_M 和一个代数群单态射 $k\colon\ \widehat{T_M} \hookrightarrow B_M^+$，使得作为霍普夫代数，

$$u(\mathcal{D}_M, \mu) \simeq \mathcal{O}_q(B_M^+)/(\operatorname{Ker} k^*).$$

证明。 根据前一个定理，我们知道尖点 Hopf 代数 $u(D_M, \mu)$ 可嵌入交换图（16）中，并且有一个投影 $\tilde{p}_0\colon \mathcal{O}(B_M^+) \twoheadrightarrow \mathbb{C}^{T_M}$，其中 T_M 是有限阿贝尔群。考虑相应的代数群单态射$k\colon \widehat{T_M} \hookrightarrow B_M^+$ 以及 Hopf 代数商 $\mathcal{O}_q(B_M^+)/(\mathrm{Ker}\ \tilde{p}_0)$。由于后者由一个推出给出，因此存在唯一的霍普夫代数映射 $\rho\colon \mathcal{O}_q(B_M^+)/(\mathrm{Ker}\ \tilde{p}_0) \to u(D_M, \mu)$，使得下图交换：



由于映射 p_J 和 p_μ 是满射， ρ 也是满射。此外，由于

$$\dim u(\mathcal{D}_M,\mu)=|T_M|\dim u_q^M(\mathfrak{b}^+)=\dim \mathcal{O}_q(B_M^+)/(\operatorname{Ker}\tilde{p}_0),$$

由此可知， ρ 确实是一个同构。 □

现在我们证明第二个主要结果，它是前一个推论的逆命题。也就是说，有限阿贝尔群到 B_M^+ 的任意包含，都会给出 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 的一个提升，其中 Γ 是某个阿贝尔群， V 是 $\mathbb{C}\Gamma$ 上的某个 Yetter-Drinfeld 模。沿用 §2.6 中的记号。

定理 3.7. 设 T_M 是一个有限阿贝尔群，且 $k\colon \widehat{T_M}\hookrightarrow B_M^+$ 是代数群单态射。那么存在一个有限阿贝尔群 Γ 和一个 ***Drindeld-Jimbo*** 型对角型编织向量空间 V，使得霍普夫代数 $A=\mathcal{O}_q(B_M^+)/\big(\tilde{\iota}(\operatorname{Ker}k^*)\big)$ 是 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 的一个提升。此外， Γ 包含 M，它同构于 $\big(\mathbb{Z}/\ell_1N\mathbb{Z}\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{Z}/\ell_\theta N\mathbb{Z}\big)$，其中 $\ell_1,\dots,\ell_\theta\in\mathbb{N}$，并且与 V 相关联的 ***Cartan*** 矩阵对应于 B_M^+ 的 ***Cartan*** 矩阵。

证明。 单态射 $k\colon \widehat{T_M}\hookrightarrow B_M^+$ 对应于霍普夫代数的一个满态射 $k^*\colon \mathcal{O}(B_M^+)\twoheadrightarrow\mathbb{C}^{T_M}\simeq\mathbb{C}T_M$，其核为 $J=\operatorname{Ker}k^*$。利用 [AG，命题 2.10]，可知，$(J)=\mathcal{O}_q(B_M^+)J$是 $\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 的一个 Hopf 理想，而霍普夫代数 $\mathcal{O}_q(B_M^+)/(J)$ 是一个推出，并适合以下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(B_M^+) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(B_M^+) & \xrightarrow{\pi} & \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)} \\
\downarrow{\scriptstyle k^*} & & \downarrow{\scriptstyle p_J} & & \| \\
\mathbb{C}^{\widehat{T_M}} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_q(B_M^+)/(J) & \twoheadrightarrow & \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)},
\end{array}$$

这里 p_J是典范投影。特别地， $\mathcal{O}_q(B_M^+)/(J)$ 是有限维的。此外，由于 $\mathcal{O}_q(B_M^+)\simeq U_q^M(\mathfrak{b}^+)$，且后者是一个余根同构于 $\mathbb{C}\mathbb{Z}^\theta$ 的尖点 Hopf 代数， $H:=\mathcal{O}_q(B_M^+)/(J)$ 是一个尖点 Hopf 代数，其余根为 $H_0=\mathbb{C}\Gamma$，其中 $\Gamma=p_J(\mathbb{Z}^\theta)$ 包含 M。此外，由于前面的图是交换的，且 $\mathcal{O}_q(B_M^+)\simeq u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 的类群元素群同构于 $\big(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\big)^\theta$，阿贝尔群 Γ 适合以下群的短正合列

$$1\to T_M\hookrightarrow\Gamma\twoheadrightarrow\big(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\big)^\theta\to 1.$$

记 g_{m_i} 为生成元 $K_{m_i}\in U_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 在 p_J 下的像，其中对所有 $i\in I$均成立。则 Γ由 g_{m_1}、……、g_{m_θ}生成，而 T_M由 $g_{m_1}^N$、……、$g_{m_\theta}^N$生成。若 $\ell_i=\operatorname{ord}g_{m_i}^N$，则 $\Gamma\simeq\big(\mathbb{Z}/\ell_1N\mathbb{Z}\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{Z}/\ell_\theta N\mathbb{Z}\big)$和 $T_M\simeq\big(\mathbb{Z}/\ell_1\mathbb{Z}\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{Z}/\ell_\theta\mathbb{Z}\big)$。

此外，由于 H 是尖点，关于余基滤过的伴随分次 Hopf 代数 $\operatorname{gr}H$ 满足 $\operatorname{gr}H\simeq R\#\mathbb{C}\Gamma$。进一步地，由于 Γ 是有限阿贝尔群，R 是对角型的 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(W)$，具有 $W=R^1=P_1(R)$，参见 [An]。

另一方面，$\mathcal{O}_q(B^+)\overline{{}_M\simeq u_q^M(\mathfrak{b}^+)}$，后者也是一个尖点 Hopf 代数，其 $\operatorname{gr}u_q^M(\mathfrak{b}^+)\simeq\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\big(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\big)^\theta$。这里， V是 Cartan 型的对角型编织向量空间，其对应的 Cartan 矩阵 C如 §27 所示。由于 $\dim H=|\Gamma|\dim\mathfrak{B}(W)=|T_M|\dim u_q^M(\mathfrak{b}^+)=|T_M|\frac{|\Gamma|}{|T_M|}\dim\mathfrak{B}(V)$，因此 $\dim\mathfrak{B}(W)=\overline{\dim}\,\mathfrak{B}(V)$。记 $\bar{\pi}:H\twoheadrightarrow u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 为霍普夫代数满同态，并分别以 $(H_n)_{n\geq0}$ 和 $(u_n)_{n\geq0}$ 表示 H 和 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 的余根过滤项。利用 H 和 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 均为尖点这一事实，由 [Ra，推论 4.2.2] 可得，对所有 $n\geq0$，均有 $\bar{\pi}(H_n)\subseteq u_n$。特别地，$\bar{\pi}$ 诱导出一个霍普夫代数映射 $\hat{}\pi:\operatorname{gr}H\to\operatorname{gr}u_q^M(\mathfrak{b}^+)$，该映射是满射，因为 $\bar{\pi}$ 是满射；参见 [Ra，推论 4.2.2]。这意味着存在一个满射的编织霍普夫代数

映射 $\mathfrak{B}(W) \to \mathfrak{B}(V)$，因此 $\mathfrak{B}(W) \simeq \mathfrak{B}(V)$。于是，$\mathrm{gr}\ H \simeq \mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$ 和$H = \mathcal{O}_q(B_M^+)/(J)$ 是 $\mathfrak{B}(V)\#\Gamma$ 的一个提升

作为上述定理的直接推论，所有霍普夫代数 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 都可以描述为量子子群 $\mathcal{O}_q(B_M^+)/(\mathrm{Ker}\ k^*)$，具体取决于单态射 $k\colon \widehat{T_M} \to B^+$，该单态射由根向量参数族 $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha\in Q^+}$ 定义。

注 3.8. 根据交换图 (15) 和 (16)，我们可以找到计算幂根向量关系 (9) 的提升的方法。这基于同构 $\psi\colon U_q^M(\mathfrak{b}^+) \to \mathcal{O}_q(B_M^+)$（参见定理 3.4 的证明）、单态射$k\colon \widehat{T_M} \hookrightarrow B_M^+$ 以及一个众所周知的公式，该公式给出了任意正根α 用单根 α_i 表示的形式，其中 $i \in I$，对每种李代数类型均成立。具体而言，根据命题 3.2，对于所有 $\alpha \in \Phi^+$，我们有

$$x_\alpha^N = p(E_\alpha^N) = p_\mu(\psi(E_\alpha^N)) = \varphi^{-1}k^*(\psi(E_\alpha^N)),$$

因为 $E_\alpha^N \in Z_M^{\geq}$。这里，$\varphi^{-1}k^*(\psi(E_\alpha^N)) \in \mathbb{C}T$ 和 $\varphi^{-1}\colon \mathbb{C}^{\widehat{T_M}} \to \mathbb{C}T$ 是定理 3.4 中考虑的同构。

3.2. **一般 Cartan 型的编织。** 在本小节中，我们假设编织$\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,\ j\in I}$ 对某个 Cartan 矩阵 $C = (a_{ij})_{i,\ j\in I}$ 而言是 Cartan 型。回顾一下，我们记 $a = |\det(C)| = [P\colon\ Q]$。对于任意秩为 θ 、基为$\{m_1, \dots, m_\theta\}$ 的格 $Q \subseteq M \subseteq P$，我们有 $\alpha_i = \sum_{j\in I} a_{ji}^M\, m_j$对所有 $i,\ j \in I$均成立，其中 $C_M = (a_{ji}^M)_{i,\ j} \in \mathbb{Z}^{\theta\times\theta}$且 $a_M := |\det C_M| = [M\colon Q]$。

对于每个 $(i,\ j) \in I \times I$，我们选择 $q_{ij}^{1/a^2} \in \mathbb{C}$一个 a^2 次方根 q_{ij}，即 $\left(q_{ij}^{1/a^2}\right)^{a^2} = q_{ij}$。给定 $m \in (1/a^2)\mathbb{Z}$，我们令 $q_{ij}^m := \left(q_{ij}^{1/a^2}\right)^{a^2 m}$；特别地，我们有 $q_{ij}^{1/a} = \left(q_{ij}^{1/a^2}\right)^a$和 $q_{ij}^{1/a_M} = \left(q_{ij}^{1/a}\right)^{[P:M]}$。我们进一步假设

$$q_{ij}^{1/a} q_{ji}^{1/a} = q_{ii}^{a_{ij}/a}, \qquad \text{for all } i, j \in I.$$

3.2.1. 任意格的多参数 M。 记 $C_M^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{i,\ j\in I}$ 为 C_M的逆矩阵。于是 $a_M C_M^{-1} \in \mathbb{Z}^{\theta\times\theta}$，并定义：

$$q_{ij}^M = \prod_{k\in I} q_{kj}^{\tilde{a}_{ki}}. \tag{17}$$

注意到 $q_{kj}^{a_{ki}}$是良定义的，因为 $\tilde{a}_{ki} \in (1/a_M)\mathbb{Z} \subseteq (1/a^2)\mathbb{Z}$。另回顾 §2.4 中的内容，我们可以对所有 $j \in I$将 $m_j = \sum_{k\in I} \bar{a}_{kj}^M\, w_k$ 写作；特别地

$$\bar{a}_{kj}^M = \frac{(\alpha_k, m_j)}{d_k} \qquad \text{for all } k, j \in I. \tag{18}$$

矩阵 $C_M = (a_{ji}^M)_{i,j\in I}$和 $\bar{C}_M = (\bar{a}_{kj}^M)_{k,j\in I} \in \mathbb{Z}^{\theta\times\theta}$满足 $C = \bar{C}_M C_M$。

注 3.9. 当 $q_{ij} = q_{ij} = q^{d_i a_{ij}}$ 是典范多参数时，有$q_{ij}^M = q^{(\alpha_j, m_i)}$。事实上，由于对所有 $j,\ k \in I$，都有 $q_{kj} = q_{jk}$，因此我们有

$$q_{ij}^M = \prod_{k\in I} q_{kj}^{\tilde{a}_{ki}} = \prod_{k\in I} q_{jk}^{\tilde{a}_{ki}} = \prod_{k\in I} q^{d_j a_{jk} \tilde{a}_{ki}} = q^{d_j \sum_{k\in I} a_{jk} a'_{ki}} = q^{d_j (C\, C_M^{-1})_{ji}} = q^{d_j (\bar{C}_M)_{ji}}$$
$$= q^{d_j \frac{(\alpha_j, m_i)}{d_j}} = q^{(\alpha_j, m_i)}.$$

例如，对于 $M = P$，我们有 $q_{ij}^P = q^{\omega_i(\alpha_j)} = q^{d_i\delta_{ij}}$；而对于 $M = Q$，我们有 $q_{ij}^Q = q^{(\alpha_j,\alpha_i)} = q^{d_j a_{ji}} = q^{d_i a_{ij}}$。

3.2.2. 任意格的 *Cartan* 数据 M。设 $\Gamma = \big(\mathbb{Z}/\ell_1 N\mathbb{Z}\big) \times \cdots \times \big(\mathbb{Z}/\ell_\theta N\mathbb{Z}\big)$ 是一个有限阿贝尔群，其生成元为 $g_{m_i} \in \mathbb{Z}/\ell_i N\mathbb{Z}$，对所有 $i \in I$均成立。考虑群满同态 $g\colon M \to \Gamma$，定义为 $g(m_i) = g_{m_i}$，对所有 $i \in I$均成立。对于 $j \in I$，定义 $g_j \in \Gamma$ 和 $\chi_j \in \Gamma$ 为

$$\chi_j(g_{m_i}) = q_{ij}^M, \qquad g_j = g(\alpha_j) = g_{\alpha_j}. \tag{19}$$

注意，Γ 是一个包含 M 的群（见定义 2.7），并且对所有 $i,\ j \in I$，$\chi_j(g_i) = q_{ij}$。事实上，

$$\begin{aligned}\chi_j(g_i) = \chi_j\big(g(\alpha_i)\big) = \chi_j\big(g(\sum_{k\in I} a_{ki}^M m_k)\big) = \chi_j\big(\prod_{k\in I} g_{m_k}^{a_{ki}^M}\big) = \prod_{k\in I}\chi_j(g_{m_k})^{a_{ki}^M}\\ = \prod_{k\in I}(q_{kj}^M)^{a_{ki}^M} = \prod_{k,\ell\in I} q_{\ell j}^{\tilde{a}_{\ell k}a_{ki}^M} = \prod_{\ell\in I} q_{\ell j}^{\sum_{k\in I}\tilde{a}_{\ell k}a_{ki}^M} = \prod_{\ell\in I} q_{\ell j}^{\delta_{\ell\, i}} = q_{ij}.\end{aligned}$$

现在考虑元组

$$\mathcal{D}_M = \mathcal{D}(\Gamma, (g_i)_{i\in I}, (\chi_i)_{i\in I}, (a_{ij})_{i,j\in I}), \tag{20}$$

其中 g_i 和 χ_i 由（19）给出。根据前面的计算，$\mathcal{D}_M$ 是 Γ的有限 Cartan 数据。为本小节接下来的内容，我们定义元素 $\chi_k^{\tilde{a}_{ki}} \in \widehat{\Gamma}$ 如下：

$$\chi_k^{\tilde{a}_{ki}}(g_{\omega_j}) = (q_{jk}^M)^{\tilde{a}_{ki}}, \qquad \text{for all } i,j,k \in I.$$

引理 3.10. 设 $\chi_{m_i} := \prod_k \chi_k^{\tilde{a}_{ki}} \in \widehat{\Gamma}$。以下公式成立：

$$\chi_j(g_{m_i})\chi_{m_i}(g_j) \quad = q_{jj}^{\frac{(\alpha_j,m_i)}{d_j}} \qquad i,j \in I. \tag{21}$$

证明。设 $i,j \in I$。那么

$$\begin{aligned}\chi_j(g_{m_i})\chi_{m_i}(g_j) = q_{ij}^M \prod_k \chi_k^{\tilde{a}_{ki}}(g_j) = \left(\prod_{k\in I} q_{kj}^{\tilde{a}_{ki}}\right)\left(\prod_{k\in I} q_{jk}^{\tilde{a}_{ki}}\right) = \prod_{k\in I}(q_{kj}q_{jk})^{\tilde{a}_{ki}}\\ = \prod_{k\in I}(q_{jj}^{a_{jk}})^{\tilde{a}_{ki}} = q_{jj}^{\sum_{k\in I} a_{jk}\tilde{a}_{ki}} = q_{jj}^{(\bar{C}_M)_{ji}} = q_{jj}^{\bar{a}_{ji}^M} = q_{jj}^{\frac{(\alpha_j,m_i)}{d_j}}.\end{aligned}$$

□

3.2.3. 代数 $u(\mathcal{D}_M,\mu)$ 作为中心扩张。考虑与有限 Cartan 数据 $\mathcal{D}_M$相关联的尖点 Hopf 代数$u(\mathcal{D}_M,\mu)$，该数据在 (20) 中给出。令 T_M为 Γ 的子群，由下式给出：

$$T_M = \langle g_{m_i}^N \in \Gamma \,|\, \chi_{m_i}^N = \varepsilon\rangle. \tag{22}$$

注意，在 Drinfeld-Jimbo 情形中，Γ 的前一个子群实际上与 Γ 的子群 T_M 重合；该子群由 $g_{m_i}^N$ 生成，已在命题 3.1 中讨论。

设 $\overline{\Gamma} := \Gamma/T_M$，并用 $\bar{g}_{m_i}$ 表示 g_{m_i}的等价类。令 V为基为 $\{x_i\}_{i\in I}$、编织为 $c(x_i\otimes x_j) = q_{ij}x_j\otimes x_i$ 的编织向量空间，并考虑尖点 Hopf 代数

$$\mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0} := \mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\overline{\Gamma} \tag{23}$$

由 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$ 与群代数 $\mathbb{C}\Gamma$ 的玻色化得到。

命题 3.11. 设 $\mu=(\mu_\alpha)_{\alpha\in Q^+}$ 是一族根向量参数。群代数 $\mathbb{C}T_M$ 是 $u(\mathcal{D}_M,\mu)$ 中的中心，并且存在一个霍普夫代数的正合列

$$\mathbb{C}T_M \xhookrightarrow{\iota_u} u(\mathcal{D}_M,\mu) \xrightarrow{\pi_u} \mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}\,. \tag{24}$$

证明。令 $g_m^N\in T_M$ 满足 $m=\sum_{i=1}^{\theta} n_i m_i\in M^+$。由于编织属于 Cartan 型，我们有

$$\begin{aligned} g_m^N\, x_j\, g_m^{-N} &= \chi_j(g_m)^N x_j = \chi_j\big(g(m)\big)^N x_j = \chi_j\big(g(\sum_{i=1}^{\theta} n_i m_i)\big)^N x_j = \chi_j\big(\prod_{i=1}^{\theta} g(m_i)^{n_i}\big)^N x_j \\ &= \prod_{i=1}^{\theta} \chi_j(g_{m_i})^{N\,n_i}\, x_j \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{\theta} \chi_{m_i}(g_j)^{-N\,n_i}\, \big(q_{jj}^{\frac{(\alpha_j,m_i)}{d_j}}\big)^{N\,n_i}\, x_j = \big(\prod_{i=1}^{\theta} \chi_{m_i}^{n_i}(g_j)\big)^{-N} x_j \\ &= \big(\chi_m^N(g_j)\big)^{-1} x_j = x_j, \end{aligned}$$

对所有 $j\in I$；其中等式（$*$）由（21）得出。这意味着 T_M 在u（$\mathcal{D}_M$，μ）中是中心的，因此有一个霍普夫代数的中心正合列

$$\mathbb{C}T_M \hookrightarrow u(\mathcal{D}_M,\mu) \twoheadrightarrow u(\mathcal{D}_M,\mu)/\mathbb{C}T_M^+ u(\mathcal{D}_M,\mu).$$

为完成证明，我们证明 $\mathfrak{u}^M$（V）$^{\geq 0}$同构于霍普夫代数商u（$\mathcal{D}_M$，μ）$/\mathbb{C}T_M^+u$（$\mathcal{D}_M$，μ）。令 p_{T_M}：u（$\mathcal{D}_M$，μ）$\twoheadrightarrow u$（$\mathcal{D}_M$，μ）$/\mathbb{C}T_M^+u$（$\mathcal{D}_M$，μ）为典范满同态。由于 $x_\alpha^N=r_\alpha(\mu)\in\mathbb{C}T_M^+$，可知对所有 $\alpha\in Q^+$，$p_{T_M}(x_\alpha^N)=0$。于是存在一个霍普夫代数满同态 $\mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}\to u(\mathcal{D}_M,\mu)/\mathbb{C}T_M^+u(\mathcal{D}_M,\mu)$，它是同构，因为两个代数的维数相同，即 $\frac{|\Gamma|}{|T_M|}\dim\,\mathfrak{B}(V)$。□

为了在一般情形下获得与定理 3.4 类似的结果，我们需要考虑与 Cartan 矩阵 C 相关联、具有包含格 M 的环面的量子包络代数的多参数版本，以及相应的 Borel 子代数。

定义 3.12。 [HPR，定义 7]。多参数量子包络代数 $U_{\mathfrak{q}}^M(\mathfrak{g})$ 是由元素 $E_i, F_i, K_{m_i}^{\pm 1}, L_{m_i}^{\pm 1}$，$i\in I$ 生成的含幺结合 $\mathbb{C}$–代数，并满足以下关系：对所有 $i,j\in I$，

$$\begin{aligned} K_{m_i}^{\pm 1}L_{m_j}^{\pm 1} &= L_{m_j}^{\pm 1}K_{m_i}^{\pm 1} & K_{m_i}^{\pm 1}K_{m_i}^{\mp 1} &= 1 = L_{m_i}^{\pm 1}L_{m_i}^{\mp 1}, \\ K_{m_i}^{\pm 1}K_{m_j}^{\pm 1} &= K_{m_j}^{\pm 1}K_{m_i}^{\pm 1} & L_{m_i}^{\pm 1}L_{m_j}^{\pm 1} &= L_{m_j}^{\pm 1}L_{m_i}^{\pm 1}, \\ K_{m_i}\,E_j\,K_{m_i}^{-1} &= q_{ij}^M\,E_j & L_{m_i}\,E_j\,L_{m_i}^{-1} &= (q_{ji}^M)^{-1}\,E_j, \\ K_{m_i}\,F_j\,K_{m_i}^{-1} &= (q_{ij}^M)^{-1}\,F_j & L_{m_i}\,F_j\,L_{m_i}^{-1} &= q_{ji}^M\,F_j, \end{aligned}$$

$$[E_i,F_j] = \delta_{i,j}\,q_{ii}\,\frac{K_{\alpha_i}-L_{\alpha_i}}{q_{ii}-1},$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{pmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{pmatrix}_{q_{ii}} q_{ii}^{\binom{k}{2}}\, q_{ij}^k\, E_i^{1-a_{ij}-k} E_j\, E_i^k \;=\; 0, \qquad i\neq j,$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{pmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{pmatrix}_{q_{ii}} q_{ii}^{\binom{k}{2}}\, q_{ij}^k\, F_i^k F_j\, F_i^{1-a_{ij}-k} \;=\; 0, \qquad i\neq j.$$

对于 $m=\sum_{i\in I} n_i\, m_i \in M$，我们设 $K_m := \prod_{i\in I} K_{m_i}^{n_i}$ 和 $L_m := \prod_{i\in I} L_{m_i}^{n_i}$。特别地，对于任意单根 α_i，有 $K_{\alpha_i}=\prod_j K_{m_j}^{a_{ji}^M}$ 和 $L_{\alpha_i}=\prod_j L_{m_j}^{a_{ji}^M}$，其中 $i\in I$。事实证明，$U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{g})$ 也是一个霍普夫代数，其结构由以下条件确定：对所有 $i,j\in I$，

$$\begin{aligned}
\Delta(E_i) &= E_i\otimes 1 + K_{\alpha_i}\otimes E_i, & \varepsilon(E_i) &= 0, & \mathcal{S}(E_i) &= -K_{\alpha_i}^{-1}E_i,\\
\Delta(F_i) &= F_i\otimes L_{\alpha_i} + 1\otimes F_i, & \varepsilon(F_i) &= 0, & \mathcal{S}(F_i) &= -F_i {L_{\alpha_i}}^{-1},\\
\Delta\big(K_{m_i}^{\pm 1}\big) &= K_{m_i}^{\pm 1}\otimes K_{m_i}^{\pm 1}, & \varepsilon\big(K_{m_i}^{\pm 1}\big) &= 1, & \mathcal{S}\big(K_{m_i}^{\pm 1}\big) &= K_{m_i}^{\mp 1},\\
\Delta\big(L_{m_i}^{\pm 1}\big) &= L_{m_i}^{\pm 1}\otimes L_{m_i}^{\pm 1}, & \varepsilon\big(L_{m_i}^{\pm 1}\big) &= 1, & \mathcal{S}\big(L_{m_i}^{\pm 1}\big) &= L_{m_i}^{\mp 1}.
\end{aligned}$$

正多参数量子 *Borel* 子代数 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$ 是由所有 $K_{m_i}^{\pm 1}$和 E_i生成的 $\mathbb{C}$-子代数，包含于$U_{\mathfrak{q}}^M(\mathfrak{g})$ 中。显然，它是 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{g})$ 的 Hopf 子代数。

注 3.13. 单参数量子群 $U_q^M(\mathfrak{g})$ 可以通过如下方式得到：取规范多参数 $\check{\mathbf{q}} := \big(\check{q}_{ij}\big)_{i,j\in I}$，其中 $\check{q}_{ij}=q^{d_i a_{ij}}$；再对由所有 $L_{m_i}-K_{m_i}^{-1}$生成的双边理想取商，其中 $i\in I$。特别地，$U^{M}{}_{\check{\mathbf{q}}}(\mathfrak{b}^+) = U_q^M(\mathfrak{b}^+)$。

定理 3.14. 存在一个归一化的 *Hopf* 2-余循环 σ，属于 $U_{\check{\mathbf{q}}}^M(\mathfrak{g})$，使得 at

$$U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{g}) \simeq \big(U_{\check{\mathbf{q}}}^M(\mathfrak{g})\big)_\sigma \ \text{ and } \ U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) \simeq \big(U_q^M(\mathfrak{b}^+)\big)_\sigma$$

作为霍普夫代数。

证明。 根据 [HPR 定理 28]，，存在 $U^{Q}{}_{\check{\mathbf{q}}}(\mathfrak{g})$ 的归一化霍普夫 2-余循环 σ，使得$U^{Q}{}_{\mathbf{q}}(\mathfrak{g}) \simeq \big(U^{Q}{}_{\check{\mathbf{q}}}(\mathfrak{g})\big)_\sigma$。关于 $U^{M}{}_{\mathbf{q}}(\mathfrak{g})$（在格 M 上）的证明，经过必要的相应修改，可由 [GG1，第 4.2 节的讨论得到2]。同构 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) \simeq \big(U_q^M(\mathfrak{b}^+)\big)_\sigma$通过限制得到。□

3.2.4. 代数 $u(\mathcal{D}_M,\mu)$ 作为量子子群。从现在起，我们假设 t

$$\chi_m^N = \varepsilon \qquad \text{for all } m\in M. \tag{25}$$

在此假设下，子群 T_M 与由元素 $g_{m_i}^N$ 生成的 Γ 的子群重合，其中 $i\in I$。

命题 3.15。 以下断言成立：

(a) $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) \simeq \widetilde{\mathfrak{B}}(V)\#\mathbb{C}\mathbb{Z}^\theta$ 作为霍普夫代数，其中 $\tilde{\mathfrak{B}}(V)$ 是 [*An2* 第 3] 节中定义的特征预 *Nichols* 代数。*(b)* 映射 $p\colon U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) \twoheadrightarrow u(\mathcal{D}_M,\mu)$ 由 $p(K_{m_i}) = g_{m_i}$和 $p(E_i) = x_i$对所有$i\in I$定义，是一个霍普夫代数满同态。*(c)* 由元素 K_m^N, E_α^N生成的 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$ 的子代数 $Z_M^{\geq}$，满足 $m\in M$和 $\alpha\in Q^+$，是一个中心 *Hopf* 子代数，并且 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$ 是有限秩自由 $Z_M^{\geq}$-模。*(d)* 商 *Hopf* 代数 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) = U^M\!q(\mathfrak{b}^+)/\big(Z_M^{\geq}\big)^+U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$ 与 *(23)* 中定义的 *Hopf* 代数 $\mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}$ 同构，并且有中心正合列

$$Z_M^{\geq} \hookrightarrow U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}.$$

(e) 令 p_0 为 p 在子代数 $Z_M^{\geq}$ 上的限制。则 p_0 的像包含于 $\mathbb{C}T_M$，且以下是一个具有正合行的交换图

$$
\begin{array}{ccccc}
Z_M^{\geq} & \xhookrightarrow{\iota_U} & U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) & \xrightarrow{\pi_U} & \mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0} \\
\downarrow{\scriptstyle p_0} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| \\
\mathbb{C}T_M & \xhookrightarrow{\iota_u} & u(\mathcal{D}_M,\mu) & \xrightarrow{\pi_u} & \mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}.
\end{array}
\tag{26}
$$

证明。(a) 注意到，由 $\{K_{m_i}\}_{i\in I}$ 生成的 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$ 的子代数同构于群代数 $\mathbb{C}\mathbb{Z}^\theta$，而由 $\{E_i\}_{i\in I}$ 生成的子代数同构于$\mathfrak{B}(V)$。注意，所有顶点均为 Cartan 型，因为根据假设，编织为 Cartan 型。因此，$U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) \simeq \widetilde{\mathfrak{B}}(V)\#\mathbb{C}\mathbb{Z}^\theta$ 作为霍普夫代数成立。

(b) 这可直接由代数$U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+)$和 $u(\mathcal{D}_M,\mu)$的生成元与关系表示得到。

(c) 和 (d) 直接由 [An2] 中的命题 21、定理 23 和注 11 得出。事实上，与 $loc.cit.$ 中的记号比较，根据 (25)，对于所有 $\alpha \in Q^+$，有 $\chi(N_\alpha\alpha,\beta) = \chi_\alpha^N(K_\beta) = 1$。

(e) 注意，根据 (25) 以及 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 的定义，我们有 $T_M = \langle g_m^N \mid m \in M\rangle$ and$p_0(Z_M^{\geq}) = \mathbb{C}T_M$。由于 p_0 是 p 的限制，左侧的交换图显然是交换的。右侧的交换图由 (d) 以及 $\mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}$ 的定义直接可知是交换的。□

备注 3.16。考虑备注 3.3 中给出的霍普夫代数同构 $\psi\colon U_q^M(\mathfrak{b}^+) \to \mathcal{O}_q(B_M^+)$。由于 $U^M\mathbf{q}(\mathfrak{b}^+) \simeq \big(U_q^M(\mathfrak{b}^+)\big)_\sigma$，可得 $U_{\mathbf{q}}^M(\mathfrak{b}^+) \simeq \big(\mathcal{O}_q(B_M^+)\big)_{\tilde\sigma}$，其中 $\tilde\sigma$ 是由 σ 和 ψ 诱导的 2-余循环。霍普夫代数 $\big(\mathcal{O}_q(B_M^+)\big)_{\tilde\sigma}$ 是量子化函数代数 $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)$ 的多参数版本，该函数代数定义在正 Borel 子群 B_M^+ 上。此外，根据 (25) 以及 2-余循环 σ 的定义，可以看出中心 Hopf 子代数 $Z_M^{\geq}$ 在该 2-余循环下不发生变形，并且仍保持中心性。特别地，由定理 3.4 的证明可知 $Z_M^{\geq} \simeq \mathcal{O}(B_M^+)$，从而 $\mathcal{O}(B_M^+)_{\tilde\sigma} = \mathcal{O}(B_M^+)$，且这是 $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)$ 的一个中心 Hopf 子代数。我们仍将 $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)$ 记作由 $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)/\big(\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)^+\mathcal{O}(B_M^+)\big)$ 给出的~~Hopf~~代数商。

3.2.5. 代数 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 作为多参数量子子群。下一个定理是由上文的命题 3.15 和注 3.16 直接推出的。它指出，任意尖点 Hopf 代数 $u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 都是一个多参数量子子群。

定理 3.17。设 T_M 为由元素 $g_{m_i}^N$ 生成的 Γ 的子群，其中 $i \in I$ 取遍所有值。存在一个霍普夫代数的交换图，其行正合：

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(B_M^+) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+) & \twoheadrightarrow & \overline{\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)} \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_\mu^*} & & \downarrow{\scriptstyle p_\mu} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\
\mathbb{C}^{\widehat{T_M}} & \hookrightarrow & u(\mathcal{D}_M,\mu) & \twoheadrightarrow & \mathfrak{u}^M(V)^{\geq 0}
\end{array}
\tag{27}
$$

□

下一个定理的证明可由定理 3.7 和推论 3.6 的证明稍作相应调整而得，因为这些证明依赖于一般的结构性质。

定理 3.18。以下断言成立：

(a)设 T_M 为有限阿贝尔群，且 $k:\ \widehat{T_M} \hookrightarrow B_M^+$ 为代数群单态射。那么存在有限阿贝尔群 Γ以及一个 *Cartan* 型的对角型编织

向量空间 V，使得霍普夫代数 $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)/\big(\iota(\operatorname{Ker} k^*)\big)$ 是 $\mathfrak{B}(V)\#\mathbb{C}\Gamma$的提升。此外，$\Gamma$ 包含 M，且它同构于 $\big(\mathbb{Z}/\ell_1 N\mathbb{Z}\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{Z}/\ell_\theta N\mathbb{Z}\big)$ 对于某些 $\ell_1,\dots,\ell_\theta\in\mathbb{N}$，与 V相关联的 ***Cartan*** 矩阵对应于 B_M^+ 的 ***Cartan*** 矩阵。

(b) 设 $\Gamma=\big(\mathbb{Z}/\ell_1 N\mathbb{Z}\big)\times\cdots\times\big(\mathbb{Z}/\ell_\theta N\mathbb{Z}\big)$ 是一个包含 M 的有限阿贝尔群，其生成元为 $g_{m_1},\cdots,g_{m_\theta}$，且 $\operatorname{ord} g_{m_i}=\ell_i N$, $\mu=(\mu_\alpha)_{\alpha\in Q^+}$ 是一族根向量参数，$\mathcal{D}_M$ 是 Γ 的有限 ***Cartan*** 数据，定义见 §*2.7.1*，而 $u(\mathcal{D}_M,\mu)$是相应的尖点 ***Hopf*** 代数。那么存在一个有限阿贝尔群 T_M以及一个代数群单态 $k:\widehat{T_M}\hookrightarrow B_M^+$，使得

$$u(\mathcal{D}_M,\mu)\simeq\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)/(\operatorname{Ker} k^*),$$

作为霍普夫代数。 □

注 3.19. 与 Drinfeld-Jimbo 型编织的情形类似，上述结果为提升提供了几何解释；参见注 3.8。幂根向量关系 (9) 的提升基于同构 ψ：$U_q^M(\mathfrak{b}^+)\to\mathcal{O}_q(B_M^+)$、单态射$k:\widehat{T_M}\hookrightarrow B_M^+$ 以及这样一个事实：任意 Cartan 型编织都可通过 2-余循环与 Drinfeld-Jimbo 型编织相关联。这使得我们可以将尖点霍普夫代数$u(\mathcal{D}_M,\mu)$ 解释为多参数量子群 $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(B_M^+)$ 的量子子群，其中$\mathbf{q}=(q_{ij})_{i,j\in I}$。具体而言，

$$x_\alpha^N=p(E_\alpha^N)=p_\mu(\psi(E_\alpha^N))=\varphi^{-1}k^*(\psi(E_\alpha^N)),\quad\text{for all }\alpha\in Q^+. \tag{28}$$

⌒我们回顾一下，$\varphi^{-1}k^*(\psi(E_\alpha^N))\in\mathbb{C}T_M$ 和 $\varphi^{-1}:\mathbb{C}^{T_M}\to\mathbb{C}T_M$ 是定理 3.4 中考虑的同构。

4. Liftings for the cases A_θ, B_θ and D_θ for Drinfeld-Jimbo type braiding s

本节的目标是运用我们的方法，重新得到 Drinfeld-Jimbo 型对角编织的 A_θ 型提升，这些提升分别由 [AS2], 、B_2 型的提升由 [BDR], , 以及 B_3 型的提升由 [BGM] 计算得出。此外，我们还计算了 $\theta\geq 2$ 的 B_θ 型和 D_θ 型提升，从而给出新的显式无限族例子。

设$C=\big(a_{ij}\big)_{i,j\in I}$ 是有限型可对称化Cartan矩阵，$\mathfrak{g}$ 是与 C 相关联的有限维单李代数，$Q=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ 是根格，$P=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\,\omega_i$ 是权格。

回顾一下，$q\in\mathbb{C}^\times$ 是奇数阶 N 的本原单位根。我们假设 $\gcd(3,N)=1$ 且 $N>7$。令 $\Gamma=\mathbb{Z}^\theta/(n_1\mathbb{Z}\times\cdots\times n_\theta\mathbb{Z})$ 为由 θ 个生成元 $g_{m_1},\dots,g_{m_\theta}$ 构成的有限阿贝尔群，其阶为 $\operatorname{ord} g_{m_i}=n_i$，且对所有 $i\in I$ 均有 $N|n_i$。另考虑一个由元素 $m_1,\dots,m_\theta$ 生成的秩为 θ 的格 $Q\subseteq M\subseteq P$，并记 $g:M\to\Gamma$ 为典范群满同态 $m_i\mapsto g_{m_i}$，对所有 $i\in I$ 均成立。

对于 $j\in I$，令 $g_j=g(\alpha_j)$ 和 $\chi_j:\Gamma\to\mathbb{C}^\times$ 为由 $\chi_j(g_{m_i})=q^{(m_i,\alpha_j)}$对所有 $i\in I$定义的特征。那么 $\mathcal{D}_M=\mathcal{D}(\Gamma,(g_i)_{i\in I},(\chi_i)_{i\in I},(a_{ij})_{i,\,j\in I})$ 是 Γ的有限 Cartan 型数据，而 $\mathbf{q}=(q^{d_ia_{ij}})_{i,\,j\in I}$ 是 Drinfeld-Jimbo 型编织。

为了利用交换图（16）描述代数 $u(\mathcal{D}_M,\,\mu)$，我们需要明确给出下图中涉及的映射：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(B_M^+) & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \mathcal{O}_q(B_M^+) & \xrightarrow{\ \pi\ } & \overline{\mathcal{O}_q(B_M^+)} \\
\big\downarrow{\scriptstyle \iota_\mu^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_\mu} & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\
\mathbb{C}^{\widehat{T_M}} & \xhookrightarrow[\ \bar\iota\ ]{} & u(\mathcal{D}_M,\mu) & \xrightarrow[\ \bar\pi\ ]{} & u_q^M(\mathfrak{b}^+).
\end{array} \tag{29}$$

映射 $\bar{\iota}$ 和 $\bar{\pi}$。 映射 $\varphi\colon\ \mathbb{C}T_M \to \mathbb{C}^{T_M}$ 由 $\varphi(x)(f) = f(x)$ 给出，对所有 $x \in T_M$ 和 $f \in T_M$ 而言，都是霍普夫代数同构。此外，$u(\mathcal{D}_M,\ \mu)$ 的余根是群代数 $\mathbb{C}\Gamma$。因此，映射 $\bar{\iota}$ 由 φ^{-1} 与 $\mathbb{C}T_M$ 到 $\mathbb{C}\Gamma$ 中的自然包含的复合得到。此外，霍普夫代数满同态 $\bar{\pi}$ 正是命题 3.1 (a) 中定义的映射 π_u。

映射 ϕ 和 p_μ。 根据定义 2.3，小量子群 $u_q^M(\mathfrak{b}^+)$ 是由 h_m, e_i 生成的代数，其中 $m \in M$、$1 \le i \le \theta$ 满足以下关系：对于所有 $m \in M$，

$$h_m e_j h_m^{-1} = q^{(m,\alpha_j)} e_j, \qquad \mathrm{ad}_c(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0, \quad i \neq j, \tag{30}$$

$$h_m^N = 1, \qquad e_i^N = 0. \tag{31}$$

如命题 3.2 (a) 所述，存在一个霍普夫代数满同态 $p\colon\ U_q^M(\mathfrak{b}^+) \to u(\mathcal{D}_M, \mu)$，其定义为

$$p(E_i) = x_i, \qquad p(K_m) = g_m, \qquad \text{for all } m \in M.$$

取 $\psi\colon U_q^M(\mathfrak{b}^+) \to \mathcal{O}_q(B_M^+)$ 为备注 3.3 中的霍普夫代数同构，可通过将 p 与 ψ^{-1} 复合，得到霍普夫代数满同态 $p_\mu\colon\ \mathcal{O}_q(B_M^+) \to u(\mathcal{D}_M, \mu)$。后一个映射的确切定义高度依赖于通过生成元与关系对 $\mathcal{O}_q(B_M^+)$ 所作的表示，而该表示通常由 FRT构造给出。下面的例子将对此作出说明。

映射 ι_μ^*。 对于 Cartan 型的经典情形，我们采用由 FRT构造给出的表示 $\mathcal{O}_q(B_M^+)$，参见 [KS，第 9] 章。令 $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$ 满足：若 G 属于 A_θ 型，则 $\mathtt{n} = \theta+1$；若 G 属于 B_θ 型，则 $\mathtt{n} = 2\theta+1$；若 G 属于 D_θ 型，则 $\mathtt{n} = 2\theta$。

此外，在 A_θ 的情形下，我们取 $M = P$，因此经典坐标代数 $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_\mathtt{n})$ 的表示为

$$\mathcal{O}(\mathrm{SL}_\mathtt{n}) = \mathbb{C}[X_{ij} \mid \det X = 1,\ 1 \le i,j \le \mathtt{n}],$$

其中 $\det X = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_\mathtt{n}} (-1)^{\ell(\sigma)} X_{1\sigma(1)} \cdots X_{\theta+1\sigma(\mathtt{n})}$。

另一方面，对于 B_θ 和 D_θ 的情形，我们取 $M = Q$，因此坐标代数$\mathcal{O}(\mathrm{SO}_\mathtt{n})$ 的表示为

$$\mathcal{O}(\mathrm{SO}_\mathtt{n}) = \mathbb{C}\big[X_{ij} \mid \sum_{k=1}^{\mathtt{n}} X_{kj}X_{k'i'} = \delta_{ij}, \det X = 1, 1 \le i,j \le \mathtt{n}\big]. \tag{32}$$

我们通过将群 T_M 自然地包含到对角分裂环面 B_M^+ 中，并对其施以固定幺幂矩阵的共轭作用，来定义映射 ι_μ^*。选择这一幺幂矩阵的一种特定方式，即可得到我们所寻求的提升的特定表示。

设 $\widehat{T_M} \hookrightarrow B_M^+$ 是一个群单态，使得对于所有 $\gamma \in \widehat{T_M}$，每个 $\widehat{T_M}$ 中的 γ 的像都是形如 P_γ 的对角矩阵。对于一个固定的、形如

$$Q_r = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1\mathtt{n}} \\ 0 & 1 & r_{23} & \dots & r_{2\mathtt{n}} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{\mathtt{n}-1\,\mathtt{n}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

我们定义映射 $\iota_r\colon\ \widehat{T_M} \to B^+$，由 $\iota_r(\gamma) = Q_r^{-1} P_\gamma Q_r$ 给出，对所有 $\gamma \in \widehat{T_M}$均成立。根据定义，ι_r是一个群单态。对于 $P_\gamma = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_\mathtt{n})$，有如下

$\iota_r(\gamma)$各项的递归公式

$$\left(Q_r^{-1}P_\gamma Q_r\right)_{i\,j}=\begin{cases}t_i & \text{if } j=i,\\ r_{ij}t_i-\sum\limits_{k=i+1}^{j} r_{ik}\left(Q_r^{-1}P_\gamma Q_r\right)_{k\,j} & \text{if } i<j\le \mathtt{n}.\end{cases} \tag{34}$$

因此，霍普夫代数满同态 $\iota_r^*\colon \mathcal{O}(B_M^+)\to\mathbb{C}^{T_M}$ 可写为

$$\iota_r^*(X_{ij})=r_{ij}\iota_r^*(X_{ii})-r_{ij}\iota_r^*(X_{jj})-\sum_{k=i+1}^{j-1} r_{ik}\iota_r^*(X_{kj}), \tag{35}$$

其中 X_{ij}（$1\le i\le j\le \mathtt{n}$）是 $\mathcal{O}(B_M^+)$ 的生成元。由于矩阵 Q_r 的元素 r_{ij} 将对应于根向量参数族 μ，我们最终将用 ι_μ^* 代替 ι_r^*。

4.1. A_θ-型。 本小节中，我们考虑 $G=G_{sc}=\mathrm{SL}_{\theta+1}(\mathbb{C})$ 和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{\theta+1}(\mathbb{C})$，因此 $M=P$ 是权格。在这种情况下，我们令 $B^+:=B_M^+$ 为 $\mathrm{SL}_{\theta+1}(\mathbb{C})$ 的上三角矩阵子群，并令 $\mathfrak{b}^+$ 为相应的李代数。

根据§2.6.1，我们知道霍普夫代数 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})$ 由满足以下关系的元素 z_{ij} 生成：

$$z_{is}z_{js}=qz_{js}z_{is},\qquad z_{si}z_{sj}=qz_{sj}z_{si},\qquad i<j, \tag{36}$$

$$z_{it}z_{js}=z_{js}z_{it},\qquad z_{is}z_{jt}-z_{jt}z_{is}=(q-q^{-1})z_{it}z_{js},\qquad i<j,\quad s<t. \tag{37}$$

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{\theta+1}}(-q)^{\ell(\sigma)}z_{1\sigma(1)}\cdots z_{\theta+1\sigma(\theta+1)}=1. \tag{38}$$

集合 $\{z_{ij}^N\colon 1\le i,\ j\le\theta+1\}$ 生成了 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})$ 的一个中心 Hopf 子代数，它与坐标代数 $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_{\theta+1})$ 同构。包含映射

$$\mathcal{O}(\mathrm{SL}_{\theta+1})\hookrightarrow\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1}),\qquad X_{ij}\mapsto z_{ij}^N, \tag{39}$$

是一个霍普夫代数映射，也是量子弗罗贝尼乌斯映射的对偶映射；更多细节请参见 [PW]。与 $\mathrm{SL}_{\theta+1}(\mathbb{C})$ 的标准 Borel 子群 B^+ 相对应的量子函数代数 $\mathcal{O}_q(B^+)$，是 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})$ 对由元素 $\{z_{ij}:\ i>j\}$ 生成的 Hopf 理想 $\mathcal{I}$ 取商所得的商代数 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SL}_{\theta+1})/\mathcal{I}$。特别地，$\mathcal{O}_q(B^+)$ 是由（z_{ij} 的像）生成的霍普夫代数，满足 $i\le j$，并满足关系式 (36)、(37) 以及 $z_{11}z_{22}\cdots z_{\theta+1,\theta+1}=1$，而非 (38)。给出商代数 $\mathcal{O}(B^+)$ 的 $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_{\theta+1})$ 的相应 Hopf 理想由元素 $\{X_{ij}:\ i>j\}$ 生成。

映射 $\iota\colon \mathcal{O}(B^+)\hookrightarrow\mathcal{O}_q(B^+)$ 由 $X_{ij}\mapsto z_{ij}^N$ 定义，对所有 $i\le j$ 均成立。此外，$\overline{\mathcal{O}_q(B^+)}=\mathcal{O}_q(B^+)/\left(\iota(\mathcal{O}(B^+))^+\mathcal{O}_q(B^+)\right)$ 是由元素 z_{ij} 生成的代数，其中 $i\le j$ 满足关系式 (36)、(37) 以及以下关系

$$z_{11}\cdots z_{\theta+1,\theta+1}=1,\qquad z_{ij}^N=\delta_{ij},\quad \text{for all } i\le j. \tag{40}$$

映射 $\pi\colon \mathcal{O}_q(B_M^+)\to\mathcal{O}_q(\overline{B_M^+})$ 是典范满同态。注意，元素 z_{ii} 在 $\underline{\mathcal{O}_q(B^+)}$ 和 $\mathcal{O}_q(B^+)$ 中都是（可逆的）类群元素。

将同构 $\psi\colon U_q^P(\mathfrak{b}^+)\to\mathcal{O}_q(B^+)$ 限制到交换子代数 $Z^{\ge}:=Z_P^{\ge}$ 上，得到同构

$$\psi: Z^{\ge}\to\mathcal{O}(B^+),\qquad K_{\omega_i}^{\pm N}\mapsto(X_{1,1}\dots X_{i,i})^{\pm1},\quad E_j^N\mapsto-(q-q^{-1})^{-N}X_{j,j+1}X_{j+1,j+1}^{-1}.$$

令 $\Pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\theta\}$ 为 A_θ 的单根，令 $\{\omega_1,\dots,\omega_\theta\}$ 为相应的基本权。我们遵循 [Bou]，并在 $\mathbb{R}^{\theta+1}$ 的标准正交基 $\{\mathbf{e}_i\}$ 中考虑根系的一种实现。在这种情况下，正根为

$\alpha_{ij}:=\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ 对所有 $1\le i<j\le\theta+1$成立。单根为 $\alpha_i=\alpha_{i\,i+1}=\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_{i+1}$ 对所有 $i\in I$ 成立，而基本权为

$$\omega_i=\mathbf{e}_1+\cdots+\mathbf{e}_i-\tfrac{i}{\theta+1}\left(\mathbf{e}_1+\cdots+\mathbf{e}_{\theta+1}\right)=\sum_{j=1}^{\theta+1}c_{ij}\mathbf{e}_j,\quad i\in I. \tag{41}$$

群 $T:=T_M=T_P$ 是由元素 $g_{\omega_i}^N$（对所有 $i\in I$）生成的 Γ 的子群。对于每个 $i\in I$，令 $\ell_i:=n_i/N$，并令 ξ_i 为单位根的一个本原 ℓ_i 次根。那么^我们可以将 T 的特征群 T 描述为由特征 γ_j 生成的有限阿贝尔群，满足对所有 $i,\ j\in I$，$\gamma_j(g_{\omega_i}^N)=\xi_j^{\sum_{l=1}^{i}c_{jl}}$。由于 $g_{\alpha_i}=g_{\omega_{i-1}}^{-1}g_{\omega_i}^2g_{\omega_{i+1}}^{-1}$，可得

$$\gamma_j(g_{\alpha_i}^N)=\xi_j^{c_{ji}-c_{j(i+1)}}=\xi_j^{\delta_{i,j}}\quad\forall\ i,j\in I. \tag{42}$$

对于每个 $i\in I$，考虑对角矩阵 $P_i:=\mathrm{diag}(\xi_i^{c_{i1}},\dots,\xi_i^{c_{i\theta+1}})$。注意到$P_i\in B^+$，因为 $\sum_{j=1}^{\theta+1}c_{ij}=0$。现在，考虑以下群单态射

$$\widehat{T}\hookrightarrow B^+,\qquad \gamma\mapsto P_\gamma=P_1^{s_1}\cdots P_\theta^{s_\theta},\qquad \text{for all }\ \gamma=\gamma_1^{s_1}\dots\gamma_\theta^{s_\theta}\in\widehat{T}. \tag{43}$$

给定一族根向量参数 $\mu=(\mu_\alpha)_{\alpha\in Q^+}=(\mu_{ij})_{1\le i<j\le\theta+1}$，我们取 (33) 的矩阵 Q_r，其元素如下

$$r_{ij}=(-1)^{i-j-1}(1-q^{-2})^N\mu_{ij}.$$

注 4.1。 $\psi:\ Z^{\ge}\to\mathcal{O}(B^+)$ 与 ι_μ^* 的复合给出一个霍普夫代数满射同态 $\iota_\mu^*\psi:\ Z^{\ge}\to\mathbb{C}^{\widehat{T}}$，满足 $\iota_\mu^*\psi(K_{\alpha_i}^N)(\gamma)=t_it_{i+1}^{-1}=\xi^{s_1\delta_{1,i}}\cdots\xi^{s_\theta\delta_{\theta,i}}$，对所有$\gamma=\gamma_1^{s_1}\cdots\gamma_\theta^{s_\theta}\in\widehat{T}$均成立，参见 (34)。此外，由 (42) 可得 $\varphi(g_{\alpha_i}^N)(\gamma)=\xi^{s_1\delta_{1,i}}\cdots\xi^{s_\theta\delta_{\theta,i}}$。因此，

$$g_i^N=g_{\alpha_i}^N=\varphi^{-1}\iota_\mu^*\psi(K_{\alpha_i}^N),\quad\text{for all }i\in I.$$

根据 [AS2，第 47]，页，对于每个 $1\le i<j\le\theta+1$，我们记作

$$E_{i,j}=\begin{cases}E_i, & \text{if } j=i+1,\\ E_{i,j-1}E_{j-1}-q^{-1}E_{j-1}E_{i,j-1}, & \text{if } j-i\ge 2.\end{cases}$$

此外，对于每个 $1\le i<j\le\theta+1$，我们定义 $x_{(ij)}:=p_\mu(E_{i,j})$ 和 $g_{(ij)}:=g_ig_{i+1}\cdots g_{j-1}$。

在下一个定理中，我们用自己的方法重新得到 A_θ 型 Drinfeld-Jimbo 型编织向量空间的提升公式，该公式来自 [AS2]。

定理 4.2。 设 $\mu=(\mu_\alpha)_{\alpha\in\Phi^+}=(\mu_{ij})_{1\le i<j\le\theta+1}$ 是一族根向量参数。根据注 *3.8*，关系 (9) 由下式给出

$$x_{(ij)}^N=\mu_{ij}(1-g_{(ij)}^N)+\sum_{k=i+1}^{j}(1-q^{-2})^N\mu_{ik}\,x_{(kj)}^N.$$

证明。 令 $\psi:\ U_q^P(\mathfrak{b}^+)\to\mathcal{O}_q(B^+)$ 为备注 3.3 中给出的霍普夫代数同构。根据归纳法，我们得到

$$\psi(E_{i,j})=(-1)^{j-i}q^{i-j+1}(q-q^{-1})^{-1}z_{ij}z_{jj}^{-1}\qquad 1\le i<j\le\theta+1.$$

因此，$\psi(E_{i,\ j}^N) = \lambda_{i,\ j} z_{ij}^N z_{jj}^{-N}$，其中 $\lambda_{i,\ j} := (-1)^{j-i}(1-q^{-2})^{-N} \in \mathbb{C}$。因此，对于所有 $\gamma \in \widehat{T}$，我们有

$$\begin{aligned}
\iota_\mu^*(\psi(E_{i,j}^N))(\gamma) &= \lambda_{i,j}(Q_\mu^{-1}P_\gamma Q_\mu)_{ij}(Q_\mu^{-1}P_\gamma Q_\mu)_{jj}^{-1} \\
&\overset{(35)}{=} \lambda_{i,j}\Big(r_{ij}(t_i - t_j) - \sum_{k=i+1}^{j-1} r_{ik}(Q_\mu^{-1}P_\gamma Q_\mu)_{kj}\Big)t_j^{-1} \\
&= \lambda_{i,j} r_{ij}(t_i t_j^{-1} - 1) - \sum_{k=i+1}^{j-1} \lambda_{i,j} r_{ik}(Q_\mu^{-1}P_\gamma Q_\mu)_{kj}(Q_\mu^{-1}P_\gamma Q_\mu)_{jj}^{-1} \\
&= \lambda_{i-1,j} r_{ij}(1 - t_i t_j^{-1}) - \sum_{k=i+1}^{j-1} (-1)^{k-i} r_{ik}\lambda_{k,j}(Q_\mu^{-1}P_\gamma Q_\mu)_{kj}(Q_\mu^{-1}P_\gamma Q_\mu)_{jj}^{-1} \\
&= \lambda_{i-1,j} r_{ij}(1 - t_i t_j^{-1}) - \sum_{k=i+1}^{j-1} (-1)^{k-i} r_{ik}\iota_\mu^*(\psi(E_{k,j}^N))(\gamma) \\
&= \mu_{ij}(1 - t_i t_{i+1}^{-1} t_{i+1} t_{i+2}^{-1} \dots t_{j-1} t_j^{-1}) + (1-q^{-2})^N \sum_{k=i+1}^{j-1} \mu_{ik}\iota_\mu^*(\psi(E_{k,j}^N))(\gamma) \\
&= \mu_{ij}(1 - \iota_\mu^*\psi(K_{\alpha_i}^N \dots K_{\alpha_{j-1}}^N)(\gamma)) + (1-q^{-2})^N \sum_{k=i+1}^{j-1} \mu_{ik}\iota_\mu^*(\psi(E_{k,j}^N))(\gamma)
\end{aligned}$$

然后，利用注 4.1，我们得出

$$\begin{aligned}
x_{(ij)}^N = \varphi^{-1}\iota_\mu^*(\psi(E_{i,j}^N)) &= \mu_{ij}(1 - g_i^N \dots g_{j-1}^N) + (1-q^{-2})^N \sum_{k=i+1}^{j-1} \mu_{ik} x_{(kj)}^N \\
&= \mu_{ij}(1 - g_{(ij)}^N) \ + \sum_{k=i+1}^{j} (1-q^{-2})^N \mu_{ik}\ x_{(kj)}^N
\end{aligned}$$

如所需。 □

4.2. 量子 Borel 子代数在 $\mathrm{SO}_q(\mathrm{n})$ 中的显式 Hopf 包含。本小节开始时，我们回顾 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SO}_\mathrm{n})$ 的定义；我们遵循 [KS, 9.3]。考虑 $G = G_{ad} = \mathrm{SO}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$，因此 $M = Q$ 是根格。对于每个 $1 \le k \le \mathrm{n}$，令 $k' := \mathrm{n} + 1 - k$ 且

$$\rho_i = \mathrm{n}/2 - i \ \text{ if } i < i' \ , \qquad \rho_{i'} = -\rho_i \ \text{ if } i \le i'.$$

令 $J = (c_{ij})$ 为矩阵 $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$，其元素为 $c_{ij} := \delta_{i,\ j'} q^{-\rho_i}$。我们选取由 $R = \sum_{a,\ b,\ i,\ j} R_{ab}^{ij} E_{ia} \otimes E_{jb}$ 给出的 R 矩阵，其中系数 R_{ab}^{ij} 定义如下

$$R_{ab}^{ij} = q^{\delta_{i\,j} - \delta_{i\,j'}}\delta_{i\,a}\delta_{j\,b} + \mathrm{u}(i-a)(q-q^{-1})(\delta_{j\,a}\delta_{i\,b} - \epsilon c_{j\,i} c_{a\,b})$$

并且当 $x < 1$ 时 $\mathrm{u}(x) = 0$，当 $x \ge 1$ 时 $\mathrm{u}(x) = 1$。

在由 $\{z_{ij}$ 生成的自由结合代数中：$1 \le i, j \le \mathrm{n}\}$，对于 $1 \le a, b, i, j \le \mathrm{n}$，考虑元素

$$\mathrm{FRT}(i,b,j,a) = \sum_{k,l=1}^{\mathrm{n}} R_{a\,b}^{l\,k} z_{i\,k} z_{j\,l} - R_{k\,l}^{j\,i} z_{k\,a} z_{l\,b}. \tag{44}$$

量子函数代数定义为

$$\mathcal{O}_q(\mathrm{SO}_\mathrm{n}) = \mathbb{C}\langle z_{ij}\rangle / \langle \mathrm{FRT}(i,b,j,a),\ \mathbf{z} J \mathbf{z}^t J^{-1} - \mathrm{id},\ J\mathbf{z}^t J^{-1}\mathbf{z} - \mathrm{id}\rangle, \qquad \mathbf{z} = (z_{ij}).$$

余代数结构和反 antipode 映射分别定义为:

$$\Delta(z_{ij}) = \sum_{k=1}^{j} z_{ik} \otimes z_{kj}, \qquad \varepsilon(z_{i,j}) = \delta_{i,j}, \qquad S(z_{ij}) = q^{\rho_j - \rho_i} z_{j'i'}. \tag{45}$$

与情形 A_θ类似，对应于 $\mathrm{SO_n}(\mathbb{C})$ 的标准 Borel子群 B^+ 的量子函数代数 $\mathcal{O}_q(B^+)$ 是 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SO_n})$ 关于由元素 $\{z_{ij} : i > j\}$ 生成的 Hopf 理想 $\mathcal{I}$ 的商 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SO_n})/\mathcal{I}$ 。

函数代数 $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_\ell)$ 是一个交换 Hopf 代数，其余乘法由 $\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{\mathtt{n}} X_{ik} \otimes X_{kj}$ 给出。与 A_θ 情形一样，集合 $\{z_{ij}^N : 1 \le i, j \le \mathtt{n}\}$ 生成了 $\mathcal{O}_q(\mathrm{SO_n})$ 的一个中心 Hopf 子代数，该子代数同构于 $\mathcal{O}(\mathrm{SO_n})$。然而，当 $\mathtt{n}$ 为奇数时，(39) 中给出的包含映射不是余代数映射，正如我们将在下一个结果中看到的那样。

˜给定 $i, j \in \mathbb{N}$ 和 $i \le j$，我们固定 $\mathbb{I}_{i,j} = \{i, \dots, j\}$ 和 $\mathbb{I}_{i,j} = \{i+1, \dots, j-1\}$。令

$$\mathtt{n}_0 = (\mathtt{n}+1)/2, \qquad c_{ij}^k = \begin{cases} \frac{2}{(1+q)^N}, & \text{if } k = \mathtt{n}_0 \text{ and } k \in \tilde{\mathbb{I}}_{i,j}, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，若 $\mathtt{n}$ 为偶数，则对所有 $k = i, \dots, j$， $c_{ij}^k = 1$ 都成立。特别地，当 D_θ 时会出现这种情况，因为 $\mathtt{n} = 2\theta$。

定理 4.3. 余乘法 $\Delta : \mathcal{O}_q(B^+) \to \mathcal{O}_q(B^+) \otimes \mathcal{O}_q(B^+)$ 满足 s

$$\Delta(z_{ij}^N) = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^k z_{ik}^N \otimes z_{kj}^N, \qquad \textit{for all } 1 \le i \le j \le \mathtt{n}. \tag{46}$$

证明. 对 (44) 中给出的关系 $\mathrm{FRT}(i,t,i,s)$ 关于 $i \le t < s$ 进行计算，可得以下恒等式:

$$z_{is} z_{it} = q^{-1} z_{it} z_{is}, \qquad \text{if } i \le t < s,\ s \ne t',\ i \ne \mathtt{n}_0, \tag{47}$$

$$z_{it'} z_{it} = q^{-2} z_{it} z_{it'} - (q - q^{-1}) \sum_{k=i}^{t-1} q^{k-t-1} z_{ik} z_{ik'}, \qquad \text{if } i \le t < t',\ i \ne \mathtt{n}_0, \tag{48}$$

$$z_{\mathtt{n}_0 s} z_{\mathtt{n}_0 t} = z_{\mathtt{n}_0 s} z_{\mathtt{n}_0 t} - (q - q^{-1}) \sum_{k=\mathtt{n}_0+1}^{t} q^{\mathtt{n}_0 - k + 1/2} z_{k's} z_{kt} \quad \text{if } \mathtt{n}_0 \le t < s. \tag{49}$$

类似地，对 $t < s \le j$ 计算 $\mathrm{FRT}(s,j,t,j)$，可得:

$$z_{sj} z_{tj} = q^{-1} z_{tj} z_{sj} \qquad \text{for } t < s \le j,\ s \ne t',\ j \ne \mathtt{n}_0, \tag{50}$$

$$z_{t'j} z_{tj} = q^{-2} z_{tj} z_{t'j} - (q - q^{-1}) \sum_{r=j'}^{t-1} q^{r-t-1} z_{rj} z_{r'j} \quad \text{if } t < t' \le j, \tag{51}$$

$$z_{\mathtt{n}_0 j} z_{tj} = q^{-1} z_{tj} z_{\mathtt{n}_0 j}, \qquad \text{for } t < \mathtt{n}_0 < j. \tag{52}$$

此外，记 $F_{i,k} = \mathrm{FRT}(i,k',i,k)$，则有

$$0 = F_{i,i'} + q^2 F_{i,i} + (q^2 - 1) \sum_{i < k \le \mathtt{n}/2} q^{k-i} F_{i,k}. \tag{53}$$

Appl在前一个恒等式中应用反 antipode 映射，我们得到以下关系 s:

$$0=\sum_{i\le l<\mathrm{n}_0} q^{l} z_{il} z_{il'} + \frac{q^{\mathrm{n}_0+1/2}}{1+q} z_{i\mathrm{n}_0} z_{i\mathrm{n}_0}, \qquad \text{if } i<i', \tag{54}$$

$$0=\sum_{j'\le r<\mathrm{n}_0} q^{r} z_{rj} z_{r'j} + \frac{q^{\mathrm{n}_0+1/2}}{1+q} z_{\mathrm{n}_0 j} z_{\mathrm{n}_0 j}, \qquad \text{若 } j'<j, \tag{55}$$

其中，如果 n 为偶数，则将等式 (54) 和 (55) 右侧的最后一项定义为零。因此，对于任意满足 $i\le t<s\le j$ 且 $t\neq s'$ 且 $\mathrm{n}_0\notin\{i,j\}$ 的情形，由 (47) 和 (50) 可得

$$(z_{i,s}\otimes z_{s,j})(z_{i,t}\otimes z_{t,j}) = q^{-2}(z_{i,t}\otimes z_{t,j})(z_{i,s}\otimes z_{s,j}) \tag{56}$$

为完成证明，我们将分情况讨论。

情况 *1*： $i<j<j'$。由 (56) 可知，余乘法公式 (45) 中的所有求和项都是与 q^{-2}交换的元素。因此

$$\Delta(z_{ij}^N)=\sum_{k=i}^{j} z_{ik}^N\otimes z_{kj}^N.$$

情况 *2*： $i=\mathrm{n}_0<j$。在这种情况下

$$\Delta(z_{\mathrm{n}_0 j})=\sum_{k=\mathrm{n}_0}^{j} z_{\mathrm{n}_0 k}\otimes z_{kj}.$$

对于 $\mathrm{n}_0\le t\le j$，令 $\mathsf{b}_t := z_{\mathrm{n}_0 t}\otimes z_{tj}$ 且 $\mathsf{b}_{t,\ j} := \sum_{k=t}^{j} z_{\mathrm{n}_0 k}\otimes z_{kj}$。由 (49) 和 (50) 可得

$$\mathsf{c}_t := \mathsf{b}_t\mathsf{b}_{t+1,j} - q\mathsf{b}_{t+1,j}\mathsf{b}_t = -(q-q^{-1})q^{\mathrm{n}_0+3/2}\sum_{s=t+1}^{j}\sum_{k=\mathrm{n}_0+1}^{t} q^{-k} z_{k's} z_{kt}\otimes z_{sj} z_{tj}.$$

可以验证

$$\mathsf{b}_t\mathsf{c}_t = q^2\mathsf{c}_t\mathsf{b}_t, \qquad \mathsf{c}_t\mathsf{b}_{t+1,j} = q^2\mathsf{b}_{t+1,j}\mathsf{c}_t$$

因此，根据 [BGM 推论 2.3], ，对于所有 $\mathrm{n}_0\le t\le j$ ，我们有

$$(\mathsf{b}_{t,j})^N = (\mathsf{b}_t+\mathsf{b}_{t+1,j})^N = \mathsf{b}_t^N + \mathsf{b}_{t+1,j}^N.$$

对 $t=\mathrm{n}_0,\ \ldots j-1$ 递归应用前一个关系，得到

$$\begin{aligned}
\Delta(z_{\mathrm{n}_0 j}^N) &= (\mathsf{b}_{\mathrm{n}_0}+\cdots+\mathsf{b}_j)^N = (\mathsf{b}_{\mathrm{n}_0}+\mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+1,j})^N \\
&= \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0}^N + \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+1,j}^N = \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0}^N + (\mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+1}+\mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+2,j})^N \\
&= \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0}^N + \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+1}^N + \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+2,j}^N = \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0}^N + \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+1}^N + (\mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+2}+\mathsf{b}_{\mathrm{n}_0+3,j})^N \\
&= \cdots = \mathsf{b}_{\mathrm{n}_0}^N + \cdots + \mathsf{b}_j^N \\
&= \sum_{k=\mathrm{n}_0}^{j} z_{\mathrm{n}_0 k}^N\otimes z_{kj}^N.
\end{aligned}$$

情形 *3*： $i<i'\le j$。对于这种情形，我们令 $\beta_1=1/(1+q)$ 和 $\beta_2=q/(1+q)$。若 n 为偶数，令 $\mathsf{a}_0=0$；若 n 为奇数，令 $\mathsf{a}_0=z_{i\,\mathrm{n}_0}\otimes z_{\mathrm{n}_0\,j}$。考虑

$$\mathsf{a}_1=\beta_1\mathsf{a}_0+\sum_{i\le k<\mathrm{n}_0} z_{ik}\otimes z_{kj}, \quad \mathsf{a}_2=\beta_2\mathsf{a}_0+\sum_{\mathrm{n}_0<k\le i'} z_{ik}\otimes z_{kj}, \quad \mathsf{a}_3=\sum_{k=i'+1}^{j} z_{ik}\otimes z_{kj}.$$

于是 $\Delta(z_{ij}) = \mathsf{a}_1+\mathsf{a}_2+\mathsf{a}_3$，并且根据 (56)，我们有 $\mathsf{a}_s\mathsf{a}_3 = q^2\,\mathsf{a}_3\mathsf{a}_s$，对于 $s=1,2$。

断言： $\mathtt{a}_1\mathtt{a}_2 = q^2\mathtt{a}_2\mathtt{a}_1$。

通过冗长但直接的计算即可验证这一点，下面概述主要思路。取 $\tilde{\mathtt{a}}_1 = \mathtt{a}_1 - \beta_1\mathtt{a}_0$ 和 $\tilde{\mathtt{a}}_2 = \mathtt{a}_2 - \beta_2\mathtt{a}_0$。于是

$$\begin{aligned} q^{-2}\tilde{\mathtt{a}}_1\tilde{\mathtt{a}}_2 - \tilde{\mathtt{a}}_2\tilde{\mathtt{a}}_1 &= \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0<s\le j} (q^{-2}z_{it}z_{is}\otimes z_{tj}z_{sj} - z_{is}z_{it}\otimes z_{sj}z_{tj}) \\ &= \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0} (q^{-2}z_{it}z_{it'}\otimes z_{tj}z_{t'j} - z_{it'}z_{it}\otimes z_{t'j}z_{tj}) + \\ &\quad \sum_{\substack{i\le t\le \mathtt{n}_0\le s\le j \\ t\neq s'}} (q^{-2}z_{it}z_{is}\otimes z_{tj}z_{sj} - z_{is}z_{it}\otimes z_{sj}z_{tj}) \\ &\overset{(56)}{=} \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0} (q^{-2}z_{it}z_{it'}\otimes z_{tj}z_{t'j} - z_{it'}z_{it}\otimes z_{t'j}z_{tj}). \end{aligned}$$

回顾 $\lambda = q - q^{-1}$，我们注意到

$$\begin{aligned} &\sum_{i\le t<\mathtt{n}_0} (q^{-2}z_{it}z_{it'}\otimes z_{tj}z_{t'j} - z_{it'}z_{it}\otimes z_{t'j}z_{tj}) = \\ &\overset{(48)}{=} \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0} (q^{-2}z_{it}z_{it'}\otimes z_{tj}z_{t'j} - q^{-2}z_{it}z_{it'}\otimes z_{t'j}z_{tj}) + \lambda \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0}\sum_{i\le s<t} q^{s-t-1}z_{is}z_{is'}\otimes z_{t'j}z_{tj} \\ &= \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0} z_{it}z_{it'}\otimes (q^{-2}z_{tj}z_{t'j} - q^{-2}z_{t'j}z_{tj}) + \lambda \sum_{i\le s<\mathtt{n}_0} \left(\sum_{s+1\le t<\mathtt{n}_0} q^{s-t-1}\right) z_{is}z_{is'}\otimes z_{t'j}z_{tj} \\ &= \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0} z_{it}z_{it'}\otimes \left(q^{-2}z_{tj}z_{t'j} - q^{-2}z_{t'j}z_{tj} + \lambda \sum_{t+1\le a<\mathtt{n}_0} q^{t-a-1}z_{a'j}z_{aj}\right). \end{aligned}$$

对项$z_{t'j}z_{tj}$ 和$z_{a'j}z_{aj}$使用 (51)，上一行中的括号可简化为：

$$q^{-2}z_{tj}z_{t'j} - q^{-2}z_{t'j}z_{tj} + \lambda \sum_{t+1\le a<\mathtt{n}_0} q^{t-a-1}z_{a'j}z_{aj} = \lambda q^{t-\mathtt{n}+\frac{1}{2}((-1)^{\mathtt{n}}-3)} \sum_{j'\le r<\mathtt{n}_0} q^r z_{rj}z_{r'j}.$$

因此

$$q^{-2}\tilde{\mathtt{a}}_1\tilde{\mathtt{a}}_2 - \tilde{\mathtt{a}}_2\tilde{\mathtt{a}}_1 = \lambda q^{-\mathtt{n}+\frac{1}{2}((-1)^{\mathtt{n}}-3)} \sum_{i\le t<\mathtt{n}_0} q^t\, z_{it}z_{it'}\otimes \sum_{j'\le r<\mathtt{n}_0} q^r z_{rj}z_{r'j} \tag{57}$$

若 $\mathtt{n}$ 为偶数，则由 (55) 可得结论。另一方面，若 $\mathtt{n}$ 为奇数，则由 (54) 和 (55) 可得

$$q^{-2}\tilde{\mathtt{a}}_1\tilde{\mathtt{a}}_2 - \tilde{\mathtt{a}}_2\tilde{\mathtt{a}}_1 = \tfrac{(q-q^{-1})}{(1+q)^2} z_{i\mathtt{n}_0}^2\otimes z_{\mathtt{n}_0 j}^2.$$

再次利用 (56) 可得

$$q^{-2}\mathtt{a}_0\tilde{\mathtt{a}}_2 = \tilde{\mathtt{a}}_2\mathtt{a}_0, \qquad q^{-2}\tilde{\mathtt{a}}_1\mathtt{a}_0 = \mathtt{a}_0\tilde{\mathtt{a}}_1.$$

Then

$$\begin{aligned} q^{-2}\mathtt{a}_1\mathtt{a}_2 - \mathtt{a}_2\mathtt{a}_1 &= q^{-2}(\beta_1\mathtt{a}_0 + \tilde{\mathtt{a}}_1)(\beta_2\mathtt{a}_0 + \tilde{\mathtt{a}}_2) - (\beta_2\mathtt{a}_0 + \tilde{\mathtt{a}}_2)(\beta_1\mathtt{a}_0 + \tilde{\mathtt{a}}_1) \\ &= (q^{-2}-1)\beta_1\beta_2\mathtt{a}_0^2 + q^{-2}\tilde{\mathtt{a}}_1\tilde{\mathtt{a}}_2 - \tilde{\mathtt{a}}_2\tilde{\mathtt{a}}_1 \\ &= \left((q^{-2}-1)\beta_1\beta_2 + \tfrac{(q-q^{-1})}{(1+q)^2}\right) z_{i\mathtt{n}_0}^2\otimes z_{\mathtt{n}_0 j}^2 = 0, \end{aligned}$$

由此完成该断言的证明。因此 $\Delta(z_{ij}^N) = \mathsf{a}_1^N + \mathsf{a}_2^N + \mathsf{a}_3^N$。此外，注意对于每个 s，a_s 中的所有加项都是两两 q^2-交换的。因此

$$\Delta(z_{ij}^N) = \mathsf{a}_1^N + \mathsf{a}_2^N + \mathsf{a}_3^N = \sum_{\substack{k=i \\ k\neq \mathtt{n}_0}}^{j} z_{ik}^N \otimes z_{kj}^N + \tfrac{2}{(1+q)^N} z_{i\,\mathtt{n}_0}^N \otimes z_{\mathtt{n}_0\,j}^N,$$

这意味着结论在情形 3 中成立。其余情形可通过对余乘法应用反演，从前述情形推出。具体而言，我们有

$$\Delta(z_{j'i'}^N) = \Delta(S(z_{ij}^N)) = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^k z_{j'k'}^N \otimes z_{k'i'}^N = \sum_{k=j'}^{i'} c_{ij}^{k'} z_{j'k}^N \otimes z_{ki'}^N = \sum_{k=j'}^{i'} c_{j'i'}^k z_{j'k}^N \otimes z_{ki'}^N,$$

于是结论得证。

□

下一个定理给出了类型 B_θ 和 D_θ中正量子 Borel 代数的对偶量子 Frobenius 映射的显式公式。事实上，在 B_θ情形下，可以用 q^2 代替 q，从而假设 $q^{N/2} = 1$。因此，对于接下来的 $q^{N/2} = 1$。

定理 4.4。 设 $i, j \in \mathbb{N}$ 满足 $i \le j$。映射 $\iota\colon \mathcal{O}(B^+) \to \mathcal{O}_q(B^+)$ 定义为

$$\iota(X_{ij}) = \begin{cases} \frac{(1+q)^N}{2} z_{ij}^N, & \text{if } \mathtt{n}_0 \in \tilde{\mathbb{I}}_{i,j}, \\ z_{ij}^N, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

是一个 *Hopf* 代数单同态。

证明。 令 $\gamma_{ij} = \frac{(1+q)^N}{2}$ 对于 $\mathtt{n}_0 \in \tilde{\mathbb{I}}_{i,\,j}$ 否则取 $\gamma_{ij} = 1$。根据定理 4.3，我们有

$$\Delta(\iota(X_{ij})) = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^k \gamma_{ij} z_{ik}^N \otimes z_{kj}^N = \sum_{k=i}^{j} \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{ik}\gamma_{kj}} c_{ij}^k \iota(X_{ik}) \otimes \iota(X_{kj}).$$

对于类型 D_θ，前一个求和中出现的所有系数 γ_{ij}，γ_{ik}，γ_{kj}，c_{ij}^k 都等于 1，因此 ι 是一个余代数映射。因此，我们考虑类型 B_θ的情形。若 $\mathtt{n}_0 \notin \tilde{\mathbb{I}}_{i,\,j}$，则对每个 $i \le k \le j$，都有 $c_{ij}^k = \gamma_{ij} = \gamma_{ik} = \gamma_{kj} = 1$。另一方面，假设 $\mathtt{n}_0 \in \tilde{\mathbb{I}}_{i,\,j}$ 且 $i \le k \le j$。若 $k \neq \mathtt{n}_0$，则 $c_{ij}^k = 1$ 且 $\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\gamma_{kj}$。若 $k = \mathtt{n}_0$，则有 $c_{ij}^{\mathtt{n}_0}\gamma_{ij} = q^{-N/2} = 1$ 且 $\gamma_{i,\,\mathtt{n}_0} = 1 = \gamma_{\mathtt{n}_0,\,j}$。无论哪种情况，我们都有

$$c_{ij}^k \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{ik}\gamma_{kj}} = 1, \qquad i \le k \le j, \tag{58}$$

这证明了 ι 是余代数映射。现在我们想证明 ι 是代数态射。由于 $z_{ii}z_{i'i'} = 1$ 和 $z_{\mathtt{n}_0\mathtt{n}_0} = 1$，因此可推出行列式关系

$$\det \iota(X) = \prod_{k=1}^{\mathtt{n}} \iota(X_{kk}) = \prod_{k=1}^{\mathtt{n}_0-1} \iota(X_{kk})\iota(X_{k'k'}) = \prod_{k=1}^{\mathtt{n}_0-1} z_{ii}^N z_{i'i'}^N = 1$$

由（32），还需证明 $\sum_{k=i}^{j} \iota(X_{k'i'})\iota(X_{kj}) = \delta_{ij}$Si

nce

$$(S \otimes I) \circ \Delta(z_{ij}^N) = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^k S(z_{ik}^N) \otimes z_{kj}^N = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^k (q^{\rho_j - \rho_j})^N \; z_{k',i'}^N \otimes z_{kj}^N = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^k z_{k',i'}^N \otimes z_{kj}^N,$$

以及 $\epsilon(z_{ij}) = \delta_{ij}$，由（58）可得

$$\delta_{ij} = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^{k} z_{k',i'}^{N} z_{kj}^{N} = \sum_{k=i}^{j} c_{ij}^{k} \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{ik}\gamma_{kj}} \iota(X_{k'i'})\iota(X_{kj}) = \sum_{k=i}^{j} \iota(X_{k'i'})\iota(X_{kj}).$$

□

4.3. B_θ**-型**。对于 $1 \le j \le 2\theta+1$，我们考虑 $j' := 2\theta + 2 - j$。设 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\theta\}$ 是 B_θ 的单根。群 T_M 是由元素 $\widehat{g_{\alpha_i}^N}$（对所有 $i \in I$）生成的 Γ 的子群，而 T_M 是 T_M 的特征群。对于每个 $i \in I$，设 $\ell_i := n_i/N$，并令 $\wideparen{\xi_i}$ 为单位的一个本原 ℓ_i 次根。那么，我们可以将 T_M 描述为由特征 γ_j 生成的有限阿贝尔群，使得

$$\gamma_j(g_{\alpha_i}^N) = \xi_j^{(2-\delta_{i,\theta})\frac{a_{ij}}{2}}, \quad \text{for all } i, j \in I. \tag{59}$$

对于每个 $i \in I$，考虑由下式给出的对角矩阵 $P_i \in B^+$

$$(P_i)_{jj} = \begin{cases} \xi_i, & \text{if } j \in \{i+1, i'\} \text{ and } j \neq \theta+1, \\ \xi_i^{-1}, & \text{if } j \in \{i, i'-1\} \text{ and } j \neq \theta+1, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{60}$$

与 (43) 中一样，但现在使用由 (60) 给出的对角矩阵 P_i，映射

$$\widehat{T} \hookrightarrow B^+, \qquad \gamma \mapsto P_\gamma = P_1^{s_1} \cdots P_\theta^{s_\theta}, \qquad \text{for all } \gamma = \gamma_1^{s_1} \dots \gamma_\theta^{s_\theta} \in \widehat{T_M},$$

是一个群单态。此外，将同构 $\psi\colon U_q^Q(\mathfrak{b}^+) \to \mathcal{O}_q(B^+)$（见下文 (61)）限制在交换子代数 $Z^{\geq} := Z_Q^{\geq}$ 上，可得同构

$$\psi : Z^{\geq} \to \mathcal{O}(B^+), \qquad K_{\alpha_i}^{\pm N} \mapsto (X_{i'-1,i'-1}X_{i,i})^{\pm}, \quad E_i^N \mapsto -(q-q^{-1})^{-N}(X_{i'-1,i'}X_{i',i'}^{-1}).$$

注 4.5。 $\psi : Z^{\geq} \to \mathcal{O}(B^+)$ 与 ι_μ^* 的复合给出了一个霍普夫代数满态射 $\iota_\mu^*\psi : Z^{\geq} \to \mathbb{C}^{T_M}$，它满足

$$\iota_\mu^*\psi(K_{\alpha_i}^N)(\gamma_j) = \xi_j^{\frac{s_i a_{ij}}{2}(2-\delta_{i,\theta})}.$$

此外，由 (59) 可得

$$\varphi(g_{\alpha_i}^N)(\gamma) = \prod_{j=1}^{\theta} \xi_j^{\frac{s_i a_{ij}}{2}(2-\delta_{i,\theta})} = t_{i'}t_{i'-1}^{-1} = \iota_\mu^*\psi(K_{\alpha_i}^N)(\gamma), \qquad \gamma = \gamma_1^{s_1} \cdots \gamma_\theta^{s_\theta} \in \widehat{T_M}.$$

因此，对所有 $i \in I.$， $g_{\alpha_i}^N = \varphi^{-1}\iota_\mu^*\psi(K_{\alpha_i}^N)$

正根集合 $\Phi^+ = \{\alpha_{ij} \colon 1 \le i \le \theta,\ i < j \le i'-1\}$ 可用单根 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\theta}$ 表示为:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &:= \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, && \text{if } i < j \le \theta+1, \\ \alpha_{ij'} &:= \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_\theta, && \text{if } \theta+1 < j' \le i'-1. \end{aligned}$$

给定 $i \in \mathbb{I}_{1,\theta}$ 和 $j \in \mathbb{I}_{i+1,i'-1}$，根向量 $E_{\alpha_{ij}} := E_{ij}$ 由递归公式给出

$$E_{ij} = \begin{cases} E_{\alpha_i}, & \text{if } j = i+1, \\ E_{j-1}E_{i\,j-1} - q^{-1}E_{i\,j-1}E_{j-1}, & \text{if } i+1 < j \le \theta+1. \\ E_{j'}E_{i\,j-1} - q^{-1+\delta_{j,\theta+2}}E_{i\,j-1}E_{j'}, & \text{if } \theta+1 < j \le i'-1. \end{cases}$$

沿用前面的记号，对于每个 $1 \le i \le \theta$ 和 $i < j \le i' - 1$，令 $g_i := g_{\alpha_i}$，并考虑

$$x_{(ij)} := p_\mu(E_{ij}), \qquad g_{(ij)} := g_i g_{i+1} \dots g_{j-1}, \qquad \text{if } i < j \le \theta + 1,$$
$$g_{(ij')} := g_i g_{i+1} \dots g_{j-1} g_j^2 \dots g_\theta^2, \qquad \text{if } \theta + 1 < j' \le i' - 1.$$

在这种情况下，显式的 Hopf 同构 $\psi\colon U_{q^{1/2}}^Q(\mathfrak{b}^+) \to \mathcal{O}_q(B_Q^+)$ 定义如下：

$$\psi(K_{\alpha_i}^{\pm 1}) = (z_{i'-1\,i'-1}\, z_{ii})^{\pm 1}, \qquad \psi(E_{\alpha_i}) = q^{2-\delta_{i,\theta}}(q - q^{-1})^{-1} z_{i'-1\,i'}\, z_{ii}, \tag{61}$$

通过归纳法，我们得到

$$\psi(E_{ij}) = \lambda_{ij} z_{j'i'} z_{ii}, \tag{62}$$

其中 λ_{ij} 是以下标量：

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} q^{j-i+1-\delta_{j,\theta+1}}(q - q^{-1})^{-1}, & 1 \le i < j \le \theta + 1, \\ (-1)^{\theta+1-j} q^{j-i-1/2}(q - q^{-1})^{-1}, & \theta + 1 < j \le i' - 1. \end{cases}$$

下一个结果给出了 Drinfeld-Jimbo 情形下类型 B_θ 编织向量空间的提升。特别地，我们用这种方法得到了 BDR 中类型 B_2 的提升公式，以及 BGM 中类型 B_3 的提升公式。回顾 §3.1，$q_1 = q^{d_1} = q^2$。

定理 4.6. 设 $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha \in \Phi^+} = (\mu_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{I}_{1,\,\theta} \times \mathbb{I}_{i+1,\,i'-1}}$ 为一族根向量参数。对于 $1 \le i < j \le \theta + 1$，令

$$\begin{aligned} r_{j'i'} &:= (q_1^2 - 1)^N \mu_{ij}, \\ r_{ji'} &:= (-1)^{\theta+1-j} \tfrac{1}{2}(q_1^2 - 1)^N (q_1 - 1)^N \mu_{ij'}, \ \text{if } j \ne \theta + 1 \end{aligned} \tag{63}$$

并将此定义扩展到所有指标 r_{ij}，使得 (33) 中给出的矩阵 Q_r 属于$\mathrm{SO}_{2\theta+1}$。于是，对于所有 $1 \le i < j \le \theta + 1$，关系式 (9) 为

$$x_{(ij)}^N = \mu_{ij}\big(g_{(ij)}^N - 1\big) - \sum_{s=i+1}^{j-1} r_{j's'} x_{(is)}^N. \tag{64}$$

如果 $j \ne \theta + 1$，则有

$$\begin{aligned} x_{(ij')}^N = \mu_{ij'}\big(g_{(ij')}^N - 1\big) &- 2(-1)^{\theta+1-j}(1 + q_1)^{-N} \sum_{s=i+1}^{\theta} r_{js'} x_{(is)}^N \\ &- 2(-1)^{\theta+1-j}(1 + q_1)^{-N} r_{j\,\theta+1} x_{(i\,\theta+1)}^N - \sum_{s=\theta+2}^{j'-1} (-1)^{s-j} r_{js'} x_{(is)}^N, \end{aligned} \tag{65}$$

证明。令 $1 \le i \le \theta$ 和 $i < j$。我们首先固定标量

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} \frac{(1+q_1)^N}{2}, & \text{if } \theta + 1 \in \tilde{\mathbb{I}}_{i,j}, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{66}$$

由（62）可知，$\psi(E_{ij}^N) = \lambda_{ij}^N z_{j'i'}^N z_{ii}^N$。注意，对于所有的 $\gamma \in \widehat{T_M}$，我们有

$$\begin{aligned}
\iota_\mu^*\big(\psi(E_{ij}^N)\big)(\gamma) &= \lambda_{ij}^N \iota_\mu^*(z_{j'i'}^N z_{ii}^N)(\gamma) \\
&= \lambda_{ij}^N \zeta_{j'i'}^{-1} \iota_\mu^*\big(\zeta_{j'i'} z_{j'i'}^N z_{ii}^N\big)(\gamma) \\
&= \lambda_{ij}^N \zeta_{j'i'}^{-1} \iota_\mu^*\big(X_{j'i'} X_{ii}\big)(\gamma) \qquad \text{(by Theorem 4.4)} \\
&= \lambda_{ij}^N \zeta_{j'i'}^{-1} \Big(r_{j'i'} (\iota_\mu^*(X_{j'j'} X_{ii}) - 1) - \sum_{k=j'+1}^{i'-1} r_{j'k} \iota_\mu^*\big(X_{ki'} X_{ii}\big) \Big)(\gamma) \\
&= \lambda_{ij}^N \zeta_{j'i'}^{-1} r_{j'i'} \big(g_{(ij)}^N - 1\big) - \sum_{s=i+1}^{j-1} \lambda_{ij}^N \zeta_{j'i'}^{-1} r_{j's'} \iota_\mu^*\big(X_{s'i'} X_{ii}\big)(\gamma) \\
&= \lambda_{ij}^N \zeta_{j'i'}^{-1} r_{j'i'} \big(g_{(ij)}^N - 1\big) - \sum_{s=i+1}^{j-1} \lambda_{ij}^N \lambda_{is}^{-N} \zeta_{j'i'}^{-1} \zeta_{s'i'} r_{j's'} x_{(is)}^N .
\end{aligned}$$

由于 $x_{(ij)}^N = p_\mu\left(E_{ij}^N\right) = \iota_\mu^*\left(\psi\left(E_{ij}^N\right)\right)(\gamma)$，结论得证。 □

例4.7（情形 B_2）。我们希望将定理 4.6 中针对 B_2 情形得到的关系与 [BDR 定理 2.6] 给出的关系进行比较。在此情形下，正根集合为 $\Phi^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{13}, \alpha_{12'}\}$，其中单根为 α_{12}，α_{23} 而最长根为 $\alpha_{12'}$。给定根向量参数族 $\{\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{13}, \mu_{12'}\}$，式（63）中的显式标量为

$$\begin{aligned}
r_{45} &= (q_1^2 - 1)^N \mu_{12}, & r_{35} &= (q_1^2 - 1)^N \mu_{13}, \\
r_{34} &= (q_1^2 - 1)^N \mu_{23,} & r_{25} &= -\tfrac{1}{2}(q_1^2 - 1)^N (q_1 - 1)^N \mu_{12'}.
\end{aligned}$$

于是，由（64）可得

$$\begin{aligned}
x_{(12)}^N &= \mu_{12}(g_{(12)}^N - 1), & x_{(13)}^N &= \mu_{13}(g_{(13)}^N - 1) - (q_1^2 - 1)^N \mu_{23}\, x_{(12)}^N . \\
x_{(23)}^N &= \mu_{23}(g_{(23)}^N - 1),
\end{aligned}$$

另一方面，将这些公式与 [BDR 定理 2.6] 中关于 y_i 和 v 的关系进行比较。我们指出，[BDR 定理 2.6] 中关于 v 的关系存在一个笔误。事实上，正确的关系是 $v := z^n + \mu_2(q^2 - 1)^n x_n^n - \lambda(g_1^n g_2^n - 1)$。由（65），

$$x_{(12')}^N = \mu_{12'}(g_{(12')}^N - 1) + 2(1 + q_1)^{-N} r_{24}\, x_{(12)}^N + 2(1 + q_1)^{-N} r_{23}\, x_{(13)}^N .$$

Since $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & r_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO_5$ it follows from (32) that

$$r_{23} = -r_{34} = -(q_1^2 - 1)^N \mu_{23}, \qquad r_{24} = -\tfrac{1}{2} r_{34}^2 = -\tfrac{1}{2}(q_1^2 - 1)^{2N} \mu_{23}^2 .$$

Thus

$$x_{(12')}^N = \mu_{12'}(g_{(12')}^N - 1) - (q_1^2 - 1)^N (q_1 - 1)^N \mu_{23}^2\, x_{(12)}^N - 2(q_1 - 1)^N \mu_{23}\, x_{(13)}^N \tag{67}$$

这最后一个关系与 [BDR 定理 2.6] 中的关系 $w = 0$ 一致。

例4.8 (情形 B_3**).** 现在我们想将我们的结果与 [BGM] 中针对 B_3 情形所得到的结果进行比较。首先，我们得到标量

$$r_{67}=(q_1^2-1)^N\mu_{12},\qquad r_{46}=(q_1^2-1)^N\mu_{24},\qquad r_{36}=-\tfrac{1}{2}(q_1^2-1)^N(q_1-1)^N\mu_{23'},$$
$$r_{56}=(q_1^2-1)^N\mu_{23},\qquad r_{57}=(q_1^2-1)^N\mu_{13},\qquad r_{37}=-\tfrac{1}{2}(q_1^2-1)^N(q_1-1)^N\mu_{13'},$$
$$r_{45}=(q_1^2-1)^N\mu_{34},\qquad r_{47}=(q_1^2-1)^N\mu_{14},\qquad r_{27}=-\tfrac{1}{2}(q_1^2-1)^N(q_1-1)^N\mu_{12'}.$$

与 B_2 情形类似，计算 (64) 可得:

$$x^N_{(12)}=\mu_{12}(g^N_{(12)}-1),\qquad x^N_{(24)}=\mu_{14}(g^N_{(14)}-1)-(q_1^2-1)^N\mu_{34}\,x^N_{(23)},$$
$$x^N_{(23)}=\mu_{23}(g^N_{(23)}-1),\qquad x^N_{(13)}=\mu_{13}(g^N_{(13)}-1)-(q_1^2-1)^N\mu_{23}\,x^N_{(12)}.$$
$$x^N_{(34)}=\mu_{34}(g^N_{(34)}-1),$$

另外，$x^N_{(23')}$ 按照与 (67) 完全类似的方式，利用 (65) 计算得到

$$x^N_{(23')}=\mu_{23'}(g^N_{(23')}-1)-(q_1^2-1)^N(q_1-1)^N\mu_{34}^2\,x^N_{(23)}-2(q_1-1)^N\mu_{34}\,x^N_{(24)}.$$

还需计算 $x^N_{(13')}$ 和 $x^N_{(12')}$。同样，由 (65) 得，
$x^N_{(13')}=\mu_{13'}(g^N_{(13')}-1)+2(1+q_1)^{-N}\Big(r_{36}x^N_{(12)}+r_{35}x^N_{(13)}\Big)+2(1+q_1)^{-N}r_{34}x^N_{(14)}$,$x^N_{(12')}=\mu_{12'}$
$(g^N_{(12')}-1)-2(1+q_1)^{-N}\Big(r_{26}x^N_{(12)}+r_{25}x^N_{(13)}\Big)-2(1+q_1)^{-N}r_{24}x^N_{(14)}+r_{23}x^N_{(15)}$.由于 $Q_r=(r_{ij})\in SO_7$，我们有

$$r_{35}=-\tfrac{1}{2}r_{45}^2,\qquad r_{34}=-r_{45},\qquad r_{26}=-\tfrac{1}{2}r_{46}^2-r_{36}r_{56},$$
$$r_{25}=-r_{36}-r_{45}r_{46}+\tfrac{1}{2}r_{45}^2r_{56},\qquad r_{24}=-r_{46}+r_{45}r_{56}.\qquad r_{23}=-r_{56}.$$

在$x^N_{(13')}$ 和 $x^N_{(12')}$ 的关系中使用这些恒等式，我们便可得到 [BGM, 引理 3.7.] 和 [BGM, 引理 3.12.]中得到的标量。

4.4. D_θ-型。 对于 $1\le j\le 2\theta$，令 $j':=2\theta+1-j$。令 $\Pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\theta\}$ 为 D_θ的单根。正根集合 $\Phi^+=\{\alpha_{ij}\colon\ 1\le i<\theta,\ i<j\le i'-1\}$ 可用单根 $\Pi=\{\alpha_i\}_{i=1}^{\theta}$ 表示为

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij}&:=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}, && \text{if } i<j\le\theta,\\
\alpha_{i\theta+1}&:=\alpha_i+\cdots+\alpha_{\theta-2}+\alpha_\theta, && \text{if } j=\theta+1,\\
\alpha_{ij'}&:=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}+2\alpha_j+\cdots+2\alpha_{\theta-2}+\alpha_{\theta-1}+\alpha_\theta, && \text{if } i<j\le\theta-1.
\end{aligned}$$

给定 $i\in\mathbb{I}_{1,\theta-1}$ 和 $j\in\mathbb{I}_{i+1,i'-1}$，根向量 $E_{\alpha_{ij}}:=E_{ij}$ 由递归公式给出

$$E_{ij}=\begin{cases}
E_{\alpha_i}, & \text{if } j=i+1,\\
E_{\alpha_\theta}, & \text{if } (i,j)=(\theta-1,\theta+1),\\
E_{j-1}E_{i\,j-1}-q^{-1}E_{i\,j-1}E_{j-1}, & \text{if } i+1<j\le\theta,\\
E_\theta E_{i\,\theta-1}-q^{-1}E_{i\,\theta-1}E_\theta, & \text{if } i+2<j=\theta+1,\\
E_{j'}E_{i\,j-1}-q^{-1}E_{i\,j-1}E_{j'}, & \text{if } \theta+1<j<i'.
\end{cases}$$

沿用前面的记号，令 $g_i=g_{\alpha_i}$ 并考虑

$$\begin{aligned}
x_{(ij)}&:=p_\mu(E_{ij}), && i\in\mathbb{I}_{1,\theta-1},\quad j\in\mathbb{I}_{i+1,i'-1}\\
g_{(ij)}&:=g_ig_{i+1}\dots g_{j-1}, && \text{if } i<j\le\theta,\\
g_{(i\theta+1)}&:=g_ig_{i+1}\dots g_{\theta-2}g_\theta, && \text{if } i<\theta,\\
g_{(ij')}&:=g_ig_{i+1}\dots g_{j-1}g_j^2\dots g_{\theta-2}^2g_{\theta-1}g_\theta, && \text{if } i<j\le\theta-1.
\end{aligned}$$

在这种情况下，显式的 Hopf 同态 $\psi\colon U_q^Q(\mathfrak{b}^+) \to \mathcal{O}_q(B_Q^+)$ 定义如下：

$$\psi(K_{\alpha_i}^{\pm 1}) = \begin{cases} (z_{i'-1\,i'-1}\, z_{ii})^{\pm 1}, & \text{if } i < \theta, \\ (z_{i'-2\,i'-2}\, z_{ii})^{\pm 1}, & \text{if } i = \theta, \end{cases} \tag{68}$$

$$\psi(E_{\alpha_i}) = \begin{cases} q^2(q-q^{-1})^{-1} z_{i'-1\,i'}\, z_{ii}, & \text{if } i < \theta, \\ q^2(q-q^{-1})^{-1} z_{i'-2\,i'}\, z_{ii}, & \text{if } i = \theta. \end{cases} \tag{69}$$

对（$j-i$）使用归纳法，我们得到

$$\psi(E_{ij}) = \lambda_{ij} z_{j'i'} z_{ii}, \tag{70}$$

其中 λ_{ij} 是以下标量：

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} q^{j-i+1-\delta_{j,\theta+1}}(q-q^{-1})^{-1}, & 1 \le i < j \le \theta+1, \\ (-1)^{\theta+1-j} q^{j-i}(q-q^{-1})^{-1}, & \theta+1 < j \le i'-1. \end{cases}$$

下一个结果描述了 Dinfeld-Jimbo 型对角编织的所有 D_θ 型提升。证明与定理 4.6 的证明作相应修改，唯一的例外是（66）中给出的 ζ_{ij} 对所有 i, j 均等于 1。

定理 4.9。设 $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha\in\Phi^+} = (\mu_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{I}_1\times\mathbb{I}_{i+1}, i'-1}$ 是一族根向量参数。对于 $1 \le i < j \le \theta+1$，令

$$\begin{aligned} r_{j'i'} &:= (q^2-1)^N \mu_{ij}, \\ r_{ji'} &:= (-1)^{\theta+j}(q^2-1)^N \mu_{ij'}, \ \text{if } j \ne \theta+1 \end{aligned} \tag{71}$$

并将此定义扩展到所有指标 r_{ij}，使得（33）中给出的矩阵 Q_r 属于 $\mathcal{SO}_{2\theta}(\mathbb{C})$。那么，对于所有 $1 \le i < j \le \theta+1$，关系（9）由下式给出

$$x_{(ij)}^N = \mu_{ij}\big(g_{(ij)}^N - 1\big) - \sum_{s=i+1}^{j-1} r_{j's'} x_{(is)}^N, \tag{72}$$

如果 $j \ne \theta+1$ 我们有

$$x_{(ij')}^N = \mu_{ij'}\big(g_{(ij')}^N - 1\big) - (-1)^{\theta+j} \sum_{s=i+1}^{\theta+1} r_{js'} x_{(is)}^N - \sum_{s=\theta+2}^{j'-1} (-1)^{s-j} r_{js'} x_{(is)}^N, \tag{73}$$

□

例 4.10（D_5情形）。与 B_θ 情形一样，我们希望说明如何使用定理 4.9 计算特定根向量的系数 r_{ij}。考虑 G类型 D_5以及根 $\alpha_{13'} = \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$。于是，利用（73），我们有

$$x_{(13')}^N = \mu_{13'}\big(g_{(13')}^N - 1\big) - \sum_{s=2}^{6} r_{3s'} x_{(1s)}^N - r_{34} x_{(17)}^N. \tag{74}$$

Set $\eta = (q^2-1)^N$. 给定一族向量参数 $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\Phi^+}$，由 (71) 可得 e

$$\begin{aligned} &r_{78} = \eta\mu_{34}, && r_{67} = \eta\mu_{45}, && r_{68} = \eta\mu_{35}, && r_{57} = \eta\mu_{45'}, \\ &r_{58} = \eta\mu_{35'} && r_{48} = -\eta\mu_{34'}, && r_{39} = \eta\mu_{23'}. \end{aligned}$$

利用 $Q_r = (r_{ij}) \in \mathsf{SO}_{10}$，这一事实可知

$$
\begin{aligned}
r_{35} &= \eta^2\mu_{34}\mu_{45} - \eta\mu_{35}, & r_{34} &= -\eta\mu_{34},\\
r_{36} &= \eta^2\mu_{34}\mu_{45'} - \eta\mu_{35'}, & r_{39} &= \eta\mu_{23'},\\
r_{38} &= \eta^2\mu_{34'}\mu_{34} - \eta^2\mu_{35'}\mu_{35}\\
r_{37} &= \eta\mu_{34'} - \eta^2\mu_{35}\mu_{45'} - \eta^2\mu_{35'}\mu_{45} + \eta^3\mu_{34}\mu_{45}\mu_{45'}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到了关系式 (74) 的明确描述。类似地，对于其他正根，公式 (72) 和 (73) 中涉及的系数 r_{ij} 也可以计算出来。

References

[A] N. Andruskiewitsch, *An introduction to Nichols algebras.* 数学与物理中的量子化、几何及非交换结构，135–195，《数学物理研究》，Springer，沙姆，2017年。[AAG] N. Andruskiewitsch, I. Angiono 和 A. García Iglesias, *Liftings of Nichols algebras of diagonal type I. Cartan type A* 2017 2793 2884 。《国际数学研究通知》（IMRN）（），–。[AAGMV] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, A. García Iglesias, A. Masuoka, 以及 C. Vay,*via cocycle deformation* **218** 2014 684 703 。《纯粹与应用代数杂志》，（），第–页。[AD] N. Andruskiewitsch 和 J. Devoto, *Extensions of Hopf algebras*, 《代数与分析》7（1995），第1期，22–61。[AG] N. Andruskiewitsch和 G. A. García, *Finite subgroups of a simple quantum group*, 《组合数学》145，第2期（2009），476–500。[AS1] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider, *Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3* **209** 1998 658 691 ，《代数杂志》（），–。[AS2] , *Pointed Hopf algebras*, 《霍普夫代数新方向》，1–68，《数学科学研究所出版物》，43，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[AS3] , *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, 《数学年刊》第171卷（2010），第1期，375–417。[An] I. Angiono, *On Nichols algebras of diagonal type*, 《纯粹与应用数学杂志》683（2013），189–251。[An2] , *Distinguished pre-Nichols algebras*, 《变换群》21（2016），第1期，1–33。[An3] , *Pointed Hopf algebras revisited, with a view from tensor categories*, 2026年国际数学家大会论文集。预印本: arXiv:2510.03124。[AGI] I. Angiono 和 A. García Iglesias, *Liftings of Nichols algebras of diagonal type II: All liftings are cocycle deformations* **25** 2019 95 ，《精选数学》，新系列，（），第页。[BGM] D. Bagio, G. A. García 和 O. Márquez, *Liftings of Nichols algebras of type B_3*, arXiv:2411.18857。[BDR] M. Beattie, S. Dăscălescu 和 S. Raianu, *Liftings of Nichols algebras of type B_2*, 《以色列数学杂志》132（2002），1–28。[BGa] M. Beattie 和 G. A. García *Classifying Hopf algebras of a given dimension*。《当代数学》585（2013），125–152。[Bou] N. Bourbaki, *Elements of mathematics: Lie Groups and Lie Algebras. Chapter 4-6*。施普林格，柏林、海德堡。[BG] K. A. Brown 和 K. R. Goodearl, *Lectures on Algebraic Quantum Groups*, 《巴塞罗那 CRM 数学高级课程》。巴塞尔：Birkh¨auser。[DL] C. De Concini 和 V. Lyubashenko, *Quantum function algebra at roots of 1*, 《数学进展》108（1994），第2期，205–262。[DP] C. De Concini 和 C. Procesi, *Quantum groups*, 载于：D模、表示论与量子群，数学讲义第1565卷，Springer，1993年，第31–140页。[GIG] A. Garcia Iglesias J. M. Jury Giraldi *Liftings of Nichols algebras of diagonal type III.* 和, ,《代数杂志》*Cartan type G2* **478** 2017 506 568 （），–。[GG1] G. A. Garcia F. Gavarini *Twisted deformations vs. cocycle deformations for quantum* 和, *groups* **23**, 8 2021 2050084 56 ,《当代数学通讯》第（）（页）[GG2] , *Multiparameter quantum groups at roots of unity*, 《非交换几何杂志》16（2022），839–926

[GM] G. A. Garcia 和 M. Mastnak, *Deformation by cocycles of pointed Hopf algebras over non-abelian groups* **22**, 2015 59 92 , 《数学研究快报》 () –.[G] F. Gavarini, *Presentation by Borel-subalgebras and Chevalley generators for quantum enveloping algebras* 2 **49** 2006 2, 291 308 , 《爱丁堡数学学会会刊》 () (), 第–期。[G2] , *Quantization of Poisson groups*, 《太平洋数学杂志》186（1998），第2期，217–266。[H] I. Heckenberger, *Classification of arithmetic root systems*, 《数学进展》220（2009），第59–124页。[HY] I. Heckenberger 和 H. Yamane, *Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants*, 《阿根廷数学联盟评论》51（2010），第2期，107–146。[HPR] N. Hu, Y. Pei, M. Rosso, *Multi-parameter quantum groups and quantum shuffles. I.* 量子仿射代数、扩张仿射李代数及其应用，145–171，《当代数学》506，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。[Hu] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 《数学研究生教材》第9卷（1980）。纽约—海德堡—柏林：施普林格出版社。XII [KS] A. Klimyk 和 K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, 施普林格科学与商业媒体，1997年。[L] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of 1*, 《几何奉献》35（1990），第1–3期，89–113。[L2] , *Introduction to quantum groups*, 《现代 Birkh¨auser 经典》。Birkh¨auser/Springer，纽约，2010年。xiv +346 页。[Ma] A. Masuoka, *Abelian and non-Abelian second cohomologies of quantized enveloping algebras*, 《代数杂志》320（2008），第1–47页。[Mo] S. Montgomery, *Hopf Algebras and their Actions on Rings*, 《CBMS 数学区域会议系列》82，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993年。[PW] B. Parshall 和 J. P. Wang, *Quantum linear groups*。《美国数学会回忆录》89（1991），第439期，vi+157 页。[Ra] D. E. Radford, *Hopf algebras*。《纽结及万物系列》49，世界科学出版有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2012年。

D. B. and O. M. : Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina,Santa Catarina, Brazil*Email address*: d.bagio@ufsc.br*Email address*: oscar.marquez.sosa@ufsc.br

G. A. G. : Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas Universidad Na- , , , cional de La Plata. CMaLP CONICET Argentina. (1900) La Plata Guangdong-Technion , , „ , , ,*Email address*: Israel Institute of Technology No. 241 Daxue Road Shantou Guangdong Province China. ggarcia@mate.unlp.edu.ar, gaston.garcia@gtiit.edu.cn