arXiv:2512.17096v1 [math.MG] 18 Dec 2025

最大内切半径双曲单形

Bruno DUCHESNE，Christopher-Lloyd SIMON

2025年12月22日

摘要

对于 $n \in \mathbb{N}$，考虑一个由紧化双曲空间$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$中的 $1+n$ 个点定义的 n维双曲单形 Δ。对于每个整数 $m \leq n$，记 $\delta^n_m(\Delta)$为其 n维骨架与 m维骨架之间的豪斯多夫距离。特别地，$\delta^n_{n-1}(\Delta)$是其内切半径。$\delta^n_m(\Delta)$在 $\Delta \in (\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n)^{1+n}$ 上的最大值记为 $\mu^n_m \in [0, +\infty]$。

我们首先证明，Δ 具有最大内切半径 $\delta^n_{n-1}(\Delta) = \mu^n_m$ 当且仅当它是（全）理想且正则的；此时内切半径为 $\tanh \mu^n_{n-1} = 1/n$。由此可得，Δ 具有最大 $\delta^n_{n-1}(\Delta) = \mu^n_m$ 当且仅当它是（全）理想且正则的。我们计算得出，到 μ^n_1的1-骨架的最大距离为 $(\tanh \mu^n_1)^2 = (n-1)/(2n)$，并由此推出这些距离一致有界于 $\lim_n \mu^n_1 = \log(1+\sqrt{2})$。

0 引言

对于 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，令 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 表示维数为 n的紧化实代数双曲空间。我们将在第 1节回顾其定义和主要性质。

这里，单纯形 Δ 定义为由$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中的 $1+n$ 个点构成的序列，这些点称为它的顶点。当其顶点线性无关时，它是全的。当所有顶点都属于 $\partial\mathbf{H}^n$ 时，它是理想的。

对于 $m \in \{0, \ldots, n\}$，Δ 的 m 维面是 $1+m$ 个顶点的凸包。其 m 骨架 $\Delta^{(m)}$ 是其 m 维面的并集。对于 $n > m > 0$，我们研究从 $\Delta^{(n)}$ 到 $\Delta^{(m)}$ 的豪斯多夫距离：$\delta^n_m(\Delta) = \max\{d(p, \Delta^{(m)}) : p \in \Delta^{(n)}\}$。特别地，$\delta^n_{n-1}(\Delta)$ 是 Δ 的内切半径（第 2.2 节）。

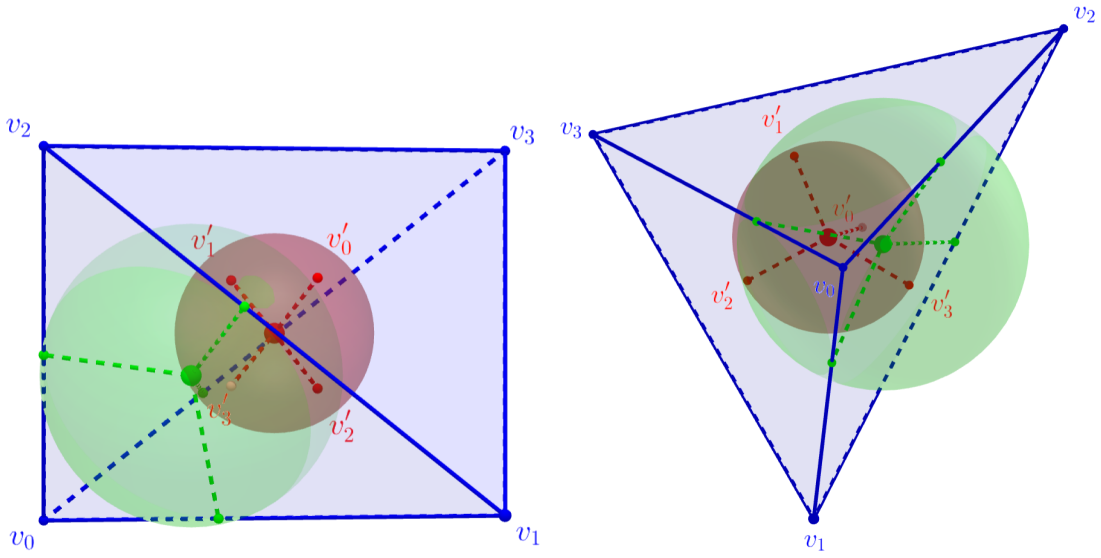


图 1：在内心欧几里得模型中，将 δ^3_2 和 δ^3_1 可视化，其中对象为 $\mathbf{H}^3$的一个理想单形。

第 2.2 节介绍了双曲单形的内心欧几里得模型，建立了理想单形与内接于单位球面且内心位于原点的欧几里得单形之间的对应关系；该对应关系在 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 和 $\mathrm{Isom}(\mathbf{S}^{n-1})$.

如果一个全单形的稳定子群 $\mathbf{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 与其顶点的对称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ 同构，则称该全单形为正则的 。存在一个$\mathbf{H}^n$ 中的全理想单形，它是正则的，并且在 $\mathbf{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 的作用下唯一。

定理 0.1（最大内切半径）。 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中的全单形 Δ 的内切半径为 $\delta^n_{n-1}(\Delta) \leq \tanh^{-1}(1/n)$，当且仅当它是理想且正则的单形时取等号。

证明概要。 我们在内心欧几里得模型中进行研究，并使用重心坐标证明，具有最大内切半径的欧几里得单形存在一个与内心重合的垂心。其正则性随后由 [EHM05b，定理 4.3]。 □

备注 0.2（最大内切半径）。 我们没有发现任何文献质疑或探究最大内切半径的双曲单形特征，尽管内切半径在多篇研究中受到深入研究或被广泛应用 [Jac14，Pey02]。

注记0.3（最大体积）。体积最大的$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 单形恰好是全理想且正则的单形。这一猜想由瑟斯顿提出，完整证明最初由 [HM81] 运用解析方法给出，随后 [Pey02] 运用施泰纳对称化给出。我们想知道，定理2.3以及定理2.6中的方法能否给出一个更简洁的证明。

对于 n， $m \in \mathbb{N}$，在维数为 n 的双曲单形紧空间 $(\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n)^{n+1}$ 上，函数 δ^n_m 是连续的，因此它存在一个最大值 $\mu^n_m = \max_\Delta \delta^n_m(\Delta) \in [0, \infty]$；该最大值必定在由理想全单形构成的某个闭子集上取得。

定理 0.4（到-骨架的最大豪斯多夫距离）。对于整数 $n > m > 0$，双曲空间 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中的一个单纯形Δ 满足 $\delta^n_m(\Delta) = \mu^n_m$ 当且仅当 Δ 是全、理想且正则的。此外， μ^n_1由 $(\tanh \mu^n_1)^2 = \frac{n-1}{2n}$ 给出，因此 μ^n_1随着 $n \to \infty$ 趋于 $\mu^\infty_1 = \tanh^{-1}(1/\sqrt{2}) = \log(1+\sqrt{2})$而增长。

证明概要。 对于全理想单形 Δ，我们考察 $p \in \Delta^{(n-c)}$在余维数递增的最近面上的连续投影 c：应用双曲勾股定理和定理 0.1 中的不等式可知，只有当 Δ为正则单纯形时，等号才成立。 □

注 0.5（关于 μ^n_1的界）。 在 μ^n_1 的有限性于 [Bes88定理3] 的证明中有所提及，并引用了 [Bon86]，但我们的证明完整而简明。

在 [Bes88定理 3]，中，利用 μ^n_1 的有限性来证明群在 $\mathbf{H}^n$ 上的作用在等变 Gromov–Hausdorff 拓扑下收敛的某些结论。我们对 μ^n_1 有界这一事实感到好奇（也很惊讶）， μ^∞_1因为这使我们能够在 [DS26] 中推广这些结论，并证明在 $\mathbf{H}^{n_i}$ 上群作用序列的 Gromov–Hausdorff 收敛；在这种情形下， $n_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 可以是任意可数基数序列。

最后，我们以如下定理收尾： 2.11 关于的最大化点的枚举与定位(Δ)，以及关于偏方面体的定理 2.12。

问题 0.6（δ^n_m的最大化点）。 每个由 m个面构成的$(n+1)$-集 $\{F_{(m)0}, \ldots, F_{(m}{}_{n}\} \in \binom{\Delta}{1+m}{1+n}$，根据 $C_t(F) = \{p \in \Delta^{(n)}$定义了 $\Delta^{(n)}$中凸集的一个递减交： $d(p, F_{(i}{}^{m} \geq t\})$，由此得到一个使到这些面的距离最大的点，也就是说，该点是从 $\Delta^{(n)}$ 到 $\Delta^{(m)}$的豪斯多夫距离的局部最大点；对于某个 F，它将是δ^n_m的全局最大化点。

不同的局部全局极小值点可以有多少个，又可能位于何处？注意，单纯形 $\mathbf{Stab}(\Delta^{(n)}) \subset \mathbf{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 的等距变换群作用于由 m-面组成的 $(1+n)$-集合。然而，对不同（局部或全局）最大化点的描述和枚举，比对该作用下的（所有或某些）轨道进行分类更为微妙，因为由 m-面组成的两个 $(1+n)$-集合可能产生相同的（局部或全局）最大化点，却不属于同一轨道。

1 代数双曲空间的几何

本节首先回顾洛伦兹–闵可夫斯基时空的一些几何性质，随后通过构造三种模型，定义维数为 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 的紧化实代数双曲空间，记作 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$，并利用每种模型讨论其若干性质。

闵可夫斯基双曲面模型适合利用标量积的代数运算来计算$\mathbf{H}^n$ 中的度量量（角度、距离和体积）。凯莱-克莱因射影模型则适合绘图，并推理点、直线和二次曲面之间的关联与正交关系。我们将使用欧几里得球模型，在一个特定点（单纯形的内心）附近进行研究，因为它为该点的切空间提供了一个共形的欧几里得模型。

1.1 洛伦兹-闵可夫斯基时空的几何

固定 $n \in \mathbb{N}$。维数为 $1+n$ 的闵可夫斯基空间是带有惯性指数为 $(1, n)$ 的对称双线性形式的定向 $\mathbb{R}$维向量空间 $\mathbb{R}^{1+n}$，该形式定义为：对 $x, y \in \mathbb{R}^{1+n}$，有 $\langle x, y\rangle = x_0 v_0 - \sum_{i>0} x_i v_i$。序列 $(w_0, \dots, w_l) \in (\mathbb{R}^{1+n})^l$的格拉姆矩阵 定义为 $G(u) = (\langle w_i \mid w_j\rangle)_{i,j}$。这是一个惯性指数为 (s_+, s_0, s_-) 的实对称矩阵，其中 $s_+ \le 1$ 且 $s_- \le n$。$\mathbb{R}^{1+n}$ 的一个标准正交标架 是指其格拉姆矩阵为 $\mathrm{diag}(1, -1, \dots, -1)$ 的基。

对于 $r \in \mathbb{R}$，令 $\mathbf{X}_r = \{x \in \mathbb{R}^{1+n}\colon \langle x,\ x\rangle = r\}$ 表示半径为 r 的伪球面，并用 $\mathbf{Y}_r = \{x \in \mathbf{X}_r\colon x_0 \ge 0\}$ 表示它与上半空间的交集。各向同性锥 $\mathbf{X}_0$渐近于双叶双曲面 $\mathbf{X}_{+1}$ 和单叶双曲面 $\mathbf{X}_{-1}$。在射影空间 $\mathbf{P}\mathbb{R}^{1+n}$中，与球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ 同胚的非退化二次曲面 $\mathbf{PX}_0$ 的内部 $\mathbf{PX}_{+1}$ 与开球 $\mathbf{B}^n$ 同胚，外部 $\mathbf{PX}_{-1}$ 与 $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$同胚。

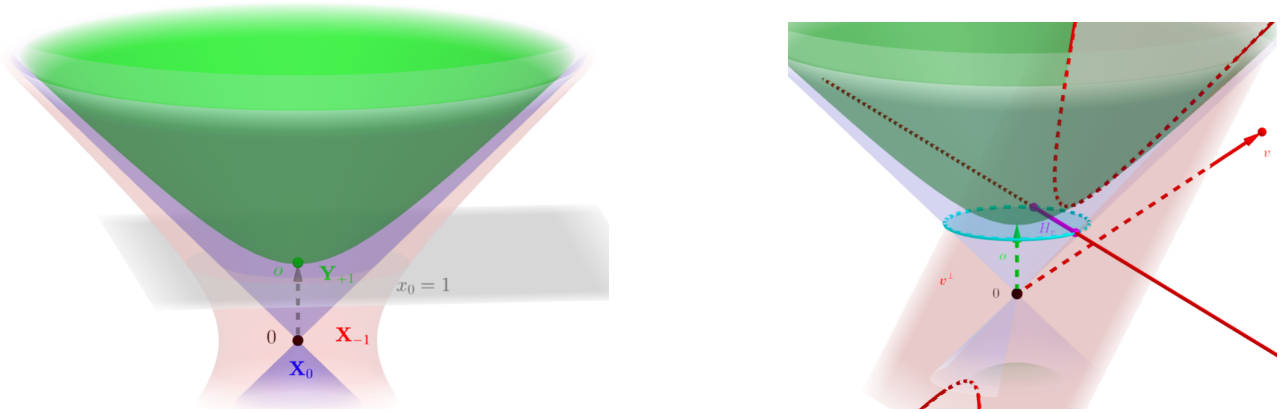


图 2：在闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{1+2}$中：（上半）二次曲面 $\mathbf{Y}_r \subset \mathbf{X}_r$，其中 $r = \{-1, 0, 1\}$。正交关系在射影化后成为相对于二次曲面 $\mathbf{PX}_0$的极性。

群 $\mathrm{O}(1,\ n)$ 在 $\mathbf{X}_{+1}$ 上传递作用，而恒等元连通分支 $\mathrm{O}^+(1,\ n)$ 在 $\mathbf{Y}_{+1}$ 上传递作用。点 $o = (+1,\ 0,\ \dots\dots,\ 0)$ 的稳定子是极大紧连通子群 $\mathrm{O}(n)$。更一般地，$\mathrm{O}(1,\ n)$ 在具有给定格拉姆矩阵的 $\mathbb{R}^{1+n}$ 的基上具有传递作用：将一个基映到另一个基的唯一线性矩阵必定保持二次型。因此，$\mathrm{O}(1,\ n)$ 在具有给定格拉姆矩阵的 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中 $l \in \mathbb{N}$ 个向量组成的序列上具有传递作用。

对于 $u \in \mathbb{R}^{1+n} \setminus \{0\}$，其正交超平面记作 $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{1+n}\colon \langle u \mid x\rangle = 0\}$，它作为闭半空间 $u^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \langle u \mid x\rangle \ge 0\}$ 的边界，自然具有共定向。由于 $\langle|\rangle$ 非退化，正交性 $u \mapsto u^\perp$ 射影化后给出射影空间 $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+n})$ 与其对偶 $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+n})^*$ 之间的同构；由 $u \mapsto u^+$ 诱导的同构则对定向直线的格拉斯曼流形 $\mathbf{P}^+(\mathbb{R}^{1+n})$ 和余定向超平面的格拉斯曼流形 $\mathbf{P}^+(\mathbb{R}^{1+n})^*$ 构成双覆盖。这个关于$\mathbf{PX}_0$ 或 $\mathbf{P}^+\mathbf{X}_0$ 的同构称为极性，可通过点、直线与二次曲面之间的直线和关联关系构造。

在 $(\mathbb{R}^{1+n}, \langle|\rangle)$ 中，基 (v_i) 有唯一的对偶基 $(v_j^\star)$，由 $(\langle v_i^\star \mid v_j\rangle)_{ij} = \mathrm{Id}_{1+n}$ 定义。$p \in \mathbb{R}^{1+n}$ 作为 $p = \sum_0^n \lambda_k v_k$ 的分解，其坐标 $\lambda_k = \langle p \mid v_k^\star\rangle$ 也可表示为：

$$\lambda_k = \frac{\det G(v_0, \dots, v_{k-1}, p, v_{k+1}, \dots, v_n)}{\det G(v_0, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)}$$

事实上，λ_k是定义在 $\mathbb{R}^{1+n}$ 上的唯一线性形式，它在 $\{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_k\}$ 上取值为零，并在 v_k 处取值为 1；对于与 $v_k^\star$ 的标量积以及那个行列式之比，情况也相同。

1.2 闵可夫斯基双曲面模型

style 标签内“闵可夫斯基双曲面模型 ”的$\mathbf{H}^n$ 由$\mathbf{Y}_{+1}$ 赋予一个黎曼度量得到，该度量是将形式 $-\langle|\rangle$ 限制到其切空间上所得的度量。例如，点$o = \mathbf{Y}_{+1} \cap \{x \in \mathbb{R}^{1+n}$处的切空间 $x_0 = 1\}$ 是水平超平面 $\mathbb{R}^n$，其上具有欧几里得度量 $-\langle|\rangle$。

对于 $k \in \{1, \dots, n\}$，$\mathbf{H}^n = \mathbf{Y}_{+1}$ 中维数为 k 的测地子空间，是它与 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中维数为 $1+k$ 的线性空间的（非空）交集（在这些线性空间上，形式 $\langle|\rangle$ 的限制具有惯性指数（k，1））。因此，$\mathbb{R}^{1+n}$中的线性秩、张成和独立性等概念，分别对应于$\mathbf{H}^n$中的测地秩、张成和独立性等概念。

对于 $v_0, \dots, v_m \in \mathbf{Y}_{+1}$，它们的测地凸包可通过将 $\mathbf{Y}_{+1}$ 与其线性凸包 $\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_m)$ 上的正锥相交得到；等价地（由 $\mathbf{Y}_{+1}$ 的凸性），也可将其与包含原点的凸包 $\mathrm{Conv}(0, v_0, \dots, v_m)$ 相交得到。这是一个双曲多胞体，其测地边界由双曲面的部分组成。

洛伦兹球面模型 $\partial\mathbf{H}^n$，即双曲空间的渐近方向球面，可由射影化映射 $\mathbf{Y}_0 \to \mathbf{P}\mathbf{Y}_0$, 的任意截面表示，例如 $\mathbf{Y}_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^{1+n} \colon \ x_0 = +1\}$。（紧化将在下一节 1.3 中介绍。）

我们将 $(\mathbf{H}^n)^\star$ 定义为超平面（余维数为 1 的测地子空间）的集合，将 $(\mathbf{H}^n)^+$定义为闭半空间的集合。对于负范数的 $u \in \mathbf{X}_{<0}$，我们记测地超平面为$H_u = u^\perp \cap \mathbf{Y}_{+1}$，闭半空间为 $H_u^+ = u^+ \cap \mathbf{Y}_{+1}$。限制在 $u \in \mathbf{X}_{-1}$ 上时，映射$u \mapsto H_u$ 和 $u \mapsto H_u^+$分别是 $(\mathbf{H}^n)^\star$ 和 $(\mathbf{H}^n)^+$ 的二对一和一对一参数化。

现在，我们运用闵可夫斯基双曲面模型，利用标量积的代数来表示$\mathbf{H}^n$ 中点与超平面之间的距离和角度。

对于 $x,\ y \in \mathbf{Y}_{+1}$，它们之间的距离可通过沿双曲线线段 $\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{Conv}(x,\ y) \cap \mathbf{Y}_{+1}$ 积分黎曼度量得到，即 $\cosh(d(x,\ y)) = \langle x \mid y\rangle$。

对于不同的 $x, y \in \mathbf{Y}_{+1}$，其差 $u = x - y$ 具有负范数，而超平面$H_u = u^\perp \cap \mathbf{Y}_{+1}$ 由到 x 和 y距离相等的点组成。对于 $x \in \mathbf{Y}_{+1}$ 和 $u \in \mathbf{X}_{-1}$，从 x 到 H_u的距离（见 [Rat19, §3.2]）由 $\sinh d(x, H_u) = |\langle x$给出；而 $\mathrm{sign}(\langle u \mid x\rangle) \in \{-1, 0, +1\}$ 则分别指示 x 位于 $H_u^+ \setminus H_u$、H_u 还是 $\mathbf{H}^n \setminus H_u^+$中。对于不成比例的 $u, v \in \mathbf{X}_{-1}$，超平面 H_u 和 H_v 在 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$中的相对位置（见 [Rat19, §3.2]）由 $\mathrm{sign}(1 - \langle u, v\rangle^2) \in \{+1, 0, -1\}$ 决定，具体如下：

$|\langle u, v\rangle| < 1$: H_u 与 H_v 在$\mathbf{H}^n$ 中相交，其二面角由$\cos \angle(u^\perp, v^\perp) = \langle u, v\rangle$给出；$|\langle u, v\rangle| = 1$: H_u 与 H_v 不相交，但在 $\partial\mathbf{H}^n$中恰有一个公共渐近方向；$|\langle u, v\rangle| > 1$: H_u 与 H_v 在$\mathbf{H}^n$ 中被一段正距离分隔，该距离等于同时正交于 H_u与 H_v的唯一测地弧的长度，由$\cosh d(H_u, H_v) = |\langle u \mid v\rangle|$ 给出。

在每种情形中，$\mathrm{sign}(\langle u \mid v\rangle) \in \{-1, +1\}$ 决定半空间H_u^+与 H_u^-的相对位置。差 $w = (u - \mathrm{sign}(\langle u \mid v\rangle)v)$ 具有负范数，且 $H_w = w^\perp \cap \mathbf{Y}_{+1}$ 是到 H_w 与 H_v的等距点的测地超平面；更精确地说，我们分别有：

$|\langle u,\ v\rangle| > 1$: H_{u-v} 和 H_{u+v} 是 H_u 与 H_v 在其交集处的两个平分超平面$|\langle u,\ v\rangle| = 1$: H_{u-v} 到 H_u 和 H_v 的距离相等（因此它具有与它们共同的渐近方向）$|\langle u,\ v\rangle| < 1$: H_{u-v} 垂直于 H_u 与 H_v 的正交测地线，且交于其中点

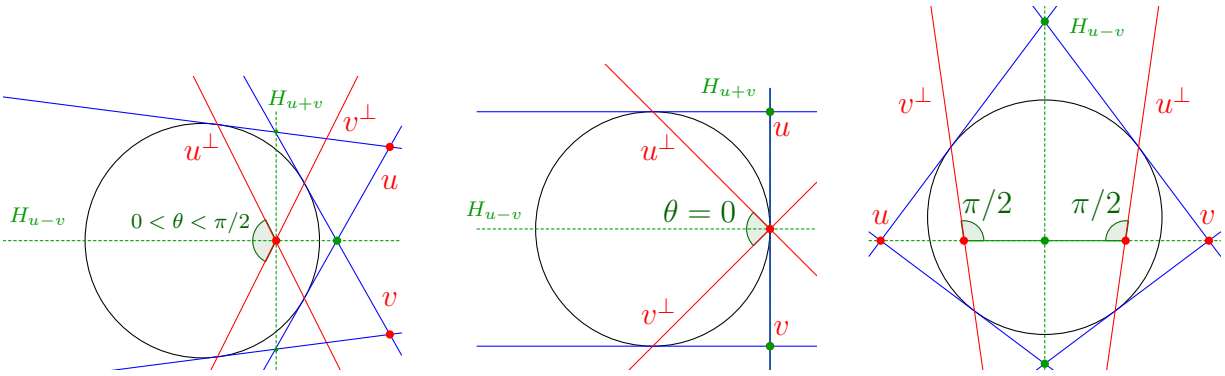


图 3：$\mathbf{H}^2$ 中的超平面构型及其角平分线（见图 4 ）.

在这个模型中，群 $\mathrm{Isom}(\mathbf{Y}^{+1})$ 由 $\mathrm{O}(1,\ n)$ 中保持第一坐标符号的两个连通分支构成：它在$\mathbf{Y}^{+1}$的正交标架丛上具有传递性，因此，点处标准正交标架的任何度量性质都对所有此类标架成立。

1.3 凯莱-克莱因射影模型

$\mathbf{H}^n$ 的凯莱-克莱因射影模型是锥 $\mathbf{P}\mathbf{X}_{>0}$内部直线的子集。边界 $\partial\mathbf{H}^n$ 是各向同性锥 $\mathbf{P}\mathbf{X}_0$的射影化。它们的并集 $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{\geq 0})$ 定义了紧化双曲空间 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$上的拓扑。测地线超平面空间 $(\partial\mathbf{H}^n)^\star$通过相对于二次曲面的极性对应于二次曲面 $\mathbf{P}\mathbf{X}_{-1}$外部的点。因此，$\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+n}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}^{+1}) \sqcup \mathbf{P}(\mathbf{X}_{-1}) \sqcup \mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$中的每个点都有几何解释，这定义了扩展双曲平面 $(\mathbf{H}^n) \sqcup (\partial\mathbf{H}^n) \sqcup (\mathbf{H}^n)^\star$上的拓扑（及几何）。

射影化 $\mathbf{X}_{>0} \to \mathbf{P}\mathbf{X}^{+1}$ 在限制于 $\mathbf{Y}^{+1}$时是一个同胚，因此要求它为等距变换，便可定义 $[x], [y] \in \mathbf{P}\mathbf{X}^{+1}$ 之间的距离为双曲角：$\cosh\, d([x],[y]) = \langle x, y\rangle / \sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}$。我们也可以用纯射影的方式，通过一组互异点的共线四元组 (x', x, y, y') 的交比来表示这一距离；在任何包含这些点的仿射图中，该交比为 $[x', x, y, y'] = \frac{(x'-y)}{(x-y')}\frac{(x'-x)}{(y-y')}$。对于互异点 $x, y \in \mathbf{P}\mathbf{X}^{+1}$，直线 (xy) 与二次曲面 $\mathbf{P}\mathbf{X}_0$ 相交于另外两点 $\{x', y'\}$，使得 (x', x, y, y') 按此顺序位于直线 (xy) 上，并且有 $\exp 2d(x, y) = |[x', x, y, y']|$。

在此模型中，等距变换群 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 与 $\mathbf{PO}(1, n)$ 等同。

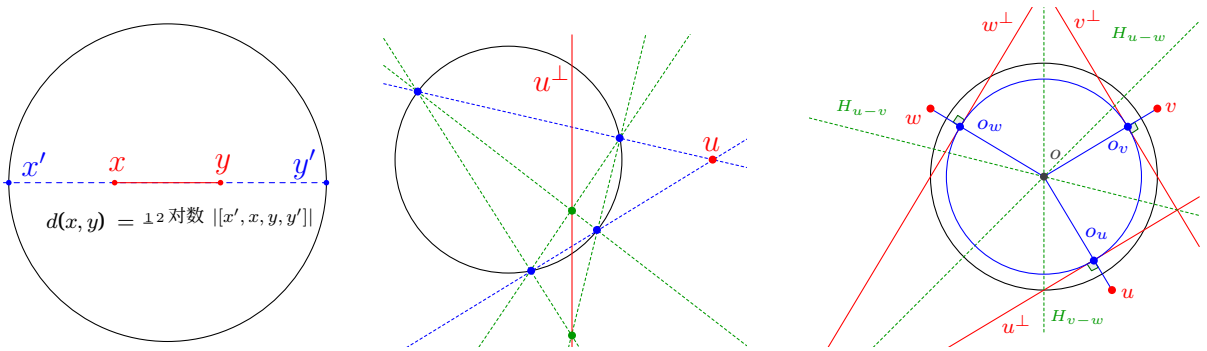


图 4：由交比得到的距离。由关联得到的极线。正交投影与角平分线。

扩展$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n \sqcup (\mathbf{H}^n)^\star$ 的凯莱-克莱因射影模型尤其适用于通过直线作图来绘制和推理关联关系与正交关系（这些关系涉及点、直线和二次曲面；参见图3和4）。此外，还可以通过几何方式比较距离（但其解析与代数运算不那么方便）。

事实上，对于 $k \in \{1,\dots,n\}$，$\mathbf{H}^n = \mathbf{PX}_{+1}$ 中维数为 k 的测地子空间，是与$\mathbf{P}\mathbb{R}^{1+n}$中维数为 k 的射影线性空间的交集。因此，$\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+n})$中的射影线性秩、张成和独立性等概念，限制到$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$后，分别对应于测地秩、张成和独立性等概念。

对于 $x \in \mathbf{P}(\mathbf{X}_{+1})$ 和 $u \in \mathbf{P}(\mathbf{X}_{-1})$，点 $x \in \mathbf{H}^n$ 在超平面 $H_u \subset \mathbf{H}^n$ 上的正交投影，是直线 (xu) 与超平面 $u^\perp$ 的交点。对于 $u \in \mathbf{P}^+(\mathbf{X}_{-1})$，可以将边界 $\partial H_u = u^\perp \cap \mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$ 视为二次曲面 $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$ 与以 u 为基点的线束中的直线（或超平面）的切点集合。半空间 $H_u^+ \subset \mathbf{H}^n$ 超平面通过对偶对应于二次曲面 $u \in \mathbf{P}^+(\mathbf{X}_{-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_{-1}) \times \{-1,+1\}$ 外部的带符号点（与 $\mathbf{X}_{-1}$ 一一对应）。

1.4 欧几里得球模型

通过赋予 $\mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+n})$ 的仿射图（由单位高度处的水平仿射超平面 $o + \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{1+n} : x_0 = +1\}$ 给出）一个以 o 为原点、标量积为 $(x,y) \mapsto -\langle x - o \mid y - o\rangle$ 的欧几里得平面结构，即可得到 欧几里得球模型 。这给出了二次曲面配对 $(\mathbf{PX}_0, \mathbf{PX}_{+1})$ 与 $(\mathbf{S}^{n-1}, \mathbf{B}^n)$ 之间的一个同胚；该同胚在 $\mathbf{O}(n)$ 的作用下等变。这里，$\mathbf{O}(n)$ 被视为 o 在 $\mathbf{O}(n) \subset \mathbf{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 中的稳定子，同时也被视为 $\mathbf{Isom}(\mathbf{B}^n)$。

闭球 $u \in (o + \mathbb{R}^n) \setminus (\mathbf{B}^n \sqcup \mathbf{S}^{n-1})$ 外部的点对应于H_u 不经过 o 的超平面。此模型继承了凯莱-克莱因射影模型中所有不涉及经过 o 的超平面的直线构造。

对于 $k \in \{1,\dots,n\}$，$\mathbf{H}^n = \mathbf{B}^n$ 中维数为 k 的测地子空间，是与 $o + \mathbb{R}^n$ 中维数为 k 的线性空间的交集。因此， $\mathbb{R}^n$ 中的射影线性秩、张成和独立性等概念，分别对应于$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中的测地秩、张成和独立性等概念。

由于 $\mathbf{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 在 $\mathbf{H}^n$ 的正交标架丛上自由且传递地作用，关于正交标架的任何度量性质都对所有此类标架成立。欧几里得球模型非常适合在 o 处的正交标架中进行研究。

在此模型中，中心 o 处的$\mathbf{H}^n = \mathbf{B}^n$ 的切空间及其诱导内积，与 $\mathbb{R}^n = \{x_0 = 0\}$ 的切空间及其欧几里得内积等距。因此，以中心 o为中心，双曲角与欧几里得角保角对应，半径为 $r \in [0,\infty]$ 的双曲球面$\mathbf{S}_o(r)$与半径为 $\tanh(r) \in [0,1]$的欧几里得球面重合。

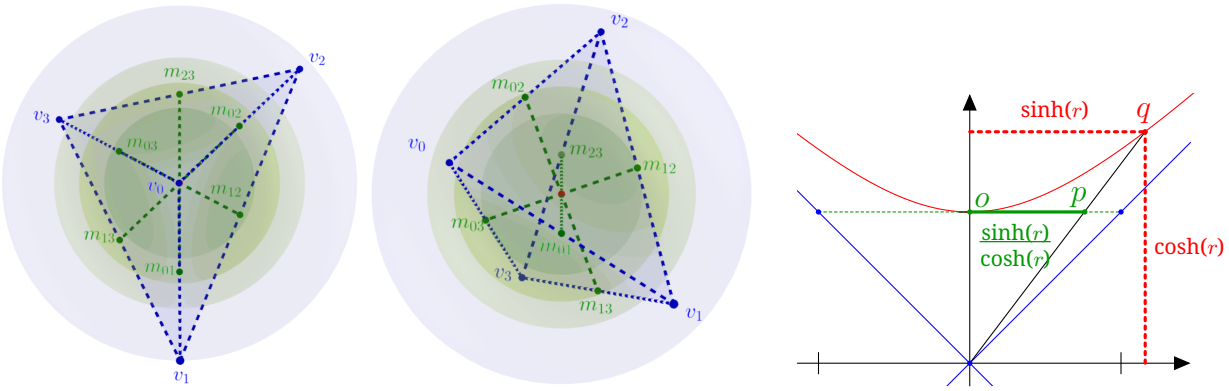


图 5：在欧几里得球模型中，以中心 o 为中心，双曲角与欧几里得角保角对应，双曲球面$\mathbf{S}_o(r)$是半径为 $\tanh(r)$的欧几里得球面。

在任意 $x \in \mathbf{H}^n$ 中，从其单位切球出发的测地线映射给出一个与边界 $\mathbf{S}_x^{n-1} \to \partial\mathbf{H}^n$ 的同胚，并且是 $\mathbf{Isom}(\mathbf{H}^n)$-等变的：一个等距变换 $f\colon \mathbf{H}^n \to \mathbf{H}^n$ 可延拓为边界上的射影映射 $\partial f\colon \partial\mathbf{H}^n \to \partial\mathbf{H}^n$，其微分 $df_x\colon T_x\mathbf{H}^n \to T_{f(x)}\mathbf{H}^n$ 限制为共形映射 $df_x\colon \mathbf{S}_o^n \to \mathbf{S}_{f(x)}^n$：这些映射构成一个交换图。

2 双曲单形

2.1 单形的定义及相关几何构造

双曲单形及其骨架

一个位于 n 维双曲空间中的单纯形 Δ 是紧空间 $(\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n)^{n+1}$ 的一个元素，也就是说，它是由 $n+1$ 个点 $v_0, \dots, v_n$ 构成的序列，这些点位于$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中，称为该单纯形的顶点。当所有顶点都位于边界上时，该单纯形称为理想单纯形，即它属于紧空间 $(\partial\mathbf{H}^n)^{n+1}$。

对于 $m \in \{0, \dots, n\}$， Δ 的一个-面 是其顶点中 $1+m$ 的凸包。其 m-骨架$\Delta^{(m)}$ 是其所有 m-面的并集。从 $\Delta^{(n)}$ 到 m-骨架 $\Delta^{(m)}$ 的豪斯多夫距离为

$$\delta_m^n(\Delta) = \max\{d(p, \Delta^{(m)}) \colon p \in \Delta^{(n)}\}.$$

函数 δ_m^n：$(\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n)^{n+1} \to [0, \infty]$ 是连续的，因此它存在一个最大值 $\mu_m^n = \max_\Delta \delta_m^n(\Delta)$，且这个最大值必定在某个闭子集上取得。我们关注的是，对于固定的 $n > m > 0$，刻画使 μ_m^n 达到最大值的单形，并证明这个最大值一致有界。

由于 δ_m^n 在 n-骨架的包含关系下递增，且每个单形的 n-骨架都包含于某个理想单形的骨架中，因此 δ_m^n 的极大值点集包含在理想单形构成的子集中。（不过，我们目前还不将讨论范围限定于理想单形。）

当一个单纯形的顶点线性无关时，称其为全 单纯形；也就是说，其 n-骨架 $\Delta^{(n)}$具有非空内部（或等价地，具有正的 n-体积）。 δ_m^n 的极大轨迹必须包含在全单纯形集合中，因此从现在起我们假设 Δ 是全单纯形。

闵可夫斯基模型与齐次坐标

对于 $k \in \{0, \dots, n\}$，第 k 个超面 $\partial_k\Delta^{(n)} = \mathrm{Conv}(\{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_k\})$ 作为 $\Delta^{(n)}$ 的边界是共定向的。在射影模型 $\mathbf{P}\mathbb{R}^{1+n}$ 中，它张成共定向超平面 $\mathrm{Span}(\partial_k\Delta^{(n)})$；该超平面通过相对于二次曲面 $\mathbf{PX}_0$ 的极性与带符号点$v_k^\star \in \mathbf{P}^+\mathbf{X}_{-1}$对偶。特别地， $\Delta^{(n)}$ 是半空间 $H^+_{v_k^\star}$ 的交集。

在闵可夫斯基模型（$\mathbb{R}^{1+n}$， $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$）中，对偶顶点 $v_k^\star \in \mathbf{X}_{-1}$ 有唯一的提升，因此满足 $\langle v_k \mid v_k^\star\rangle = 1$ 的顶点 $v_k \in \mathbf{Y}_{\geq 0}$ 也有唯一的提升，使得基底（v_i）和（$v_j^\star$）互为对偶。这定义了单纯形 Δ 及其在 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中的对偶 $\Delta^\star$ 的闵可夫斯基模型 。

这对对偶基 Δ， $\Delta^\star$ 在 $\mathbb{R}^{1+n}$ 上给出了一个坐标系，其中 $p = \sum_0^n \lambda_k v_k$ 的坐标也可由以下表达式给出： $\lambda_k = \langle p \mid v_k^\star\rangle$

$$\lambda_k = \frac{\det G(v_0, \dots, v_{k-1}, p, v_{k+1}, \dots, v_n)}{\det G(v_0, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)}.$$

由此得到 $p \in \mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n = \mathbf{PY}_{\geq 0}$ 的齐次坐标系。

正交投影

对于 $p \in \mathbf{H}^n$，其在超平面 $H_{v_k^\star}$ 上的正交投影可在射影模型中构造为交集 $p_k = [pv_k^\star) \cap \mathrm{Span}(\partial_k\Delta^{(n)})$，因此若 $p = \sum \lambda_i v_i$，则 $p_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i$。距离由 $\sinh d(p, p_k) = |\langle p, v_k^\star\rangle|$ 给出。

请注意，对于某些单形，存在一些点 $p \in \Delta^{(n)}$ ，它们在超平面上的正交投影张成$(\partial_k\Delta^{(n)})$ 位于超面 $\partial_k\Delta^{(n)}$之外，并且只要 $n \geq 3$ （见图6），就可以构造出全且理想的此类单形。然而，对于任意 $p \in \Delta^{(n)}$，如果超平面张成$(\partial_k\Delta^{(n)})$ 比其他任何超平面都更近，即 $\langle p \mid v_k^\star\rangle =$ 最小值$_i\{\langle p \mid v_i^\star\rangle\}$，那么它的正交投影 p_k 属于超面 $\partial_k\Delta^{(n)}$。

例如， h_k v_k 在 $\partial_k\Delta^{(n)}$ 上的正交投影具有齐次坐标$h_k = \lambda_k v_k + \lambda_k^\star v_k^\star$，满足 $0 = \langle v_k^\star \mid h_k\rangle = \lambda_k - \lambda_k^\star$，因此 $h_k = v_k + v_k^\star$。

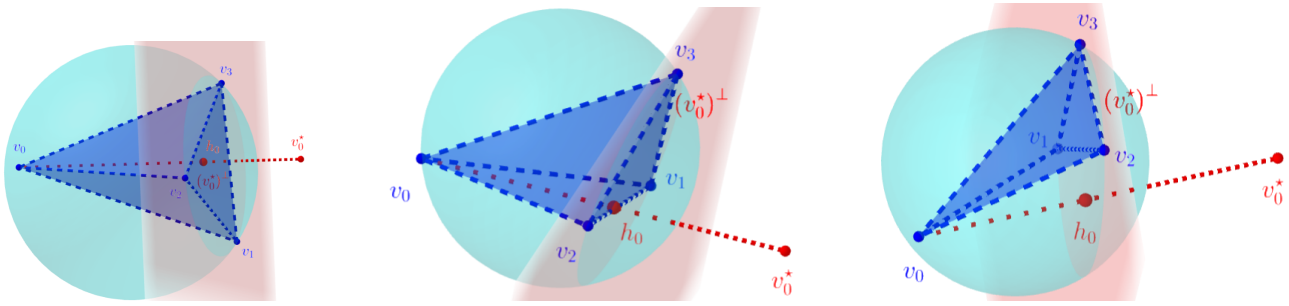


图6： $v_i \in \Delta^{(n)}$ 在超平面 Span$(\partial_j\Delta^{(n)})$ 上的正交投影位于超面 $\partial_j\Delta^{(n)}$ 之外，条件是 $\theta^\star_{ij} > \pi/2$。这些正交线可能不相交。

Gram矩阵与对偶Gram矩阵

Δ 的对偶格拉姆矩阵为 $G(\Delta^\star) = (\langle v_i^\star \mid v_j^\star\rangle)_{0\le i,\ j\le n}$。由于任意两个超面 $\partial_i\Delta^{(n)}$，$\partial_j\Delta^{(n)}$在$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$中都共享一些公共顶点，因此有 $|\langle v_i^\star,\ v_j^\star\rangle| \le 1$，所以对偶格拉姆矩阵$G^\star(\Delta)$由它们的二面角的余弦 $\cos(\theta^\star_{ij})$ 组成，这些二面角记为 $\theta^\star_{ij} = \angle(\partial_i\Delta^{(n)},\ \partial_j\Delta^{(n)})$。$\Delta$ 的格拉姆矩阵为 $G(\Delta) = (\langle v_i \mid v_j\rangle)_{0\le i,\ j\le n}$。回顾一下，顶点 $v_i \in \mathbf{Y}_{>0}$ 的范数由对偶条件 $\langle v_i \mid v_i^\star\rangle = 1$定义。

引理2.1 (逆Gram矩阵)。 *Gram*矩阵是对偶格拉姆矩阵的逆矩阵，其系数表示基 Δ 关于对偶基 $\Delta^\star$ 的展开，公式如下：

$$G(\Delta) = G(\Delta^\star)^{-1} \qquad \langle v_i \mid v_j\rangle = \frac{(-1)^{i+j}\det G(\Delta^\star)_{\ne i,\ne j}}{\det G(\Delta^\star)} \qquad v_i = \sum_j \langle v_i \mid v_j\rangle \cdot v_j^\star \tag{1}$$

证明。 将基 Δ 表示为对偶基 $\Delta^\star$ 的线性组合：由 $v_i = \sum_j c_{ij} v_j^\star$ 定义的系数 $c_{ij} \in \mathbb{R}$ 满足 $\langle v_i \mid v_k^\star\rangle = \sum_j c_{ij}\langle v_j^\star \mid v_k^\star\rangle$，即 $\mathrm{Id} = (c_{ij}) \times G(\Delta^\star)$，因此就是上述余子式与行列式之比。此外 $\langle v_i \mid v_k\rangle = \sum_j c_{ij}\langle v_j^\star \mid v_k\rangle = c_{ik}$。 □

顺便提一下，根据 [Rat19，定理 7.2.4], 可以刻画$\mathbf{H}^n$中全单形的负对偶Gram矩阵：它们都是实对称 $(1+n) \times (1+n)$ 矩阵 $-G^\star$，其对角线 $+1$元素使行列式 $\det(-G^\star)$ 为负 < 0，其逆矩阵 $(-G^\star)^{-1}$的元素均为负，且其对角线 $n \times n$ 子式 $(-G^\star)_{\ne k,\ \ne k}$ 正定。

正则单纯形

当$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中的全单形 Δ 的稳定子在 Isom$(\mathbf{H}^n)$ 中对其旗标传递作用时，该全单形称为正则的，因此它与其顶点 $\{v_0, \dots, v_n\}$的对称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$同构。

正则单形 Δ 必须具有对偶格拉姆矩阵 $G(\Delta^\star)$，其对角线为 -1，且非对角线元素恒为 $c \in [-1, 1]$。我们将由定理2.3 推导出它存在 $\iff c \in (1/n,\ 1/(n-1)]$。在这种情况下，它在$\mathrm{O}(1,n)$作用下唯一，因为该作用在 $\mathbb{R}^{1+n}$中对具有给定格拉姆矩阵的序列是传递的。下面计算它的格拉姆矩阵 $G(\Delta)$。

记 J_{1+n} 为元素全为 1 的矩阵，则可写作 $G(\Delta^\star) = c\mathrm{J}_{1+n} - (1+c)\,\mathrm{Id}_{1+n}$。算子 J_{1+n}（其特征值为 $(1+n)$，重数为 1；以及 0，重数为 n）与 Id_{1+n}（其特征值为 1，重数为 $1+n$）可交换。因此，$G(\Delta^\star)$ 的特征值为$c(1+n) - (1+c)1 = cn - 1$，重数为 1；以及 $c0 - (1+c)1$，重数为 n，所以 $\det(-G(\Delta^\star)) = (1-cn)(1+c)^n$。特别地，$G(\Delta)^\star$ 可逆 $\iff c \notin \{-1, 1/n\}$，这也是我们接下来所作的假设，并注意到 $\det(-G(\Delta^\star)) < 0 \iff c > 1/n$。

由于 J_{1+n} 生成了一个维数为 2 的交换代数，其逆元也属于这个代数，因此我们可以寻找 $G(\Delta) = y\mathrm{J}_{1+n} - x\mathrm{Id}_{1+n}$，使得 $G(\Delta)G(\Delta^\star) = \mathrm{Id}_{1+n}$，从而求出$x = 1/(1+c)$和 $y = xc/(cn-1)$。为后续讨论，我们注意到 $\sum_{ij} G(\Delta)_{ij} = (n+1)/(cn-1)$。

特别地，Δ 是理想的 $\iff G(\Delta)$具有对角 $0 \iff y = x \iff c = 1/(n-1)$，此时 $g(\Delta)$具有非对角 $y = (n-1)/n$；因此$\sum_{ij}(\Delta)_{ij} = n^2 - 1$。

2.2 欧几里得内心模型

对于全单形 $\Delta \in (\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n)^{1+n}$，其内切球的刻画是经典结果，可由 [Rat19，§6 推导得出。5], 不过，为求完整，我们仍给出证明。此外，我们还简单推导了关于其内切半径的公式（2），恢复了 [Jac14] 的结果（其中将其推广到扩展射影空间$\mathbf{P}\mathbb{R}^{1+n}$中的单形）。最后，也是最重要的一点，我们定义其内切对偶单形，并用对偶格拉姆矩阵和内切半径描述其格拉姆矩阵，从而发现一个看似全新的内切半径余弦定律公式（ICL）。

命题 2.2（内切对偶单形）。考虑一个 Δ 由 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$构成的全单形 .

其内心 o 是唯一一个 $p \in \Delta^{(n)}$ 到所有超平面 张成$\partial_k\Delta^{(n)}$距离相等的点，也是唯一一个 $p \in \Delta^{(n)}$ 使到（$n-1$）骨架 $\Delta^{(n-1)}$的距离最大的点。该距离 δ^n_{n-1}（Δ）称为内切半径，它可用 G（Δ）和 G（$\Delta^\star$）表示为：

$$(\sinh \delta^n_{n-1})^{-2} = \sum_{0\le i,j\le n} G(\Delta)_{ij} = \frac{1}{\det G(\Delta^\star)} \sum_{0\le i,j\le n} (-1)^{i+j} \det G(\Delta^\star)_{\neq i,\neq j}. \tag{2}$$

Δ 的内切球 $\mathbf{S}_o$（δ^n_{n-1}）是内切于 $\Delta^{(n)}$且半径最大的唯一球面：它与每个超面 $\partial_k\Delta^{(n)}$ 相切于内心 o的正交投影 v'_k，该投影由交集 $v'_k = [ov^\star_k) \cap \partial_k\Delta^{(n)}$得到。

我们将 Δ 的内切对偶单形定义为 $\Delta' = (v'_0, \dots, v'_n) \subset (H^n)^{1+n}$。其格拉姆矩阵$G(\Delta') = (\cosh d(v'_i, v'_j))$可用对偶格拉姆矩阵 $G(\Delta^\star) = (\cos\ \theta^\star_{ij})$表示如下（图 8）：

$$\langle v'_i \mid v'_j\rangle = 1 + (\tanh \delta^n_{n-1})^2(1 + \langle v^\star_i \mid v^\star_j\rangle) \tag{$G'G^\star$}$$

这尤其意味着，Δ' 的$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$等价类决定了 Δ的$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$等价类。

我们定义以内心为中心的视觉对偶单形，它位于内心的单位切球上 o，由指向 $e'_k \in \mathbf{S}_o(\mathbf{H}^n)$ 的单位向量组成 v'_k。其欧几里得内切视觉格拉姆矩阵$G(e'_k)$ 由这些向量的角余弦组成 $\langle e'_i \mid e'_j\rangle_o = \cos(\theta'_{ij})$。我们得到内切半径余弦定律 （图 8）：

$$(\cosh \delta^n_{n-1})^2 = \frac{1 + \langle v^\star_i \mid v^\star_j\rangle}{1 - \langle e'_i \mid e'_j\rangle_o} = \frac{1 + \cos(\theta_{ij})}{1 - \cos(\theta'_{ij})} \tag{ICL}$$

这特别意味着 *rticular*，e'_k的$\mathrm{O}(n)$类在 δ^n_{n-1} 的作用下决定了 Δ的$\mathrm{O}(1,\ n)$类 .

证明。我们将在（$\mathbb{R}^{1+n}$，$\langle\cdot \mid \cdot\rangle$）中的 Δ，$\Delta^\star$的闵可夫斯基模型，以及$\mathbb{R}^{1+n}$上的相关齐次坐标$\mathbf{P}$中进行研究。

在由 $|\langle p,\ v^\star_k\rangle| = \langle p,\ v^\star_k\rangle$定义的 $p \in \Delta^{(n)}$ 凸集上，p，$\partial_k\Delta^{(n)}$之间 $1+n$ 距离d相等，等价于 $1+n$ 标量积 $\langle p,\ v^\star_k\rangle$相等。这给出一个由 n 个线性无关线性方程组成的系统，因此其解构成单一直线 $[o] \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^{1+n})$。从几何上看，这条直线是所有$\mathbf{P}$（$\mathbb{R}^{1+n}$）的超平面 $H_{v_i - v_j}$ 对 H_{v_k}超平面进行平分的交集，而只需考虑 n 个超平面 $H_{v_k - v_{k+1}}$的交集即可。

在 Δ-齐次坐标下，并利用对偶性 $(\langle v^\star_i \mid v_j\rangle)_{ij} = \mathrm{Id}_{1+n}$，我们发现该直线经过 $\sum v_k =: so \in \mathbf{Y}_s$，其中唯一的 $o \in \mathbf{Y}_{+1}$ 以及 $s \in \mathbb{R}_{>0}$。根据定义，该点 o 位于一个球面的中心，该球面与每个超平面 $\mathrm{Span}\,\partial_k\Delta^{(n)}$ 相切于其正交投影 $v'_k \in \partial_k\Delta^{(n)}$处。因此，这是内接于 $\Delta^{(n)}$的唯一最大半径球面，所以其中心 o是使到 $\Delta^{(n-1)}$的距离达到最大值的唯一点，其半径 $d(o,\ v'_k)$ 确实是从 $\Delta^{(n)}$ 到 $\Delta^{(n-1)}$的豪斯多夫距离 δ^n_{n-1}。这证明了内心 o、内切半径 $\delta^n_{n-1}(\Delta)$ 和内切球的刻画。

距离 δ^n_{n-1} 从$o = \frac{1}{s}\sum_0^n v_k \in \mathbf{Y}_{+1}$到超平面张成 $\partial_0\Delta^{(n)} = (v^\star_0)^\perp$ 满足$\sinh(\delta^n_{n-1})$ $= \langle v^\star_0 \mid o\rangle = \frac{1}{s}\langle v^\star_0 \mid \sum_0^n v_k\rangle = 1/s$。此外，我们有$s^2 = \langle so \mid so\rangle = \sum_{i,\ j}\langle v_i \mid v_j\rangle$ 并将 $\langle v_i \mid v_j\rangle$ 利用（1）改写后，得到（2）中的第二个等式。

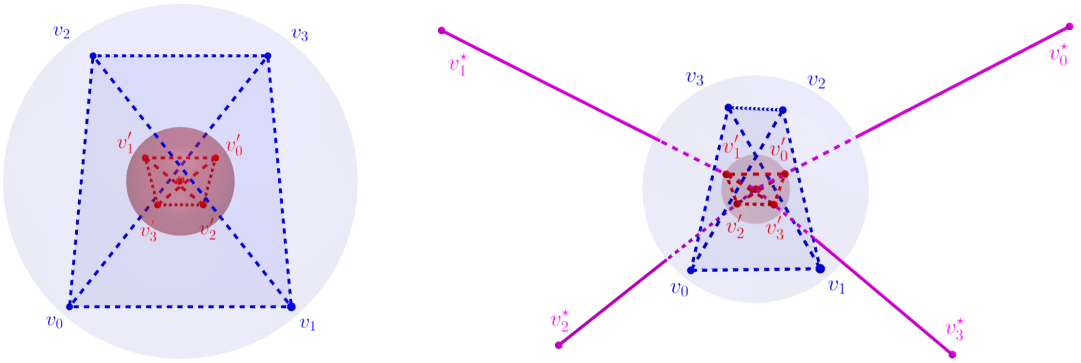


图 7： Δ、Δ'、$\Delta^\star$的内心欧几里得模型。

由于 o、v'_k、$v^\star_k \in \mathbb{R}^{1+n}$ 互不相同且在射影意义下共线，它们满足形如 $v'_k = \lambda_k o + \mu_k v^\star_k$ 的线性关系。展开 $1 = \langle v'_k \mid v'_k \rangle$ 得到 $\lambda_k = (\cosh \delta^n_{n-1})^{-1}$，展开 $0 = \langle v^\star_k \mid v'_k \rangle$ 则得到 $\mu_k = (\tanh \delta^n_{n-1})$。因此，对于所有 k，都有 $v'_k = (\cosh \delta^n_{n-1})^{-1} o + (\tanh \delta^n_{n-1}) v^\star_k$。于是，我们可以用内切半径和 $\langle v'_i \mid v'_j \rangle$ 来展开 $\langle v'_i \mid v'_j \rangle$，从而得到（$G'G^\star$）。

最后，对三角形$(v'_i$、o、$v'_j)$应用双曲余弦定理，得到 $\langle v'_i \mid v'_j \rangle = \cosh d(v'_i, v'_j) = (\cosh \delta^n_{n-1})^2 - (\sinh \delta^n_{n-1})^2 (\cos \theta'_{ij})$，结合式（$G'G^\star$）可得（ICL）。 □

推论 2.3（内心欧几里得模型）。考虑一个由$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$构成的全单形 Δ。

我们可以通过$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 作用，将其内心 o 置于射影模型的欧几里得图 $\mathbb{R}^n$ 的原点，从而定义 Δ 和 Δ'的内心欧几里得模型。 $\Delta^{(n)}$在$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$中的稳定子固定 o，因此等于其内心欧几里得模型在$\mathrm{Isom}(\mathbf{S}^{n-1})$中的稳定子。

Δ' 的内心欧几里得模型由球面$\mathbf{S}_o(\tau)$ 所外接，其欧几里得半径为 $\tau = \tanh \delta^n_{n-1}(\Delta)$，格拉姆矩阵为 $\tau^2 \cdot G(e'_k) = \tau^2 \cdot (\cos \theta'_{ij})$。

特别地，若 Δ 是理想的，则其内心欧几里得模型是内接于单位球面的欧几里得单纯形，内心位于原点，内切半径为$\tanh \delta^n_{n-1}(\Delta)$，对偶格拉姆矩阵为$G(e'_k) = (\cos \theta'_{ij})$。

这建立了 $\partial\mathbf{H}^n$ 中全理想单形的$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$等价类与内心位于原点且内接于$\mathbf{S}^{n-1}$ 的欧几里得单纯形的$\mathrm{Isom}(\mathbf{S}^{n-1})$等价类之间的对应关系。

证明。 将内心 o 置于射影模型$\mathbf{P}\mathbb{R}^{1+n}$ 的欧几里得图 $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{1+n} \mid x_0 = 1\}$ 的原点，可得到 $o \in \mathbf{H}^n$ 处的切空间与该欧几里得图 $\mathbb{R}^n$之间的等距变换。特别地， o 处指向 v'_k 和 $v^\star_k$ 的切向量 e'_k 具有欧几里得角度 θ'_{ij}。此外，以 o 为中心的双曲球面也是以 o为中心的欧几里得球面；并且我们知道，将到 o 的双曲距离映射为到 o 的欧几里得距离的函数是 $r \mapsto \tanh(r)$。因此，点 v'_k被刻画为 $\Delta^{(n)}$ 中最大内接球与超平面$\mathrm{Span}\, \partial_k \Delta^{(n)}$的切点，同时也是 $o \in \Delta^{(n)}$ 在双曲度量和欧几里得度量下向$\mathrm{Span}\, \partial_k \Delta^{(n)}$ 作正交投影所得的点。命题中的一系列结论由这些观察可得。 □

注记 2.4（从闵可夫斯基模型到欧几里得模型）。 Δ、$\Delta^\star$、Δ' 在 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得模型，是将 Δ、$\Delta^\star$、Δ' 在 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中的闵可夫斯基模型按高度（第一坐标）缩放得到的。

注记 2.5（正则单纯形）。 定理 2.3表明，全双曲单形是正则的，当且仅当其内心欧几里得模型是正则的（由此得到了 [Rat19，定理 6.5.19]），此时它在 $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 的作用下唯一。特别地，根据第 2.1 节的格拉姆矩阵分析，$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中唯一的全理想正则单形，其二面角的余弦为 $\cos(\theta) = 1/(n-1)$，且内切半径满足 $(\sinh \delta^n_{n-1})^{-2} = n^2 - 1$，等价地，满足 $\tanh(\delta^n_{n-1}) = 1/n$。由第 2.1 节的格拉姆矩阵分析可知，全正则单形由 $\cos(\theta) \in (1/n, 1/(n-1)]$ 或 $\tanh \delta^n_{n-1} = \sqrt{\frac{cn-1}{n\ c+1}}() \in (0, 1/n]$ 参数化。

2.3 与 m-骨架的豪斯多夫距离最大的单形

定理 2.6（最大内切半径的双曲单形是正则的）。 一个全单形 Δ *of*$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 的内切半径为 $\leq \tanh^{-1}(1/n)$，当且仅当它是理想且正则的时，等号成立。

注 2.7（两种坐标系）。 在 Δ 中的闵可夫斯基模型 $\mathbf{Y}_{\geq 0}$ 定义了射影空间$\mathbf{P}\mathbb{R}^{1+n}$的齐次坐标系，该坐标系曾用于定理 2.2的证明。 在 Δ 中的欧几里得代表 $\mathbf{B}^n$ 为欧几里得图 $\mathbb{R}^n$定义了重心坐标系，该坐标系将用于定理 2.6的证明。这两种坐标系通过高度相关联，但我们不明确写出这种关系。

证明。 由于 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 的每个全单形都包含于某个理想单形中，因此只需考虑 Δ这类 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中的理想全单形。我们可以使用内心欧几里得模型：根据命题 2.3，它们的正则性等价，并且以它们的公共内心 o 为球心的球面重合，而它们的半径由递增函数 $r \mapsto \tanh r$联系。因此，我们必须证明，内接于单位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$、内心 o 位于原点的欧几里得单纯形 $\Delta = (v_0, \ldots, v_n)$ 的内切半径至多为 $1/n$，且等号成立当且仅当它是正则单纯形。

在由 $\Delta = (v_k) \subset \mathbf{S}^{n-1}_o$定义的 $\mathbb{R}^n$ 重心坐标系中，原点是由顶点构成的一个凸组合 $o = \sum \lambda_k v_k$，其权重 $\lambda_k > 0$ 满足 $\sum_0^n \lambda_k = 1$。 o 到其在 $\partial_k\Delta^{(n)}$ 上的正交投影 v'_k 的欧几里得距离，不超过 o到 $\frac{-\lambda_k}{1-\lambda_k} v_k = \frac{1}{1-\lambda_k}\sum_{j\neq k} \lambda_j v_j \in \partial_k\Delta^{(n)}$的距离，即 $\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}$；当且仅当 $v'_k = \frac{-\lambda_k}{1-\lambda_k} v_k$时等号成立，这意味着 $(v_k o)$ 与 $\partial_k\Delta^{(n)}$ 在 v'_k处正交相交。因此，欧几里得内切半径满足 $\tanh(\delta^n_{n-1}) \leq \min\{\lambda_k/(1-\lambda_k) : 0 \leq k \leq n\} \leq \left(\frac{1}{n+1}\right) / \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}$；当且仅当所有 k 均有$\lambda_k = \frac{1}{n+1}$，且 $(v_k o)$ 与 $\partial_k\Delta^{(n)}$ 在 $v'_k = \frac{-1}{n} v_k$处正交相交时，等号 $\frac{1}{n}$成立。等号成立意味着 Δ 以 o 为垂心；又由于 o 与内心及外心重合，由 [EHM05b, Theorem 4.3] 可得， Δ 必为正则的。

□

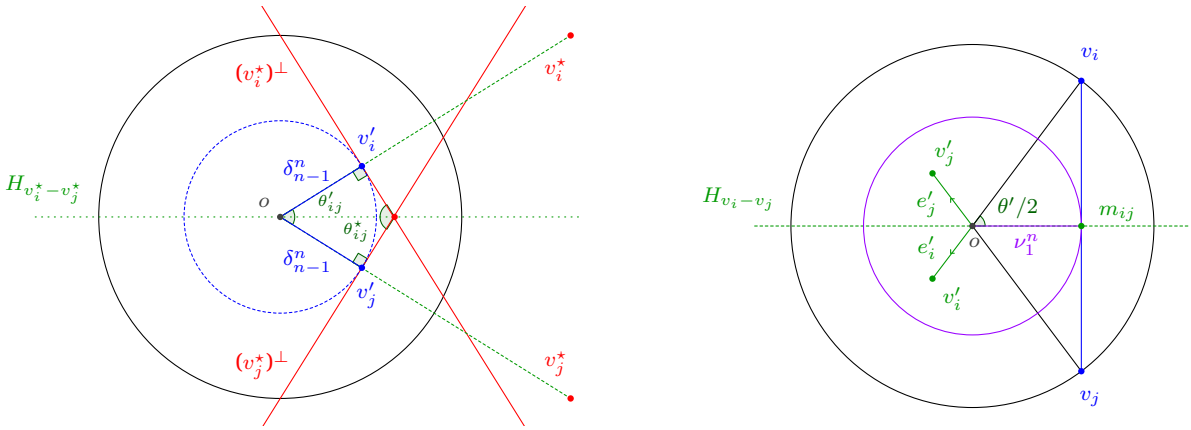


图 8：内切半径余弦定律。计算正则单纯形的 θ'_{ij}。

现在固定 m，$n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > m > 0$，并回顾第 2.1 节中的结论：连续有界函数 $\delta^n_m : (\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n)^{n+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 在全理想单形的一个闭子集上达到其最大值 μ^n_m。我们希望刻画这个极大化点集。

根据定理 2.6，我们知道对于 $n \geq 2$，具有最大内切半径 $\Delta \subset (\partial\mathbf{H}^n)^{n+1}$ 的全理想单形 $\delta^n_{n-1}(\Delta) = \mu^n_{n-1}$ 是正则的，且 $\tanh(\mu^n_{n-1}) = 1/n$。

定理 2.8（到 m-骨架的最大豪斯多夫距离）。 对于整数 $n > m > 0$，$\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$ 中的单纯形Δ 满足 $\delta^n_m(\Delta) = \mu^n_m$，当且仅当 Δ 是全、理想且正则的。此外，μ^n_1由 $(\tanh \mu^n_1)^2 = \frac{n-1}{2n}$ 给出，因此随着 $n \to \infty$ 趋于 $\mu^\infty_1 = \tanh^{-1}(1/\sqrt{2}) = \log(1+\sqrt{2})$，$\mu^n_1$以渐近增长。

证明。 取 $\mathbf{H}^n \sqcup \partial\mathbf{H}^n$中的一个（全理想）单纯形 Δ。

对于 $0 \le n'' \le n' \le n$，定义 $\delta^{n'}_{n''}(\Delta)$ 为其 n'-面到其 n''-骨架的豪斯多夫距离的最大值：$\delta^{n'}_{n''}(\Delta) = \max\{\delta^{n'}_{n''}(F)\colon F \subset \Delta, \operatorname{Card}(F) = 1+n''\}$。回想一下，对于 n'-面 $p \in F^{(n')}$ 中的每个点，它在最近的超面的线性张成空间（例如 Span $\partial_0 F^{(n')}$）上的正交投影，实际上属于该超面 $\partial_0 F^{(n')}$。因此，对于 $n''' \le n'' \le n'$，从任意点 $p' \in F^{(n')}$ 到最近点 $p''' \in F^{(n''')}$ 的正交投影，可分解为先正交投影到最近点 $p'' \in F^{(n'')}$；于是根据双曲三角形的勾股定理，我们有 $\cosh d(p', F^{(n''')}) = \cosh d(p', F^{(n'')}) \cosh d(p'', F^{(n''')})$。对 $p' \in F^{(n')}$ 取最大值，可得 $\cosh \delta^{n'}_{n'''}(\Delta) \le \cosh \delta^{n'}_{n''}(\Delta) \cosh \delta^{n''}_{n'''}(\Delta)$。因此，$\cosh \delta^n_m(\Delta) \le \prod_{m+1}^n \cosh \delta^{n'}_{n'-1}(\Delta)$，即 $\le \prod_{m+1}^n \cosh \mu^{n'}_{n'-1}$，且仅当 Δ 为正则的时等号成立。

对于这样的正则单纯形 Δ，定义 $\delta^n_m(\Delta) = \sup\{d(p, \Delta^{(m)}) \text{ 的上确界}\colon p \in \Delta^{(n)}\}$ 仅在其内心 o 处取得，且等于该点到任意 m-面 的距离。利用乘积公式 $\cosh(\mu^n_m) = \prod_{m<n'\le n} \cosh \tanh^{-1}(1/n')$，以及 $\cosh \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即可计算此值；不过，我们将使用内心欧几里得模型直接计算 μ^n_1。

考虑内接于单位球面 $\mathbf{S}^{n-1}_o$ 的全正则欧几里得单纯形 $\Delta = (v_0, \dots, v_n)$，令 ν^n_1 表示原点到任意一条边 $(v_i v_j)$ 的距离。我们有 $\mu^n_1 = \tanh^{-1}(\nu^n_1)$。由于点 $(v_k, o, v'_k, v^\star_k)$ 按此顺序共线，点 o 处的单位切向量 e'_i, e'_j 与顶点 v_i, v_j 的方向相反，因此，记它们的公共角为 $\theta' = \theta'_{ij}$，有 $\nu^n_1 = \cos(\theta'/2)$，于是 $(\nu^n_1)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\theta')$。为计算 $\cos(\theta') = \langle e'_i \mid e'_j\rangle_o$，我们将 $0 = (\sum_0^n e'_k)$ 的范数平方，得到 $0 = \sum_{i,j}\langle e'_i \mid e'_j\rangle_o = (n+1) + 2\binom{n+1}{2}\cos\theta'$，因此 $\cos\theta' = -1/n$。最后 $(\tanh \mu^n_1)^2 = \frac{1}{2}(1-1/n)$，所以 μ^n_1 随 $n \to \infty$ 增大而趋于 $\mu^\infty_1 = \tanh^{-1}(1/\sqrt{2}) = \log(1+\sqrt{2})$。 □

推论 2.9 （凸包到 1-骨架的豪斯多夫距离）。 对于任意子集 $X \subset \mathbf{H}^n \cup \partial\mathbf{H}^n$，$\operatorname{Conv}(X)$ 中的每个点到 $Y^{(1)} = \bigcup_{x_1,x_2\in x}[x_1, x_2]$ 的距离至多为 $\log(1+\sqrt{2})$。

2.4 定位并计数 Δ 中实现 $\delta^n_m(\Delta)$ 的点

回顾定理 2.3 给出的等变对应关系：$(\partial\mathbf{H}^n)^{n+1}$中的全理想单形与内心位于原点的 $(\mathbf{S}^{n-1})^{n+1}$ 中内接的全欧几里得单形相对应。

定理 [EHM05a，定理 3.2 (ii)]表明，全单形 Δ 位于 $\mathbb{R}^n$ 中，当且仅当它是等中心的（其内心 o 与其外心重合），也就是说，它是等半径的（其各个超面的外接半径都相同）。在这种情况下，内心 o 正交地投影到每个面 $\partial_k\Delta^{(n)}$的外心 v'_k上。然而 v'_k 可能与 $\partial_k\Delta^{(n)}$的内心不同，此时从 o 到 $(n-2)$ 骨架的距离不会是最大距离 δ^n_{n-2}。事实上，我们将以下命题的证明留作读者练习。

命题 2.10 （何时 $d(o, \Delta^{(m)}) = \delta^n_m(\Delta)$？）。设 $m, n \in \mathbb{N}$，且 $0 < m < n-1$。考虑一个全理想单形 $\Delta \in (\partial\mathbf{H}^n)^{n+1}$。

若其内心 o 实现了到 m-骨架的最大距离，即 $d(o, \Delta^{(m)}) = \delta^n_m(\Delta)$，则 Δ 是正则的；因此，若 Δ 不正则，则 δ^n_m至少有2 个最大化点。

问题 2.11 （δ^n_m的最大化点）。每个由 $(n+1)$ 个 m-面构成的集合 $\{F^{(m)}_0, \dots, F^{(m)}_{\binom{n}{m}}\} \in \binom{\Delta^{(n)}}{1+n}$ 都根据 $C_t(F) = \{p \in \Delta^{(n)} \text{ 在 } \Delta^{(n)} \text{ 中定义了凸集的一个递减交}\colon d(p, F^m_i) \ge t\}$，因此存在一点，使其到这些面的距离最大化；换言之，该点是从 $\Delta^{(n)}$ 到 $\Delta^{(m)}$ 的豪斯多夫距离的一个局部最大点，对于某个 F，它将是 δ^n_m 的全局最大化点。

局部或全局极小值点的个数可能是多少？它们可能位于何处？注意，单纯形 $\operatorname{Stab}(\Delta^{(n)}) \subset \operatorname{Isom}(\mathbf{H}^n)$ 的等距变换群作用于由 m-面构成的 $(1+n)$-集合上。不过，描述和枚举不同的（局部或全局）最大化点，比对这一作用下的（全部或部分）轨道进行分类更为微妙，因为由 m-面构成的两个 $(1+n)$-集合可能会得到相同的（局部或全局）最大化点，却不属于同一轨道。

例2.12 (偏方面体)。 中等中心或等半径的四面体 $\mathbb{R}^3$ 称为 偏方面体，它们有多种等价刻画（见 [引理80]），例如对边长度相等且面为锐角三角形。这表明，锐角三角形可通过沿其中线（连接边中点的线）折叠来参数化偏方面体，如图 9所示，并且这种参数化在欧几里得相似变换群的作用下是等变的。

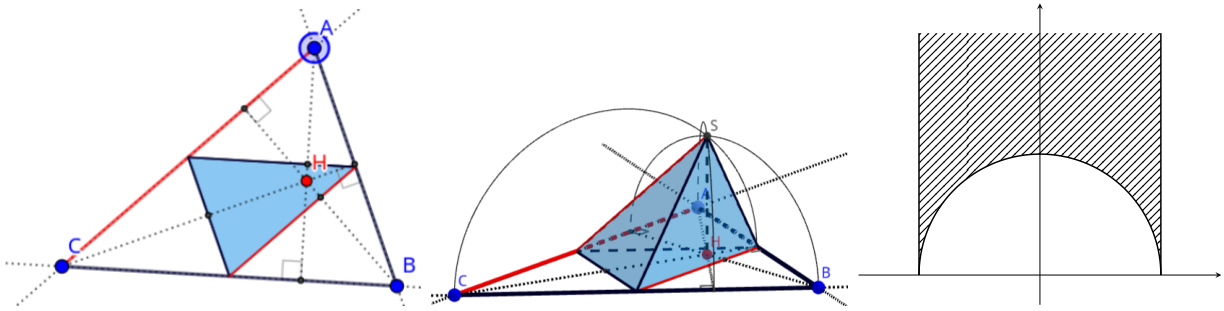


图9：从 锐角三角形到偏方面体。 δ_1^3的最大化点。偏方面体的模空间 s.

将欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 与复直线 $\mathbb{C}$等同起来，每个锐角三角形在相似变换群 $\mathbb{C}\rtimes\mathbb{C}^\times=\mathbb{R}^2\rtimes(\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}^*_{>0})$ 的作用下，都有唯一的代表元，其形式为 $(1,\ z,\ -1)$，其中 $z\in\mathbb{C}$ 有 $\Im(z)>0$ 和 $-1<\Re(z)<1$ 和 $|z|>1$。（可以将这一参数化与其外接球上四个顶点的交比进行比较。）相应折叠四面体的（成对相对的）边长为 $|z+1|,\ 2,\ |z-1|$。当 $\Im(z)=0$ 且 $|z-1|=1$ 时，即面为等边三角形时， δ_1^3 的（局部、全局）最大化点个数为 $(1,\ 1)$；当 $|z|>1$ 但 $\Re(z)=0$ 时，即面为严格等腰三角形时，个数为 $(4,\ 4)$；当面为一般三角形时，个数为 $(4,\ 1)$。

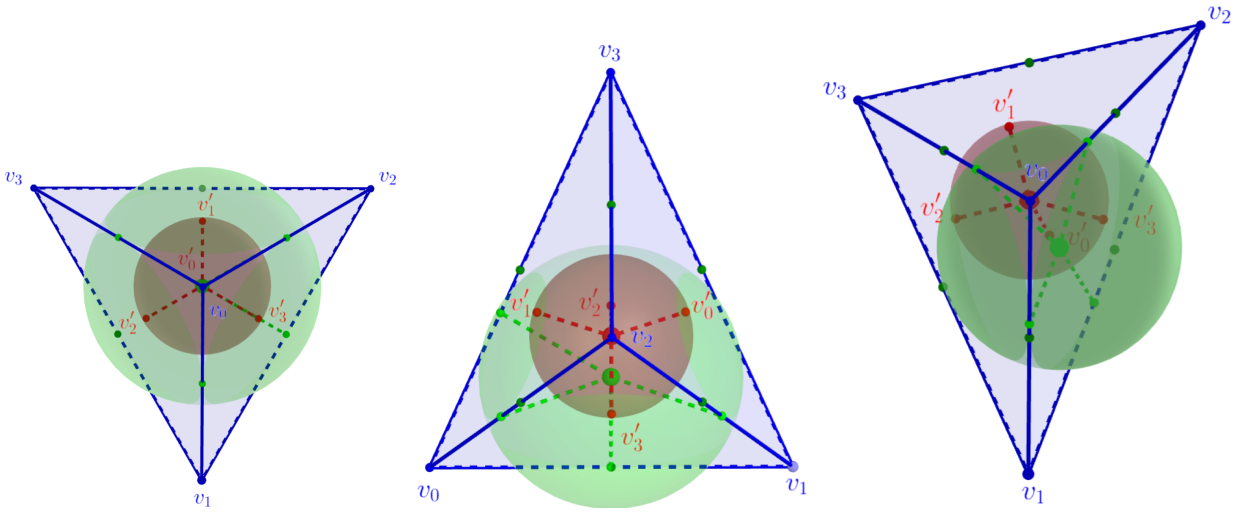


图10：三种情况下δ_1^3 的最大化点。

致谢

我们感谢 Anton Petrunin 在定理证明中建议使用齐次坐标2.6。

参考文献

[Bes88] Mladen Bestvina. 双曲空间的退化. 《杜克数学杂志》, 56(1):143– 161, 1988.[Bon86] Francis Bonahon. 三维双曲流形的端部. 《数学年刊》 *(2)*, 124(1):71–158, 1986.[DS26] Bruno Duchesne and Christopher-Lloyd Simon. 无限维双曲空间上的作用空间, 2026. 预印本.[EHM05a] Allan L. Edmonds, Mowaffaq Hajja, and Horst Martini. 单纯形中心的重合及相关面结构. 《代数与几何论文集》, 46(2):491–512, 2005.[EHM05b] Allan L. Edmonds, Mowaffaq Hajja, and Horst Martini. 正交中心单纯形及其中心. 《数学结果》, 47(3-4):266–295, 2005.[HM81] Uffe Haagerup and Hans J. Munkholm. 双曲 n 空间中的最大体积单形. 《数学学报》, 147(1-2):1–11, 1981.[Jac14] Matthieu Jacquemet. 双曲截断 n 单形的内切半径. 《离散与计算几何》, 51(4):997–1016, 2014.[Lem80] Em. Lemoine. 关于对边两两相等的四面体的若干定理及第1272题的解答. 《数学新年刊：理工学院与高等师范学院考生杂志》, 第2辑, 19:133– 138, 1880.[Pey02] Norbert Peyerimhoff. 双曲空间中最大体积或总棱长最小的单形. 《伦敦数学会杂志》, 66(3):753–768, 2002.[Rat19] John G. Ratcliffe. 《双曲流形基础》, 《数学研究生教材》第149卷. 施普林格，沙姆，第三版, [2019] ©2019.