arXiv:2512.17118v1 [math.AG] 18 Dec 2025

布洛赫–苏斯林复形与强 $\mathbb{A}^1$–不变性

SAHEB MOHAPATRA

摘要。我们证明，布洛赫–苏斯林复形中出现的阿贝尔群不存在一种扩张，使其成为 Sm_k (char(k) $=0$) 上的强 $\mathbb{A}^1$–不变层，同时还将相应 $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$（即 $\mathbb{G}_m$ 和 $\mathbb{G}_m^{\wedge 2}$）中的典范符号映射扩张出去。

1. 引言

设 k 是一个完美域，并记 Sm_k 为 k 上有限型光滑分离概形范畴。与 [1], 中一样，我们考虑 Sm_k上的 Nisnevich 层；记 $Shv(Sm_k)$（分别为 $Shv_{\mathcal{A}b}(Sm_k)$）为 Sm_k 上的集合型（分别为阿贝尔群型）Nisnevich 层范畴。本文的一个核心概念是 Nisnevich 层的强 $\mathbb{A}^1$–不变性。若对每个 $X \in Sm_k$，投影 $\mathbb{A}^1 \times X \to X$ 均诱导同构，则称群层 G 为强$\mathbb{A}^1$–不变 的

$$H^i_{\mathrm{Nis}}(X; G) \xrightarrow{\simeq} H^i_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1 \times X; G) \qquad (i = 0, 1).$$

阿贝尔群层 M 若对于所有 $i \geq 0$，上述态射都是同构，则称其为严格 $\mathbb{A}^1$–不变。记 $SAI(Sm_k)$ 为 $Shv_{\mathcal{A}b}(Sm_k)$ 中强 $\mathbb{A}^1-$ 不变层构成的子范畴。这些概念源自 Morel–Voevodsky 的 $\mathbb{A}^1$- 同伦理论；本文主要参照 [1] 。

强不变（因而严格 $\mathbb{A}^1$–不变，见 [1]）阿贝尔群层的典范族之一（事实上，根据定理 2.3，它具有普遍性）是 Milnor–Witt K理论层，$\mathbf{K}^{MW}_n$。Milnor K–理论层，$\mathbf{K}^M_n$，是这些层的某些商，并且也强$\mathbb{A}^1$–不变。Milnor-Witt（分别为 Milnor） K–群最初是通过定义 2.1 中的显式表示为域所定义的。如 [1], 中所做，若 $\mathcal{F}_k$ 表示在 k 上具有有限超越次数的域范畴，则通过验证$\mathbf{K}^{MW}_n$作为 $\mathcal{F}_k$上的函子的某些性质，我们可以将其扩展为 Sm_k上的强 $\mathbb{A}^1$–不变层。记 $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$为 Sm_k 上的 Nisnevich 层，它将 Sm_k 中的不可约 X 映至 $(\mathcal{O}(X)^*)^{\wedge n}$，并以 1 为基点。然后，如 [1], 中所示，我们有符号映射 $\sigma_n : \mathbb{G}_m^{\wedge n} \to \mathbf{K}^{MW}_n$。

另一方面，布洛赫–苏斯林复形中出现的阿贝尔群源自剪刀全等和二对数构造，并且据推测会出现在 Goncharov 的低权重动机复形中（见 [4]）。对于域 F，预布洛赫群（有时称为剪刀全等群） $\mathcal{P}(F)$ 是由 $\mathbb{Z}[F^{**}]$ 在 $F^{**} := F^* \setminus \{1\}$ 上生成的自由阿贝尔群模去由经典五项关系生成的子群所得的商

$$\{x\} - \{y\} + \left\{\frac{y}{x}\right\} + \left\{\frac{1-x}{1-y}\right\} - \left\{\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right\}, \qquad x \neq y,$$

并且存在一个正合列，联系着 $\mathcal{P}(F)$、 $\wedge^2_{\mathbb{Z}} F^*$ 和 $K^M_2(F)$。此处， $\wedge^2_{\mathbb{Z}} F^*$ 表示 $F^* \otimes_{\mathbb{Z}} F^*$ 对由 $x \otimes y + y \otimes x$ 生成的子群取商所得的商，其中 $x,\ y \in F^*$。记 $\mathcal{A}$ 为作用在 $\mathcal{F}_k$ 上的函子，它将 F 映射到 $\wedge^2_{\mathbb{Z}} F^*$。形式上，Bloch-Suslin复形是作用在 $\mathcal{F}_k$ 上的如下函子复形

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{A}$$

其中对于 $F \in \mathcal{F}_k$， $\lambda(F): \mathcal{P}(F) \to \mathcal{A}(F)$ 由 $\{z\} \mapsto z \wedge (1-z)$ 给出。此映射的余核同构于 $K_2^M(F)$，而核在有理意义下同构于 $K_3^{\mathrm{ind}}(F)$。后者由 Suslin 证明（见 [2]）。前者由 Hutchinson 证明（见 [3]），其方法是分析计算 $H_2(GL_2(F)\ \mathbb{Z})$ 的双复形所关联的谱序列，从而得到以下正合列：

$$\mathcal{P}(F) \xrightarrow{\lambda} \wedge^2_{\mathbb{Z}} F^* \xrightarrow{\mu} K_2^M(F) \to 0,$$

其中 $\lambda(\{z\}) = z \wedge (1-z)$ 且 $\mu(x \wedge y) = \{x, y\}$。然而，群 $\mathcal{P}(F)$ 和 $\wedge^2_{\mathbb{Z}} F^*$ 先验上是范畴 $\mathcal{F}_k$ 上的函子。一个自然的问题是：与 Minor $K-$ 理论类似，这些函子是否存在扩张，使其成为 Sm_k 上强 $\mathbb{A}^1-$ 不变的 Nisnevich 层，同时扩张来自 $\mathbb{G}_m$ （分别为 $\mathbb{G}_m^{\wedge 2}$）的显然符号映射：

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathcal{P} \quad (resp. \quad \mathbb{G}_m^{\wedge 2} \longrightarrow \mathcal{A})$$

在域上限制为 $z \neq 1$ 的 $z \mapsto \{z\}$ （以及 $1 \mapsto 0$）（分别为（x， y） $\mapsto x \wedge y$）。提出这个问题的另一个动机，是上述正合列结合如下事实：$\mathbf{K}_2^M \in SAI(Sm_k)$ 是 $Shv_{\mathcal{A}b}(Sm_k)$ 的一个阿贝尔子范畴（见 [1]）。

本文的主要结果对这个问题给出了否定回答。

定理1.1。 设 k 是一个特征为零的完美域。不存在 *Nisnevich* 阿贝尔群层 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{A}$ 定义在 Sm_k 上，它们是强（因而严格） $\mathbb{A}^1-$不变的，并且其在域上的取值分别恢复 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{A}$；同时也不存在映射 $\mathbb{G}_m \to \mathcal{P}$, $\mathbb{G}_m^{\wedge 2} \to \mathcal{A}$，使其在域上分别限制为针对 $z \neq 1\,(1 \mapsto 0)$ 和 $(x, y) \mapsto x \wedge y$的典范符号映射 $z \mapsto \{z\}$。

证明的主要内容是定理 2.3，它针对符号映射 σ_n比较 $SAI(Sm_k)$ 的对象与泛对象 $\mathbf{K}_n^{MW}$。因此，尽管 K_2^M可以延拓为一个强 $\mathbb{A}^1-$不变层，但如果坚持将典范符号映射从 $\mathbb{G}_m$ 和 $\mathbb{G}_m^{\wedge 2}$延拓出去，中间对象 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{A}$ 就无法提升为强$\mathbb{A}^1-$不变层。直观而言，这一障碍源于 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{A}$ 编码了微妙的五项关系／双对数关系以及反对称张量结构，而这些都与 Milnor-Witt $K-$理论中的关系不相容。

致谢。 本工作是作者于2025年一月至四月在印度加尔各答的印度统计研究所攻读硕士学位期间完成的硕士论文的一部分。作者衷心感谢导师 Utsav Choudhury博士提出这个问题，并在整个项目过程中给予持续支持。

2. 预备步骤

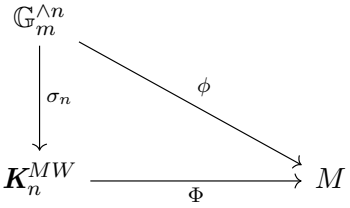
定义 2.1 （Milnor-Witt K-群）。 [1]考虑由符号 $[u]$ （对每个 $u \in F^*$ ）以及一个度为 (-1) 的符号 η 生成的分次结合环，其满足以下关系：

- （Steinberg 关系） $\forall a \in F^* - \{1\}, [a][1-a] = 0$
- $\forall (a,\ b) \in (F^*)^2,\ [ab] = [a] + [b] + \eta[a][b]$
- $[u]\eta = \eta[u], \forall u \in F^*$
- $h := \eta[-1] + 2$，那么 $\eta h = 0$。

将这个环记为 $K_*^{MW}(F)$，其 n^{th} 次部分记为阿贝尔群 $K_n^{MW}(F)$。因此，我们有$[a(1-a)] = [a] + [1-a]$属于 $K_1^{MW}(F)$。Milnor $K-$理论 K_*^M 是 $K_*^{MW}(F)$ 对由 η 生成的双边理想取商所得，而 $K_n^M(F)$ 是其 n^{th} 次部分。

定义 2.2. 取一个函数域为 F 的不可约 $X \in Sm_k$。由于 X 不可约，$(O(X)^*)^{\wedge n} \subset (F^*)^{\wedge n}$；对于任意带基点集合 (A, a)， $A^{\wedge n}$ 表示其与自身的 $n-$重楔积，基点为 a。这里， $\mathcal{O}(X)^*$ 的基点为 1。因此，我们有一个映射 $(O(X)^*)^{\wedge n} \to K_n^{MW}(F)$，使得 $(u_1, ..., u_n) \mapsto [u_1]...[u_n]$。但根据定义 [1]， $[u_1]...[u_n] \in \mathbf{K}_n^{MW}(X)$。这个映射 $\sigma_n : \mathbb{G}_m^{\wedge n} \to \mathbf{K}_n^{MW}$（称为典范符号映射）是 Sm_k 上带基点层之间的态射。

定理 2.3. *[1]* 设 $n \geq 1$。态射 σ_n 是从 $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$ 到强 $\mathbb{A}^1$-不变阿贝尔群层的泛态射。也就是说，给定带基点层的一个态射 $\phi: \mathbb{G}_m^{\wedge n} \to M$，其中 M 是强 $\mathbb{A}^1$-不变阿贝尔群层，则存在唯一的阿贝尔群层态射 Φ，使得下图交换：



定理 *2.4.* *[1]* 设 M 是 Sm_k上的强 A^1-不变阿贝尔群层。令 $n \geq 1$为一个整数，并设 $\phi: \mathbb{G}_m^{\wedge n} \to M$ 是带基点层之间的态射。那么，对于任意 $F \in \mathcal{F}_k$，存在唯一的态射 $\Phi_n(F): K_n^{MW}(F) \to M(F)$，使得对于任意 $(u_1, ..., u_n) \in (F^*)^n$,$\Phi_n(F)([u_1]...[u_n]) = \phi(u_1, ..., u_n)$。

对于两个范畴 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$，记从 $\mathcal{C}$到 $\mathcal{D}$的函子所构成的范畴为 $Fct(\mathcal{C}, \mathcal{D})$。

定义 2.5 (剪切同余群)。 [2] 设 F是一个域。记 $F^{**} := F^* - \{1\}$。定义$\mathcal{P}(F)$为由集合 F^{**}生成的自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}[F^{**}]$对由关系 $\{x\} - \{y\} + \{\frac{y}{x}\} + \{\frac{1-x}{1-y}\} - \{\frac{y}{x(1-x)(1-y)}\}$; $x \neq y$生成的子群取商所得的群。因此， $\mathcal{P} \in Fct(\mathcal{F}_k, \mathcal{A}b)$。为方便记号，我们将 $\mathcal{P}(F)$中的零元记为 $\{1\}$。

注 2.6。 • 我们有 $\phi \in Hom_{Fct(\mathcal{F}_k, \mathcal{A}b)}(\mathbb{G}_m, \mathcal{P})$ 定义在 $\mathbb{G}_m(F) = F^* \to \mathcal{P}(F)$ 上，由$z \mapsto \{z\}$给出。因此，按照我们的记号， $\phi(F)(1) = \{1\} = 0$。

• 定义 $\mathcal{A} \in Fct(\mathcal{F}_k, \mathcal{A}b)$，其定义为 $\mathcal{A}(F) := \wedge_{\mathbb{Z}}^2 F^*$。类似地，我们有 $\psi \in Hom_{Fct(\mathcal{F}_k, \mathcal{A}b)}(\mathbb{G}_m^{\wedge 2}, \mathcal{A})$ 定义在 $\mathbb{G}_m^{\wedge 2}(F) = (F^*)^{\wedge 2} \to \mathcal{A}(F) = \wedge_{\mathbb{Z}}^2(F^*)$ 上，由 $(a, b) \mapsto a \wedge b$给出。这是有意义的，因为$a \wedge 1 = 1 \wedge b = 0$在 $\wedge_{\mathbb{Z}}^2(F^*)$ $\forall (a, b) \in F^* \times F^*$中。

以下命题摘自 [2]。

命题 2.7. 对于任意域 F， $\mathcal{P}(F)$ 中的元素 $\{x\} + \{1 - x\}$ 与 $x \in F^{**}$ 的选取无关。将此元素记为 c_F。此外，若 $\sqrt{-1}, \sqrt{-3}, 2^{-1} \in F$，则 $\mathcal{P}(F)$ 中有 $c_F = 0$。

证明。 由 $\mathcal{P}(F)$ 中的五项关系（并将对 (x, y) 的讨论替换为对 $(1-y, 1-x)$ 的讨论），得到 (1) $\{x\} - \{y\} + \{\frac{y}{x}\} + \{\frac{1-x}{1-y}\} - \{\frac{y}{x(1-x)(1-y)}\} = 0$

(2) $\{1-y\} - \{1-x\} + \{\frac{1-x}{1-y}\} + \{\frac{y}{x}\} - \{\frac{y}{x(1-x)(1-y)}\} = 0$

用（1）减去（2），对所有 x， $y \in F^{**}$，可得 $\{x\} + \{1-x\} = \{y\} + \{1-y\}$。我们称此元素为 c_F。

类似地，考虑 $\mathcal{P}(F)$ 中的元素 $\{x\} + \{x^{-1}\}$。在五项关系中用（x^{-1}， y^{-1}）替换（x， y），可得

- $\{x\} - \{y\} + \{\frac{y}{x}\} + \{\frac{1-x}{1-y}\} - \{\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\} = 0$
- $\{x^{-1}\} - \{y^{-1}\} + \{\frac{x}{y}\} + \{\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\} - \{\frac{1-x}{1-y}\} = 0$

将这些相加，我们得到 $< x > - < y > + < \frac{y}{x} > = 0$ 其中 $< z > := \{z\} + \{z^{-1}\}$ 对任意 $z \in F^{**}$均成立。将 x 替换为 y，得到 $< y > - < x > + < \frac{x}{y} > = 0$。由于 $< \frac{x}{y} > = < \frac{y}{x} >$，我们得到 $2 < \frac{x}{y} > = 0$。因此，$\forall z \in F^{**}$、 $2 < z > = 0$ 以及 $\forall x$， $y \in F^{**}$、 $< x > + < y > = < xy >$。

$3c_F = \{x\} + \{1-x\} + \{x^{-1}\} + \{1-x^{-1}\} + \{(1-x)^{-1}\} + \{1-(1-x)^{-1}\}$
$= < x > + < 1-x > + < 1-x^{-1} > = < -(1-x)^2 > = < -1 >$. So, if $z := \sqrt{-1} \in F$, $3c_F = < z^2 > = 0$.

如果$\sqrt{-3}$，$2^{-1}\in F$、$\exists z\in F$：$1-z=z^{-1}$。因此，$c_F=\{z\}+\{1-z\}=<z>\Longrightarrow 2c_F=0$。综合这两个观察结果，如果$\sqrt{-1},\ \sqrt{-3}$，$2^{-1}\in F$、$c_F=0$。

□

命题 2.8。设 F是一个域，且 x、$y\in F^*$满足：仅当 $(a,b)=(0,\ 0)\in\mathbb{Z}^2$时，$x\wedge y\neq 0$才属于 $\wedge^2_{\mathbb{Z}}(F^*)$。

证明。令 $G:=<x,\ y>$为由 x 和 y生成的 F^* 的子群。因此，G 是秩为 2 的自由阿贝尔群。现在，考虑由包含映射 $i:G\to F^*$ 诱导的以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\wedge^2_{\mathbb{Z}}G & \xrightarrow[\wedge^2_{\mathbb{Z}}(i)]{} & \wedge^2_{\mathbb{Z}}F^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
\wedge^2_{\mathbb{Z}}G\bigotimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} & \longrightarrow & \wedge^2_{\mathbb{Z}}F^*\bigotimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
\wedge^2_{\mathbb{Q}}(G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) & \hookrightarrow & \wedge^2_{\mathbb{Q}}(F^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})
\end{array}$$

现在，底部的箭头是单射，因为 $G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 是向量空间 $F^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 的 $\mathbb{Q}$-子空间。还要注意，一维 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\wedge^2_{\mathbb{Q}}(G\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})$ 由 $(x\otimes_{\mathbb{Z}}1)\wedge_{\mathbb{Q}}(y\otimes_{\mathbb{Z}}1)$ 张成。若 $x\wedge y=0$ 属于 $\wedge^2_{\mathbb{Z}}F^*$，则 $(x\otimes_{\mathbb{Z}}1)\wedge_{\mathbb{Q}}(y\otimes_{\mathbb{Z}}1)=0$ 属于 $\wedge^2_{\mathbb{Q}}(F^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})$，这与底部映射为单射矛盾。

□

3. 主要定理

定理 3.1. 对于任意满足 *char(k)=0* 的域 k，函子 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{F}_k$ 上不能延拓为 *SAI(*Sm_k*)* 的一个元素，使得注 *2.6* 中的映射 $\phi:\mathbb{G}_m\to\mathcal{P}$ *in* $Hom_{Fct(\mathcal{F}_k,\mathcal{A}b)}(\mathbb{G}_m,\mathcal{P})$ 能够延拓为 Sm_k 上带基点层之间的映射：$\mathbb{G}_m\to\mathcal{P}$，其中后者以 0 为基点。

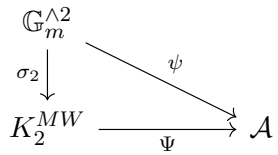
证明. 反设 $\mathcal{P}$ 可以延拓为 $SAI(Sm_k)$ 的这样一个元素。那么，由定理 2.3，$\exists\Phi\in Hom_{Shv_{\mathcal{A}b}(Sm_k)}(K_1^{MW},\mathcal{P})$，使得下图在 $Shv(Sm_k)$ 中是交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{G}_m & & \\
{\scriptstyle\sigma_1}\downarrow & \searrow^{\phi} & \\
K_1^{MW} & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathcal{P}
\end{array}$$

现在，令 $K:=k(\sqrt{-1},\sqrt{-3},\sqrt{-11})$，它是 $\mathcal{F}_k$ 的一个对象。由命题 2.7，$c_K=0$ 属于 $\mathcal{P}(K)$。由定理 2.4，我们有 $\Phi(K):K_1^{MW}(K)\to\mathcal{P}(K)$ 以及 $\Phi(K)([z])=\{z\}$。现在，由注 2.6，对于任意 $z\in K^{**}$，$[z(1-z)]=[z]+[1-z]$ 属于 $K_1^{MW}(K)$。在 Φ 下，这映射到 $\{z(1-z)\}=c_K=0$，属于 $\mathcal{P}(K)$。由于 $\sqrt{-11}\in K$, $\exists w\in K$ 是二次方程 $z(1-z)=z-z^2=3$ 的一个解。因此，$\{3\}=0$ 属于 $\mathcal{P}(K)$。在映射 $\lambda:\mathcal{P}(K)\to\wedge^2_{\mathbb{Z}}F$ 下，$\{3\}$ 映射到 $3\wedge(-2)$。由于 $\mathrm{char}(K)=0$，对于 $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$3^a=(-2)^b$ 仅当 $a=0=b$ 时成立。由命题 2.8，$3\wedge(-2)\neq 0$ 属于 $\wedge^2_{\mathbb{Z}}(K^*)$，矛盾。□

定理 3.2。对于任意特征为 *=0* 的域 k，函子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{F}_k$ 上不能扩展为 *SAI(*Sm_k*)* 的一个元素，使得注 *2.6* 中的映射 $\psi:\mathbb{G}_m^{\wedge 2}\to\mathcal{A}$ 在 $Hom_{Fct(\mathcal{F}_k,\mathcal{A}b)}(\mathbb{G}_m,\mathcal{A})$ 能够扩展为 Sm_k 上带基点层之间的映射：$\mathbb{G}_m^{\wedge 2}\to\mathcal{A}$，其中后者的基点为 0。

证明。反设 $\mathcal{A}$ 可以扩展为 $SAI(Sm_k)$ 中这样的一个元素。由定理 2.3，存在 $\exists\Psi\in Hom_{Shv_{\mathcal{A}b}(Sm_k)}(K_2^{MW},\mathcal{P})$，使得下图在$Shv(Sm_k)$中交换：



根据定义 2.1，$[3][-2] = 0$ 属于 $K_2^{MW}(k)$，但在定理 2.4 中的 $\Psi(k)$ 作用下映射到 $3 \wedge (-2)$。如同前一定理的证明，由于 $\mathrm{char}(k) = 0$，$3 \wedge (-2) \neq 0$ 属于 $\mathcal{A}(k) = \wedge^2_{\mathbb{Z}}(k^*)$，矛盾。□

推论 *3.3.* 不存在这样的 $S \in SAI(Sm_k)$，使得 $S(X) = \mathcal{P}(\mathcal{O}(X)^*)$ 或 $S(X) = \mathcal{P}(F(X))$，其中 $X \in Sm_k$ 是函数域为 $F(X)$ 的不可约概形（$\mathcal{A}$ 的情形类似）。这里，$\mathcal{P}(\mathcal{O}(X)^*)$ 定义为自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}[\mathcal{O}(X)^* - \{1\}]$ 除以由五项关系生成的子群，只要这些关系在 $\mathcal{O}(X)^*$ 中有意义即可。

证明。设 X 是 Sm_k 中的不可约概形。反之，若存在这样的 S，由于 $F(X)^* = \varinjlim_{U \subset X} \mathcal{O}(U)^*$（遍历 X 的开子概形），我们便有带基点层 $\mathbb{G}_m$ 与 S（以 0 为基点）之间的映射，它们限制后即为典范符号映射。这在两种情形下均成立：$S(X) = \mathcal{P}(\mathcal{O}(X)^*)$ 和 $S(X) = \mathcal{P}(F(X))$，并与定理 3.1 矛盾。关于 $\mathcal{A}$ 的类似结论可由定理 3.2 同理得出。□

参考文献

[1] F. Morel. $\mathbb{A}^1$-域上的代数拓扑。《数学讲义》第 2052 卷。施普林格，柏林，海德堡，2012年。doi: 10.1007/978-3-642-27664-3。[2]A. A. Suslin. K_3 域与 Bloch 群。《Steklov 数学研究所汇刊》(1991)。（俄文。）[3] K. Hutchinson. Matsumoto 定理的一种新方法。《K-理论》4(2) (1990年), 181–200。doi: 10.1007/BF00533156。[4] A. B. Goncharov. 构形几何、多对数与动机上同调。《数学进展》114(2) (1995年), 197–318。doi: 10.1006/aima.1995.1032。

英国杜伦大学数学系电子邮箱地址：saheb.mohapatra.math@gmail.com