刻画可去集的容量：Carnot 群中的各种函数空间

ZACK BOONE

摘要。我们研究 Carnot 群中 Campanato空间、Hölder 连续、 L^p loc 和 Lip- schitz 函数的可去集。对于前三种情形，我们通过使用相对于任意左不变线性微分算子 $\mathcal{L}$的容量来刻画可去性，其中 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{L}^t$ 是亚椭圆的并满足齐次性条件；对于后一种情形，我们相对于次拉普拉斯算子刻画 Lipschitz 函数。

arXiv:2512.17167v1 [math.CA] 19 Dec 2025

1. 引言

对于给定的分布空间 $\mathcal{F}$和微分算子 $\mathcal{L}$，集合 K 在 $\mathcal{F}$ 中对于$\mathcal{L}$-解是可去的，是指对于任意区域 Ω 以及任意满足 $\mathcal{L}f = 0$ 于 Ω 中的元素 $f \in \mathcal{F}(\Omega)$，其还满足 $\mathcal{L}f = 0$ 于 Ω 中。可去集的概念最早出现于 1888 年的复平面中，当时 Painlevé 研究了 Ω 上的有界解析函数 $\backslash K$ 何时能够解析延拓到 Ω。

可以将 $\mathcal{L}$解在 $\mathcal{F}$ 上的可去集理解为这样一种集合：相对于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{L}$而言，它不包含任何“信息”。对于有界解析函数，Ahlfors 在 1947 [1] 中对此作了更精确的阐述：他定义了一种称为解析容量的集合函数，记作 γ，并证明，紧集 $K \subset \mathbb{C}$ 对于有界解析函数可去，当且仅当 $\gamma(K) = 0$。因此，这种集合函数的“零集”恰好就是 $\mathbb{C}$中有界解析函数的可去集。Ahlfors 的研究动机源于 Painlevé 问题，该问题要求给出一个几何条件，以刻画有界解析函数的可去集。解析容量并非几何条件；然而，对解析容量的研究有助于彻底解决 Painlevé 问题，这一问题最终由 Tolsa 解决 [21]。Tolsa 的工作 [21]建立在许多作者的研究之上，其中包括 Ahlfors、Denjoy、Garnett、Calderón、David、Mattila、Mel’nikov、Verdera、Nazarov、Treil 和 Volberg 等等。关于更多历史背景和研究成果，请参阅 Tolsa [22] 为 2006年国际数学家大会论文集撰写的文章。

关于一般微分算子和函数空间中可去集的研究，许多学者都做出了贡献，例如 Carleson、Král 和 Harvey-Polking。1963 年，Carleson [4] 给出了 $\mathbb{R}^n$中赫尔德连续调和函数函数的可去性刻画。Harvey-Polking 在 [14] 中的结果为判断某个集合何时对于一大类线性偏微分方程是可去的，提供了充分条件。他们通过证明单位分解的存在性，达到了这种一般性；这种单位分解如今称为 Harvey-Polking 单位分解 [14, 引理 3。1],它包含导数信息。这种单位分解是研究可去集的基础，也被应用于一致逼近问题 [20]。Král [16]取得的结果相当一般，刻画了 BMO、小平均振荡空间、Campanato空间和赫尔德连续函数等函数空间中，半椭圆偏微分算子的可去集。

Paramonov [20, (2.2)], 引入了 Lipschitz调和容量，其动机来自一致逼近中的问题。Mattila-Paramonov [18] 还表明，Lipschitz调和容量刻画了 Lipschitz 调和函数的有界可去集[18, 命题 2.2]。在 Harvey-Polking 于 [15]发表的论文之后续篇中， [14], 他们以非常一般的形式发展了容量。借助这些容量，他们得以刻画多类微分算子和函数空间对应的可去集。

可去集也在次黎曼背景下得到研究，例如 [8],[7], [9], [5], [6]。另一方面，次黎曼背景下的容量尚未得到研究，这正是本文所做的工作。我们将分别把 Harvey- Polking 和 Paramonov 在 [15]和 [20] 中发展的容量推广到 Carnot 群的背景下，分别记作 $\mathbb{G}$，其背景知识将在第 2节介绍。

令 $\mathcal{L}$ 表示次拉普拉斯算子，而 $\nabla_{\mathbb{G}}$ 表示水平梯度。为避免技术细节，我们将使用由雅可比基生成的次拉普拉斯算子和水平梯度。更多详情请参见第2 节。我们将有界集 K 的 Carnot Lipschitz 调和容量定义为 κ

$$\kappa(K) := \sup\{|\langle \mathcal{L}f, 1\rangle| : f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}, \operatorname{supp} \mathcal{L}f \subset K, \|\nabla_{\mathbb{G}} f\| \leq 1\}.$$

上文中，supp $\mathcal{L}f$ 指的是 $\mathcal{L}f$的分布支集。Mattila-Paramonov 证明 κ 刻画了欧几里得空间中 Lipschitz 调和函数的可去集，该证明依赖于 [20, 引理 4.2]。将这一证明推广到 Carnot 情形时会遇到一个问题：我们通常在 $\mathbb{G}$中处理的微分算子并不对易，而证明 [20, 引理 4.2]时确实用到了这一点。读者稍后会看到，对于某个分布类 $\mathcal{F}$中的f，在尝试刻画可去性时，自然会想到证明 $\psi\mathcal{L}f * \Gamma \in \mathcal{F}$，其中 $\psi \in C_0^\infty$，且 Γ 是 $\mathcal{L}$的基本解。当 $\mathcal{F} = \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}$ 时，我们能够证明这一点：通过得到 $\psi\mathcal{L}f * \Gamma$的一个分布公式，该公式涉及若干在 f上具有水平导数的函数之和，然后证明此和中的每个函数都满足 κ的条件。借助这一思路，我们仍能像 Mattila-Paramonov 在欧几里得情形中那样，通过（Carnot）Lipschitz 调和容量的零集，证明（Carnot）Lipschitz 调和函数可去性的刻画 κ。

定理 1.1。 设 $K \subset \mathbb{G}$ 有界，且 $\mathcal{L}$ 为次拉普拉斯算子。那么，当且仅当 $\kappa(K) = 0$时， K 对于 *Lipschitz*$\mathcal{L}$-解是可去的。

我们主要依赖这样一个事实：次拉普拉斯算子由水平向量场生成，并且次拉普拉斯算子是 2-齐次的。需要指出的是，当 $\mathcal{L}$ 是一个 2-齐次线性微分算子，由雅可比基中的水平向量场生成，且满足 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ ($\mathcal{L}$的转置) 均为亚椭圆的时，定理 1.1同样成立。条件 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的这一点，保证了存在具有某些良好齐次性性质的基本解。参见 [12, 定理 2。1]。

通过任意一个左不变齐次线性微分算子 $\mathcal{L}$刻画 Campanato 函数和赫尔德连续函数的可去集， $\mathcal{L}$ 且$\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的这一结果，实际上将是我们其他主要结果的推论。事实证明，刻画 Campanato空间和赫尔德连续函数的可去性，比证明定理 1.1更为微妙，原因如下。由于 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$均为亚椭圆的，我们知道存在 Γ 的基本解 $\mathcal{L}$。与局部 Lipschitz 情形不同，我们无法直接证明 $\psi\mathcal{L}f * \Gamma \in \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 是 Campanato空间或赫尔德空间，且 $f \in \mathcal{F}$。在 Campanato 情形中，这是因为我们无法使用交换群运算和交换微分算子。在 Hölder 情形中，则是因为函数 f 未必几乎处处可微。因此，对于这些更为困难的情形，我们将采取不同的策略，而 Chousionis 和 Tyson 在 $\mathbb{G}$中证明的（Carnot）Harvey-Polking 单位分解的效用，将在此发挥作用；参见[9, 引理 3。8] 第 5 节和6 节将阐述这一替代方法：我们将证明某些容量与豪斯多夫内容可比，并由此得到可去性的刻画。令 κ^ϱ 和 κ^δ 分别表示 Ca
mpanato 容量和 Hölder 容量。我们的另外两个主要结果如下：

定理 1.2. 设 $\mathcal{L}$ 是一个次数为 $\lambda \in [1, Q)$ 的左不变微分算子，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的。对于紧集 $K \subset \mathbb{G}$ 和 $\varrho \in [\lambda, Q]$，有：

$$\mathcal{H}_\infty^{\varrho-\lambda}(K) \lesssim \kappa^\varrho(K) \lesssim \mathcal{H}_\infty^{\varrho-\lambda}(K).$$

定理1.3. 设 $\mathcal{L}$ 是一个次数为 $\lambda \in [1, Q)$ 的左不变微分算子，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的。对于紧集 $K \subset \mathbb{G}$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$，有：

$$\mathcal{H}_{\infty}^{Q-\lambda+\delta}(K) \lesssim \kappa^{\delta}(K) \lesssim \mathcal{H}_{\infty}^{Q-\lambda+\delta}(K).$$

证明定理1.2 和1.3 的思路受到 Verdera 的一项结果启发 [23]。

我们还考虑 $L^p{}_{\text{loc}}$，$p \in [1, \infty)$ 的可去集，并可通过与证明定理1.1类似的方式对其进行刻画。

本文结构如下。第2 节介绍有关 Carnot 群和微分算子的必要背景。第4 节阐述 Harvey-Polking 引理的一种推广，以及一种更适合我们计算的豪斯多夫测度版本。其余各节将通过各种函数空间的容量来刻画可去集。

致谢。我要感谢我的导师 Vasilis Chousionis，他向我介绍了这一课题，并在本文写作过程中提出了许多有益的意见。我还要感谢 Surath Fernando 在本项目期间给予的宝贵建议和意见。我获得了 NSF资助项目2247117 的部分资助。

2. 定义与预备知识

2.1. **Carnot 群**。 A*Carnot* 群，记作 $\mathbb{G}$，是一个连通、单连通且幂零的李群，其李代数具有如下形式的分层

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{v}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{v}_s, \quad [\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_i] = \mathfrak{v}_{i+1} \text{ for } i = 1, \cdots, s-1, \quad [\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_s] = \{0\}$$

且 $\mathfrak{v}_1$，$\cdots$，$\mathfrak{v}_s$ 是 $\mathfrak{g}$的非零子空间。我们称整数 $s \geq 1$ 为 $\mathbb{G}$的步 。将 $\mathbb{G}$ 的群运算记作 $\cdot$，将单位元 $\mathbb{G}$ 记作 0。我们写作 $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N,\ \cdot)$。注意，对于 $i = 1$，$\cdots$，$s-1$，条件 $[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_i] = \mathfrak{v}_{i+1}$意味着 $\mathfrak{v}_1$通过李代数生成 $\mathfrak{g}$。我们称 $\mathfrak{v}_1$ 为李代数的水平层 ，而 $\mathfrak{v}_1$ 的元素称为水平向量场。令，

$$m_1 := \dim(\mathfrak{v}_1). \tag{2.1}$$

$\mathfrak{g}$ 的元素是左不变向量场。根据 $\mathbb{G}$的条件，指数映射 $\exp:\ \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$ 是一个整体微分同胚。因此，$\mathfrak{g}$ 中的元素作用于光滑函数 f 的方式为，

$$(Xf)(x) = Xf(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(f(x \cdot \exp(tX))\right). \tag{2.2}$$

给定任意一个左不变向量场 $X \in \mathfrak{g}$，我们也可以定义一个右不变向量场$\sim X$，如下：

$$(\widetilde{X}f)(x) = \widetilde{X}f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(f(\exp(tX) \cdot x)\right). \tag{2.3}$$

~注意，方程（2.2）和（2.3）只有在找到函数 Xf 和 $\widetilde{X}f$ 之后才有定义。一旦找到这两个函数，它们的定义就变成对 t- 变量的求导，而 x-变量则视为常数。

设 X 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个向量场，其形式为 $Xh(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\partial_j h(x)$，其中 h 是一个足够光滑的函数。令

$$XI(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}$$

并注意

$$Xh(x) = \langle \nabla h(x), XI(x) \rangle \tag{2.4}$$

其中，∇ 是欧几里得梯度。

在 $\mathfrak{v}_1$上固定一个内积。从现在起，我们将取 $\mathfrak{v}_1$ 的一个基，由某种特定类型的元素正交归一基组成，称为 $\mathfrak{v}_1$的雅可比基。下面介绍其性质。

命题 2.1。 *[2, 命题 1.2。16]* 设 $j \in \{1, \cdots, N\}$ 给定。存在且仅存在一个向量场，记作 X_j，它由以下任一等价条件刻画：

(a) $X_j|_0 = \partial_j|_0$, *i.e.*

$$X_j\varphi(0) = \partial_j\varphi(0) \quad \textit{for all } \varphi \in C^\infty.$$

(ii) 若 e_j 表示 $\mathbb{R}^N$的标准基中的第 j个元素，则

$$X_j(0) = e_j.$$

满足上述任一条件的 X_j 称为雅可比向量场，并将元素集合 $\mathcal{X} = \{X_1, \cdots, X_{m_1}\}$ 称为 $\mathfrak{v}_1$的雅可比基。现在定义次拉普拉斯算子 为微分算子 $\mathcal{L}$，其定义如下：

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m_1} X_i^2 = \sum_{i=1}^{m_1} X_i(X_i).$$

其中每个 X_i 都是 $\mathfrak{v}_1$的雅可比基中的一部分。

现在定义 $\mathbb{G}$上的卡诺-卡拉西奥多里距离 。此定义引自[2, 定义 5.2.2]。设 $\mathcal{X} = \{X_1, \cdots, X_{m_1}\}$ 为 $\mathfrak{v}_1$的雅可比基。若分段光滑路径 $\gamma\colon [0, T] \to \mathbb{G}$ 满足

$$\langle \dot\gamma(t), \xi\rangle^2 \le \sum_{i=1}^{m_1} \langle X_j I(\gamma(t)), \xi\rangle^2 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2.5}$$

并且几乎处处（就 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度而言） $t \in [0, T]$。令 $S(\mathcal{X})$ 为所有 $\mathcal{X}$-次单位路径构成的集合，并令

$$\ell(\gamma) = T$$

若 $[0, T]$ 是 $\gamma \in S(\mathcal{X})$ 的区域。则 Carnot–Carathéodory（CC）距离为，

$$d(x, y) := \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \in S(\mathcal{X}), \gamma(0) = x, \gamma(T) = y\} \tag{2.6}$$

相应的度量为，

$$\|y^{-1} \cdot x\| := d(x, y). \tag{2.7}$$

于是，开球取为 $B(x, r) := \{y\colon d(y, x) < r\}$。CC 距离是对称的，即 $d(x, y) = d(y, x)$，这也意味着对所有 $p \in \mathbb{G}$ 都有 $\|p^{-1}\| = \|p\|$。对于 $t > 0$，定义 $\delta_t\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，使得当 $X \in \mathfrak{v}_i$ 时，$\delta_t(X) = t^i X$，并通过线性性将其延拓到整个 $\mathfrak{g}$。通过指数映射的共轭， δ_t 在 $\mathbb{G}$ 上诱导出一个自同构，我们也记作 δ_t。那么 $(\delta_t)_{t>0}$ 是 $\mathbb{G}$ 上的一参数膨胀族，满足对所有 $x, y \in \mathbb{G}$， $d(\delta_t(x)\ \delta_t(y)) = td(x, y)$。注意，这意味着对所有 $p \in \mathbb{G}$ 都有 $\|\delta_t(p)\| = t\|p\|$。 δ_t 的雅可比行列式等于 t^Q，其中

$$Q = \sum_{i=1}^{s} i \dim \mathfrak{v}_i \tag{2.8}$$

是 $\mathbb{G}$ 的齐性维数。于是，根据指数映射， $\mathbb{G}$ 与 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^N$微分同胚， $N = \sum_{i=1}^{s}$，维数为 $\mathfrak{v}_i$。$\mathbb{G}$ 上的哈尔测度由指数映射从 $\mathfrak{g}$ 上的勒贝格测度诱导而来；哈尔测度与度量空间 $(\mathbb{G},\ d)$ 中的 Q维豪斯多夫测度仅相差一个常数。本文几乎只使用 CC 距离，因为它满足三角不等式。

对于引理 3.11，证明使用了不同的度量。次拉普拉斯算子有唯一的基本解 Γ。以下事实的证明可见于 [2, 第 5]。

命题 2.2。对于所有 $t > 0$和 $p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$,

(i) $\Gamma(p^{-1}) = \Gamma(p)$,(ii) $\Gamma(\delta_t(p)) = t^{2-Q}\Gamma(p)$,(iii) $\Gamma(p) > 0$.

这些事实使我们能够用 Γ 来定义一个范数。函数

$$\|p\|_\Gamma = \begin{cases} \Gamma(p)^{1/(2-Q)} & \text{if } p \in \mathbb{G}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{if } p = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

定义了一个对称齐次范数，它在原点之外 C^∞ 。对称的意思是 $\|p^{-1}\|_\Gamma = \|p\|_\Gamma$ 对所有 $p \in \mathbb{G}$。现在令

$$d_\Gamma(x, y) = \|y^{-1} \cdot x\|_\Gamma \tag{2.10}$$

为由 $\|\cdot\|_\Gamma$ 诱导的左不变拟距离。

取 $\mathcal{X} = \{X_1, \cdots, X_{m_1}\}$ 为 $\mathfrak{v}_1$ 的雅可比基，我们定义水平梯度为

$$\nabla_{\mathbb{G}} f = (X_1 f, \cdots, X_{m_1} f) \tag{2.11}$$

其中， f 是在 $\mathbb{G}$ 的某个开集上定义的实值函数。此外，我们可以将水平散度定义为

$$\operatorname{div}_{\mathbb{G}} F = X_1 F_1 + \cdots + X_{m_1} F_{m_1}$$

其中， $F = (F_1, \cdots, F_{m_1})$ 是定义在 $\mathbb{G}$ 的某个开集上的向量场。最后，卷积运算 $*$ 将表示为

$$f * g(x) := \int f(y) g(y^{-1} \cdot x)\, dy = \int f(x \cdot p^{-1}) g(p)\, dp. \tag{2.12}$$

卷积不满足交换律，因为 $\mathbb{G}$是非阿贝尔的。关于 Carnot 群的更多背景知识，请参见 [2]和 [11]。

2.2. 左不变齐次算子与基本解。 对于任意 $A \subset \mathbb{G}$，记 $C_0^\infty(A)$ 为所有支集包含于 A 中的 C^∞ 函数的集合。对于开集 Ω，记 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 为 Ω 上的分布空间，其测试函数空间为 $C_0^\infty(\Omega)$，并赋予 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 局部凸拓扑，且记 $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{G})$。在讨论分布时，符号 $\langle T, \varphi\rangle$ 表示分布 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 与测试函数 $\varphi \in C_0^\infty$之间的配对。

我们称分布 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 是次数为 λ 的齐次分布，若 $\langle T, \varphi \circ \delta_t\rangle = t^{-Q-\lambda}\langle T, \varphi\rangle$ 对所有 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 均成立。若一个分布在 0 以外连续且次数为 $\lambda - Q$ 齐次，则称其为型为 λ的核。若微分算子 $\mathcal{L}$ 满足以下条件，则称其为次数为 λ齐次，或称为 λ-齐次:

$$\mathcal{L}(T \circ \delta_t) = t^\lambda (\mathcal{L}T) \circ \delta_t \quad \text{for all } T \in \mathcal{D}'. \tag{2.13}$$

此外，若对任意开集 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 以及 Ω 上满足 $\mathcal{L}T = F$的两个分布 T和 F，有 $F \in C^\infty(\Omega)$ 蕴含 $T \in C^\infty(\Omega)$，则称微分算子 $\mathcal{L}$ 是亚椭圆的。我们称满足 $\mathcal{L}f = 0$的函数 f 为 $\mathcal{L}$-解。

Folland 提出的次黎曼几何中的一个基本结果，讨论了这类微分算子的基本解的存在性。令 $\mathcal{L}^t$ 表示微分算子 $\mathcal{L}$的转置。

定理 2.3. *[12, 定理 2.1]* 设 $\mathcal{L}$ 是 *Carnot* 群上的一个微分算子。假设 $\mathcal{L}$ 是次数为 λ 的齐次算子，$0 < \lambda < Q$，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的。则存在唯一一个类型为 λ 的核 K，它是 $\mathcal{L}$ 在 0 处的基本解，即 $\mathcal{L}K = \delta$。

对于 α， $x \in \mathbb{G}$ 定义 $\tau_\alpha \colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}$，使得 $\tau_\alpha(x) := \alpha \cdot x$。注意，根据李群的定义， τ_α是光滑的。则微分算子 $\mathcal{L}$ 是左不变的，当且仅当

$$\mathcal{L}(T \circ \tau_\alpha) = (\mathcal{L}T) \circ \tau_\alpha \quad \text{for all } \alpha \in \mathbb{G} \text{ and } T \in \mathcal{D}' \tag{2.14}$$

例 2.4。 设 $\{X_1, \cdots, X_{m_1}\}$ 是 $\mathfrak{v}_1$的一组基。那么 $\mathcal{L} \colon = \sum_{i=1}^{m_1} X_i^2$称为定义在 次拉普拉斯算子上的 $\mathbb{G}$。容易验证， $\mathcal{L}$ 是左不变的、次数为2的齐次算子，且是自伴的。此外，根据 Hörmander 定理 [2,（前言中的定理 1]）， $\mathcal{L}$ 是亚椭圆的。

定义 2.5。 设 $\mathcal{L}$ 是一个线性偏微分方程， $\mathcal{F}$ 是一个分布空间。若集合 $K \subset \mathbb{G}$ 对于 $\mathcal{L}$-解在 $\mathcal{F}$ 中是可去的，则对于任意区域 Ω 和任意满足 $\mathcal{L}f = 0$在 Ω 中的元素 $f \in \mathcal{F}(\Omega)$，都有 $\mathcal{L}f = 0$ 在 Ω 中成立。

注 2.6。 请注意，此可去性的定义并未假设 K 是Ω的子集。这使得理解可去集时出现了一些有趣的复杂情况。例如，一个自然的问题是：可去性是否具有单调性？换言之，如果 E（相对于某个分布类和偏微分方程）是可去的，且 $F \subset E$，这是否意味着 F也可去？当 K 不假设为Ω 的子集时，如定义 2.5所示，从定义中无法明确判断单调性是否成立。不过，对于我们所研究的微分算子和函数空间，本文中的结果实际上将证明可去性具有单调性。

我们记述一个简单但非常有用的命题，其证明可见于[2,第 32]页。

命题 2.7。 设 f 是次数为 $m \in \mathbb{R}$ 的光滑齐次函数，且 X 是次数为 $n \in \mathbb{R}$的线性微分算子。则 Xf 是次数为 $m - n$ 的齐次函数。

注 2.8。 不难检查，证明命题 2.7 时所采用的同一证明，在将光滑性条件放宽为 $f \in C^\infty($ $\mathbb{G}\backslash\{0\})$时同样成立。特别地，如果 k 是一个 λ 型的核，且 X 是次数为 m的线性微分算子，那么由于 k 是$\mathbb{G}\backslash\{0\}$上的光滑函数，我们有 Xk 是在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上既光滑又齐次的函数，其次数为 $\lambda - Q - m$。这是因为 k 是在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上次数为 $\lambda - Q$ 的光滑齐次函数。

以下内容对于研究次黎曼几何的人而言是众所周知的，但我们仍然记下证明。

命题 2.9. 假设 f 既是次数为 λ 的齐次函数，又在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上连续。那么，

$$|f(p)| \leq C\|p\|^\lambda$$

其中常数 $C > 0$仅依赖于 f 和 $\mathbb{G}$。

证明。 令 $\Sigma := \{p \colon \|p\| = 1\}$。由于 $\mathbb{G}$ 上的拓扑与 $\mathbb{R}^N$上的拓扑一致，我们得到 Σ 是紧的，因为 Σ 是闭且有界的。此外， Σ 不包含原点。因此，由连续性可知，存在 $p_0 \in \Sigma$ 使得 $|f(p)| \leq |f(p_0)| =: C$ 对所有 $p \in \Sigma$均成立。现在任取$p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$。那么，由 f的齐次性，

$$\begin{aligned} |f(p)| &= |f(\delta_{\|p\|} \circ \delta_{\|p\|^{-1}}(p))| \\ &= \|p\|^\lambda |f(\delta_{\|p\|^{-1}}(p))| \\ &\leq C\|p\|^\lambda \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

最后，本文的部分内容将使用一种特定的多重指标记号和乘积法则。设 m_1 如（2.1）所示。对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell) \in \{1, \cdots, m_1\}^\ell$ 记作

$$X_\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_\ell} \quad \text{and} \quad |\alpha| = \ell. \tag{2.15}$$

我们描述一种乘积法则，其主要目的是追踪所涉及算子的齐次度。固定 $\alpha \in \{1, \cdots, m_1\}^\ell$。对于 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_\ell)$，其中 $\beta_i \in \{0, 1\}$ 对所有 i，令

$$X_\alpha^\beta = X_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots X_{\alpha_\ell}^{\beta_\ell}. \tag{2.16}$$

我们约定 $X_{\alpha_i}^0$ 表示恒等算子 I，即不施加任何导数。于是，当 $\beta_i = 0$ 时，$X_{\alpha_i}^{\beta_i} = I$；当 $\beta_i = 1$时，$X_{\alpha_i}^{\beta_i} = X_{\alpha_i}$。因此，我们得到如下结果：

$$X_\alpha^\beta \text{ is of length } \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i. \tag{2.17}$$

现在，对于 ψ，$\varphi \in C^\infty$，可以验证乘积法则为：

$$X_\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} X_\alpha^\beta(\psi) X_{\alpha_1}^{1-\beta_1} \cdots X_{\alpha_\ell}^{1-\beta_\ell}(\varphi). \tag{2.18}$$

简而言之，对于固定的 β，令 ${}^*X_\alpha^\beta = X_{\alpha_1}^{1-\beta_1} \cdots X_{\alpha_\ell}^{1-\beta_\ell}$和$\beta = \{\overline{0}\}^\ell$。最后注意，对于满足 $|\alpha| = \ell$ 的X_α，有 2^ℓ 种可能的 β可供选择。

3. Lipschitz 调和函数的容量与可去性

本节中我们将考虑的唯一微分算子是次拉普拉斯算子。设$\mathcal{X} = \{X_1, \cdots, X_{m_1}\}$ 为 $\mathfrak{v}_1$ 的雅可比基（详见第 2 节）。回顾一下，次拉普拉斯算子为：

$$\mathcal{L} := \sum_{i=1}^{m_1} X_i^2 = \sum_{i=1}^{m_1} X_i(X_i). \tag{3.1}$$

那么 $\mathcal{L}$ 是左不变的、次数为2的齐次算子，并且是自伴的。根据 Hörmander 定理 [2, 前言中的定理 1]，$\mathcal{L}$是亚椭圆的。因此，存在一个 2 型核2，记作 Γ，它是 $\mathcal{L}$的基本解。对于函数 f，定义其水平梯度如下：

$$\nabla_{\mathbb{G}} f := (X_1 f, \cdots, X_{m_1} f) \tag{3.2}$$

只要右端有意义。

定义 3.1（Lipschitz 函数）。设 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 是一个开集，令 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为一个函数。若存在常数 $C > 0$ 使得下式成立，我们称 $f \in$ 属于 Lip(Ω)：

$$|f(x) - f(y)| \le C d(x, y) \text{ for all } x, y \in \Omega.$$

将满足条件的最小 C 记为 Lip(f)，并令 Lip $=$ Lip($\mathbb{G}$)。

定义 3.2（局部 Lipschitz 函数）。设 $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ 为一个函数。若对每个紧集 E，都存在常数 $C = C(E) > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \le C d(x, y) \quad \text{for all } x, y \in E.$$

定义 3.3 (Lipschitz 容量)。有界集 $K \subset \mathbb{G}$ 相对于 Lip 和次拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ (如（3.1）所给出)的容量定义为：

$$\kappa(K) := \sup\{|\langle \mathcal{L} f, 1\rangle| : f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}, \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^\infty} \le 1, \mathrm{supp}(\mathcal{L} f) \subset K\}.$$

注 3.4。Lipschitz 容量的定义最初由 Paramonov 提出 [20,定义 2。1] 在欧几里得空间中，并附加条件 $\nabla f(\infty) = 0$，其中 ∇ 是欧几里得梯度。这个附加条件使得我们可以用一种方便的方式重写分布。更具体地说，可以得到如下分布等式：

$$f = \Phi * \Delta f + c$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子，Φ 是 Δ的基本解，而 c 是一个常数。这个关系对我们的目的并非必需，因此我们省略条件 $\nabla f(\infty) = 0$。

推论 3.6 指出，如果一个函数具有有界水平梯度，那么它就是 Lipschitz 连续的。下面的引理将有助于我们证明这一点，它本质上是 [10, 引理 31]的一半。

引理 3.5. 设 $f\colon \mathbb{G}\to\mathbb{R}$ 是局部利普希茨函数，且对某个有限常数C有 $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|\le C$。那么，$f$ 是 *Lipschitz* 函数，并且

$$Lip(f)\le \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^\infty}\le C.$$

证明。固定 x 和 y。回顾一下，$d(x,y)$ 定义为连接x和 y的次单位路径 γ上的下确界。根据 [2, 定理 5.15.5]，此下确界实际上是最小值。因此，取 $\gamma\colon [0,T]\to\mathbb{G}$，使得 $T=d(x,y)$ 且 $\gamma(0)=x, \gamma(T)=y$。令 $\mathrm{Im}(\gamma)=\{\gamma(t)\colon t\in[0,T]\}\subset\mathbb{G}$。由于 γ连续，$\mathrm{Im}(\gamma)$ 是紧集。由于 f 是局部利普希茨函数，我们有 $M:=\mathrm{Lip}(f\,\mathrm{Im}(\gamma))<\infty$。现在证明 $f\circ\gamma$ 在 $[0,T]$上是 Lipschitz 函数。取 $a,b\in[0,L]$。那么，

$$|f\circ\gamma(a)-f\circ\gamma(b)|\le Md(\gamma(a),\gamma(b))\le M\mathrm{Lip}(\gamma)|a-b|$$

这表明 $f\circ\gamma$ 是 Lipschitz 的。因此，

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)|=|f\circ\gamma(0)-f\circ\gamma(T)| &= \left|\int_0^T (f\circ\gamma)'(s)\,ds\right| \\
&= \left|\int_0^T \langle f(\gamma(s)),\,\dot\gamma(s)\rangle\,ds\right| \\
&\overset{(2.5)}{\le} \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{m_1}(\langle X_j I(\gamma(s)),(\nabla f)(\gamma(s))\rangle)^2\right)^{1/2} ds \\
&= \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{m_1}[(X_j f)(\gamma(s))]^2\right)^{1/2} \\
&\le \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^\infty} T \\
&= \|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^\infty} d(x,y)
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

推论 3.6. 设 $f\colon \mathbb{G}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足 $\|\nabla_{\mathbb{G}} f\|_{L^\infty}\le C$，其中某个有限常数为 C。那么 f 是 *Lipschitz* 的。

证明。根据 [定理 1.4，[13]]，f 是局部 Lipschitz 的。然后利用引理 3.5，可得 f 是 Lipschitz 的。 □

由定理 1.2和 1.3，人们可能会试图证明$\mathcal{H}_\infty^{Q-1}(K)\sim\kappa(K)$对一个紧集 K 成立，再将可去性作为推论证明出来。但这种做法实际上行不通。事实上，根据[7, 定理 1.2]，存在一个紧集 $K\subset\mathbb{G}$，使得 $\mathcal{H}_\infty^{Q-1}(K)>0$，但 $\kappa(K)=0$。相反，我们可以通过更直接的方法证明可去性。我们将先说明可去性刻画的证明过程，然后再证明所需的引理。

定理 3.7 (Lip 的可去性刻画)。设 $K\subset\mathbb{G}$ 有界。当且仅当 $\kappa(K)=0$时，K 对 *Lip* 中的 $\mathcal{L}$-解是可去的。

证明。假设 K 是可去的，并取满足 $\mathrm{supp}(\mathcal{L}f)\subset K$ 在分布意义下成立的 $f\in\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}$。将可去性的定义应用于区域 $\Omega=\mathbb{G}$，即可自动得到$\mathcal{L}f\equiv 0$ 在 $\mathbb{G}$上成立。这给出 $\kappa(K)=0$。

对于另一个方向，我们将使用逆否命题。假设 K 对于 Lip 中的$\mathcal{L}$-解不是可去的。那么存在一个区域 D 和一个局部利普希茨函数 $f\colon D\to\mathbb{R}$

满足 $\mathcal{L}f = 0$在 $D\backslash K$ 中，但 $\mathcal{L}f \neq 0$在 D中。因此， f 在分布意义下不是一个 $\mathcal{L}$-解，这意味着存在 $\varphi \in C_0^\infty(D)$，使得 $|\langle \mathcal{L}f,\ \varphi\rangle| = |\langle \varphi\mathcal{L}f,\ 1\rangle| > 0$。注意 $\mathrm{supp}(\varphi\mathcal{L}f) \subset K$。令 $f_\varphi = (\varphi\mathcal{L}f) * \Gamma$。 $\mathcal{L}$ 的左不变性给出，

$$\mathcal{L}(f_\varphi) = \varphi\mathcal{L}f * \mathcal{L}\Gamma = \varphi\mathcal{L}f$$

使得 $\mathrm{supp}(\mathcal{L}f_\varphi) \subset K$。由引理 3.8、3.13 和 3.10 可得 $f_\varphi \in \mathrm{Lip}$ 且 $\|\nabla_{\mathbb{G}} f_\varphi\|_{L^\infty} =: A < \infty$。因此，

$$\kappa(K) \geq |\langle \mathcal{L}(f_\varphi/A), 1\rangle| = |\langle \varphi\mathcal{L}f, 1\rangle|/A = |\langle \mathcal{L}f, \varphi\rangle|/A > 0$$

证明完毕。 □

现在我们证明以下必要的引理，它们说明 $f_\varphi = \varphi\mathcal{L} * \Gamma$ 具有有界水平梯度的利普希茨性质。我们首先为形如$\varphi\mathcal{L}f * \Gamma$的对象建立一个分布公式。设 f 是一个局部利普希茨函数，并取 $\psi,\ \varphi \in C_0^\infty$。由于 $\mathcal{L}$ 是自伴的，$\langle \varphi\mathcal{L}f,\ \psi\rangle = \langle f,\ \mathcal{L}(\psi\varphi)\rangle$。此外，根据 [2, 第 1]，

$$\mathcal{L}(\psi\varphi) = \psi\mathcal{L}\varphi + 2\langle \nabla_{\mathbb{G}}\psi, \nabla_{\mathbb{G}}\varphi\rangle + \varphi\mathcal{L}\psi.$$

由于实值函数的水平梯度在 $\mathbb{R}^{m_1}$中生成一个向量，上面的内积就是 $\mathbb{R}^{m_1}$上的点积。这两个等式现在给出：

$$\begin{aligned}\langle \varphi\mathcal{L}f, \psi\rangle &= \langle f, \psi\mathcal{L}\varphi\rangle + \langle f, 2\sum_{i=1}^{m_1} X_i\psi X_i\varphi\rangle + \langle f, \psi\mathcal{L}\varphi\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}(f\varphi), \psi\rangle - \langle \sum_{i=1}^{m_1} 2X_i(fX_i\varphi), \psi\rangle + \langle f\mathcal{L}\varphi, \psi\rangle\end{aligned}$$

因此，按分布意义，

$$\psi\mathcal{L}f = \mathcal{L}(f\psi) - 2\sum_{i=1}^{m_1} X_i(fX_i\psi) + f\mathcal{L}\psi.$$

因此，根据 [12, 推论 2.8]，

$$\varphi\mathcal{L}f * \Gamma = f\varphi - 2\sum_{i=1}^{m_1} X_i(fX_i\varphi) * \Gamma + f\mathcal{L}\varphi * \Gamma. \tag{3.3}$$

因此，只需证明右端（3.3）中的每个函数都是 Lipschitz 的，并且具有有界水平梯度。最容易证明的是 $f\varphi$ 和 $f\mathcal{L}\varphi * \Gamma$，所以我们从它们开始。

引理 3.8。 设 $f \in Lip_{loc}$ 且 $\varphi \in C_0^\infty(B(a,\delta))$。则 $f\varphi \in Lip$ 且 $\|\nabla_{\mathbb{G}}(f\varphi)\|_{L^\infty} < \infty$。

证明。 分层中值定理，即 [2, 定理 20.3。1], 表明，对于 $\psi \in C^1$ 存在常数 c 和 b，它们只依赖于 $\mathbb{G}$以及卡诺-卡拉泰奥多里度量，使得

$$|\psi(p\cdot h) - \psi(p)| \leq cd(h) \sup_{z:d(z)\leq bd(h)} |(X_1\psi(p\cdot z), \cdots, X_{m_1}\psi(p\cdot z))|.$$

因此， φ是 Lipschitz。现在我们证明 $f\varphi$是 Lipschitz。取 $x, y \in \mathbb{G}$。若 $x \notin B(a,\delta)$ 和 $y \notin B(a,\delta)$ 均成立，则显然 $|f(x)\varphi(x) - f(y)\varphi(y)| = 0$，于是结论得证。现在假设 $x, y \in B(a,\delta)$。令 $M = \mathrm{Lip}(f \quad B(a,\delta))$。那么，

$$\begin{aligned}|f(x)\varphi(x) - f(y)\varphi(y)| &\leq |f(x)\varphi(x) - f(y)\varphi(x)| + |f(y)\varphi(x) - f(y)\varphi(y)| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty Md(x,y) + \|f\|_{L^\infty(B(a,\delta))}\mathrm{Lip}(\varphi)d(x,y)\end{aligned}$$

由此完成了 $x, y \in B(a,\delta)$ 的情形。对于最后一种情形，不失一般性，假设 $x \in B(a,\delta)$ 且 $y \notin B(a,\delta)$。由于 $\varphi \in \mathrm{Lip}$ 且 $\varphi(y) = 0$，

$$\begin{aligned}|f(x)\varphi(x) - f(y)\varphi(y)| &\leq \|f\|_{L^\infty(B(a,\delta))}|\varphi(x)| \\ &= \|f\|_{L^\infty(B(a,\delta))}|\varphi(x) - \varphi(y)|\end{aligned}$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(B(a,\delta))}\mathrm{Lip}(\varphi)d(x,y)$$

因此，在所有情形下，我们都有 $f\varphi \in \mathrm{Lip}$。

令 $g = f\varphi \in \mathrm{Lip}$。根据 Pansu 可微定理 [19]， $Xg(x)$ 几乎处处存在$x \in \mathbb{G}$，其中 X 是 $\mathcal{X}$ 中的任意元素。此外， [10, 引理 3.1] 指出，对于 Lipschitz 函数 $f:\ \mathbb{G} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Lip}(f) \geq \sup\{|Xf(x)| : X \in \mathcal{X},\, x \in \mathbb{G},\, Xf(x) \text{ exists}\}.$$

因此， $\|\nabla_{\mathbb{G}} g\|_{L^\infty} < \infty$。 □

现在我们转到 $f\mathcal{L}\varphi * \Gamma$，首先给出一个衰减估计。

命题 3.9。 令 $\xi(x) = f\mathcal{L}\varphi * X\Gamma(x)$ 对于 $f \in Lip_{loc}$ 以及 $\varphi \in C_0^\infty(B(a,\delta))$，且 X 是 $\mathcal{X}$中的任意元素。则存在 $R < \infty$ 使得

$$|\xi(x)| \leq 1 \quad \textit{for all } x \in B(a,R)^c.$$

证明。容易验证，由于 Γ 在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$ 上是次数为 $2-Q$ 的齐次函数，因此 Γ 在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上也是次数为 $2-Q$ 的齐次函数。因此，注 2.8 和命题 2.9 表明，对于所有 $p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$， $|X\Gamma(p)| \lesssim \|p\|^{1-Q}$。令 $h = f\mathcal{L}\varphi$，使得 $\mathrm{supp}(h) \subset B(a,\delta)$ 且 $M := \|h\|_\infty < \infty$。于是，

$$\begin{aligned}|\xi(x)| &= \left|\int_{B(a,\delta)} h(y)X\Gamma(y^{-1}\cdot x)\,dy\right| \\ &\leq M\int_{B(a,\delta)} \|y^{-1}\cdot x\|^{-Q}\,dy. \end{aligned} \tag{3.4}$$

CC 距离满足三角不等式且具有对称性，因此 $\|p^{-1}\cdot q\| \geq \|q\| - \|p\|$对所有 $p,\ q \in \mathbb{G}$均成立。任取 $x \in B(a,\ 2\delta)^c$。那么对于 $y \in B(a,\ \delta)$，显然

$$\|y^{-1}\cdot x\| = \|y^{-1}\cdot a\cdot a^{-1}\cdot x\| \geq \|x^{-1}\cdot a\|/2.$$

从（3.4）继续可得，

$$|\xi(x)| \lesssim M\|x^{-1}\cdot a\|^{-Q}\delta^Q$$

由于 δ 和 M 是固定的，这就完成了证明。 □

引理 3.10。 取 $f \in Lip_{loc}$ 和 $\varphi \in C_0^\infty(B(a,\ \delta))$。则由 Θ 定义的函数 $\Theta(x) := f\mathcal{L}\varphi * \Gamma(x)$ 是连续的，并满足 $\|\nabla_{\mathbb{G}}\Theta\|_{L^\infty} < \infty$。特别地，推论 3.6 给出 $\Theta \in Lip$。

证明。 命题 3.9 给出了 $R > 0$的存在性，使得

$$|X\Theta(x)| \leq 1 \quad \text{for all } x \in B(a,R)^c. \tag{3.5}$$

注记2.8 和命题 2.9 表明，对所有 $|X\Gamma(p)| \lesssim \|p\|^{1-Q}$ 均成立 $p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$ 因此，对于任意 $x \in B(a,R)$，对环域积分可得

$$\begin{aligned}|X\Theta(x)| &\lesssim \|g\|_{L^\infty(B(a,\delta))}\int_{B(a,\delta)} \|y^{-1}\cdot x\|^{1-Q}\,dy \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(B(a,\delta))}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-j-1}(R+\delta)\leq\|y^{-1}\cdot x\|<2^{-j}(R+\delta)} \|y^{-1}\cdot x\|^{1-Q}\,dy \\ &\lesssim \|g\|_{L^\infty(B(a,\delta))}\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j}(R+\delta))^{1-Q}\left|B(x,2^{-j}(R+\delta))\right| \\ &\sim \|g\|_{L^\infty(B(a,\delta))}(R+\delta)^{1-Q}\sum_{j=0}^{\infty}2^{j(Q-1)}(R+\delta)^Q 2^{-jQ} \\ &= \|g\|_{L^\infty(B(a,\delta))}(R+\delta)\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\end{aligned}$$

$$\sim \|g\|_{L^\infty(B(a,\delta))}(R+\delta).$$

结合 (3.5)，可得 $\|\nabla_{\mathbb{G}}\Theta\|_{L^\infty} \lesssim 1$。

关于连续性，只需注意到 supp $\mathcal{L}\varphi$ 是紧集，Γ 属于 L^1_{loc}，且 $f\mathcal{L}\varphi$ 是连续函数。因此，由控制收敛定理可知，Θ 是连续的。

□

现在我们可以讨论最困难的情形。为了便于理解，我们将对 Γ 应用两次微分，这会使所得函数成为次数为 $-Q$的齐次函数。然而，这些函数不一定局部可积（在原点附近），而这正是问题产生的原因。不过，利普希茨函数可以帮助我们将指数提高到 $1-Q$，此时函数便是局部可积的。

首先，我们证明一个分部积分公式。

引理 3.11。设 g 是满足 $|\nabla_{\mathbb{G}}g\|_{L^\infty} \lesssim 1$和 $\psi \in C_0^\infty$的连续函数。固定 $x \in \mathbb{G}$。那么，对于次数为 1 的齐次微分算子 Y和一个水平向量场 X，有

$$\int (Xg)(y)\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy = \int (g(y)-g(x))\psi(y)(X\widetilde{Y}\widetilde{\Gamma})(x^{-1}\cdot y)\,dy - \int (g(y)-g(x))(X\psi)(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dp.$$

证明。仅在此证明中，所有球均由拟距离 $d_\Gamma(\cdot,\ \cdot)$ 由（2.10）给出。这样做是因为此拟距离对应的球都是 C^1 区域。

首先考虑 $g \in C^1$ 的情形。令 $\varepsilon > 0$。注意，$\Gamma(y^{-1}\cdot x)$ 是定义在集合 $B(x,\ \varepsilon)^c$ 上的 y 光滑函数。然后，

$$\begin{aligned}\int (Xg)(y)\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy &= \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (Xg)(y)\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy \\ &\quad + \int_{B(x,\varepsilon)} (Xg)(y)\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy \\ &= \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (X)_y(g(y)-g(x))\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy \\ &\quad + \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}} (Xg)(y)\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy \\ &= I + II\end{aligned}$$

其中 $(X)_y$ 表示 X 对 y 变量的导数。注记 2.8和命题 2.9 表明$|Y\Gamma(p)| \lesssim \|p\|^{1-Q}$ 对所有 $p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$ 成立。对环域积分可得，

$$|II| \lesssim \|Xg\|_{L^\infty(B)}\|\psi\|_{L^\infty(B)} \int_{B(x,\varepsilon)} \|y^{-1}\cdot x\|^{1-Q}\,dy \sim \|Xg\|_{L^\infty(B)}\|\psi\|_{L^\infty(B)}\varepsilon.$$

因此，

$$|II| \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{3.6}$$

不失一般性，$X = X_1$。换言之，X 是 $\mathfrak{v}_1$的雅可比基中的第一个元素。令 $\widetilde{g} = (g,\ 0,\ \cdots,\ 0) \in \mathbb{R}^{m_1}$。然后注意到，

$$(X)_y(g(y)-g(x)) = (\mathrm{div}_{\mathbb{G}})_y(\widetilde{g}(y)-\widetilde{g}(x))$$

其中，$(\mathrm{div}_{\mathbb{G}})_y$ 表示关于 y 变量的水平散度。然后注意 e,

$$I = \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (\mathrm{div}_{\mathbb{G}})_y\left[(\widetilde{g}(y)-\widetilde{g}(x))\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\right]\,dy - \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} \langle \widetilde{g}(y)-\widetilde{g}(x), (\nabla_{\mathbb{G}})_y(\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x))\rangle\,dy$$

$$= I_a - I_b$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 I_b 的被积函数中是 $\mathbb{R}^{m_1}$上的内积。取一个球 B 使得supp $\psi \subset B$且 $B(x, 2\varepsilon) \subset B$。则 $B \cap B(x, \varepsilon)^c$是一个有界的 C^1区域。此外， $\widetilde{g}$是一个C^1 向量场。于是 [7,(3.12)]表明

$$I_a = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle (\widetilde{g}(y) - \widetilde{g}(x))\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x), \nu\rangle \alpha \, d\mathcal{S}_\Gamma^{Q-1}$$

使用supp $\psi \subset B$，其中 $\mathcal{S}_\Gamma^{Q-1}$ 是$(Q-1)$维球面豪斯多夫测度，由（2.10）诱导； α 是博雷尔函数，且 $c_1 \leq \alpha \leq c_2$ $\mathcal{S}_\Gamma^{Q-1}$ -几乎处处成立于 $\partial B(x,\varepsilon)$ 且$0 \leq c_1, c_2 < \infty$，并且 ν 是一个满足 $|\nu| = 1$的函数。令 $M = \text{Lip}(g \quad B)$。注意，

$$|g(y) - g(x)| \leq M\|y^{-1}\cdot x\| \quad \text{and} \quad |Y\Gamma(y^{-1}\cdot x)| \lesssim \|y^{-1}\cdot x\|^{1-Q} \quad \text{for all } x, y \in B. \tag{3.7}$$

此外，根据 结合 [17, 定理 4。1] 和 [3, 定理 1.2 (1.12) $\wedge$ (1.13) $\wedge$ (1.14)] 可得 s,

$$\mathcal{S}_\Gamma^{Q-1}(\partial B(x,\varepsilon)) \sim \varepsilon^{Q-1}. \tag{3.8}$$

因此，

$$|I_a| \overset{(3.7)}{\lesssim} M\|\psi\|_{L^\infty} \int_{\|y^{-1}\cdot x\| = \varepsilon} \|y^{-1}\cdot x\|\|y^{-1}\cdot x\|^{1-Q} \, d\mathcal{S}_\Gamma^{Q-1} = \varepsilon^{2-Q}\mathcal{S}_\Gamma^{Q-1}(\partial B(x,\varepsilon)) \overset{(3.8)}{\sim} \varepsilon.$$

因此，

$$I_a \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{3.9}$$

现在我们处理 I_b。根据 $\widetilde{g}$ 的定义并展开导数，

$$\begin{aligned} I_b &= \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (g(y) - g(x))(X)_y(\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x))\, dy \\ &= \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (g(y) - g(x))\psi(y)(X)_y(Y\Gamma(y^{-1}\cdot x))\, dy + \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (g(y) - g(x))(X\psi)(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\, dy. \end{aligned}$$

现在我们需要处理 $(X)_y(Y\Gamma(y^{-1}\cdot x))$。根据 [11, 第 (1.11) 页上的方程 26]，我们有

$$(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x) = -(\widetilde{Y}\widetilde{\Gamma})(x^{-1}\cdot y) \tag{3.10}$$

whe ~实 Y使用的是（2.3）中的记号。现在，由（3.10）以及的左不变性可得， X，

$$(X)_y\left((Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\right) = -(X\widetilde{Y}\widetilde{\Gamma})(x^{-1}\cdot y). \tag{3.11}$$

注意，根据（3.11），式子成立。这是由（2.2）得出的。特别要注意，对于一个 $Xf(p)$足够光滑的~~， f的定义与 p无关。因此，一旦我们对 $(X)_y$ 导数施加于 $Y\Gamma$上，就可以省略 y-下标。

容易验证，由于 Γ 在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$ 上是 $2-Q$ 次齐次的，因此我们也~有 Γ 在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上是 $2-Q$ 次齐次的。此外，由于 Y 是 1-齐次的~，我们还有 Y 是 1-齐次的。因此，应用备注 2.8 和命题 2.9 两次可得，

$$|(X\widetilde{Y}\widetilde{\Gamma})(p)| \lesssim \|p\|^{-Q} \quad \text{for all } p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}.$$

现在我们可以写成：

$$\begin{aligned} I_b &= -\int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (g(y) - g(x))\psi(y)(X\widetilde{Y}\widetilde{\Gamma})(x^{-1}\cdot y)\, dy \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}^c} (g(y) - g(x))(X\psi)(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\, dy \\ &= -I_{b_1} + I_{b_2}. \end{aligned}$$

令 M 与前文相同。于是，

$$|I_{b_1}| \lesssim M\|\psi\|_{L^\infty} \int_B \|y^{-1}\cdot x\|\|y^{-1}\cdot x\|^{-Q}\, dy = M\|\psi\|_{L^\infty} \int_B \|y^{-1}\cdot x\|^{1-Q}\, dy < \infty$$

最后一个不等式成立，是因为函数 $p \mapsto \|p\|^{1-Q}$ 属于 L^1_{loc}。同理，

$$|I_{b_2}| < \infty.$$

此外， I_{b_1} 和 I_{b_2} 中的被积函数在 $\mathbb{G}\backslash\{x\}$ 上连续（其测度为全测度）。因此，根据控制收敛定理，

$$I_b \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\int (g(y)-g(x))\psi(y)(X\widetilde{Y\Gamma})(x^{-1}\cdot y)\,dy + \int (g(y)-g(x))(X\psi)(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy. \tag{3.12}$$

结合（3.12）、（3.9）和（3.6），即可得出 $g \in C$时的结论 [1].

现在假设 g 连续且满足 $\|\nabla_{\mathbb{G}} g\|_{L^\infty} \lesssim 1$。取 $\zeta \in C_0^\infty(B(0,1))$，使得对于所有 $p \in \mathbb{G}$、$0 \le \zeta \le 1$和$\int_{\mathbb{G}} \zeta = 1$，$\zeta(p^{-1}) = \zeta(p)$。令 $\zeta_t(p) = t^{-Q}\zeta(\delta_{1/t}(p))$且 $g_t(p) = \zeta_t * g(p)$。令 $r_y : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 和 $i : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 为由 $r_y(x) := x \cdot y$ 和$i(x) := x^{-1}$定义的函数。根据李群的定义， r_y 和 i都是 C^∞ 映射（对所有 $y \in \mathbb{G}$均成立）。现在可以写为，

$$g_t(p) = \int_K \zeta_t \circ i \circ r_{p^{-1}}(q) g(q)\,dq$$

其中 K 是 $\zeta_t \circ i \circ r_{p^{-1}}$的支集，它也是一个紧集。此外，对于任意 $p \in \mathbb{G}$,

$$|g_t(p)| \le \|\zeta_t \circ i \circ r_{p^{-1}}\|_{L^\infty(K)} \|g\|_{L^\infty(K)} |K| < \infty$$

其中 $|\cdot|$ 是勒贝格测度。因此，由于 $\zeta_t(p \cdot q^{-1})$在 p中是 C^∞，我们可以将导数移入积分号内，得到 $g_t \in C^\infty$。于是，由前一种情形可得，

$$\int (Xg_t)(y)\psi(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dy = \int (g_t(y)-g_t(x))\psi(y)(X\widetilde{Y\Gamma})(x^{-1}\cdot y)\,dy - \int (g_t(y)-g_t(x))(X\psi)(y)(Y\Gamma)(y^{-1}\cdot x)\,dp.$$

根据 [24, 命题 1.28 (v)]， $g_t \to g$ 在 $\mathbb{G}$的紧子集上一致成立。因此，由于上面的每个积分都支集于 $\operatorname{supp}\psi$，令 $t \to 0$ 趋于无穷，便可得出结论。□

[~]对于函数 h，定义 $h(x) := h(x^{-1})$，在其有定义处成立。

[~]**命题 3.12**。设 $g \in Lip_{loc}$ 且 $\varphi \in C_0^\infty(B(a,\delta))$。令 $\xi(x) = g\varphi * Y\Gamma(x)$，其中 Y是一个2-齐次微分算子。则存在 $R < \infty$ 使得

$$|\xi(x)| \le 1 \quad \textit{for all } x \in B(a,R)^c.$$

证明。 证明过程与命题 3.9 的证明类似。 □

引理 3.13。 取 $f \in Lip_{loc}$，并令 $\varphi \in C_0^\infty(B(a,\delta))$。则由 Θ 定义的函数 $\Theta(x) := X_i(fX_i\varphi) * \Gamma(x)$ 是连续的，并满足 $\|\nabla_{\mathbb{G}}\Theta\|_\infty < \infty$。特别地，推论 3.6 给出 $\Theta \in Lip$。

证明。 设 $\psi = X_i\varphi$，并任取 $X \in \mathcal{X}$。命题 3.12 表明，存在 $R > 0$ 使得

$$|X\Theta(x)| \le 1 \quad \text{for all } x \in B(a,R)^c. \tag{3.13}$$

现在取 $x \in B(a,R)$。 X 的左不变性给出，

$$\begin{aligned} X\Theta(x) &= X_i(f\psi) * X\Gamma(x) \\ &= \int (X_i f(y))\psi(y) X\Gamma(y^{-1}\cdot x)\,dy + \int f(y)(X_i\psi(y))X\Gamma(y^{-1}\cdot x)\,dy \\ &=: I(x) + II(x). \end{aligned}$$

引理 3.10 的证明 $II \in$ 表明 Lip，因此我们只需证明 $I(x) \in$ Lip。

由 (3.10) 和 (3.11) 的相同推理可得，

$$(X_i)_y(X\Gamma)(y^{-1}\cdot x) = -(X_i\widetilde{X\Gamma})(x^{-1}\cdot y). \tag{3.14}$$

将 (3.14) 代入 $I(x)$ 并使用分部积分，即引理 3.11，得到

$$\begin{aligned} I(x) &= \int (X_i)_y(f(y)-f(x))\psi(y)X\Gamma(y^{-1}\cdot x)\,dy \\ &= \int (f(y)-f(x))X_i\psi(y)X\Gamma(y^{-1}\cdot x)\,dy - \int (f(y)-f(x))\psi(y)(X_i\widetilde{X\Gamma})(x^{-1}\cdot y)\,dy \\ &=: I_a(x) - I_b(x). \end{aligned}$$

同样，引理 3.10 表明 $I_a \in \mathrm{Lip}$，因此我们只需关注 I_b。

注 2.6 和命题 2.9 表明存在 $X_i p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$ 均成立。由于 $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}$ 且 $\mathrm{supp}(\psi) \subset B(a,\delta)$，因此我们有，

$$\begin{aligned} |I_b(x)| &\lesssim \mathrm{Lip}(f\llcorner \operatorname{supp}\psi)\|\psi\|_\infty \int_{B(a,\delta)} \|x^{-1}\cdot y\|^{1-Q}\,dy \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}(R+\delta)<\|x^{-1}\cdot y\|\le 2^{-j}(R+\delta)} \|x^{-1}\cdot y\|^{1-Q}\,dy \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j-1}(R+\delta))^{1-Q}\left|B(x,2^{-j}(R+\delta))\right| \\ &\sim (R+\delta)\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = R+\delta \end{aligned} \tag{3.15}$$

结合 (3.13)，可知 $\|\nabla_{\mathbb{G}}\Theta\|_\infty < \infty$。最后，按照引理 3.10 证明结尾处的相同推理可得，Θ 是连续的。证明完毕。□

4. G 中的二进划分与 Harvey-Polking 引理 $\mathbb{G}$

本节第一部分只是重述第 3 节 [9], 中的结果，因此所有证明请参见该节。

本节旨在为 Carnot 群引入一种有助于第5节和第6 节可去性结果的“二进结构”。具体而言，我们将引入一种结构，以便推广著名的 Harvey-Polking 单位分解 [14, 引理 31]。我们使用一种修正的豪斯多夫测度，但引入这一测度需要一些准备。令 $|\cdot|$ 表示勒贝格测度。

定理 4.1。 *[9, 定理 3.1]* 设 $\mathbb{G}$为齐性维数为 A的 *Carnot* 群。存在1 2-位似变换 f_1、$\cdots$、$f_M \in \mathbb{G}$、$M = 2^Q$，以及一个紧集 $T \subset \mathbb{G}$，使得 $T = \bigcup_{j=1}^{M} T_j$ 其中$T_j = f_j(T)$。此外

$$0 < |T| < \infty$$

并且当 $j \neq i$ 时 $|T_j \cap T_i| = 0$ 。

我们将 T 称为基本砖块。令 $W = \{1,\dots,M\}$。对于 $m \ge 0$ 和 $w = w_1\cdots w_m \in W^m$，我们引入如下记号

$$f_w = f_{w_1}\circ\cdots\circ f_{w_m}$$

and $T_w = f_w(T)$。我们将集合族 T_w（当 w 遍历 W^m 时）记为 $\mathcal{D}_m$.

命题 4.2. *[9,命题 3.4]*集合 T 是某个开集的闭包。

根据命题 4.2，选取一点 $p \in T$和半径 $0 < R^i < R^o$，使得 $B(p, R^i) \subset T \subset B(p, R^o)$。固定 p后，我们假设在满足前述约束的条件下，R^i 已取为尽可能大，而 R^o 已取为尽可能小。于是 $R^o < \operatorname{diam} T$。我们称 p为 T的中心，并称 R^i 和 R^o 分别为 T的内半径和外半径。

对于每个 $w \in W^m, m \geq 0$，我们将铺砌块 T_w 的中心定义为 $p_w = f_w(p)$，并将其内半径和外半径定义为

$$R_w^i = 2^{-m} R^i \quad \text{and} \quad R_w^o = 2^{-m} R^o,$$

分别为。我们有 $B(p_w, R_w^i) \subset T_w \subset B(p_w, R_w^o)$。

$\mathbb{G}$的有界子集的豪斯多夫测度和维数，可以通过使用瓦片 $\{T_w\}$构造的“二进豪斯多夫测度”来计算。通过施加膨胀，我们可以将注意范围限制在初始铺砌块 T的子集上。我们特别指出，这样做是可行的，因为我们只处理 $\mathbb{G}$的有界子集。令 $\mathcal{D}_* = \cup_{m \geq 0} \mathcal{D}_m$。对于集合 $A \subset T$和 s，$\varepsilon > 0$，定义

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D},\varepsilon}(A) = \inf \sum_i (\operatorname{diam} T_{w_i})^s$$

其中，下确界取遍由直径满足 $\operatorname{diam} T_{w_i} < \varepsilon$ 的瓦片 $T_{w_i} \in \mathcal{D}_*$ 对 A 的所有覆盖。定义 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_{\mathcal{D},\varepsilon}(A)$。对于每个 $s > 0$，$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}}$ 是 T上的博雷尔测度。如果两个瓦片的交集具有非空内部，则其中一个瓦片包含于另一个瓦片中。因此，在定义 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}}$ 时，我们不妨将注意范围限制为本质不相交覆盖。

命题 4.3。 *[9, 命题 3。5]* 对于每个 $s > 0$，都存在一个常数 $C = C(s) > 0$使得$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}}(A) \leq C\mathcal{H}^s(A)$ 对每个 $A \subset T$均成立。

以下 引理实际上用于证明命题 4.3，但我们稍后才会使用它 r.

引理 4.4。 存在一个常数 $N > 0$，使得对于任意球 $B(q, r)$，若 $r \leq R^o$ 且 $m \geq 0$ 选取为满足 $2^{-m-1} R^o \leq r < 2^{-m} R^o$，则与 $T_w \in \mathcal{D}_m$ 相交的瓦片$B(q, r)$ 的数量至多为 N。

上述引理最初是针对 $r \leq 1$在 [9, 引理 3。6], 中表述的，但在假设 $r \leq R^o$ 的情况下，同样的证明仍然成立。以下是 $\mathbb{G}$ 中 Harvey-Polking 引理的一个推广。该引理使用了（2.15）中的记号。

引理 4.5. *[9, 引理 3.8]* 设 $\{T_{w_i} : 1 \leq i \leq N\}$ 是一个由本质不相交的瓦片构成的有限集合，其中 $T_{w_i} \in \mathcal{D}_{m(i)}$。对于每个 i，存在一个函数 $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{G})$，其支集包含于 $B(p_{w_i}, 2R^o_{w_i})$，使得

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(q) = 1 \quad \textit{for all } q \in \textstyle\bigcup_{i=1}^N T_{w_i}.$$

此外，对于每个多重指标 α，都存在一个常数 $C_\alpha > 0$，使得

$$|X_\alpha \varphi_i(x)| \leq C_\alpha 2^{m(i)|\alpha|} \quad \textit{for all } x \in \mathbb{G} \textit{ and } 1 \leq i \leq N.$$

根据命题 4.3，我们已经知道新的二进豪斯多夫测度与原来的豪斯多夫测度可比，不过我们还需要证明它们的豪斯多夫内容也可比。

引理 4.6. 对于紧 $K \subset T$，我们有：

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D},\infty}(K) \sim \mathcal{H}^s_\infty(K)$$

证明。 在所有情况下，对于任意集合 $E \subset T$，$\mathcal{H}^s_\infty(E) \leq \mathcal{H}^s_{\mathcal{D},\infty}(E)$。因此只需证明另一个不等式。令 $\mathcal{S}^s_\infty$ 表示 s维球面豪斯多夫内容（相对于 CC 距离）。于是只需证明 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D},\infty}(K) \lesssim \mathcal{S}^s_\infty(K)$。给定 $\varepsilon > 0$，并用球 $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^M$ 覆盖 K，使得

$$\sum_i (2r_i)^s \leq \mathcal{S}^s_\infty(K) + \varepsilon.$$

首先假设对所有 i 都有 $r_i \leq R^o$。另一种情形显然成立，我们将在证明末尾说明。根据引理 4.4，我们可以用铺砌块 $\{T_{i,j}$ 覆盖 $B(x_i, r_i) \cap T\colon \ 1 \leq j \leq N\}$，其中 N 与 i 以及 $\operatorname{diam} T_{i,j} \sim 2r_i$ 无关。由 $\mathbb{G}$是一个倍增度量空间可知， N 与 i 无关。参见引理 3.6] 的证明。由于 $K \subset T$, K 被铺砌块 $\{T_{i,j}\}_{i,j}$ 覆盖，且对某个固定的 C，有 $\operatorname{diam} T_{i,j} \leq 2Cr_i$。令 $r =$ 为 $\max_i r_i$。于是，由于对所有 i, j，都有 $\operatorname{diam} T_{i,j} \leq 2Cr$，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{\mathcal{D},\infty}(K) \leq \mathcal{H}^s_{\mathcal{D},C2r}(K) &\leq \sum_{i,j} (\operatorname{diam} T_{i,j})^s \\ &\leq CN \sum_i (2r_i)^s \\ &\leq CN(\mathcal{H}^s_\infty(K) + \varepsilon)\end{aligned}$$

对于 $r_i \leq R^o$ for all i 的情形，证明也就完成了。

现在假设存在 i such that $r_i \geq R^o$。那么显然， T 是一个覆盖 K，因为我们已经假设了 $K \subset T$。因此，由于 $R^o \leq \operatorname{diam} T \leq 2R^o$，我们得到：

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D},\infty}(K) \leq (\operatorname{diam} T)^s \leq \sum_i (2r_i)^s \leq \mathcal{S}^s_\infty(K) + \varepsilon$$

这就完成了证明。 □

5. 容量与可去性——Campanato空间

对于第5节和第6节，不妨设任意紧 K 我们所研究的对象都满足 $K \subset T$ 通过对其进行膨胀和平移 K。

定义 Ω 上指数为 ϱ 的 Campanato 空间，记作 $L^\varrho_C(\Omega)$，由满足以下条件的函数 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 构成：

$$\sup_{B(x,r)\subset\Omega} \frac{1}{r^\varrho} \int_{B(x,r)} \left| f(y) - f_{B(z,r)} \right| dy < \infty \tag{5.1}$$

or

$$\sup \inf_{c\in\mathbb{R}} \frac{1}{r^\varrho} \int_{B(x,r)\subset\Omega} |f(y) - c| \, dy < \infty \tag{5.2}$$

其中 $f_{B(z,r)} = r^{-Q} \int_{B(z,\ r)} f(x)\, dx$。对于 $f \in L^\varrho_C(\Omega)$，将量 5.1 记为 $\|f\|_*$。此外，当 $\Omega = \mathbb{G}$ 时，令 $L^\varrho_C(\mathbb{G}) = L^\varrho_C$.

注 5.1。注意，当 $\varrho = Q$ 且 $\Omega = \mathbb{G}$ 时，我们得到有界平均振荡（BMO）函数空间。因此，上述 Campanato 空间的定义是对 BMO 的轻微推广。

现在固定一个微分算子 $\mathcal{L}$。以下定义基本上由 Harvey 和 Polking 在 [15, 定义 11]中给出。

定义 5.2（Campanato 容量）。相对于 L^ϱ_C 和 $\mathcal{L}$ 的紧 $K \subset \mathbb{G}$ 的容量定义为：

$$\kappa^\varrho(K) := \sup\left\{ |\langle \mathcal{L}f, 1\rangle| : f \in L^\varrho_C, \|f\|_* \leq 1, \operatorname{supp}(\mathcal{L}f) \subset K \right\}.$$

上文中，$\operatorname{supp}(\mathcal{L}f)$ 指的是 $\mathcal{L}f$ 的分布支集。

本节要证明的主要结果如下：

定理 5.3。设 $\mathcal{L}$ 是一个次数为 $\lambda \in [1, Q)$ 的左不变微分算子，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的。对于紧集 $K \subset T$ 和 $\varrho \in [\lambda, Q]$，有：

$$\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_\infty(K) \lesssim \kappa^\varrho(K) \lesssim \mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_\infty(K).$$

在给出证明之前，我们将证明某个函数属于 L_C^ϱ。在本节余下部分，我们将取 $\mathcal{L}$ 为一个次数为$\lambda \in [1, Q)$的左不变微分算子。由于 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的，根据定理 2.3，存在一个类型为λ的核，记为 Γ，使得 Γ 在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上是次数为 $\lambda - Q$ 的齐次函数。此外， Γ 是 $\mathcal{L}$的基本解。下面的证明本质上与 [9, 定理 4.4]中的一个方向相同。

引理 5.4. 取一个紧集 K 和 $\varrho \in [\lambda, Q]$。设 μ 是一个支集包含于 K 上的有限测度，使得$\mu(B(x, r)) \lesssim r^{\varrho-\lambda}$ 对任意球都成立。那么，

$$f(x) := \mu(x) * \Gamma = \int \Gamma(y^{-1} \cdot x)\, d\mu(y) \in L_C^\varrho.$$

证明. 命题 2.9 表明 $|\Gamma(p)| \lesssim \|p\|^{\lambda-Q}$ 对所有 $p \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$都成立。取一个球 $B(x_0, r)$ 并令 $\mu_1 := \mu \llcorner_{B(x_0,2r)}$ 以及 $\mu_2 := \mu \llcorner_{B(x_0,2r)^c}$。由富比尼定理和命题2.9,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{B(x_0,r)} \int \Gamma(y^{-1} \cdot x)\, d\mu_1(y)\, dx\right| &\lesssim \int_{B(x_0,2r)} \int_{B(x_0,r)} \|y^{-1} \cdot x\|^{\lambda-Q}\, dx\, d\mu_1(y) \\
&\lesssim \int_{B(x_0,2r)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}3r \le \|y^{-1}\cdot x\| < 2^{-j}3r} \|y^{-1} \cdot x\|^{\lambda-Q}\, dx \right) d\mu_1(y) \\
&\lesssim \int_{B(x_0,2r)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j-1}r)^{\lambda-Q} \int_{\|y^{-1}\cdot x\| < 2^{-j}3r} dx \right) d\mu_1(y) \\
&\sim \int_{B(x_0,2r)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\lambda} r^\lambda \right) d\mu_1(y) \\
&\lesssim r^\varrho.
\end{aligned}$$

因此,

$$\int_{B(x_0,r)} |\mu_1(x) * \Gamma|\, dx \lesssim r^\varrho. \tag{5.3}$$

对于 $x \in B(x_0, r)$,

$$|\mu_2(x) * \Gamma - \mu_2(x_0) * \Gamma| \le \int_{B(x_0,2r)^c} \left|\Gamma(y^{-1} \cdot x) - \Gamma(y^{-1} \cdot x_0)\right| d\mu(y).$$

那么，由于 Γ 在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上是次数为 $\lambda - Q$ 的齐次函数，依据 [11, 命题 3.1.40]

$$|\Gamma(X \cdot Y) - \Gamma(X)| \lesssim \|Y\|\|X\|^{\lambda-Q-1} \quad \text{for all } \|Y\| \le \|X\|/2. \tag{5.4}$$

S令 $X = y^{-1} \cdot x_0$ 并且 $Y = x_0^{-1} \cdot x$ 我们有 $\|Y\| \le r \le \|X\|/2$. 因此（5.4）给出 ,

$$\begin{aligned}
\left|\Gamma(y^{-1} \cdot x) - \Gamma(y^{-1} \cdot x_0)\right| &\lesssim \|x_0^{-1} \cdot x\|\|y^{-1} \cdot x_0\|^{\lambda-Q-1} \\
&\le r\|y^{-1} \cdot x_0\|^{\lambda-Q-1}.
\end{aligned}$$

因此，对所有 $x \in B(x_0,\ r)$,

$$\begin{aligned}
|\mu_2(x) * \Gamma - \mu_2(x_0) * \Gamma| &\lesssim r \int_{B(x_0,2r)^c} \|y^{-1} \cdot x_0\|^{\lambda-Q-1}\, d\mu(y) \\
&= r \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j 2r \le \|y^{-1}\cdot x\| < 2^{j+1}2r} \|y^{-1} \cdot x_0\|^{\lambda-Q-1}\, d\mu(y) \\
&\lesssim r \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\lambda-Q-1)} r^{\lambda-Q-1} \mu(B(x_0, 2^{j+1}2r)) \\
&\lesssim r^{\varrho-Q}.
\end{aligned}$$

从而，

$$\int_{B(x_0,r)} |\Gamma * \mu_2(x) - \Gamma * \mu_2(x_0)|\, dx \lesssim r^{\varrho}. \tag{5.5}$$

结合（5.3）和（5.5），得到：

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,r)} |\mu(x) * \Gamma - \mu_2(x_0) * \Gamma|\, dx &\leq \int_{B(x_0,r)} |\mu_1(x) * \Gamma|\, dx + \int_{B(x_0,r)} |\mu_2(x) * \Gamma - \mu_2(x_0) * \Gamma|\, dx \\ &\lesssim r^{\varrho}.\end{aligned}$$

根据（5.2），有 $f \in L^{\varrho}_C$。 □

定理 5.3 的证明。首先证明下界。若 $\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}(K) = 0$，则该不等式显然成立，因此假设 $\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}(K) > 0$。由弗罗斯曼引理，存在一个测度 μ，其支集包含于 K，使得对所有 $x \in \mathbb{G}$ 和 $r > 0$，均有 $\mu(B(x, r)) \lesssim r^{\varrho-\lambda}$，且 $\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_{\infty}(K) \lesssim \mu(K)$。由引理4.6，我们还得到$\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_{\mathcal{D},\infty}(K) \lesssim \mu(K)$。定义：

$$f(x) := \mu(x) * \Gamma = \int \Gamma(y^{-1} \cdot x)\, d\mu(y) = \int_K \Gamma(y^{-1} \cdot x)\, d\mu(y).$$

由于 $y^{-1} \cdot x = \tau_{y^{-1}}(x)$，有 $\mathcal{L}f(x) = 0$ 对所有 $x \in K^c$，这是由 $\mathcal{L}$ 的左不变性得到的。因此，从分布的意义上说，$\operatorname{supp}(\mathcal{L}f) \subset K$。此外，由引理 5.4，有$f \in L^{\varrho}_C$。取 $\varphi \in C^{\infty}_0$，使得 $\varphi \equiv 1$ 在 K的某个邻域内成立。利用 $\mathcal{L}f \equiv 0$ 在 K^c上应用富比尼定理，可得：

$$\begin{aligned}\kappa^{\varrho}(K) \geq |\langle \mathcal{L}f, 1\rangle| = |\langle \mathcal{L}f, \varphi\rangle| &= \left|\int \int \Gamma(y^{-1} \cdot x) \mathcal{L}^t\varphi(x)\, d\mu(y)\, dx\right| \\ &= \left|\int \varphi(y)\, d\mu(y)\right| \\ &\gtrsim \mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_{\mathcal{D},\infty}(K)\end{aligned}$$

这里我们利用 Γ 是 $\mathcal{L}$ 的基本解这一点，得出 $\int \Gamma(y^{-1} \cdot x)\mathcal{L}^t\varphi(x)\, dx = \varphi(y)$。这就给出了下界。

若 $\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_{\infty}(K) = \infty$，则上界显然成立，因此假设 $\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_{\infty}(K) < \infty$。引理 4.6还给出$\mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_{\mathcal{D},\infty}(K) < \infty$。令 $\varepsilon > 0$。由紧性可知，我们可以找到有限个铺砌块$\{T_j\}_{j=1}^N$，使得

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N T_j \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^N (\operatorname{diam} T_j)^{\varrho-\lambda} \leq \mathcal{H}^{\varrho-\lambda}_{\mathcal{D},\infty}(K) + \varepsilon.$$

我们还可以找到球 $\{B(p_j, 2R_j)\}_{j=1}^N$，使得 $R_j \leq \operatorname{diam} T_j < 2R_j$。由引理 4.5，存在函数 $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$，使得 $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B(p_j, 2R_j)$，$\sum_{j=1}^N \varphi_j \equiv 1$ 在 $\bigcup_j T_j$ 上成立，并且对于 α 和 j，有 $\|X_\alpha\varphi_j\|_\infty \lesssim (\operatorname{diam} T_j)^{-|\alpha|}$。找出 $f \in L^{\varrho}_C$，使得 $\operatorname{supp}(\mathcal{L}f) \subset K$，并且

$$\kappa^{\varrho}(K) \leq |\langle \mathcal{L}f, 1\rangle| + \varepsilon. \tag{5.6}$$

庞加莱-伯克霍夫-维特定理指出 $\mathcal{L}$ 是微分算子的线性组合X_{α_ℓ}，其中 $|\alpha_\ell| = \lambda$。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{L} = X_\alpha$ 对于 $|\alpha| = \lambda$。于是 $\mathcal{L}^t = (-1)^\lambda X_\alpha$。回顾记号 X^β_α，如式（2.16）所示，以及 X_α的乘积公式（2.18）。令 $c_j = f_{B(p_j,2R_j)}$。那么，对于 $\psi \in C^{\infty}_0$使得 $\psi \equiv 1$ 在 K 的某个邻域内，并利用式（2.17），我们可以写成

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{L}f, 1\rangle| &= |\langle \mathcal{L}f, \psi\rangle| \\ &= \left|\langle \mathcal{L}f, \psi \sum_{j=1}^N \varphi_j\rangle\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j=1}^{N} \langle \mathcal{L}(f-c_j), \psi\varphi_j \rangle \right| \\
&= \left| (-1)^{\lambda} \sum_{j=1}^{N} \langle f-c_j, \sum_{\beta\in\mathcal{B}} X_{\alpha}^{\beta}(\varphi_j)\, {}^{*}X_{\alpha}^{\beta}(\psi) \rangle \right| \\
&\le \sum_{j=1}^{N} |\langle f-c_j, \psi X_{\alpha}\varphi_j \rangle| + \sum_{j=1}^{N} \left| \langle f-c_j, \sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} X_{\alpha}^{\beta}(\varphi_j)\, {}^{*}X_{\alpha}^{\beta}(\psi) \rangle \right| \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{N} \int_{B(p_j,2R_j)} |f(y)-c_j| \|X_{\alpha}\varphi_j\|_{\infty}\, dy \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} \int_{B(p_j,2R_j)} |f(y)-c_j| \|X_{\alpha}^{\beta}\varphi_j\|_{\infty}\, dy \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{diam} T_j)^{-\lambda} (2R_j)^{\varrho} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} (\operatorname{diam} T_j)^{-\sum_{i=1}^{\lambda}\beta_i} (2R_j)^{\varrho} \\
&\sim \sum_{j=1}^{N} \left((\operatorname{diam} T_j)^{\varrho-\lambda} + \sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} (\operatorname{diam} T_j)^{\left(\sum_{i=1}^{\lambda} 1-\beta_i\right)+\varrho-\lambda} \right)
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

现在，由于 T是紧集，存在 $J \ge 1$ 使得 $T \subset B(0, J/2)$ 因此 直径 $T \le J$。于是，(直径T_j)$/J \le 1$ 对所有 j均成立。从式（5.7）继续可得：

$$
\begin{aligned}
|\langle \mathcal{L}f, 1 \rangle| &\lesssim \sum_{j=1}^{N} \left(J^{\varrho-\lambda} (\operatorname{diam} T_j/J)^{\varrho-\lambda} + \sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} J^{\left(\sum_{i=1}^{\lambda} 1-\beta_i\right)+\varrho-\lambda} (\operatorname{diam} T_j/J)^{\left(\sum_{i=1}^{\lambda} 1-\beta_i\right)+\varrho-\lambda} \right) \\
&\le J^{\varrho} \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{diam} T_j/J)^{\varrho-\lambda} \\
&\le J^{\lambda} (\mathcal{H}_{\mathcal{D},\infty}^{\varrho-\lambda}(K) + \varepsilon) \lesssim J^{\lambda} (\mathcal{H}_{\infty}^{\varrho-\lambda}(K) + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

结合（5.6），可得

$$
\kappa^{\varrho}(K) \lesssim J^{\lambda} (\mathcal{H}_{\infty}^{\varrho-\lambda}(K) + \varepsilon) + \varepsilon.
$$

这就完成了证明，因为 J 仅取决于基本砖块 T。 □

通过 κ^{ϱ} 刻画可去性，可由定理5.3推出。我们希望能直接引用 [9, 定理 4。4] 并说明可去性是定理 5.3的推论；然而，他们对可去性的定义与本文所采用的略有不同。具体而言，除了定义 $K \subset \Omega$ 中所述的条件外，他们还要求满足条件 $K \subset \Omega$ （另请注意， [9, 定理 4。4] 刻画的是 BMO 函数的可去集，而非 Campanato 函数的可去集；不过，他们所用的同一证明也适用于 L_C^{ϱ}， $\varrho \in (\lambda, Q]$）。因此，我们将在本文的可去性定义下，重新证明 [9, 定理 4。4] 中的一个方向。

定理 5.5 (L_C^{ϱ}的可去性刻画。固定 $\lambda \in [1, Q)$，并设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{G}$ 上一个 λ-齐次、左不变线性微分算子，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的。设 $\varrho \in [\lambda, Q]$。那么，紧集 $K \subset T$ 对 L_C^{ϱ} $\mathcal{L}$-解是可去的，当且仅当 $\kappa^{\varrho}(K) = 0$。

证明。 首先假设 K 是可去的。任取 $f \in L_C^{\varrho}$ 如 κ^{ϱ}（K）的定义所述。特别地，$\operatorname{supp}(\mathcal{L}f) \subset K$。这意味着 $\mathcal{L}f \equiv 0$ （作为函数）在 K^c上。应用定义2.5，它$\Omega = \mathbb{G}$ 给出 $\mathcal{L}f = 0$ 在 $\mathbb{G}$上。由于 f 是任意的，因此推出 κ^{ϱ}（K） $= 0$。

现在假设 $\kappa^{\varrho}(K) = 0$。由定理 5.3 和命题 4.3，$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\varrho-\lambda}(K) = 0$。任取一个区域 Ω 以及满足 $\mathcal{L}f = 0$ 在 $\Omega\backslash K$的 $f \in L_C^{\varrho}(\Omega)$。反设 $\mathcal{L}f \neq 0$在 Ω。显然可以假设 $K \cap \Omega \neq \emptyset$。取一个球 $B(x,r)$，使得 $B(x,r) \subset \Omega$，且 $\mathcal{L}f \neq 0$ 属于 $B(x,r)$。由假设 $\mathcal{L}f \neq 0$ 在 Ω，且 Ω 是开集，可知这样的球存在。令 $F = B(x,r)$，这是一个紧集。注意到 $K \cap F \neq \emptyset$。事实上，若 $K \cap F = \emptyset$，则结合 $F \subset \Omega$，可推出 $\Omega\backslash K \supset F$，从而 $\mathcal{L}f = 0$ 属于 F。这就产生了矛盾。因此$K \cap F \neq \emptyset$。此外，$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\varrho-\lambda}(K \cap F) = 0$。令 $d_0 := d(K \cap F, \Omega^c)$。任取满足$\varepsilon < \min\{1, (d_0/4)^{\varrho-\lambda}\}$的 $\varepsilon > 0$。由紧性可知，存在有限个铺砌块 $\{T_{w_j}\}_{j=1}^N$，使得 $K \cap F \subset \bigcup_j T_{w_j}$ 且

$$\sum_{j=1}^{N} (\operatorname{diam} T_{w_j})^{\varrho-\lambda} < \varepsilon.$$

如有必要，缩小 ε 后，我们注意到 $\bigcup_j B(p_{w_j}, 2R_{w_j}^o) \subset \Omega$，因为 $R_{w_j}^o \leq \operatorname{diam} T_{w_j} \leq 2R_{w_j}^o$。

由引理 4.5，存在一个函数族 $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$，使得 $\operatorname{supp} \varphi_j \subset B(p_{w_j}, 2R_{w_j}^o)$,$\sum_{j=1}^N \varphi_j \equiv 1$ 在 $\bigcup_j T_{w_j}$ 上，且 $\|X_\alpha \varphi_j\|_\infty \lesssim (\operatorname{diam} T_{w_j})^{-|\alpha|}$（这里使用的是 (2.15) 中的多重指标记号）。由于 $\mathcal{L}f \neq 0$ 属于 F，我们可以找到 $\psi \in C_0^\infty(F)$，使得 $|\langle \mathcal{L}f, \psi\rangle| > 0$（并且 ψ 不依赖于 ε）。在分布的意义下，由于 $F \subset \Omega$，我们有，

$$\operatorname{supp}(\psi \mathcal{L}f) \subset F \cap (\Omega\backslash K)^c = F \cap K.$$

庞加莱-比尔霍夫-维特定理表明，$\mathcal{L}$是微分算子X_{α_ℓ} 的线性组合，其中 $|\alpha_\ell| = \lambda$。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{L} = X_\alpha$ 对于 $|\alpha| = \lambda$。于是 $\mathcal{L}^t = (-1)^\lambda X_\alpha$。回顾记号 X_α^β，如（2.16）所示，以及X_α的乘积公式（2.18）。因此，由于 $\{\varphi_j\}_j$ 是 $F \cap K \supset \operatorname{supp}(\psi \mathcal{L}f)$上的单位分解，我们有$c_j = f_{B(p_{w_j}, 2R_{w_j}^o)}$，

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{L}f, \psi\rangle| = |\langle \psi \mathcal{L}f, 1\rangle| &= \left|\langle \psi \mathcal{L}f, \sum_{j=1}^N \varphi_j\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^N \langle \mathcal{L}(f - c_j), \psi\varphi_j\rangle\right| \\
&= \left|(-1)^\lambda \sum_{j=1}^N \langle f - c_j, \sum_{\beta\in\mathcal{B}} X_\alpha^\beta(\varphi_j)\, {}^*X_\alpha^\beta(\psi)\rangle\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^N |\langle f - c_j, \psi X_\alpha \varphi_j\rangle| + \sum_{j=1}^N \left|\langle f - c_j, \sum_{\beta\in\mathcal{B}, \beta\neq\overline{\beta}} X_\alpha^\beta(\varphi_j)\, {}^*X_\alpha^\beta(\psi)\rangle\right| \\
&\lesssim \sum_{j=1}^N \int_{B(p_j, 2R_{w_j}^o)} |f(y) - c_j| \|X_\alpha \varphi_j\|_\infty \, dy \\
&\qquad + \sum_{j=1}^N \sum_{\beta\in\mathcal{B}, \beta\neq\overline{\beta}} \int_{B(p_j, 2R_{w_j}^o)} |f(y) - c_j| \|X_\alpha^\beta \varphi_j\|_\infty \, dy \\
&\lesssim \sum_{j=1}^N (\operatorname{diam} T_{w_j})^{-\lambda} (2R_{w_j}^o)^{\varrho} + \sum_{j=1}^N \sum_{\beta\in\mathcal{B}, \beta\neq\overline{\beta}} (\operatorname{diam} T_{w_j})^{\left(\sum_{i=1}^\lambda 1-\beta_i\right)-\lambda} (2R_{w_j}^o)^{\varrho} \\
&\sim \sum_{j=1}^N \left((\operatorname{diam} T_{w_j})^{\varrho-\lambda} + \sum_{\beta\in\mathcal{B}, \beta\neq\overline{\beta}} (\operatorname{diam} T_{w_j})^{\left(\sum_{i=1}^\lambda 1-\beta_i\right)+\varrho-\lambda} \right)
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{diam} T_{w_j})^{\varrho-\lambda} < \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，这意味着 $|\langle \mathcal{L}f,\ \psi\rangle| = 0$，矛盾。因此，我们确实有$\mathcal{L}f = 0$属于 Ω，这意味着 K 是可去的。□

6. 赫尔德连续函数的容量与可去性

本节的大部分证明与上一节几乎完全相同，因此这里不再详述。

定义 6.1。 设 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 为开集，且 $\delta \in (0,1)$。若存在常数 $C > 0$使得函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 属于 $\mathrm{Lip}_\delta(\Omega)$，则

$$|f(x) - f(y)| \le C\, d(x,y)^\delta \quad \text{for all } x, y \in \Omega.$$

用 $\|\cdot\|_\delta$ 表示关于 Lip_δ的范数。固定一个微分算子 $\mathcal{L}$。

定义 6.2 （赫尔德容量）。 紧集 $K \subset \mathbb{G}$关于 Lip_δ 和$\mathcal{L}$ 的容量定义为:

$$\kappa^\delta(K) := \sup\{|\langle \mathcal{L}f, 1\rangle| : f \in \mathrm{Lip}_\delta, \|f\|_\delta \le 1, \operatorname{supp}(\mathcal{L}f) \subset K\}.$$

本节的主要结果如下:

定理 6.3。 设 $\mathcal{L}$ 是一个次数为 $\lambda \in [1, Q)$ 的左不变微分算子，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 都是亚椭圆的。对于紧 $K \subset T$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$，我们有:

$$\mathcal{H}_\infty^{Q-\lambda+\delta}(K) \lesssim \kappa^\delta(K) \lesssim \mathcal{H}_\infty^{Q-\lambda+\delta}(K).$$

备注 6.4。 结合定理 5.3 和6.3 可得到紧集 K的豪斯多夫维数的另一种刻画。取 $\mathcal{L}$ 满足上述条件，且 $\mathcal{L}$为次数 1的齐次函数。通过平移和伸缩 K 使其成为 T的子集，我们便可以考察当 $\mathcal{H}_\infty^\beta(K) = 0$ 对于 $\beta \in [0, Q)$ 成立时，并找出适用的 Campanato空间或赫尔德容量 β。由此得到的容量也将是零。因此，如果怀疑某个集合的维数严格小于 Q，那么考察该容量的零集可以提供另一种确定该集合维数的方法。

与前面一样，我们首先证明 $\Gamma * \mu \in \mathrm{Lip}_\delta$ 对于一个弗罗斯特曼测度 μ 和 Γ 如定理2.3中所述。我们给出下述引理的证明细节。此证明取自 [9,定理 4。12]。

引理 6.5。 取一个紧的 K 和 $\delta \in (0,1)$。设 μ 是一个支集包含于 K 上的有限测度，满足$\mu(B(x,r)) \lesssim r^{\varrho-\lambda}$ 对任意球均成立。那么，

$$f(x) := \mu(x) * \Gamma = \int \Gamma(y^{-1}\cdot x)\, d\mu(y) \in Lip_\delta.$$

证明。 设 $x, z \in \mathbb{G}$。那么，

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| \le & \int_{\{\|y^{-1}\cdot z\| > 2\|z^{-1}\cdot x\|\}} |\Gamma(y^{-1}\cdot x) - \Gamma(y^{-1}\cdot z)|\, d\mu(y) \\ & + \int_{\{\|y^{-1}\cdot z\| \le 2\|z^{-1}\cdot x\|\}} |\Gamma(y^{-1}\cdot x) - \Gamma(y^{-1}\cdot z)|\, d\mu(y) \\ =: & I_1 + I_2. \end{aligned}$$

S由于 Γ 在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$上是次数为 $\lambda - Q$ 的齐次函数，根据 [11, 命题 3.1.40]

$$|\Gamma(X\cdot Y) - \Gamma(X)| \lesssim \|Y\|\|X\|^{\lambda-Q-1} \quad \text{for all } \|Y\| \le \|X\|/2. \tag{6.1}$$

于是，结合 $X = y^{-1} \cdot z$ 和 $Y = z^{-1} \cdot x$，方程（6.1）得出

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \|z^{-1} \cdot x\| \int_{\{\|y^{-1} \cdot z\| > 2\|z^{-1} \cdot x\|\}} \|y^{-1} \cdot z\|^{\lambda - Q - 1} \, d\mu(y) \\ &\leq \|z^{-1} \cdot x\| \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j \|z^{-1} \cdot x\| < \|y^{-1} \cdot z\| \leq 2^{j+1} \|z^{-1} \cdot x\|} \|y^{-1} \cdot z\|^{\lambda - Q - 1} \, d\mu(y) \\ &\leq \|z^{-1} \cdot x\| \sum_{j=1}^{\infty} (2^j \|z^{-1} \cdot x\|)^{\lambda - Q - 1} \mu(B(z, 2^{j+1} \|z^{-1} \cdot x\|)) \\ &\sim \|z^{-1} \cdot x\|^{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\delta - 1)} \\ &\sim \|z^{-1} \cdot x\|^{\delta}. \end{aligned}$$

注意，

$$\{y \in \mathbb{G} : \|y^{-1} \cdot z\| \leq 2\|z^{-1} \cdot x\|\} \subset \{y \in \mathbb{G} : \|y^{-1} \cdot x\| \leq 3\|z^{-1} \cdot x\|\}.$$

因此，

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\|y^{-1} \cdot x\| \leq 3\|z^{-1} \cdot x\|} |\Gamma(y^{-1} \cdot x)| \, d\mu(y) + \int_{\|y^{-1} \cdot z\| \leq 2\|z^{-1} \cdot x\|} |\Gamma(y^{-1} \cdot z)| \, d\mu(y) \\ &=: I_{2_a} + I_{2_b}. \end{aligned}$$

于是由命题 2.9，

$$\begin{aligned} I_{2_a} &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1} 3\|z^{-1} \cdot x\| < \|y^{-1} \cdot x\| \leq 2^{-j} 3\|z^{-1} \cdot x\|} \|y^{-1} \cdot x\|^{\lambda - Q} \, d\mu(y) \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j} 3\|z^{-1} \cdot x\|)^{\lambda - Q} \mu(B(z, 2^{-j} 3\|z^{-1} \cdot x\|)) \\ &\lesssim \|z^{-1} \cdot x\|^{\delta} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\delta} \\ &\sim \|z^{-1} \cdot x\|^{\delta} \end{aligned}$$

类似地，

$$I_{2_b} = \int_{\|y^{-1} \cdot z\| \leq 2\|z^{-1} \cdot x\|} |\Gamma(y^{-1} \cdot z)| \, d\mu(y) \lesssim \|z^{-1} \cdot x\|^{\delta}.$$

因此，$|f(x) - f(z)| \lesssim d(x, z)^{\delta}$这就完成了证明。 □

现在我们可以证明本节的主要结果。不过，我们不再给出详细证明。

定理 6.3 的证明。 下界的证明与定理5.3中下界的证明相同。上界的证明几乎完全沿用定理5.3中上界的证明，只需取 $c_j = f(p_{w_j})$。 □

同样，我们可以利用定理 6.3 刻画 Hölder 连续函数的可去集。

定理 6.6 (Lip 的可去性刻画$_\delta$)。 固定 $\lambda \in [1, Q)$，并设 $\mathcal{L}$ 是 λ-齐次、左不变的线性微分算子，作用于 $\mathbb{G}$，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 都是亚椭圆的。令 $\delta \in (0,1)$。那么，紧集 $K \subset T$ 对 Lip_δ $\mathcal{L}$-解是可去的，当且仅当 $\kappa^\delta(K) = 0$。

证明。和之前一样，假设 K 是可去的，便立即得到 $\kappa^\delta(K) = 0$。对于反方向，当 $\kappa^\delta(K) = 0$时，证明与定理 5.5 中的相同，只需取$c_j = f(p_{w_j})$。 □

7. 容量与可去性 L^p loc

为了刻画 L^p loc的可去集，我们不会沿用前两节的相同思路。相反，我们可以像第 3 节那样，直接刻画可去性。令 $\|f\|_{L^p(A)}$ 表示勒贝格可测集 $A \subset \mathbb{G}$ 上的范数。

定义 7.1(L^p loc 容量)。 紧集 $K \subset \mathbb{G}$ 关于 L^p loc 和 $\mathcal{L}$的容量定义为：

$$\kappa^p(K) := \sup\{|\langle \mathcal{L}f, 1\rangle| : f \in L^p_{\text{loc}}, \|f\|_{L^p(K)} \le 1, \operatorname{supp}(\mathcal{L}f) \subset K\}.$$

本节将使用式（2.18）中给出的乘积公式的齐次性。与前文一样，对于满足定理2.3假设的微分算子 $\mathcal{L}$，我们可以得到 $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{G}\backslash\{0\})$ 的存在性，它在 $\mathbb{G}\backslash\{0\}$ 上关于 $\lambda - Q$ 和 $\mathcal{L}\Gamma = \delta$是次数为

$$X\Gamma \in L^1_{\text{loc}} \tag{7.1}$$

只要 X 是次数严格小于的齐次微分算子 λ，就很容易验证这一点。对环域积分，或使用 [2, 命题 5.44] 的极坐标公式，即可得出这一结论。因此，下面乘积公式的主要作用是确保所有作用于 Γ的相关导数都满足这一齐次性。

固定一个左不变微分算子 $\mathcal{L}$，其次数为齐次 $\lambda \in [1, Q)$。现在我们将为 $\psi\mathcal{L}f * \Gamma$ 求一个分布公式，类似于第 3节中的做法。庞加莱-比尔霍夫-维特定理表明，$\mathcal{L}$ 是多重指标 X_α 的线性组合，其中$|\alpha| = \lambda$；这里我们再次使用了（2.15）中的多重指标记号。因此，我们可以写成$\mathcal{L} = \sum_\alpha c_\alpha X_\alpha$，其中 α的指标有限。于是，对于 ψ，$\varphi \in C^\infty$ 我们有：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\psi\varphi) &= \sum_\alpha c_\alpha X_\alpha(\psi\varphi) \\
&= \sum_\alpha c_\alpha (X_\alpha\psi)\varphi + \sum_\alpha \sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} c_\alpha X^\beta_\alpha(\psi)\, {}^*X^\beta_\alpha(\varphi) \\
&= \varphi(\mathcal{L}\psi) + \sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} \sum_\alpha c_\alpha X^\beta_\alpha(\psi)\, {}^*X^\beta_\alpha(\varphi).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

注意，对于 $\beta \neq \beta$，$\overline{X}^\beta_\alpha$ 是一个次数至多为 $\lambda - 1$的齐次算子。为简化记号，将（7.2）中的第二个求和改写为：

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B},\beta\neq\overline{\beta}} c_\alpha X^\beta_\alpha(\psi)\, {}^*X^\beta_\alpha(\varphi) = \sum_\eta P_\eta(\psi) Q_\eta(\varphi)$$

其中 P_η、Q_η 是微分算子，而 η 遍历某个有限指标集。现在，我们将为形如 $\psi\mathcal{L}f$的对象给出 Harvey-Polking 风格的分布公式。取任意开集 $\Omega \subset \mathbb{G}$、$\mathcal{L}f \in \mathcal{D}'(\Omega)$以及 $\psi \in C^\infty_0(\Omega)$。再取任意 $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$。那么，

$$\begin{aligned}
\langle \psi\mathcal{L}f, \phi\rangle &= \langle f, \psi\mathcal{L}^t\phi\rangle + \sum_\eta \langle f, P^t_\eta(\phi) Q^t_\eta(\psi)\rangle \\
&= \langle \mathcal{L}(\psi f), \phi\rangle + \sum_\eta \langle P_\eta(f Q^t_\eta(\psi)), \phi\rangle
\end{aligned}$$

这意味着我们得到了.....的分布公式，

$$\psi\mathcal{L}f = \mathcal{L}(\psi f) + \sum_\eta P_\eta(f Q^t_\eta(\psi)). \tag{7.3}$$

根据 [12, 推论 28]，$\mathcal{L}(\psi f) * \Gamma = \psi f$。因此，将 Γ 与（7.3）卷积可得：

$$\psi\mathcal{L}f * \Gamma = \psi f + \sum_\eta P_\eta(f Q^t_\eta(\psi)) * \Gamma \tag{7.4}$$

现在注意到，根据（7.2），P_η 是左不变向量场的复合。因此，通过在 [11, 第 31] 页上迭代该公式，我们可以将（7.4）改写为：

$$\psi\mathcal{L}f * \Gamma = \psi f + \sum_\eta f Q_\eta^t \psi * \widetilde{P_\eta}\Gamma \tag{7.5}$$

其中，$\widetilde{P_\eta}$ 是由右不变向量场复合而成的。此外，容易验证，$\widetilde{P_\eta}$ 与 P_η具有相同的齐次度。特别地，P_η 是次数至多为 $\lambda - 1$的齐次函数。

定理 7.2 (L^p loc的可去性刻画。 设 $p \in [1, \infty)$。固定 $\lambda \in [1, Q)$，并设$\mathcal{L}$ 是 λ-齐次的左不变线性微分算子，定义在 $\mathbb{G}$ 上，且 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^t$ 均为亚椭圆的。紧集 $K \subset \mathbb{G}$ 对于 L^p loc $\mathcal{L}$-解是可去的，当且仅当 $\kappa^p($ $K) = 0$。

证明。与前面一样，可去性蕴含 $\kappa^p(K) = 0$ 是显然的。因此，假设$\kappa^p(K) = 0$。任取一个$f \in L^p$ 1 oc，满足 supp$(\mathcal{L}f) \subset K$。任取 $\psi \in C_0^\infty$。由于 Γ 是 $\mathcal{L}$的基本解，$\mathcal{L}$的左不变性意味着

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{L}f, \psi\rangle| &= |\langle \psi\mathcal{L}f, 1\rangle| \\ &= |\langle \mathcal{L}(\psi\mathcal{L}f * \Gamma), 1\rangle| . \end{aligned}$$

只需证明 $\psi\mathcal{L}f * \Gamma \in L^p$ 局部。事实上，首先注意到 supp$(\mathcal{L}(\psi\mathcal{L}f * \Gamma))$ = supp$(\psi\mathcal{L}f) \subset K$。因此，对于 $A := \|\psi\mathcal{L}f * \Gamma\|_{L^p(K)}$，如果我们能够证明 $\psi\mathcal{L}f * \Gamma \in L^p$ 局部，那么假设 $\kappa^p(K) = 0$蕴含

$$|\langle \mathcal{L}(\psi\mathcal{L}f * \Gamma), 1\rangle|/A = |\langle \mathcal{L}f, \psi\rangle|/A = 0$$

我们就完成了证明。回顾（7.5）给出了如下分布关系：

$$\psi\mathcal{L}f * \Gamma = \psi f + \sum_\eta f Q_\eta^t \psi * \widetilde{P_\eta}\Gamma \tag{7.6}$$

其中，Q_η^t 和 P_η 具有前面讨论过的性质。我们将证明（7.6）右端的每个函数都属于 L^p 局部。显然，$\psi f \in L^p$ 局部。现在固定 η 并考虑 $fQ_\eta^t\psi * P_\eta\Gamma$。

根据（7.1），$\widetilde{P_\eta}\Gamma \in L^1_{\text{loc}}$，显然 $fQ_\eta^t\psi \in L^p$ 局部。因此，杨氏不等式表明 $fQ_\eta^t\psi * P_\eta\Gamma \in L^p$ 局部，从而证明完成。□

参考文献

[1] L.V. Ahlfors. “有界解析函数”。*Duke Math. J.* 14 (1947)，第 1–11 页。[2] A. Bonfiglioli、E. Lanconelli 和 F. Uguzzoni。分层李群及其次拉普拉斯算子的位势理论

柏林：Springer 数学专著丛书，2007 年。[3] L. Capogna 和 N. Garofalo。“Carnot-Carathéodory 空间中周长测度的 Ahlfors 型估计”。*J. Geom. Anal.* 16 (2006)，第 455–497 页。[4] L. Carleson。“ R^m中连续调和函数的可去奇点”。*Math. Scand.* 12 (1963)，第 15–18 页。[5] V. Chousionis、K. Fässler 和 T. Orponen。“海森堡群中 $C^{1,\alpha}$ 内禀图上的奇异积分有界性”。*Adv. Math.* 354 (2019)，第 106745 页。[6] V. Chousionis、S. Li 和 L. Zhang。“二阶 Carnot 群中 $C^{1,\alpha}$ 内禀图上的奇异积分”。*J.Geom. Anal* 35.380 (2025)。[7] V. Chousionis、V. Magnani 和 J. Tyson。“Carnot 群上 Lipschitz 调和函数的可去集”。*Calc. Var. PDE* 3.3-4 (2015)，第 755–780 页。[8] V. Chousionis 和 P. Mattila。“自相似集上的奇异积分以及海森堡群中 Lipschitz 调和函数的可去性”。*J. Reine Angew. Math.* 691 (2014)，第 29–60 页。[9] V. Chousionis 和 J. Tyson。“Carnot 群中齐次线性偏微分方程的可去集 ”。*J. AnalyseMath*27 (2016)，第 216–238 页。[10] E. Le Donne、A. Pinamonti 和 G. Speight。“Carnot 群中的普遍可微集与最大方向导数”。*J. Math.Pures Appl* 121.9 (2019)，第 83–112 页。[11] V. Fisher 和 M. Ruzhanksy。幂零 *Lip* 群上的量子化。第 314 卷。数学进展。Birkhäuser Cham，2016 年。

[12] G. B. Folland。“幂零李群上的次椭圆估计与函数空间”。*Ark. Mat.* 13.2 (1975)，第 161–207 页。[13] N. Garofalo 和 D. M. Nhieu。“Carnot-Carathéodory 空间中 Sobolev 函数的 Lipschitz 连续性、全局光滑逼近与延拓定理”。*J. Anal. Math.* 74 (1998)，第 67–97 页。[14] R. Harvey 和 J. Polking。“线性偏微分方程解的可去奇点”。*Acta.Math* 125 (1970)，第 39–56 页。[15] R. Harvey 和 J. Polking。“刻画可去奇点的一种容量概念”。*Trans.Amer. Math. Soc.* 169 (1972)，第 183–195 页。[16] J. Král。“偏微分方程解的非本质奇点。”位势理论研讨班，巴黎，*1972-1974*，*Lecture Notes in Math.*518 (1976)，第 95–106 页。[17] V. Magnani。“一种新的微分、单位球的形状与周长测度”。*Ind.Univ.Math.J.*66.1 (2017)，第 183–204 页。[18] P. Mattila 和 P.V. Parmonov。“关于调和 Lip_1-容量的几何性质”。*Pacific J. Math* 171.2 (1995)，第 469–491 页。[19] P. Pansu。“Carnot-Carathéodory 度量与秩一对称空间的拟等距映射”。*Ann.of Math.* 129.1 (1989)，第 1–60 页。[20] P.V. Paramonov。“关于 $C1$ 范数中的调和逼近”。*Math. USSR-Sb* 71 (1992)，第 183–207 页。[21] X. Tolsa。“Painlevé 问题与解析容量的半可加性”。*Acta Math*190.1 (2003)，第 105–149 页。[22] X. Tolsa。“解析容量、可整性与柯西积分”。国际数学家大会论文集第二卷(2006)，第 1505–1527 页。[23] J. Verdera。“BMO 有理逼近与一维豪斯多夫内容”。*Trans. Amer.Math. Soc.* 297.1 (1986)，第 283–304 页。[24] D. Vittone。“Carnot 群中的子流形”。博士论文。Scuolo Normale Supierore，2006 年。

数学系，康涅狄格大学电子邮件地址：zackary.boone@uconn.edu