arXiv:2512.17170v1 [math.CT] 19 Dec 2025

# 伦理对偶：原始-对偶问题的同调框架

Dmitry Pasechnyuk-Vilensky [1,2] 和 Martin Takáč [1]
阿拉伯联合酋长国 MBZUAI[2] 俄罗斯 ISP RAS

2025年12月22日

**摘要**

我们基于反变函子 $D = \mathrm{Hom}_E(-,\ R)$ 和对偶化对象 $R$，构建了一个同调对偶框架。当一个态射满足典范的双对偶相容性条件 $D^2(f)\eta = \eta f$ 时，我们称其为伦理的。在导出情形下，函子 $\mathrm{RHom}_E(-,\ R)$ 产生一个 Ext群分次族，用以度量所有不满足此相容性的情形。第一层 $\mathrm{Ext}^1$标识原始-对偶间隙，而更高层的 $\mathrm{Ext}^k$ 则为正合性的导出障碍提供了系统的层次结构。

这一表述可统一地应用于若干经典领域。在线性优化和锥优化中，Farkas 型和 Slater 条件型正合性判据对应于 $\mathrm{Ext}^1$，的消失，而整数对偶间隙与挠Ext类相吻合。在图论中，Kirchhoff 型和 Baker–Norine 型对偶性可视为伦理正合性的实例。在动力系统中，更高的导出层编码了非零的持久性现象。其他示例还包括社会选择配置、散射形式体系中的范畴分解、编码理论对偶以及 Bellman型递推；这些都体现了由 Ext 控制的正合性的具体实例。

所有由此得到的不变量在导出 Morita 等价下保持稳定，并且只依赖于对偶化对 $(E,\ R)$。因此，该框架为原始—对偶正合性提供了与底层结构无关的判据，并对其障碍给出了统一的同调描述。

# 目录

**1 范畴伦理** **3**
1.1 定义.4 1.2 伦理线性与阿贝尔逻辑.5 1.3 范畴拉格朗日.8

**2 同调伦理 9**
2.1 导出伦理.9 2.2 有限对称类型.11

2.3 t-结构与心.12 2.4 障碍塔.14 2.5 Morita 等价.15 2.6 伦理 Morse 约化.16

**3 左伴随对偶，或 Aistetics 18**
3.1 共伦理.18 3.2 预函子重构.19 3.3 同调 Karchmer–Wigderson.21

**4 同伦伦理 2** 4
4.1 中心滤过.24 4.2 Postnikov–Whitehead 塔.27 4.3 局部—整体伦理性.29

**5 $P$ 与 $NP$ 的重述 34**

**6 应用 39**
6.1 优化.39
6.1.1 线性规划.39 6.1.2 伽罗瓦下降.47 6.1.3 非凸优化.49 6.2 图几何.51
6.3 时间与内存.54 6.4 草图.56 6.4.1 社会选择.56

6.4.2 语义.59
6.4.3 散射.60
6.4.4 编码理论.62 6.4.5 贝尔曼对偶.65 6.4.6 草图化.68

# 引言

对偶性以许多彼此无关的形式贯穿数学的各个领域：巴拿赫空间和局部凸空间的拓扑对偶、几何中的韦尔代耶与格罗滕迪克对偶、凸分析中的 Fenchel 共轭，以及优化中的原始–对偶表述。这些情形的共同之处并不在于某种特定的构造，而在于一个结构性问题：在什么条件下，对偶赋值能够恢复原对象的信息？又该如何衡量其未能做到这一点的程度？

本文构建一个同调框架，在配备对偶化对象 $R$的阿贝尔范畴$\mathcal{E}$ 中表述这一问题。我们研究反变函子

$$\mathbf{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$$

及其典范比较映射 $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathbf{D}^2$。若一个态射 $f$ 满足伦理 条件$\mathbf{D}^2(f)$ $\eta = \eta f$，则称其为伦理的；这一条件体现了相对于对偶化的严格相容性。该条件的所有偏离均由导出对偶 $\mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 检测：其上同调群

$$H^k\mathbf{D}(A) = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}}(A, R)$$

形成一个分次障碍塔，其中 $\mathrm{Ext}^1$ 表示对偶正合性的主要障碍，而更高阶项则描述导出不一致性的其余层次。在导出范畴 $D^+(\mathcal{E})$中，这些障碍产生一种伦理$t$–结构，其心由完全由其对偶确定的对象组成。

这一同调表述将各种经典对偶现象纳入单一机制之中。在凸优化和锥优化中，$\mathrm{Ext}^1$ 的消失恢复了强对偶，而 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M,\ \mathbb{Z})$中的挠则刻画了整数规划中的代数对偶间隙。图论中的基尔霍夫型公式和 Baker–Norine 黎曼–罗赫定理，都是伦理正合性的实例。在动力学情境中，更高阶的 Ext群描述了在未导出对偶性中不可见的持久性和滞后效应。社会选择、霍普夫代数分解、编码理论和 Bellman型递推中的更多例子表明，表面结构迥异的问题可以采用共同的同调处理。

该框架的一个核心特征是 Morita 不变性。由 $\mathbf{D}$和 $\mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 得到的所有量，仅取决于导出对偶对 $(D^+(\mathcal{E}), \mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-, R))$，并且在导出等价下保持不变。因此，对偶性的行为完全由对偶化结构决定，而不取决于相关对象的特定代数的、几何的或组合的实现方式。

本文的目标有两个：给出一种基于对偶化对象 $R$ 的统一范畴化表述，以描述对偶性；并确定群 $\mathrm{Ext}^k\,\varepsilon(-, R)$，将其作为支配上述各个例子中的对偶正合性及其所有次数障碍的规范同调不变量。

术语 伦理 和 感知 采用古希腊语的经典含义。前者源自 伦理（$ethos$），指一种内在的结构条件，其表现为与双对偶变换的相容性。后者源自 $aisth^{-}esis$，指在张量积或 pro函子情境中出现的相应显现或表达层面。这些术语纯粹是结构性的，除其范畴定义之外不带有任何解释性含义。

# 1 范畴伦理

本节中，我们假设环境范畴 $\mathcal{E}$ 是一个有足够多内射对象的阿贝尔范畴，因此 $\mathrm{Ext}^i\,\varepsilon(-, R)$ 可定义为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 的右导出函子。我们还用 $\mathcal{E}^{\mathrm{ref}} \subset \mathcal{E}$表示 $\mathbb{D}$–自反对象构成的全子范畴；谈及 $\mathcal{E}$ 中的伦理方块时，我们默认将讨论限制在 $\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}$ 内，以便 $\eta_A$是一个同构，且与 $\mathbb{D}^2$ 的比较结果落在 $\mathcal{E}$中。

## 1.1 定义

**定义 1.1**（资源范畴）。 资源范畴是一个阿贝尔范畴 $\mathcal{E}$，其对象被解释为资源状态或任务，而其态射则是资源有界归约。可加性体现了并行组合。零态射表示意义的丧失（不可行的归约）。我们采用标准阿贝尔范畴公理 [Lan98, Bor94]。

在$\mathcal{E}$中，所有核、余核、像和余像都存在。每个单态射都是一个核，每个满同态都是一个余核。短正合列的性质与通常情况相同；我们记作 $0 \to K \to A \to B \to 0$。

**引理 1.2** (有限双积)。 $E$ 有有限双积 $A \oplus B$，并具有典范注入和投影。特别地，并行过程通过 $\oplus$ 相加。

证明。 这是任意阿贝尔范畴中的标准结果 [Lan98]。 □

**定义 1.3** (资源对象与对偶函子)。 固定 $R \in \mathcal{E}$（资源对象）。定义反变函子

$$\mathbb{D} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R) : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Ab}.$$

我们称 $\mathbb{D}(A)$为 $A$的资源对偶。

**引理 1.4**（左正合性）。 $\mathbb{D}$ 是左正合的：对于 $E$ 中每个短正合列 $0 \to K \to A \to B \to 0$，所诱导的序列

$$0 \leftarrow \mathbb{D}(K) \leftarrow \mathbb{D}(A) \leftarrow \mathbb{D}(B)$$

在阿贝尔群范畴中是正合的。

证明。 </style>显然，这是由 $Hom(-, R)$ 关于第一变量的左正合性得出的 [Wei94]。 □

由于$\mathbf{D}$ 是逆变定义的，因此其二次作用$\mathbf{D}^2$ 是协变的。在自反子范畴$\mathcal{E}^{\mathrm{ref}} \subset \mathcal{E}$ 上，它通过典范单位 $\eta_A$与 E 的一个自函子重合。

**定义 1.5**（双对偶与自反性）。 **</style>的双对偶为() :Hom(()())。求值单位（典范映射）: () 将映至()。若是E**中的同构，则称 $A$ 是 $\mathbb{D}$–自反的。

在下文中，当我们要求伦理方块在$\mathcal{E}$中交换时，默认限制在 $A, B \in \mathcal{E}^{\mathrm{ref}}$，从而 $\eta_A, \eta_B$是同构，且 $\mathbb{D}^2$通过沿 $\eta$传递而作为这个自反子范畴上的自函子作用。

**定义 1.6**（伦理态射）。态射 $f:\ A \to B$ 在$\mathcal{E}$ 中称为伦理的（相对于 $R$），如果方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ f\ } & B \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ \mathbb{D}^2(A) & \xrightarrow[\mathbb{D}^2(f)]{} & \mathbb{D}^2(B) \end{array}$$

在$\mathcal{E}$中交换。

若 $A,\ B \in \mathcal{E}$参考，则该方块位于$\mathcal{E}$中；否则应通过典范嵌入在阿贝尔群范畴 Ab 中理解，并在沿 $\eta$传递后进行比较。

**引理 1.7**（稳定性）。伦理态射在复合下封闭，并且包含恒等态射。

证明。 $\eta$的自然性意味着：如果该性质对 $f$ 和 $g$ 成立，那么 $\mathbb{D}^2(g\circ f)\circ\eta_A = \eta_C\circ(g\circ f)$ 也成立。 □

如果类 $\mathsf{C}\subset\mathcal{E}$ 中的所有对象都是 $\mathbb{D}$–自反的，那么 $\mathsf{C}$ 中的态射 $f$ 是伦理态射，当且仅当它在对合 $A\mapsto\mathbb{D}^2(A)$ 下保持不变。

**引理 1.8**（长正合列）。设 $0\to K\to A\to B\to 0$ 是 $E$ 中的一个短正合列。存在一个自然的阿贝尔群长正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{D}(B)\longrightarrow\mathbb{D}(A)\longrightarrow\mathbb{D}(K)\xrightarrow{\delta}\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{E}}(B,R)\longrightarrow\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{E}}(A,R)\longrightarrow\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{E}}(K,R)\longrightarrow\cdots$$

证明。将左正合函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,\ R)$ 的右导出函子应用于该短正合列；这给出了逆变 Hom 的标准长正合列，其方向如所示。我们关于内射对象的既定假设保证了 $\mathrm{Ext}^i\,\mathcal{E}(-,\ R)$ 的存在。 □

**定理 1.9**（强对偶当且仅当$\mathrm{Ext}^1$ 消失）。设 $\mathsf{C}\ \subset E$ 对子对象、商对象和扩张封闭。假设 $E$ 有足够多的内射对象。以下条件等价：

*(a)* $\mathbb{D}$ 将$\mathsf{C}$ 中的每个短正合列映为阿贝尔群范畴中的短正合列。

*(b)* $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{E}}(X,R)=0$ *for all* $X\in\mathsf{C}$.

证明。由 $\mathbb{D}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,R)$ 的左正合性及引理 1.8 可知，右侧正合等价于连接态射消失，且 $\mathrm{Ext}^1\,\mathcal{E}(-,R)$ 在 $\mathsf{C}$ 上消失。 □

若 $R$是内射余生成元，则 $\mathrm{Ext}^1\,\mathcal{E}(-,R)\ =0$和 $\mathbb{D}$在整个$\mathcal{E}$[Wei94]上正合。

## 1.2 伦理线性逻辑与阿贝尔逻辑

线性逻辑由 [Gir87] 引入，并由 [Bar79, Kel82],在范畴论层面加以发展；它将对偶性视为内在的结构原则，而非外在的真理概念。在带有一个指定资源对象 $R$的对称幺半阿贝尔范畴（$\mathcal{E}\ \otimes, I$）中，反变函子

$$\mathbb{D}=\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(-,R)$$

起到线性否定的作用。典范单位 $\eta:\mathrm{Id}\ \Rightarrow\mathbb{D}^2$ 刻画了对偶化下作用的自反性：态射 $f\colon A\to B$若满足 $\mathbb{D}^2(f)\eta_A=\eta_B f$，即在双重反映下仍保持相容性，则称其为伦理态射。这一范畴论相干性概念为线性蕴涵和消切提供了内在语义。

令 $A^{\perp} := \mathbb{D}(A)$，并定义乘法蕴涵如下：

$$A \multimap B \;\cong\; A^{\perp} \parr B,$$

其中，$\parr$ 是与 $\otimes$ 对应的余张量。于是，$(\mathcal{E},\ \otimes,\ \parr,\ (-)^{\perp},\ I,\ R)$ 按照 Barr [Bar79] 的定义构成一个 *-自伴范畴。在此框架下，线性逻辑的基本推理规则——切规则——获得了同调解释。

**定理 1.10** (伦理切规则)。 设 $S$ 是由 $\{\oplus, \parr, (\cdot)^{\perp}\}$ 生成、并在 $E$ 中解释的相继式演算。相对于伦理正合性而言，$S$ 中的消切是可靠且完备的：一个复合相继式无需切规则即可证明，当且仅当每个解释态射 $f : A \to B$ 在 $E$ 中都满足

$$\mathbb{D}^2(f)\eta_A = \eta_B f.$$

等价地，对于一个相继式，消切失败对应于在 $\mathrm{Ext}^1\,\varepsilon(-, R)$ 中出现非零类。

证明。 每个相继式 $A \vdash B$ 都对应于 $\mathcal{E}$ 中的一个短正合列 $0 \to K \to A \to B \to 0$。消切的可靠性意味着对偶函子 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,\ R)$ 在此序列上正合。根据 Hom 和 Ext 函子的长正合列（引理 1.8），以及正合性与 $\mathrm{Ext}^1\,\varepsilon(-,\ R) = 0$ 等价这一事实（定理 1.9），切规则可靠，当且仅当 $\mathbb{D}$ 正合；而每个切规则失效都对应于 $\mathrm{Ext}^1\,\varepsilon(-,\ R)$ 中一个非平凡的连接态射。因此，切规则相干性的同调障碍，恰好就是由 $\mathrm{Ext}^1\,\varepsilon$ 测得的伦理缺陷。

□

将 $\mathrm{Ext}^1\,\varepsilon(-,\ R)$ 解释为切规则不一致性的定量度量，可将线性一致性这一句法性质转化为范畴正合性条件。从这个意义上说，伦理线性逻辑是范畴 $(\mathcal{E},\ R)$ 的内语言，用以表达其态射的分级自洽性。

阿贝尔逻辑的代数模型为这一伦理片段提供了具体语义。Jankovec [Jan25], 近期研究的带基点阿贝尔 $\ell$–群（pAL），构成了带有指定假常量的阿贝尔逻辑的代数语义。pAL 的每个链生成子簇或拟簇都会产生基础逻辑的半线性扩张；Jankovec 证明，所有此类扩张均可有限公理化，并具有完备的链语义。经典的 Mundici函子$\Gamma$ 在 MV代数与带强单位的 $\ell$–群之间保留全称类，从而使这些结果能够推广到 pAL框架。

在我们的范畴语言中，每个 pAL 模型都可以实现为一个伦理范畴，其 Hom 集是阿贝尔群，而其对偶化对象则扮演指定常量的角色。对于链生成模型 $A$，定义 $\mathcal{E}_A$ 为 $A$–模的阿贝尔范畴，并将 $R_A$ 定义为指定生成元。于是 $\mathbb{D}_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_A}(-, R_A)$ 重现了 $A$ 的求值代数，而 $\mathbb{D}_A$ 的伦理正合性与在 $A$ 中解释的半线性系里的切可靠性相一致。

**引理 1.11** (Ethic–Abelian 对应)。 对于每个链生成的 *pAL* 模型 $A$，都存在一个阿贝尔范畴 $E_A$，其具有对偶对象 $R_A$，使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_A}(-, R_A) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\mathrm{pAL}}(-, A),$$

当且仅当对应的 *pAL*–同态保留 $A$ 中所有有效的半线性切时，$E_A$ 中的态射 $f$ 才是伦理的。因此，阿贝尔逻辑的每个半线性扩张都允许范畴化伦理实现。

证明。 pAL–代数 $A$ 上的模范畴是阿贝尔的，并且具有自然的反变对偶性 $\mathrm{Hom}_A(-,\ A)$；取 $R_A = A$ 作为资源对象，可得到所需的对偶对（$\mathcal{E}_A$，$R_A$）。链生成假设确保 $\mathcal{E}_A$是半单的，且 $\mathrm{Ext}^1\ \varepsilon_A(-,\ A) = 0$，这恰好对应于不存在不可靠切。反之，非零的 $\mathrm{Ext}^1\ \varepsilon_A$ 会产生一个代数扩张，其中某条切规则失效，这与 Jankovec 对不完备半线性片段的分类相一致。因此，伦理条件 $\mathbb{D}_A^2(f)\eta = \eta f$ 表达了与半线性切可靠性在 $A$中相同的约束。

□

我们将以下结果记作一个外部定理，并将其作为黑箱使用。

**定理 1.12** （Jankovec [Jan25], 链生成的半线性完备性）。 令pAL 为带指定点的阿贝尔 $\ell$–群的簇，并令 $\mathcal{C}$ 表示全序pAL–链的类。则由 $\mathcal{C}$ 生成的 pAL 的每个子（拟）簇都可以由一个半线性（链）理论有限公理化；反之，每个有限公理化的半线性扩张都由一个链子代数生成。特别地，相应的序列演算具有完备的链语义。

现在我们说明，任何这样的半线性片段如何以我们所说的意义提供伦理阿贝尔语义，以及如何从同调角度衡量切可靠性。

**命题 1.13 (**半线性 pAL 片段上的范畴提升**)**。 设 $T$ 是定理 *1.12* 中所述的阿贝尔逻辑的有限公理化半线性扩张，其代数范畴为 $\mathrm{Alg}(T)$。设 $\mathsf{Syn}(T)$ 是$T$–相继式演算的加性正合完备化（由证明规则生成的自由加性正合范畴），$E_T := \mathrm{Ind}(\mathrm{Ab}(\mathsf{Syn}(T)))$ 是其阿贝尔包络（由 $\mathsf{Syn}(T)$ 经阿贝尔化和 *Ind*-完备化得到的格罗滕迪克阿贝尔范畴）。记 $R_T$ 为 *distinguished* 谬底/基点在米田嵌入下于 $E_T$ 中的像。则反变函子

$$\mathbb{D}_T := \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_T}(-, R_T) : \mathcal{E}_T^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

提供了 $T$ 的乘法-加法片段的伦理模型，并且对于 $\mathsf{Syn}(T)\ \to E_T$ 像中的每个短正合列 $0 \to K \to A \to B \to 0$ ，以下条件等价：

(i) 对于所有链模型，相应的切规则在 $T$–演算中是可靠的；

(ii) $\mathbb{D}_T$ 在 $0 \to K \to A \to B \to 0$ 上是正合的；(iii) $\mathrm{Ext}^1\,\varepsilon_T(K, R_T) = 0$。

此外，如果 $f\colon\ A \to B$ 诠释了 $T$ 的一个可证明序列，那么按照 $\mathbb{D}_T^2\ (f)$ $\eta_A = \eta_B\, f$ 的意义， $f$ 在 $E_T$ 中是伦理的。

证明。第 *1* 步（构造 $\mathcal{E}_T$ 和 $R_T$）。根据精确完备化，Ab(Syn($T$)) 是阿贝尔的，并且典范函子 Syn($T$) $\to$ Ab(Syn($T$)) 是正合的，且在推导的像上保守。Ind-完备化 $\mathcal{E}_T :=$ Ind(Ab(Syn($T$))) 是一个格罗滕迪克阿贝尔范畴。$T$ 的假常元在 Syn($T$) 中给出一个特定对象；经米田嵌入和阿贝尔化后，其像给出 $R_T \in \mathcal{E}_T$。定义$\mathbb{D}_T = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_T}(-,\ R_T)$。

步骤 *2*（可靠性 $\Rightarrow$ 正合性）。固定 Syn($T$) 像中的一个短正合列 $0 \to K \to A \to B \to 0$。在代数 $M \models T$ 中对乘法–加法片段作标准解释时，该序列计算出一个切实例。根据定理 1.12，只需检查链模型；对每条链 $M$，Syn($T$) $\to$ Alg($T$) 的加法正合性意味着 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}(T)}(-,\ U(M))$ 在 Syn($T$) 的像上是正合的（此处 $U$ 表示遗忘函子）。由于 Yoneda 嵌入将 Syn($T$) 映入 Ab(Syn($T$)) 的投射生成元中，且 Ind-完备化保持滤过余极限的正合性，可表函子族能够检测正合性；因此，所有链中的切可靠性都意味着 $\mathbb{D}_T$ 在 $0 \to K \to A \to B \to 0$ 上正合。

步骤 *3*（正合性 $\Leftrightarrow$ 与 *Ext* 的消失[1]）。这正是引理 1.8 和定理 1.9 中确立的同调判据：对于阿贝尔范畴中的任意短正合列，$\mathbb{D}_T$ 在右侧正合，当且仅当连接态射消失，等价地，$\mathrm{Ext}^1\,\varepsilon_T(K,\ R_T) = 0$。

步骤 *4*（可证态射的 *Ethicity*）。如果态射 $f\colon A \to B$ 是 Syn($T$) 中某个无切规则推导的像，那么根据步骤 2，相关的短正合列在 $\mathbb{D}_T$ 下保持不变，因此由单位 $\eta$ 的自然性可得 $\mathbb{D}_T^2(f)\ \eta_A = \eta_B\, f$，即 $f$ 是伦理的。 □

**推论 1.14**（半线性完备性即障碍的退化）。设 $T$ 如定理 *1.12* 所述。那么，对于每个可解释为 Syn$(T)$ 像中元素的相继式，以下条件等价：

切消成立 $\Leftrightarrow\!\Rightarrow \mathrm{Ext}^1\,\varepsilon_T(-, R_T) = 0$ 在核上 $\Leftrightarrow\!\Rightarrow$ 该态射是伦理的。

特别地，在 $(\boldsymbol{E_T}, \mathbb{D}_T)$ 的伦理心上，同调障碍 $H^1\mathbf{D}_T$ 恰好在由 *[Jan25]* 分类的半线性片段上消失。

这一对应关系表明，Jankovec 关于 pAL 子（拟）簇的结构性结果，是我们伦理条件的范畴论影像：同调障碍 $H^1\mathbf{D}$ 的退化对应于半线性扩张的完备性。因此，对偶自洽性的导出范畴表述将线性逻辑的资源语义与阿贝尔逻辑的代数语义统一起来，揭示了支撑这两个框架的共同同调相干性原理。

## 1.3 范畴拉格朗日

**定义 1.15**（幺半群与对偶结构）。假设（$\mathcal{E}\ \otimes,\ I$）是一个具有足够多的内射对象的对称幺半阿贝尔范畴。一个对象 $A$ 具有对偶 $A^*$，当且仅当存在态射

$$\mathrm{ev}_A : A^* \otimes A \to I, \qquad \mathrm{coev}_A : I \to A \otimes A^*,$$

满足三角恒等式 $(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{ev}_A) \circ (\mathrm{coev}_A \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A$ 和 $(\mathrm{ev}_A \otimes \mathrm{id}_{A^*}) \circ (\mathrm{id}_{A^*} \otimes \mathrm{coev}_A) = \mathrm{id}_{A^*}$ [Kel82，Lan98]。

**定义 1.16 (**范畴拉格朗日伦理性**)。** 态射 $f\colon A \to B$ 若满足以下条件，则称为伦理的

$$(\mathrm{id}_{B^*} \otimes f) \circ \mathrm{coev}_B = (f^* \otimes \mathrm{id}_A) \circ \mathrm{coev}_A.$$

**引理 1.17 (**函子性**)。** 伦理态射在 $\otimes$ 和复合下封闭；对偶保持伦理性。

证明。 相容性由 $\otimes$ 的双函子性以及紧闭范畴 [Kel82]中对偶的自然性得出。 □

**定理 1.18 (**从结构相容性到正合性**)。** 若类 C 中的每个短正合列都能提升为与 ev、coev 相容的图表（即所有边界态射都是伦理态射），则 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}(-, R)$ 在 C上正合。反之，任何正合性失效都会导致某个 ev/coev–相容性方块不成立。

证明。 与 ev/coev 的相容性带来评价和余评价相对于该序列的自然性，并保证 Hom 长正合列中的连接态射消失，因此得到正合性。反之，非零连接态射会产生一个不交换的方块，与伦理性矛盾。该论证是利用 ev/coev 三角形进行的直接图表追逐。 □

若$\mathcal{E}$ 是 *-自伴的（以线性否定作为对偶化对象），则可在内部恢复第 1.2 节 [Bar79]。

# 2 同调伦理学

固定资源对象 $R$ 的一个下有界内射分解 $R^\bullet \in D^+(\mathcal{E})$。所有导出对偶 $\mathbf{D}(A^\bullet)$ 均相对于 $R^\bullet$ 取值。由于 $\mathrm{idim}_{\mathcal{E}}\, R < \infty$，函子 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 具有有限振幅：对于超出由 $R$ 决定的有界范围的 $k$， $H^k\mathbf{D}(A^\bullet) = 0$。下文的所有构造都局限于此范围。

## 2.1 导出伦理学

在本节中，我们始终假设$\mathcal{E}$有足够多的内射对象，因此 $\mathrm{Ext}^i{}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 和$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 都是定义良好的右导出函子。

我们在有界下导出范畴 $D^+(\mathcal{E})$ [Ver67、Nee01] 中工作。将 $R$ 替换为固定复形 $R^\bullet \in D^+(\mathcal{E})$（即普适资源）。从$\mathcal{E}$到 $D^+(\mathcal{E})$ 的转换，将短正合列替换为特异三角。第 1 节中的所有态射和自然变换，都可通过应用分解函子 $I$ 函子性地延拓。由此，对偶性 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 提升为导出函子$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$，并保持三角形结构。

固定一个内射分解函子 $I\colon \mathcal{E} \to \mathrm{Ch}^+(\mathcal{E})$。对每个 $A^\bullet$，定义

$$\mathbf{D}(A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(I(A^\bullet), R^\bullet).$$

典范评价（单位）态射

$$\eta_{A^\bullet} : A^\bullet \longrightarrow \mathbf{D}^2(A^\bullet)$$

是由双对偶映射得到的 $D^+(\mathcal{E})$ 中的自然态射

$$I(A^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(I(A^\bullet), R^\bullet), R^\bullet).$$

所有出现的 $\eta$ 节均按此含义理解。

**定义 2.1**（导出对偶）。设 $I : \mathcal{E} \to \mathsf{Ch}^+(\mathcal{E})$ 是一个固定的内射分解函子。对于任意复形 $A^\bullet \in D^+(\mathcal{E})$，定义

$$\mathbf{D}(A^\bullet) \coloneqq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A^\bullet, R^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(I(A^\bullet), R^\bullet),$$

一个逆变正合函子 $\mathbf{D} : D^+(\mathcal{E})^{\mathrm{op}} \to D^+(\mathcal{E})$。此构造仅取决于 $A^\bullet$的拟同构类。

**引理 2.2**（三角正合性）。$\mathbf{D}$ 关于特异三角是正合的：它将三角映为 $D^+(E)$中的三角形。

证明。根据 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ 的构造，它是同伦范畴上的右导出函子，并且与三角结构相容 [Nee01]。 □

**命题 2.3**（上同调层）。对于任意 $A^\bullet$，$\mathbf{D}(A^\bullet)$的上同调满足

$$H^0\mathbf{D}(A^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A^\bullet, R^\bullet), \qquad H^1\mathbf{D}(A^\bullet) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}}(A^\bullet, R^\bullet),$$

一般而言 $H^n\mathbf{D}(A^\bullet) \cong \mathrm{Ext}^n \varepsilon(A^\bullet, R^\bullet)$ *[Wei94, GM03]*。

**定义 2.4**（导出伦理态射）。设 $\eta_{A^\bullet} : A^\bullet \to \mathbf{D}^2(A^\bullet)$ 是通过上述内射分解定义的单位。若态射 $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$属于 $D^+(\mathcal{E})$，且图表

$$\mathbf{D}(B^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{D}(f^\bullet)} \mathbf{D}(A^\bullet) \quad \text{and} \quad A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet$$

co通过 $\eta$ 交换，即在同伦范畴 $K^+(\mathcal{E}$ 中，$\mathbf{D}(f^\bullet) \circ \eta_{B^\bullet} \simeq \eta_{A^\bullet} \circ f^\bullet$ ).

**定理 2.5**（间隙的普遍调和）。在导出情形中，对偶间隙并非异常，而是次数：对于每个复形的短正合列，未导出正合性的失效表现为$\mathbf{D}$ 的 $H^1$ （以及更高次数）；$f^\bullet$ 的伦理性等价于所有次数上的连接态射均为零。

证明。将$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(-, R^\bullet)$ 应用于一个特异三角；长正合上同调序列将所有障碍识别为上同调次数。伦理性要求单位在三角中的自然性，从而消去所有连接映射。由于$\mathbf{D}$ 是三角化的，$D^+(\mathcal{E})$ 中的每个特异三角都会导出一个 Ext 群长正合列。伦理性条件要求所有连接映射均为零，因此，正合性失效与$\mathbf{D}$ 的上同调次数之间的对应关系 $H^k$ 是完备的。 □

转至分次情形是合理的，因为$\mathbf{D}$ 是三角化的，且与移位可交换：$\mathbf{D}(A[1]) \simeq \mathbf{D}(A)[-1]$。在$D^+(\mathcal{E})$的紧闭增强中，ev/coev可以跨次数移位，从而得到分次族 $\mathsf{ev}^{(n)}, \mathsf{coev}^{(n)}$。Ethicity体现为所有这些分次三角形的相容性。

## 2.2 有限对称类型

设$\mathcal{E}$是一个阿贝尔$k$–线性范畴，其对象长度有限，且关于代数闭域$k$是Hom–有限的，域的特征为$k \neq 2$。对于每一对$X, Y \in \mathcal{E}$中的对象，集合$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y)$是有限维的$k$–向量空间，且复合是$k$–双线性的 [Lan98]。固定一个内射维数有限的对偶化对象$R \in \mathcal{E}$，其内射维数为$\mathrm{idim}_{\mathcal{E}} R < \infty$，并令

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)\colon D^{+}(\mathcal{E})^{\mathrm{op}} \to D^{+}(\mathcal{E}),$$

配备双对偶典范单位$\eta_X\colon X \to \mathbf{D}^2 X$，其构造如 [Wei94] 所示。我们用$\mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$表示恒等函子的自然自同构群。

自然自同构$\theta \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$称为伦理的，当且仅当

$$\mathbf{D}^2(\theta) \circ \eta = \eta \circ \theta.$$

我们用$\mathrm{Aut}_{\eta}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$表示这个子群。对每个$\theta$，定义其$\eta$–伴随

$$\theta^{\dagger} := \eta^{-1} \circ \mathbf{D}(\theta) \circ \eta,$$

使得$(\psi\circ\theta)^{\dagger} = \theta^{\dagger}\circ\psi^{\dagger}$，且$(\theta^{\dagger})^{\dagger} = \theta$，这由$\eta$ [Lan98] 的函子性和自然性可得。双对偶共轭

$$J(\theta) := \eta^{-1} \circ \mathbf{D}^2(\theta) \circ \eta$$

是一个对合，$J^2 = \mathrm{id}$，并且$\mathrm{Aut}_{\eta}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = \mathrm{Fix}(J)$。

**引理 2.6.** 每个$\theta \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$在任意单对象$S \in E$上的作用都为$\theta_S = \lambda(S)\mathrm{id}_S$，其中$\lambda(S) \in k^{\times}$。若$S$、$S'$属于同一个*Gabriel*块，则$\lambda(S) = \lambda(S')$。因此$\mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) \cong (k^{\times})^t$，其中$t$是*[Gab62]*的*Gabriel*块数量。

证明. 由于$\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(S)$是一个除法$k$–代数，且$k$代数闭，$\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(S) \simeq k$ [Wei94], ，因此$\theta_S = \lambda(S)\mathrm{id}_S$。沿非分裂扩张$0 \to S \to E \to S' \to 0$的自然性$S$迫使$, S'$上的标量相等。根据 Gabriel 块的定义，同一块内的标量恒定，因此得到$(k^{\times})^t$。 □

**定理 2.7**（伦理对称类型的有限分类）。设$\mathcal{E}$和$R$如上所述。则

$$\mathrm{Aut}_{\eta}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^t,$$

其中，$t$是*Gabriel*块的数量。此外，每个$\theta \in$自同构$_{\eta}$(恒等映射$_{\mathcal{E}}$)恰好属于以下五种伴随对称类之一：

(O) *Orthogonal:* $\theta^{\dagger} = \theta,\ \theta^2 = \mathrm{id}$;
(Sp) *Symplectic:* $\theta^{\dagger} = -\theta,\ \theta^2 = \mathrm{id}$;
(U) *Unitary:* $\theta^{\dagger} = \theta^{-1}$;
(T) *Twisted:* $\exists\, u \in Z(\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})),\ u^2 = \mathrm{id},\ (u\theta u^{-1})^{\dagger} = \pm(u\theta u^{-1})$;
(N) *Neutral:* $\theta$ *central and commuting with all* $\eta_X$.

*I*在*Hom*-有限标量情形中，五类情形都归结为逐块符号$\lambda_b = \pm$ 1.

证明。由引理 2.6 可知，$\mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) \cong (k^\times)^t$, $\theta \leftrightarrow (\lambda_b)_{b=1}^t$。由于 D 是 $k$–线性的且为逆变函子，对于块 $b$中的任意对象 $X$，$\mathrm{D}^2(\lambda_b \mathrm{id}_X) = \lambda_b \mathrm{id}_{\mathbf{D}^2 X}$。因此， $J$在 $(k^\times)^t$上通过取逆作用， $J((\lambda_b)_b) = (\lambda_b^{-1})_b$。等式 $J(\theta) = \theta$意味着 $\lambda_b = \lambda_b^{-1}$，故对所有 $b$，均有 $\lambda_b^2 = 1$ 。由于 $\mathrm{char}\, k \neq 2$ 且 $k$ 是代数闭的， $\lambda_b \in \{\pm 1\}$。各块彼此独立，因此 $\mathrm{Aut}_\eta(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) \cong (\mathbb{Z}/2)^t$。

为得到五种对称类，需要分析 $\theta$ 与 $\theta^\dagger$之间的关系。由于$\theta^\dagger = \eta^{-1}\mathbf{D}(\theta)\eta$ 在 $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$ 上定义了一个反对合，两个对合 $J$ 与† 的可采纳组合构成一个克莱因型格。模去中心共轭的等价后，该格恰有五种不同的不动构型：

(O) $\theta^\dagger = \theta, \theta^2 = \mathrm{id}$（自伴对合）；(Sp) $\theta^\dagger = -\theta, \theta^2 = \mathrm{id}$（斜自伴对合）；(U) $\theta^\dagger = \theta^{-1}$ （伴随等于逆）；(T) $(u\theta u^{-1})^\dagger = \pm(u\theta u^{-1})$，其中中心对合为 $u$，表示内伴随扭曲；(N) $\theta$ 为中心元，且与所有 $\eta_X$交换，对应于 (O) 与 (U) 的交集。

不存在与 $J^2 = \mathrm{id}$ 和 $(\dagger)^2 = \mathrm{id}$ 均相容的其他关系：任何其他复合条件要么退化为上述某一种，要么与对合性矛盾。因此，恰好出现这五种代数类型。在标量情形 $\lambda_b = \pm 1$下，有 $\theta^\dagger = \theta^{-1} = \theta$，所以这五种类型都退化为离散的逐块符号$\{\pm 1\}$，但形式的分类仍然完备。 □

**推论 2.8.** 若 $E$ 不可分解 （$t = 1$），则 $\mathrm{Aut}_\eta(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = \{\mathrm{id}\ -\mathrm{id}\}$，且只会出现正交$(+1)$和辛 $(-1)$ 形式。

五种伦理对称形式（O、Sp、U、T、N）在形式上类似于表示论的田中–克莱因框架中出现的经典正交、辛和酉对偶性；在该框架中，对偶性是幺半的，并作用于双线性配对的张量形式。在当前语境下，我们不作任何幺半或表示论方面的假设：对偶函子 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}(-, R)$ 纯粹是同调的，而伴随对合 $\dagger = \eta^{-1}\mathbf{D}(\,\cdot\,)\eta$ 源自典范双对偶变换 $\eta$。因此，这一分类将熟悉的田中范畴三分法扩展到了 Hom 有限阿贝尔范畴的一般函子性环境中；在此，伦理对称性关注的是函子的自然变换，而非双线性张量结构。这使得该结果在形式上与田中范畴的情形平行，但在概念上独立于它。

## 2.3 t-结构与心

我们在一个有足够多内射对象的阿贝尔范畴$\mathcal{E}$ 中工作。 [Wei94], 固定一个资源对象 $R \in \mathcal{E}$，以及一个反变左正合对偶函子 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R) : \mathcal{E}_{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$。记 $D^+(\mathcal{E})$ 为有界下导出范畴 [Ver67],，并记$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R) : D^+(\mathcal{E})^{\mathrm{op}} \to D^+(\mathcal{E})$ 为导出对偶 [GM03]。单位

（求值） $\eta_A : A \to \mathbb{D}^2(A)$ 是典范映射；其导出对应是单位$\eta_{A^\bullet} : A^\bullet \to \mathbf{D}^2(A^\bullet)$。

以下始终假设$\mathcal{E}$ 有足够多的内射对象，且资源对象$R$具有有限内射维数，因此$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,\ R)$在$D^+(\mathcal{E})$上具有有界振幅。

**定义 2.9** （伦理 t-结构）。 定义$\mathcal{E}$的 $D^+$中的全子范畴

$$D^+(\mathcal{E})^{\leq 0} := \{A^\bullet \in D^+(\mathcal{E}) \mid H^i(\mathbf{D}(A^\bullet)) = 0 \text{ for all } i > 1\},$$
$$D^+(\mathcal{E})^{\geq 0} := \{A^\bullet \in D^+(\mathcal{E}) \mid H^i(\mathbf{D}(A^\bullet)) = 0 \text{ for all } i < 0\}.$$

我们称 $\left(D^+(\mathcal{E})^{\leq 0},\ D^+(\mathcal{E})^{\geq 0}\right)$为伦理 t-结构，其心$\heartsuit_\eth := D^+(\mathcal{E})^{\leq 0} \cap D^+(\mathcal{E})^{\geq 0}$ 称为伦理心。

**定理 2.10** （t-结构公理）。 定义 *2.9* 中的有序对 $\left(D^+（E）^{\leq 0}, D^+（E）^{\geq 0}\right)$ 是（$E$）上的一个 *t*-结构，符合 *[BBD82]*的定义：它在移位下稳定，满足$\mathrm{Hom}\left(D^+（E）^{\leq 0}, D^+（E）^{\geq 1}\right) = 0$，且每个对象 $A^\bullet$都存在一个函子性三角 $A^{\leq 0} \to A^\bullet \to A^{\geq 1} \to A^{\leq 0}[1]$，其两端分别为 $A^{\leq 0} \in D^+（E）^{\leq 0}$ 和 $A^{\geq 1} \in D^+（E）^{\geq 1}$。

证明。根据 $D^+(\mathrm{E})^{\leq 0}$ 和$D^+(\mathrm{E})^{\geq 0}$ 的定义，由 $H^i(\mathrm{D}(-))$ 的上同调次数可直接得出其在移位下稳定。对于正交性，若 $X \in D^+(\mathrm{E})^{\leq 0}$且 $Y \in D^+(\mathrm{E})^{\geq 1}$，则 $H^i\mathrm{D}(X) = 0$对 $i > 0$成立，且 $H^j\mathrm{D}(Y) = 0$对$j \leq 0$成立，因此由导出伴随 [GM03]，有 $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}(\mathrm{D}(Y), \mathrm{D}(X)) = 0$。截断三角的存在性源于 E 有足够多的内射对象，且 $R$内射维数有限，因此 D 是有界上同调函子；关于 $H^i$D 的标准构造（参见 [BBD82], [Nee01]）可得函子性截断。

□

**命题 2.11** (伦理心是阿贝尔范畴且自反)。 心 $\heartsuit_\eth$ 是一个阿贝尔范畴 *[BBD82]*。对于任意 $A^\bullet \in \heartsuit_\eth$，单位 $\eta_{A^\bullet}$： $A^\bullet \to \mathbf{D}^2(A^\bullet)$ 是 $D^+(\mathcal{E})$ 中的同构（伦理自反性）。

证明。 心的阿贝尔性是任意 t-结构所固有的 [BBD82]。假设$R$ 具有有限内射维数，因此 $\mathbf{D}^2$ 逐次作用。由于 $H^{<0}\mathbf{D}(A^\bullet) = H^{>1}\mathbf{D}(A^\bullet) = 0$，双对偶三角可由上同调层上的五引理分裂；由此得到 $\eta_{A^\bullet}$ 是一个同构 [GM03]。

□

**定义 2.12** （伦理精确态射）。 态射 $f : A^\bullet \to B^\bullet$ 在 $D^+(\mathcal{E})$ 中是伦理精确的，当且仅当 $\mathbf{D}^2(f) \circ \eta_{A^\bullet} = \eta_{B^\bullet} \circ f$。将具有相同对象且态射为伦理精确态射的宽子范畴记为 $\mathrm{Eth} \subset D^+(\mathcal{E})$。

**定理 2.13** （心等于伦理态射）。 包含 $\heartsuit_\eth \hookrightarrow D^+(\mathcal{E})$将 $\heartsuit_\eth$ 等同于由满足以下条件的对象构成的全子范畴：任意指向该对象或从该对象出发的态射都是伦理精确的。特别地，在 $\heartsuit_\eth$ 中，所有态射都是伦理精确的。

证明。 若 $A^\bullet \in \heartsuit_\eth$，命题 2.11 表明 $\eta_{A^\bullet}$ 可逆，因此对任意 $f$，定义中的方块都交换。反之，若每个从 $A^\bullet$ 出发和到达 $A^\bullet$ 的态射都伦理精确，则 $\mathbf{D}$ 的长正合上同调序列在次数 $< 0$ 和 $> 1$上的连接态射均为零，从而迫使 $H^{<0}\mathbf{D}(A^\bullet) = H^{>1}\mathbf{D}(A^\bullet) = 0$。

□

心 $\heartsuit_\eth$ 形式化了“伦理在场”：其对偶信息足以重构自身，且无需高阶记忆修正（无 $H^{>1}$）或预期伪影（无 $H^{<0}$）的对象。

## 2.4 障碍塔

障碍理论视角将伦理正合性组织成若干层次，这些层次由 $\mathbb{D}$ 的右导出函子控制。我们的阐述遵循导出变形与同调代数中的经典障碍理论 [Ill71], [AM69], [GM03],，并将其调整为适用于 $\mathbf{D} = \mathbf{RHom}(-, R)$ 的形式。在本小节中，始终假设 $\mathcal{E}$ 有足够多的内射对象，并且资源对象 $R$ 具有有限内射维数，因此 $\mathbf{D} = \mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 在 $D^+(\mathcal{E})$ 上定义了一个有界的上同调 $\delta$–函子。

**定义 2.14** （伦理阶段与障碍类）。 给定 $A^\bullet \in D^+(\mathcal{E})$，称$A^\bullet$ 具有阶 $n$ 的伦理性，若对 $1 \le i \le n$ 有 $H^i\mathbf{D}(A^\bullet) = 0$ 。阶为–$(n+1)$ 的伦理障碍是连接态射

$$\mathrm{ob}_{n+1}(A^\bullet) \in \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{E}}(H^0(A^\bullet), R) \simeq H^{n+1}\mathbf{D}(A^\bullet),$$

它由波斯尼科夫截断三角 $\tau_{\le n}A^\bullet \to A^\bullet \to \tau_{>n}A^\bullet \to$ 导出。

**定理 2.15 (**提升的存在性与唯一性**)**。 假设 $A^\bullet$ 是阶数为 $n$ 的伦理。则：

*(a)*（存在性）$\mathrm{ob}_{n+1}(A^\bullet) = 0$ 当且仅当存在 $A'^\bullet$ 以及一个态射 $A^\bullet \to A'^\bullet$，它在 $H^i\mathbf{D}(-)$ 上诱导同构（对 $i \le n$ 而言），并且消去 $H^{n+1}\mathbf{D}$。*(b)*（唯一性）若 $\mathrm{ob}_{n+1}(A^\bullet) = 0$，则此类提升的等价类集合是由 $\mathrm{Ext}^n \varepsilon(H^0(A^\bullet)\ R)$ 作用的挠子。

证明。 这可由左正合 Hom 的右导出函子的一般障碍提升机制推出。将 $\mathbf{D} = \mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 应用于截断三角，得到连接态射 $H^{n+1}\mathbf{D}(A^\bullet) \to H^{n+2}\mathbf{D}(A^\bullet)$，其消失等价于提升的可延拓性。存在性与唯一性分别对应于 $\mathbf{ob}_{n+1}$ 的消失，以及 $\mathbf{Ext}^n \varepsilon(H^0(A^\bullet)\ R)$ 对提升空间的作用；参见 [GM03]。

□

**定义 2.16** （障碍塔）。 从 $A^\bullet$ 开始，归纳定义一个序列 $A^\bullet_{\le 0} \to A^\bullet_{\le 1} \to A^\bullet_{\le 2} \to \cdots$，其中每一步都在可能时选择，以消除下一个障碍类 $\mathbf{ob}_{n+1}$。我们称之为 $A^\bullet$ 的伦理障碍塔。

**定理 2.17** （稳定化与心的归属）。 伦理障碍塔稳定（即 $A^\bullet_{\le n} \simeq A^\bullet_{\le n+1} \simeq \cdots$）当且仅当 $H^{>1}\mathbf{D}$（$A^\bullet$） $= 0$。在这种情况下， $A^\bullet \in \heartsuit_\eth$。

证明。 由于根据假设$\mathbf{D}$ 具有有界振幅，Postnikov 塔中所有更高阶的连接态射在超过 $R$ 的内射维数后都消失；因此，当 $H^{>1}\mathbf{D}(A^\bullet) = 0$ 时，恰好发生稳定化。若 $H^{>1}\mathbf{D}(A^\bullet) = 0$，则对所有 $n \ge 1$ 都有 $\mathbf{ob}_{n+1} = 0$，因此该塔在第 1 级停止。反之，若该塔稳定化，则根据构造，所有 $H^{>1}\mathbf{D}$ 必须消失。属于心由定义 2.9 得出。 □

**命题 2.18**（谱序列控制）。 假设 $E$ 具有足够多的内射对象，并且 $\operatorname{idim}_{\mathcal{E}} R < \infty$。对于每个有界下复形 $A^\bullet$，都存在一个第一象限谱序列

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p_{\mathcal{E}}(H_q(A^\bullet), R) \Rightarrow H^{p+q}\mathbf{D}(A^\bullet),$$

在 $A^\bullet$中自然地，这支配着障碍塔。特别地，在 $E_2$处退化意味着立即稳定，并且 $A^\bullet \in \heartsuit_\eth$ *[Wei94], [Nee01]*。

证明。 这是复合 $A^\bullet \mapsto H_q(A^\bullet) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$对应的格罗滕迪克谱序列；由于 $\mathbf{D}$ 具有有限振幅，该谱序列收敛。微分 $d^{p,q}_2$ 重现了障碍类 $\mathrm{ob}_{q+1}(A^\bullet)$。

□

谱序列在 $E_2$ 处退化意味着所有更高阶障碍类同时消失，因此伦理塔在第一阶段稳定。

这座塔将“记忆”分层为不同阶：第 $k$阶对应由 $\mathrm{Ext}^k$检测到的伦理缺陷。稳定意味着净化——不存在高阶记忆。

## 2.5 Morita 等价

我们通过阿贝尔范畴/导出范畴的 Morita 型等价，形式化伦理对偶在不同环境间的转移，并依托经典与导出 Morita 理论[Ric89, Kel94, Toë07, Lur17]。

**定义 2.19**（导出 Morita 等价）。 若存在三角等价，则对偶对（$\mathcal{E}$，$R$）和（$\mathcal{E}'$，$R'$）称为导出 Morita 等价

$$F : D^+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} D^+(\mathcal{E}')$$

其准逆为 $G$，且存在自然同构

$$F(R) \simeq R', \qquad \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'}(F(-), R') \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R) \circ G.$$

等价地，$F$ 将导出对偶函子$\mathbf{D}$ 与$\mathbf{D}'$交织起来。

**定理 2.20**（伦理不变量的 Morita 不变性）。 假设（$\mathcal{E}$，$R$）和（$\mathcal{E}'$，$R'$）按照定义 *2.19* 的意义导出 *Morita* 等价。那么对于所有 $A^\bullet \in D^+(\mathcal{E})$ 和 $k \geq 0$

(a) $H^k\mathbf{D}(A^\bullet) \cong H^k\mathbf{D}'(F(A^\bullet))$；(b) $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}}(H_q(A^\bullet), R) \cong \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{E}'}(H_q(F(A^\bullet)), R')$；

(c) 伦理熵和滞后不变量（例如，$H^1\mathbf{D}$的挠阶）均保持不变。

证明。 由于 $F$ 是保持 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(-, R)$ 的三角等价，它在上同调对象 $H^k\mathbf{D}$ 以及命题 2.18 的格罗滕迪克谱序列上诱导典范同构。根据精确导出等价下导出 Hom函子的自然等价（Rickard/Keller），结论即得 [Ric89, Kel94]。命题 2.18 中的谱序列具有函子性，因此在等价下保持不变；挠阶是所得阿贝尔群同构类的不变量。

□

**命题 2.21 (伦理 t-结构的传递)。** 设$(E\ R)$与$(E',\ R')$在定义 *2.19* 的意义下导出 *Morita* 等价。那么，等价 $F\colon\ D^+(E)\xrightarrow{\simeq}D^+(E')$ 保持伦理 $t$–结构：

$$A^\bullet\in D^+(\mathcal{E})^{\le 0}\iff F(A^\bullet)\in D^+(\mathcal{E}')^{\le 0},\ A^\bullet\in D^+(\mathcal{E})^{\ge 0}\iff F(A^\bullet)\in D^+(\mathcal{E}')^{\ge 0}.$$

特别地，$F$ 限制为心 $\heartsuit_\partial\simeq\heartsuit'_\partial$之间的一个等价。

证明。 根据定义 2.19，$F$ 在自然同构意义下交织 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{D}'$：$\mathbf{D}'\circ F\simeq F\circ\mathbf{D}$。因此，对每个 $A^\bullet$，都有 $H^i(\mathbf{D}'(F(A^\bullet)))\simeq H^i(\mathbf{D}(A^\bullet))$，故定义 $D^{\le 0}$ 和 $D^{\ge 0}$ 的消失条件得以保留。由于 $F$ 是三角化且正合的，它与此 $t$–结构的截断三角相容（即，$F\circ\tau_{\le n}\simeq\tau_{\le n}\circ F$）。因此，$F$是 $t$–正合的，并在心$\heartsuit_\partial\simeq\heartsuit'_\partial$之间诱导出一个等价。 □

**推论 2.22 (伦理定律的普适性)。** 任何陈述仅依赖于 $H^*\mathbf{D}$、命题 *2.18* 中的谱序列或心 $\heartsuit_\partial$ 的定理（例如伦理时间／衰减定律、基尔霍夫／*Baker–Norine* 实例、*Slater*／*Farkas* 崩塌），都可沿 *Morita* 等价 *[Ric89、Toë07]* 原样迁移。对于任何函子性地依赖于 $\mathbf{D}$或其导出上同调的定理，该陈述同样成立，因为这些数据在导出 *Morita* 等价下保持不变（$F$ 在自然同构意义下交织对偶函子）。

Morita 传递将普适性形式化：伦理对偶定律是对偶函子的性质，而非物质基底的性质。算术、经济或几何媒介，在通过 Morita 等价相联系时，都是等价的视角。

从范畴论视角来看，这意味着所有伦理不变量在等价意义下都是导出对偶对 $(D^+(\mathcal{E}),\ \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,\ R))$ 的函数；因此，它们只依赖于 $(\mathcal{E}\ R)$ 的导出 Morita 类。

## 2.6 EthicMorse 约化

我们在一个有足够多内射对象 [Wei94] 的阿贝尔范畴 $\mathcal{E}$ 中工作。固定一个资源对象 $R\in\mathcal{E}$ 以及反变对偶函子

$$\mathbb{D}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,R):\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Ab},\qquad \mathbf{D}=\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,R):D^+(\mathcal{E})^{\mathrm{op}}\to D^+(\mathcal{E}),$$

其单位（求值）为 $\eta_X\colon\ X\to\mathbb{D}^2(X)$，导出对应为 $\eta_{A^\bullet}\colon\ A^\bullet\to\mathbf{D}^2(A^\bullet)$。我们使用光滑流形上的经典莫尔斯理论 [Mil63]，以及有限 CW 复形或单纯复形上的离散莫尔斯理论 [For98],，并始终通过 $\mathcal{E}$ 中的函子性链模型 $C_*(-)$ 进行处理。所有（上）同调均在 $\mathcal{E}$ 或其导出范畴中计算；凡注明者，所有链映射均视为模链同伦等价。

设 $A\in\mathcal{E}$ 配备一个有限滤过

$$0=\mathcal{F}_0A\subset\mathcal{F}_1A\subset\cdots\subset\mathcal{F}_NA=A,$$

并记 $\mathrm{gr}_i\,A:=\mathcal{F}_iA/\mathcal{F}_{i-1}A$。从层级 $\beta$到 $\alpha<\beta$ 的 $(A,\mathcal{F}_\bullet)$ 的一个归约步骤 $(r_{\alpha\beta},j_{\alpha\beta})$ 是一对链映射

$$r_{\alpha\beta}:C_*(\mathcal{F}_\beta A)\to C_*(\mathcal{F}_\alpha A),\quad j_{\alpha\beta}:C_*(\mathcal{F}_\alpha A)\hookrightarrow C_*(\mathcal{F}_\beta A)$$

在 $j_{\alpha\beta}$ 的像上具有 $r_{\alpha\beta}\circ j_{\alpha\beta}\simeq\mathrm{id}$ 和 $j_{\alpha\beta}\circ r_{\alpha\beta}\simeq\mathrm{id}$。

**定义 2.23** (伦理约化)。 若一个归约步骤 $(r_{\alpha\beta}, j_{\alpha\beta})$ 满足以下条件，则称其为伦理的

$$\mathbb{D}^2(r_{\alpha\beta}) \circ \eta = \eta \circ r_{\alpha\beta}, \qquad \mathbb{D}^2(j_{\alpha\beta}) \circ \eta = \eta \circ j_{\alpha\beta},$$

并且，在导出情形下，$\mathbf{D}^2(r_{\alpha\beta}) \circ \eta \simeq \eta \circ r_{\alpha\beta}$ 和 $\mathbf{D}^2(j_{\alpha\beta}) \circ \eta \simeq \eta \circ j_{\alpha\beta}$ 在 $D^+(\mathcal{E})$ 中。

Ethicity 表示单位 $\eta$ 沿着约化的自然性，即§2.3中使用的相同条件。

设 $K$ 是有限 CW 复形或单纯复形，其胞腔链复形为 $C_*(K) \in \mathcal{E}$。离散 Morse 匹配 $V$ [For98] 是关联胞腔对 $\sigma^p \leftrightarrow \tau^{p+1}$ 上的无环部分匹配，它产生一个 Morse 复形 $M_*(K; V)$，由未匹配（临界）胞腔张成，并具有链同伦等价 $C_*(K) \simeq M_*(K; V)$。

**定义 2.24** （伦理离散 Morse 匹配）. 若对每个匹配对 $\sigma^p \leftrightarrow \tau^{p+1}$，初等链映射 $m_{\sigma\to\tau}$: $C_p(\sigma) \to C_{p+1}(\tau)$ 以及沿 V-路径的所有复合都满足以下条件，则匹配 $V$ 称为伦理匹配

$$\mathbb{D}^2(m) \circ \eta = \eta \circ m \quad \text{in } \mathcal{E}, \qquad \mathbf{D}^2(m) \circ \eta \simeq \eta \circ m \quad \text{in } D^+(\mathcal{E}).$$

**引理 2.25** （伦理约化的函子性）。 伦理约化的复合仍是伦理的。若 $f : C_* \to C'_*$ 与 $\eta$交换，则 $C_*$ 和 $C'_*$ 上的伦理约化可沿 $f$ 传递到映射锥上的伦理约化。

证明。 $\eta$ 的自然性蕴含其在复合下的稳定性。由导出函子性 [GM03]可知，映射锥与 $\mathbf{D}$ 及 $\eta$ 相容。 □

**命题 2.26** （伦理 Morse 等价）。 若 $V$ 是伦理离散 *Morse* 匹配，则 *Forman* 塌缩 $C_*$（$K$） $\simeq M_*$（$K$； $V$）可提升为

$$\mathbf{D}(C_*(K)) \simeq \mathbf{D}(M_*(K; V)) \quad in\ D^+(\mathcal{E}),$$

诱导 $H^i\mathbf{D}$（$C_*$（$K$））$\cong H^i\mathbf{D}$（$M_*$（$K$； $V$））。

证明。 Forman 塌缩是由初等链等价 [For98] 构成的锯齿序列。每一步都是伦理的，因此与 $\eta$交换；由于$\mathbf{D}$是三角化且逆变的，它保持这些等价 [GM03]。 □

**定理 2.27** （伦理 Morse 不等式）。 设 $V$ 是 $K$ 上具有 $c_i^{\mathrm{eth}}$ 个临界 $i$-胞腔的伦理匹配。则

$$c_i^{\mathrm{eth}} \geq \operatorname{rank} H_i(C_*(K)), \qquad c_i^{\mathrm{eth}} \geq \operatorname{rank} H^i(\mathbf{D}(C_*(K))).$$

证明。 第一条是 Forman 不等式 [，适用于 98]；第二条成立是因为 $H^i\mathbf{D}(C_*(K)) \cong H^i\mathbf{D}(M_*(K; V))$，且每个 $i$-临界胞腔都对应一个生成元。 □

**定理 2.28** （伦理约化下的单调性）。 若 $C_* \rightsquigarrow C'_*$ 是伦理的，则

$$\operatorname{rank} H^i\mathbf{D}(C'_*) \leq \operatorname{rank} H^i\mathbf{D}(C_*), \quad \operatorname{tors} H^1\mathbf{D}(C'_*) \mid \operatorname{tors} H^1\mathbf{D}(C_*).$$

证明。 由伦理约化上 $\mathbf{D}$ 的函子性可知，约化后的 Morse 复形生成元不会增多；挠除性可由对偶微分的史密斯标准形论证得出。

□

**引理 2.29**（伦理匹配的提升）。若 $V$ 在 $K$ 上是伦理的，且 $\pi:\hat{}K\to K$ 是群 $\Gamma$作用下的 $\hat{}$ $\hat{}$正规覆盖，则其提升 $V$ 也是伦理的； $\Gamma$-不变的 $V$的临界胞腔与 $V$的临界胞腔一一对应。

**定理 2.30 (**沿覆盖的伦理下降**)**。对于一个正规覆盖塔 $\{\pi_k:\hat{}\,K_k\to K\}$，其甲板变换群为 $\Gamma_k$，提升为 $V_k$，若 $\Gamma_k$-不变量临界胞腔的集合最终稳定，则

$$H^{>1}\mathbf{D}(C_*(K))=0,\qquad H^1\mathbf{D}(C_*(K))\cong\left(H^1\mathbf{D}(C_*(\hat{K}_k))\right)^{\Gamma_k}$$

当 $k$ 足够大时。

证明。证明与第 6.1.2 节中的导出伽罗瓦下降论证相同：不变量稳定意味着高阶导出障碍退化，从而得到 $H^1$ 与不变量之间所声称的识别。

□

**定理 2.31 (**连续伦理莫尔斯约化**)**。设 $F:X\to\mathbb{R}$ 是光滑流形 $X$ 上的莫尔斯函数，其梯度流为 $\Phi_t$。若每个莫尔斯附着$X_{\le\beta}\searrow X_{\le\alpha}$ 都满足 $\mathbb{D}^2(\cdot)\eta=\eta(\cdot)$，则

$$\mathbf{D}(C_*(X))\simeq\mathbf{D}(M_*(X;F)),$$

并且上述不等式对指标为 $i$ *[Mil63]* 的 $c_i^{\mathrm{eth}}$ 个临界点成立。

Ethicity 通过控制导出对偶群$H^*\mathbf{D}$，即对偶性 $\mathbb{D}=\mathrm{Hom}(-,R)$ 内在的障碍，扩展了经典莫尔斯理论。若没有 $\eta$，只有普通（上）同调是不变量；有了 $\eta$，这些结果刻画了全文所用的伦理不变量$H^*\mathbf{D}$。

# 3 左伴随对偶，或 Aistetics

## 3.1 共伦理

设 $(\mathcal{E}\ R)$ 为一个带有对偶函子 $\mathbf{D}=\mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-,R)$ 的阿贝尔资源范畴。根据 Grothendieck–Verdier 对偶，将其左伴随定义为共伦理函子：

$$\mathbf{C}\ :=\ R\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{E}}(-):D^+(\mathcal{E})\longrightarrow D^+(\mathcal{E}),$$
$$\mathrm{Hom}_{D^+(\mathcal{E})}(R\otimes^{\mathbb{L}}A,B)\ \simeq\mathrm{Hom}_{D^+(\mathcal{E})}(A,\mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(R,B))。$$

若态射 $f:A^\bullet\to B^\bullet$ 与余评价单位可交换，则称其为共伦理的

$$\epsilon_{A^\bullet}:\mathbf{C}^2(A^\bullet)\longrightarrow A^\bullet,\qquad f\circ\epsilon_{A^\bullet}=\epsilon_{B^\bullet}\circ\mathbf{C}^2(f).$$

此定义与伦理条件 $\mathbf{D}^2(f)\eta=\eta f$ 相呼应，但交换了求值与余评价的角色。形式上，$(\mathbf{C},\mathbf{D})$ 构成伴随对 $\mathbf{C}\ \dashv\mathbf{D}$，其单位与余单位分别对应于显现和反映。

(a) $\mathbf{C}$关于特异三角是正合的，并保持余乘积。

(b) 复合$\mathbf{CD}$ 作为 $D^{+}(\mathcal{E})$ 的导出自同态，表达了双对偶伴随（$R\otimes^{\mathbb{L}}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,R)$）。

(c) 若 $R$ 是平坦的，$\mathbf{C}$ 就退化为普通张量积，所有共伦理障碍也都会消失：对于 $i>0$，$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{E}}(R,\ -)=0$。

与右导出的伦理对偶 $\mathbf{D}$不同，后者通过 $\mathrm{Ext}^k$ 的非零性检测正合性的失效；共伦理函子 $\mathbf{C}$ 是左导出的，取决于 $R$ 的平坦性。对于应用中使用的大多数资源对象 $R$ （整数、锥、霍普夫代数）， $R$ 并非平坦的，因此相应的 $\mathrm{Tor}_k(R,\ -)$ 除标准同调之外，并不带来有意义的新不变量。因此，共伦理层级

$$H_k\mathbf{C}(A^{\bullet})=\mathrm{Tor}_k^{\mathcal{E}}(R,A^{\bullet})$$

会在与伦理塔 $H^k\mathbf{D}$ 内容丰富的相同情形下退化。从这个意义上说，共伦理理论在形式上有效，但在结构上缺乏成效：其障碍仅记录 $R$ 平坦性的失效，而非态射的高阶相容性。伦理对偶是逆变且右导出的，因此仍是对偶性中富有信息的一方；而共伦理仅仅充当其张量影子。

## 3.2 预函子重构

设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 为阿贝尔范畴，并设 $K:\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{F}\to\mathsf{Ab}$ 是一个在每个变量上均为双加性的 Ab- 富集预函子。定义这对伴随函子

$$\mathbf{A}(A)=\int^{E\in\mathcal{E}}K(E,-)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{E}(E,A),\qquad \mathbf{D}(X)=\int_{F\in\mathcal{F}}\mathcal{F}(X,F)\pitchfork K(-,F),$$

其中 $\pitchfork=\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(-,-)$，且在标准的小性假设下，所有（余）端均存在（参见 [Lan98],[Kel82]）。

**引理 3.1** (感知伴随)。 对于每个 $A\in\mathcal{E}$ 和 $X\in\mathcal{F}$，都存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}(A),X)\ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A,\mathbf{D}(X)).$$

证明。 展开 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}(A)\ X)$，并将 Hom 与余端交换，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\Big(\int^{E}K(E,-)\otimes\mathcal{E}(E,A),\,X\Big)&\cong\ \int_{E}\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(K(E,-)\otimes\mathcal{E}(E,A),X)\\&\cong\int_{E}\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\mathcal{E}(E,A),\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(K(E,-),X)).\end{aligned}$$

应用 Ab 中的张量-Hom 交换以及（余）端的富比尼公式（见[Kel82]），可得

$$\int_{F}\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}\Big(\int^{E}\mathcal{E}(E,A)\otimes K(E,F),\,\mathcal{F}(X,F)\Big)\ \cong\ \int_{F}\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(K(A,F),\mathcal{F}(X,F)).$$

By 由富集约内达引理可知，这等于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A,\ \mathbf{D}(X))$，从而证明了该结论。 □

**推论 3.2**（单位与余单位）。引理 *3.1* 中的双射由自然变换 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \Rightarrow \mathbf{DA}$ 和 $\epsilon : \mathbf{AD} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ 实现，它们满足三角恒等式，因此得到 $\mathbf{A} \dashv \mathbf{D}$。

假设 $K$ 在$\mathcal{E}$侧可由资源对象 $R$表示，即

$$K(E,-) \;\cong\; \mathcal{E}(E,R) \otimes_{\Lambda} B(-), \qquad \Lambda := \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(R), \tag{3.1}$$

对于某个$\mathcal{F}$ 中的右 $\Lambda$–模对象 $B$ （见 [Lan98]）。那么感知函子和对偶函子具有如下显式形式

$$\mathbf{A}(A) \;\cong\; B(-) \otimes_{\Lambda} \mathcal{E}(R,A), \qquad \mathbf{D}(X) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\Lambda}(B(-), \mathcal{F}(X,-)) \circ \mathcal{E}(-,R).$$

**定理 3.3 (**导出审美结构**)**。将 $K$ 视为有界复形 $K^{\bullet}$，并定义

$$\mathbf{A}^{\bullet}(A) = \int^{E} K^{\bullet}(E,-) \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{E}(E,A), \qquad \mathbf{D}^{\bullet}(X) = \int_{F} \mathbf{R}\mathcal{F}(X,F) \pitchfork K^{\bullet}(-,F).$$

存在一个第一象限谱序列 *[Wei94]*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^{p}_{\mathcal{F}}(H_q(K^{\bullet} \otimes A), R) \implies H^{p+q}\mathbf{D}^{\bullet}(A),$$

以及关于 $H_*\mathbf{A}^{\bullet}$ 的对偶Tor–谱序列。

证明。该结论由复合导出函子$\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ 和 $\otimes^{\mathbb{L}}$ 的格罗滕迪克谱序列推出；将其逐对象应用于 $K^{\bullet}$ 即可。见[Wei94]。

□

**定理 3.4 (**平坦–内射情形**)**。在表示 (3.1) 下，若 $B$ 作为右 $\Lambda$–模是平坦的，且 $R$ 在 $\mathcal{E}$ 中是内射的，则所有高阶上同调和同调均消失：

$$H^{>0}\mathbf{D}^{\bullet}(X) = 0, \qquad H_{>0}\mathbf{A}^{\bullet}(A) = 0.$$

证明。由引理 3.1 和表示 (3.1)，可得 $\mathbf{A}^{\bullet}(A) \simeq B \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} \mathcal{E}(R,A)$ 以及 $\mathbf{D}^{\bullet}(X) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, \mathcal{F}(X,-)) \circ \mathcal{E}(-,R)$。$B$的平坦性会消去所有高阶 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}$ 群，而 $R$的内射性会消去高阶 $\mathrm{Ext}^{k}\,\mathcal{E}(-,R)$。标准同调代数由此推出消失性 [Wei94]。

□

**定理 3.5 (**审美结构的退化**)**。设表示 (3.1) 成立。若 $R$ 在 $\mathcal{E}$ 中不是内射的（因此对某个对象有 $\mathrm{Ext}^{1}\,\mathcal{E}(-,R) \neq 0$），且 $B$作为右 $\Lambda$–模不是平坦的（因此有 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{1}(B,-) \neq 0$），则导出审美函子与共伦理张量积相同：

$$\mathbf{A}^{\bullet}(A) \;\simeq\; B(-) \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} \mathcal{E}(R,A), \qquad H_k\mathbf{A}^{\bullet}(A) \;\cong\; \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{k}(B(-), \mathcal{E}(R,A)).$$

因此，感知塔 $H_{k>0}\mathbf{A}^{\bullet}$ 与共伦理塔在所有对象和连接态射上均一致，从而定义了相同的普适 $\delta$–函子。

证明。在 (3.1) 下，函子 $\mathbf{A}^\bullet$ 正是左导出张量积 $B \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} \mathbf{E}(R,-)$。若 $B$ 不平坦，则 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{k}(B,-)$ 非平凡；若 $R$ 不是内射的，则伦理对偶 $\mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-,R)$ 不再正合，且 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{E}}(-,R) \neq 0$。对于 $\mathbf{E}$ 中的每个短正合序列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$，$(B, \mathbf{E}(R,-))$ 的 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}$ 长正合列给出的连接态射与 $H_*\mathbf{A}^\bullet$ 的连接态射完全相同，因此两族函子都满足可消去 $\delta$–函子 [Wei94] 的相同公理。因此，$\mathbf{A}^\bullet$ 与共伦理张量积自然同构，从而证明了退化。 □

**定理 3.6** (伦理–审美兼容性)。设 $f : A \to A'$ 是按$\mathbf{D}^2(f)\eta = \eta f$意义下的伦理。在 (3.1)条件下，诱导的态射在 $\mathbf{A}^\bullet$上满足

$$\mathbf{A}^\bullet(f) \;=\; 1_B \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} \mathcal{E}(R, f),$$

且所得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^\bullet(A) & \xrightarrow{\;\mathbf{A}^\bullet(f)\;} & \mathbf{A}^\bullet(A') \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ B \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} \mathcal{E}(R,A) & \xrightarrow[1\otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda}\mathcal{E}(R,f)]{} & B \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} \mathcal{E}(R,A') \end{array}$$

在 $D^+(\mathcal{F})$中可交换。

证明。由于 $\mathbf{A}^\bullet(A) \simeq B \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} \mathcal{E}(R,A)$，任何态射都通过$\mathcal{E}(R,-)$的自然性起作用。Ethicity 确保$\mathcal{E}(R,f)$与单位 $\eta$可交换，因此它是伦理 $t$–结构 [Lan98]中心中的真正态射。$\otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda}$ 的函子性保证图表可交换。 □

坍缩定理表明，当资源对象 $R$ 不是内射的且pro函子核 $K$ 不是平坦的时，感知归结为共伦理：感知伴随的全部同调内容已由共伦理张量积的 Tor 群捕获，而在$\mathcal{F}$一侧不会出现独立不变量。当 $R$ 是内射的且 $B$ 平坦时，根据定理 3.4，高阶群 $H_{>0}\mathbf{A}^\bullet$ 消失，因此感知变得正合且不可见，仅作为补全伦理对偶的形式左伴随。

## 3.3 同调 Karchmer–Wigderson

固定一个坐标有限集 $I = \{1, \dots, m\}$ 以及一个布尔函数 $f\colon \{0,1\}^I \to \{0,1\}$。记 $X_f = f^{-1}(1)$ 和 $Y_f = f^{-1}(0)$。令 $\mathbf{P}$ 为部分赋值 $p : S \to \{0,1\}$，$S \subseteq I$ 构成的小范畴（偏序集），其序关系由扩张给出；令 $\mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}$ 为可扩张至 $X_f$ 的部分赋值所构成的全子范畴，$\mathbf{P}_0 \subset \mathbf{P}$ 为可扩张至 $Y_f$ 的部分赋值所构成的全子范畴。在固定的域 $R$ 上进行讨论。记 $\mathbf{Ab}_R$ 为 $R$-模的范畴。

定义 pro函子 $K_f : \mathbf{P}_1^{\mathrm{op}} \times \mathbf{P}_0 \to$ 阿贝尔群范畴$_R$ 如下

$$K_f(p,q) \;=\; \begin{cases} R, & \text{if } p \text{ and } q \text{ are jointly consistent on } \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) \\ & \quad \text{and there exists } i \in I \setminus (\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这记录了一个尚未固定的坐标的可用性，最终见证 $(x,\ y) \in X_f \times Y_f$ 在该坐标上可能不同，从而将 [KW90] 的分离操作范畴化。

通过标准的余端/端构造 [Lan98], [Kel82]定义审美实现与伦理反映：

$$\mathbf{A}_f(-) \ := \ \int^{p \in \mathsf{P}_1} K_f(p,-) \otimes_R \mathsf{P}_1(p,-), \ \mathbf{D}_f(-) \ := \ \int_{q \in \mathsf{P}_0} \underline{\mathrm{Hom}}_R\Big(K_f(-,q),\, \mathsf{P}_0(-,q)\Big).$$

选择 bar 与 cobar 模型，可得函子性链复形 $\mathbf{A}_f^{\bullet}$ 和$\mathbf{D}_{f,\,\bullet}$ 其（上）同调记作 $H_n(\mathbf{A}f)$ 和 $H^n(\mathbf{D}f)$。

**定义 3.7**。 对于 $f$，深度为 $\leq d$ 的确定性 KW 协议是一棵高度为 $\leq d$ 的二叉决策树，其内部节点标记为指标 $i \in I$，叶节点$\lambda$ 标记为指标 $i(\lambda) \in I$，且满足：对于所有被路由至 $\lambda$ [KW90] 的 $(x,y) \in X_f \times Y_f$，均有 $x_{i(\lambda)} \neq y_{i(\lambda)}$。将最小深度记作 KW($f$)。 $f$ 的公式是一个不重复使用门的二输入电路；其深度是最长输入到输出路径的长度。将此类最小深度记作 $\mathrm{depth}_{\mathrm{form}}(f)$ [Juk12]。

**引理 3.8** (Bar/cobar 同一)。 存在自然同构

$$H_n(\mathbf{A}_f) \ \cong \ \mathrm{Tor}_n^{\mathsf{P}}\Big(\mathsf{P}_1,\, \mathsf{P}_0; K_f\Big), \qquad H^n(\mathbf{D}_f) \ \cong \ \mathrm{Ext}^n_{\mathsf{P}}\Big(\mathsf{P}_1,\, \mathsf{P}_0; K_f\Big),$$

其中，导出函子是在函子范畴 $[\mathsf{P}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{P}$,阿贝尔群范畴$_R]$ 中计算的，系数经由 $K_f$ 通过余端/端作用 *[Kel82], [Wei94]* 扭曲。

证明。 取单纯 bar 分解 $B_{\bullet}(\mathsf{P}_1 \downarrow \mathsf{P}) \ \to \mathsf{P}_1$，以及 $[\mathsf{P}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{P}$,阿贝尔群范畴$_R]$中的对偶内射分解 $\mathsf{P}_0 \ \to \ C^{\bullet}(\mathsf{P} \ \downarrow \mathsf{P}_0)$；余端/端是左/右 Kan 上确界/下确界，可由这些分解计算 [Lan98], [Kel82]。所得链复形计算左导出余端和右导出端，从而得到所述识别 [Wei94]。 □

**引理 3.9** (关联代数 Frobenius–Koszul 自对偶)。 函子范畴 $[\mathsf{P}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{P}$,阿贝尔群范畴$_R]$ 等价于有限关联代数 $A_R(\mathsf{P})$ *[BE10]*上的左模。代数 $A_R(\mathsf{P})$ 相对于按区间长度分级是 *Frobenius* 且为 *Koszul* *[Woo98], [GRS97]*。因此，存在自然的完美配对

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathsf{P}}(-,-;K_f) \ \cong \ \mathrm{Hom}_R\Big(\,\mathrm{Ext}^n_{\mathsf{P}}(-,-;K_f), R\Big)$$

并且在域 $R$ 上，有一个函子性的同构 $\mathrm{Tor}_n^{\mathsf{P}} \cong \mathrm{Ext}^{\,n}{}_{\mathsf{P}}$。

证明。 与 $A_R$(P)-模的等价性可由米田嵌入以及对有限范畴 [Lei14] 的线性化得到。有限偏序集的关联代数具有 Frobenius 性质和 Koszul 性质，这是标准结果；所引参考文献给出了显式的双线性型和导出 Koszul 性的二次 Gröbner 基。该完美配对是 Frobenius 代数上的通常 Tor/Ext 对偶 [GRS97]。 □

**定理 3.10** （同调的 KW 对偶性）。 对于每个有限布尔函数 $f$ 和域 $R$，存在自然同构

$$H_n(\mathbf{A}_f) \ \cong \ \mathrm{Tor}_n^{\mathsf{P}}\Big(\mathsf{P}_1,\, \mathsf{P}_0; K_f\Big) \ \cong \ \mathrm{Ext}^n_{\mathsf{P}}\Big(\mathsf{P}_1,\, \mathsf{P}_0; K_f\Big) \ \cong \ H^n(\mathbf{D}_f),$$

以及共同的同调高度

$$\mathrm{ht}(f) \;:=\; \min\{n \geq 0 :\; H_n(\mathbf{A}_f) \neq 0\} \;=\; \min\{n \geq 0 :\; H^n(\mathbf{D}_f) \neq 0\}$$

与最小公式深度和最小确定性 *KW* 深度均相同：

$$\mathrm{ht}(f) \;=\; \mathrm{depth}_{\mathrm{form}}(f) \;=\; \mathrm{KW}(f).$$

证明。 与 Tor 和 Ext 的识别由引理 3.8 给出；Tor/Ext 的识别即为引理 3.9。剩下要做的是将同调高度与两个经典深度对应起来。

对于从公式到低阶同调消失的蕴含，取一个深度为 $d$ 的 $f$ 公式，并考虑由解析树诱导的巴复形滤过。顶层门（$\wedge$ 或 $\vee$）给出映射锥分解，使同调至多移位一位；叶子则贡献可表函子，因而是投射对象，从而消去低阶 Tor [Wei94]。对深度归纳可得 $\mathrm{Tor}_n = 0$ （$n < d$），并展示一个由解析树中的最长路径承载、在次数 $d$ 存在的非零类。因此 $\mathrm{ht}(f) \leq d$，且对极小的 $d$ 等号成立。

对于从 KW 协议到低阶上同调消失的蕴含，深度为 $d$ 的协议给出一个长度为 $d$、由 $K_f$-余诱导模构成的 $\mathrm{P}_0$ 内射余解，因为对坐标 $i$ 的每次查询都会将 $\mathrm{P}_0$ 分解为两个共尾子函子，而每个叶子都会贡献一节，见证其标记指标处的分离。因此 $\mathrm{Ext}^n = 0$ （$n < d$），且最深的根到叶路径给出了一个在次数 $d$ 的非零类。极小性给出 $\min\{n:\; H^n(\mathbf{D}f) \neq 0\} = d = \mathrm{KW}(f)$ [KW90]。结合引理 3.9 即完成证明。

□

**定理 3.11** （感知层与伦理层相等）。 对每个 $n \geq 0$，都存在一个关于 $f$ 自然的典范同构

$$H_n(\mathbf{A}_f) \;\xrightarrow{\cong}\; H^n(\mathbf{D}_f),$$

它与 $[\mathsf{P}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{P}, \text{阿贝尔群范畴}_R]$ 上由 *Day* 卷积诱导的乘法结构，以及通过添入一个新坐标得到的悬挂相容。特别地，第 $n$ 个感知显现层等于第 $n$ 个伦理相干层；二者都计算在 $n$ 个查询/门内消解 *KW* 分离的第 $n$ 个障碍。

证明。 由引理 3.9，关联代数是 Frobenius–Koszul 的；巴与余巴构造互为线性对偶，并在（余）同调上产生完美对偶 [Wei94]，[Kel82]。自然性以及与 Day 卷积的相容性，源于余端/端的函子性，以及由不交并给出的坐标幺半结构[Lei14]。

□

定理 3.10–3.11 将经典恒等式 $\mathrm{KW}(f) = \mathrm{depth}_{\mathrm{form}}(f)$ [KW90]提升为感知同调与伦理上同调之间的规范识别，这一结果仅依赖标准的范畴论和同调工具 [Lan98, Kel82, Wei94, Lei14]。

# 4 同伦伦理

现在，我们将伦理对偶条件提升到同伦论的层面。本小节旨在证明等式

$$\mathbf{D}^2(f)\eta_A = \eta_B f$$

只是完整高阶相容性层级中的第一层，而这些相容性构成一种由非阿贝尔中心滤过控制的同伦结构。由此得到的理论将第 2.4 节的同调障碍塔扩展到稳定的 $\infty$–范畴领域，并确立了高阶伦理相干性与相关自同构群的下中心列之间的精确对应关系。下文所有同伦构造均在 Quillen模型范畴 [Qui67] 的意义下理解；或者等价地，在稳定 $\infty$–范畴 [Lur17]的框架下理解。

## 4.1 中心滤过

**定义 4.1**（稳定同伦环境）。 设 $\mathcal{E}$ 是一个有足够多内射对象且 $\operatorname{idim}_{\mathcal{E}} R < \infty$ 的阿贝尔范畴。记 $D^+(\mathcal{E})$ 为其有界下方导出范畴，$\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$ 为 $D^+(\mathcal{E})$ 的一个稳定 $\infty$–范畴增强（参见 [Lur17]）。对于任意 $A, B \in D^+(\mathcal{E})$，我们记

$$\operatorname{Map}_{\mathcal{E}}(A, B)$$

$\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$ 中 $A$ 与 $B$ 之间的映射空间。它是一个带基点的Kan复形，满足

$$\pi_n \operatorname{Map}_{\mathcal{E}}(A, B) \;\cong\; \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{E}}(A, B) \qquad (n \geq 0)$$

根据单纯同伦群与导出同伦群之间经典的 Whitehead–Quillen比较 [Whi49], [Qui 67]。因此，每个映射空间都通过编码所有高阶复合及其相容性，细化了分次 Ext群。

**定义 4.2**（伦理相干空间）。 固定 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 以及典范单位 $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathbf{D}^2$。对于任意态射 $f\colon A \to B$（属于 $D^+(\mathcal{E})$），我们定义其伦理相干空间

$$S(f) \;:=\; \operatorname{Map}_{\mathcal{E}}\Big(\mathbf{D}^2(f)\circ\eta_A,\; \eta_B \circ f\Big),$$

也就是说，这是填充表达伦理条件的方形的同伦空间。 $S(f)$ 中的点是两个复合之间的显式同伦，而它们之间的路径则编码次级相干关系。

**定义 4.3**（同伦相干伦理性）。 若态射 $f\colon A \to B$ 是 $k$–伦理的（$k \geq 1$），则称其具有同伦相干伦理性，当且仅当空间 $S(f)$ 是 $(k-1)$–连通的；也就是说，

$$\pi_i S(f) = 0 \qquad \text{for all } 0 < i < k.$$

因此：

- 1–伦理表示至少存在一个同伦，作为$\mathbf{D}^2(f)\eta_A \simeq \eta_B f$的见证（经典伦理条件）；

- 2–伦理表示所有此类同伦本身都以相干的方式相连（不存在伦理环）；
- 更高的 $k$ 要求所有更高阶的相干球面缺陷都消失。

下面的引理表明，这一定义与同调背景下已经建立的导出障碍理论相容。

**引理 4.4** （$k$–伦理的同调判据）。 对于任意 $f\colon A \to B$，以下条件等价：

*(i)* $S(f)$ 是$(k-1)$–连通的；

*(ii)* 由 $f$ 诱导的所有长正合Ext–序列中的连接态射在次数 $\leq k$处消失；

*(iii)* $f$ 的伦理障碍塔（定义 *2.16*）在第 $k$ 级稳定。

证明。 由 $\mathrm{Map}_{\varepsilon}(-,-)$ 的函子性可得一个纤维序列

$$S(f) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(A, \mathbf{D}^2 B) \xrightarrow{(\mathbf{D}^2(f))_* - (f^*)} \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(A, \mathbf{D}^2 A),$$

其同伦群上的长正合列与 $\mathrm{Hom}(-,R)$ 的 Ext 长正合列一致，因为 $\pi_i \mathrm{Map}_{\varepsilon}(A,B) \cong \mathrm{Ext}^i_{\varepsilon}(A,B)$。因此， $\pi_i S(f) = 0$当且仅当$i \leq k-1$所有连接态射 $\mathrm{Ext}^i(B,R) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(A,R)$ 对于 $i < k$ 均为零；这等价于根据定理 2.17，该塔稳定。 □

**定义 4.5** （伦理自同构群）。 令 $G = \mathrm{Aut}_{\eta}(\mathrm{Id})$ 表示恒等函子在 $D^+(\mathcal{E})$ 上所有同伦自同构所构成的类群状幺半群，这些自同构与 $\eta$ 交换，即

$$\mathbf{D}^2(\theta) \circ \eta = \eta \circ \theta.$$

它通过共轭作用于每个映射空间 $\mathrm{Map}_{\varepsilon}(A,B)$，从而作用于伦理相干空间族 $S(f)$。

**定义 4.6** （下中心列）。 沿用 [MS11], 的构造，递归定义

$$\gamma_1(G) := G, \qquad \gamma_{n+1}(G) := [\gamma_n(G), G],$$

以及分次阿贝尔商群 $\mathrm{gr}_n(G) := \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$。 这个下中心列测度群 $G$ 中逐层出现的非交换层。

**定理 4.7** （同伦–中心对应）。 对于每个 $n \geq 1$，都存在一个分次群的自然态射

$$\Phi_n : \pi_{n+1} S(f) \longrightarrow \mathrm{gr}_n(G)$$

与源上的 *Samelson* 积 *[Sam53]* 以及目标元上的交换子兼容。如果 $S(f)$ 可缩，那么对于所有 $n$，都有 $\gamma_n(G) = 1$；反过来，如果对于所有 $i \leq k$，都有 $\mathrm{gr}_i(G) = 0$，那么每个态射 $f$ 都是 $k$–伦理的。

证明。 映射空间 $\mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(A,B)$ 带有 $G$ 通过共轭给出的自然作用：对于 $\theta \in G$，$(\theta \cdot f) = \theta_B f \theta_A^{-1}$。对该作用求导，便得到 $\pi_1 G$ 在所有高阶 $\pi_n \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(A,B) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}(A,B)$ 上的作用，由此得到的交叉模

$$\pi_1 G \curvearrowright \pi_{n+1}\,\mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(A,B)$$

在 $\pi_1 G$ 上诱导下中心滤过，恰如 [MS11] 中所示。包含映射 $S(f) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(A,\ \mathbf{D}^2 B)$ 将 $\pi_{n+1} S(f)$ 与此作用的同伦稳定子等同；投影到伴随分次对象定义了 $\Phi_n$。如果 $S(f)$ 可缩，那么所有 $\pi_{n+1} S(f) = 0$，因此每个交换子作用都平凡化，从而迫使 $\gamma_n(G) = 1$。反过来，如果对于 $i \le k$，所有 $\mathrm{gr}_i(G) = 0$，那么 $\pi_1 G$ 在 $\pi_i \mathrm{Map}(A,\ B)$ 上的作用对 $i < k$ 是零映射，这意味着对于 $i < k$，$\pi_i S(f) = 0$，即 $f$ 是 $k$–伦理的。□

**推论 4.8**（非阿贝尔伦理深度）。 设

$$\mathrm{depth}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{E},R) \;:=\; \min\{\, m \ge 0 :\, \gamma_{m+1}(G) = 1 \,\}.$$

那么，深度$_{\mathfrak{d}}$（$\mathcal{E}$ $R$） 等于满足以下条件的最大整数 $k$：存在一个 $D^+$（$\mathcal{E}$） 中的态射，它不是 $k$–伦理的。因此， $G$ 的下中心列长度测度了系统中存在的非相干性的最大阶。

引理 *4.9*（导出 *Morita* 等价下的稳定性）。若 $(\mathcal{E}\ R)$ 与 $(\mathcal{E}'\ R')$ 按照定义 *2.19* 的意义导出 *Morita* 等价，则诱导的等价 $F\colon D^+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} D^+(\mathcal{E}')$ 给出映射空间 $\mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(A,B) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{E}'}(F(A)\ F(B))$ 之间保留单位 $\eta$ 的等价。因此， $S(f) \simeq S(F(f))$，并且$G \simeq G'$ 具有相同的下中心列。

证明。 导出 Morita 等价是稳定 $\infty$–范畴[Lur17], 之间保留映射谱与复合的正合等价。根据定义 2.19， $F$ 交织了 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{D}'$，因此保留单位 $\eta$；于是定义 $S(f)$ 的纤维彼此对应。恒等函子的自同态类群对象在等价下具有函子性，从而得到 $G$ 及其滤过的所述识别。 □

**定理 4.10**（同伦相干伦理心）。 令 $\heartsuit_{\mathfrak{d}}$ 为定理 *2.10* 中$t$–结构的伦理心。对象 $A \in D^+(\mathcal{E})$ 属于 $\heartsuit_{\mathfrak{d}}$，当且仅当每个态射$f\colon A \to B$ 和 $g\colon B \to A$ 都是1–伦理的。此外，若对所有 $i \le k$都有$\mathrm{gr}_i(G) = 0$，则 $\heartsuit_{\mathfrak{d}}$ 中对象之间的每个态射都是 $k$–伦理的，并且所有映射空间 $\mathrm{Map}(A,B)$都是$(k-1)$–连通的。

证明。第一条陈述是心的经典刻画（定理 2.13）。对于更高的 $k$，当 $i \le k$ 时 $\mathrm{gr}_i(G)$ 的平凡性意味着，根据定理 4.7， $i < k$ 时 $\pi_i \mathrm{Map}(A,B)$ 上所有交换子作用都消失。由此得到的 $\mathrm{Map}(A,B)$ 的怀特海德塔随后在 $k-1$ 层之前退化，从而得到所述的连通性。 □

**定理 4.11**（伦理约化与中心结构的保持）。 设 （$r$、 $j$）是第 *2.5* 节意义下的伦理约化。若每个 $r$ 和 $j$ 都是 $k$–伦理的，则在 $S(f)$ 上的诱导态射是$(k-1)$–连通的，并且 $G$的中心列在 $\gamma_{k+1}$意义下得到保持。特别地，非阿贝尔伦理深度不会在伦理约化下增加。

证明。 由于**D** 是三角化的且为逆变的，伦理约化是 $D^{+}(\mathcal{E})$ 的正合函子。正合性意味着映射空间在不超过 $k$ [GM03]，次数范围内是弱同伦等价，因此在 $S(f)$ 上得到 $(k-1)$–连通映射。自同构群的诱导态射保持长度不超过 $k+1$ 的交换子，从而得到结论。 □

## 4.2 Postnikov–Whitehead 塔

上一节所发展的同伦相干对偶，通过映射空间为高阶伦理相干性提供了全局描述

$$S(f) = \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(\mathbf{D}^{2}(f)\circ\eta_{A},\ \eta_{B}\circ f).$$

为对这些相容性进行构造性的逐层描述，我们现在引入 $S(f)$ 的 Postnikov–Whitehead 塔。该塔细化了第 2.4 节的同调障碍塔，并将其扩展至稳定 $\infty$–范畴 $\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$ 中同伦障碍的完整层级。所有关于同伦论的引用均遵循怀特海德 [Whi49]、奎伦 [Qui67]，以及 Bousfield–Kan [BK72] 的经典构造。

**定义 4.12** （伦理 Postnikov 塔）。 设 $S(f)$ 为上文定义的伦理相干空间。 $S(f)$ 的 Postnikov 塔是 $\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$ 中的一列态射

$$S(f) \longrightarrow P_{\leq n}S(f) \longrightarrow P_{\leq n-1}S(f) \longrightarrow \cdots$$

使得 $P_{\leq n}S(f) \to P_{\leq n-1}S(f)$ 的纤维是 Eilenberg–Mac Lane 对象$K(\pi_{n}S(f),\ n)$。群 $\pi_{n}S(f)$ 称为 $f$ 的伦理同伦障碍。态射 $f$ 若满足 $\pi_{i}S(f) = 0$，则称为 $k$–伦理的，其中 $i < k$。

**引理 4.13 (**阿贝尔影**)。** 在稳定的 $\infty$–范畴 $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{E})$ 中，存在自然的识别

$$\pi_{1}S(f) \cong \mathrm{Ext}^{1}_{\mathcal{E}}(A,R), \qquad \pi_{2}S(f) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{2}_{\mathcal{E}}(A,R),$$

并且一般而言，存在典范态射 $\pi_{n}S(f) \to \mathrm{Ext}^{n}\varepsilon(A,R)$，对 $n>0$ 与长正合Ext–序列相容。因此，第 *2.4* 节的同调障碍塔是 $S(f)$ 的 ***Postnikov*** 过滤在阿贝尔范畴中的投影。

证明。 由于 $\pi_{n}\mathrm{Map}\varepsilon(A,B) \cong \mathrm{Ext}^{n}\varepsilon(A,B)$，第一个等式显然成立。对于$n>1$, Postnikov 截断 $P_{\leq n}S(f)$ 构成一个纤维序列

$$K(\pi_{n+1}S(f), n+1) \to S(f) \to P_{\leq n}S(f),$$

其对应的长正合同伦序列与将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,R)$ 应用于定义 $f$ 的截断复形后得到的长正合 Ext–序列一致。连接态射的相容性由 $\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$ 中截断的泛性质推出。

□

**定理 4.14 (**伦理可缩性的怀特海德判据**)。** 对于 $D^{+}(\boldsymbol{E})$ 中的每个态射$f\colon\ A \to B$，以下条件等价：

*(i)* 空间 $S(f)$ 是可缩的；

*(ii)* 所有 *Postnikov* 不变量 $k_i(S(f)) \in H^{i+1}(P_{\le i-1}S(f);\, \pi_i S(f))$ 均消失；

*(iii)* 所有同调障碍 $\mathrm{ob}_i(A^\bullet) \in \mathrm{Ext}^i\, \varepsilon(H^0(A^\bullet)\ R)$ 及其交换子均为零。

证明。 等价关系 $(i) \Leftrightarrow (ii)$ 是单纯群的经典怀特海德定理 [Whi49], [Qui67]。$(ii) \Rightarrow (iii)$ 成立，因为根据引理 4.13，对 Postnikov 塔作阿贝尔化所得正是同调障碍塔。反过来，如果所有 $\mathrm{ob}_i$ 均消失，但某个交换子 $[\mathrm{ob}_i, \mathrm{ob}_j]$ 不为零，则相应的 Postnikov 不变量 $k_{i+j}$ 仍然存在，因此 $S(f)$ 不可缩。 □

**定理 4.15** （Ethic Postnikov–Whitehead分解）. 每个 $S(f)$ 都允许在 $\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$ 中作唯一的 *Postnikov–Whitehead* 分解，其各层为阿贝尔群 $\pi_n S(f)$，连接态射则为 *Postnikov* 不变量$k_n(S(f))$。转至 $\pi_1$ 并对该塔作阿贝尔化，即可还原第 *2.4* 节的伦理障碍塔。

证明。 这是稳定 $\infty$–范畴 [Lur17]中的标准 Postnikov 构造。由于 $\mathrm{Sp}(\mathcal{E})$ 是稳定的，每个截断 $P_{\le n}$ 都存在，且连续的纤维是 Eilenberg–Mac Lane 对象 $K(\pi_n S(f)\ n)$。通过 $\pi_1$ 进行阿贝尔化，可恢复 $\mathrm{Ext}^n$–群链，从而得到所需的同一性。 □

**定理 4.16** （与中心滤过的比较）。 设 $G = \mathrm{Aut}_\eta(\mathrm{Id})$ 是 $D^+(\mathcal{E})$ 的伦理自同构群，其下中心列 $\gamma_n(G)$ 如定理 *4.7* 中所述。对每个 $n \ge 1$，都有自然态射

$$\Phi_n : \pi_{n+1} S(f) \longrightarrow \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G),$$

它们与 *Postnikov* 微分 $k_n(S(f))$相容。特别地，所有 $k_n$ 均消失，当且仅当整个中心列是平凡的。

证明。 $G$ 在每个映射空间 $\mathrm{Map}_\mathcal{E}(A, B)$上的作用诱导出一个交叉模$\pi_1 G \curvearrowright \pi_{n+1} S(f)$。根据 [MS11], 的构造，该交叉模产生 $G$ 的中心滤过以及一个典范满射 $\pi_{n+1} S(f) \to \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$。群作用下 Postnikov 不变量的函子性 [Lur17] 给出了与 $k_n$所述的相容性。 □

**定理 4.17** (截断与稳定化)。 若典范映射 $P_{\le k} S(f) \to P_{\le k+1} S(f)$ 是弱等价，则伦理障碍 $\mathrm{ob}_{k+1}(A^\bullet)$ 以及 $i \le k$ 的所有 *Postnikov* 不变量 $k_i(S(f))$ 均消失。因此，$f$ 属于伦理心 $\heartsuit_\eth$。

证明。 连续截断之间的弱等价意味着，对于 $i \le k$，所有高阶纤维 $K(\pi_i S(f)\ i)$ 都是可缩的。因此，对于 $i \le k$，$\pi_i S(f) = 0$，故由引理 4.13，所有 $\mathrm{ob}_{i+1}$ 都消失。 $H^{>1}\mathbf{D}$ 的消失意味着，根据定理 2.10，$f$ 属于 $\heartsuit_\eth$。 □

**定理 4.18** （Postnikov 深度与稳定化长度）。 对每个 $f\colon\ A \to B$定义

$$\operatorname{depth}_{\mathrm{Post}}(f) := \max\{\, n \geq 0 : \pi_n S(f) \neq 0 \,\}.$$

那么，深度$_{\mathrm{Post}}(f)$ 等于 $G$ 的中心列中非平凡部分的长度，并且给出了伦理约化过程稳定所需步骤数的上界。

证明。 根据定理 4.16， $\pi_{n+1}S(f)$ 满射到 $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$，因此最后一个非零的 $\pi_n$ 对应于最后一个非平凡的换位子层。由于每次伦理约化都会消去一个同伦障碍，该过程至多经过深度$_{\mathrm{Post}}(f)$ 个阶段后便会稳定。 □

**定理 4.19** (Postnikov 数据的不变性)。 导出 *Morita* 等价$(\mathcal{E}\ \ R) \simeq (\mathcal{E}\prime\ \ R')$保持 *Postnikov* 不变量以及深度函数 深度$_{\mathrm{Post}}$和 深度$_{\partial}$。

证明。 在这种等价下，映射空间及其截断相互对应[Lur17], ，而 Sp($\mathcal{E}$) 与 Sp($\mathcal{E}'$) 之间诱导的等价保持所有同伦群，因而也保持 Postnikov 层及其不变量。 □

**Co推论 4.20** (同伦心的完备性)。 结构三元组 $s$

$$\{\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}\}, \qquad \{\pi_n S(f)\}, \qquad \{\gamma_n(G)\}$$

构成了一个由阿贝尔、同伦和群论不变量组成的封闭层级。它们通过典范态射相互关联

$$\pi_n S(f) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{E}}(A, R), \qquad \pi_{n+1} S(f) \longrightarrow \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G),$$

并且当且仅当 $f$ 属于伦理心 $\heartsuit_{\partial}$时趋于稳定。因此，*Postnikov–Whitehead* 塔完善了伦理对偶的代数与同伦架构。

## 4.3 局部–整体伦理性

设 $\mathcal{E}$ 为一个有足够多内射对象的阿贝尔范畴，并令 $R \in \mathcal{E}$ 为一个固定的资源对象。记

$$\mathbb{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R) : D^+(\mathcal{E})^{\mathrm{op}} \to D^+(\mathcal{E})$$

为导出对偶函子。我们假设 $R$ 具有有限内射维数 $\operatorname{idim}_{\mathcal{E}} R < \infty$，因此 $\mathbb{D}$ 具有有界的上同调振幅，并在$\mathcal{E}$上诱导一个右导出的反变上同调 $\delta$–函子。

令 $G =$Aut(id$_{\mathcal{E}}$) 表示 $\mathcal{E}$ 的恒等函子的自同构群；其带有下中心列 $\gamma_1(G) = G$， $\gamma_{i+1}(G) = [G, \gamma_i(G)]$。此外，固定 $R$ 的一个递减理想序列

$$R = I^0 \supset I^1 \supset I^2 \supset \dots,$$

每个 $I^n$ 都是 $R$ 的子对象，满足 $I^{n+1} I^m \subset I^{n+m}$，并且在 $G$ 的作用下保持稳定。对于每个 $n$，记 $\mathcal{E}/I^n$ 为阿贝尔商范畴，其中所有

经过被 $I^n$ 消去的对象的态射都会映为零。假设这些商函子都是正合的。

对于态射 $f\colon\ A \to B$ in $\mathcal{E}$，记

$$f_n : A/I^n A \longrightarrow B/I^n B$$

为诱导的态射 in $\mathcal{E}/I^n$。我们将把 $f_n$ 沿理想滤过的导出对偶的行为，与中心列 $\gamma_\bullet(G)$所诱导的态射的对偶的行为联系起来。

**定义 4.21.** 对每个 $n \geq 0$ 和 $p, q \geq 0$，定义

$$E_2^{p,q}(I) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}}(H_q(A/I^\bullet), R), \qquad F_2^{p,q}(\gamma) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{E}}(H_q(A/\gamma_\bullet), R),$$

分别与 $G$上的理想滤过 $I^\bullet$ 和中心滤过 $\gamma_\bullet$ 相关联的谱序列的第二页。它们的存在性来自标准的格罗滕迪克谱序列，该谱序列适用于阿贝尔范畴中具有足够多内射对象的有下界复形上的左正合函子的复合。

**引理 4.22.** 对每个 $n$，存在一个规范的谱序列态射

$$\Phi_n : E_r^{p,q}(I) \longrightarrow F_r^{p,q}(\gamma)$$

它关于 $A$、$B$ 以及偶的态射 $(I^\bullet, \gamma_\bullet)$ 自然，并且与微分相容。

证明。 每个理想 $I^n$都在 $G$作用下稳定；因此，商态射 $\mathcal{E}/I^n \to \mathcal{E}/\gamma_n(G)$ 在 $\mathcal{E}$ 上诱导出正合函子的态射，进而由导出函子的函子性，诱导出它们的格罗滕迪克谱序列之间的态射。由于 Ext 长正合列中的连接态射具有自然性，微分彼此交换。

□

**引理 4.23**。 如果对某个 $k \geq 0$，对所有 $p + q \leq k$，态射 $E^{p}_{,2}{}^{q}(I) \to F^{p}_{,2}{}^{q}(\gamma)$ 都是同构，那么对于 $E$ 中的每个态射 $f\colon A \to B$，以下条件等价：

*(a)* 对所有 $i \leq k$， $H^i\mathbf{D}(f) = 0$；

*(b)* 对所有 $n$ 和所有 $i \leq k$， $H^i\mathbf{D}(f_n) = 0$；

*(c)* 对所有 $p + q \leq k$，页 $E^{p}_{,r}{}^{q}(I)$ 和 $F^{p}_{,r}{}^{q}(\gamma)$ 都在 $r = 2$ 处退化。

证明。 如果谱序列在指定范围内重合，那么一个谱序列中的项为零，就意味着另一个谱序列中的相应项也为零。等式 $H^i\mathbf{D}(f) = 0$ for$i \leq k$ 成立，当且仅当谱序列在总次数$\leq k$处于 $E_2$ 退化，因为该范围内所有更高次微分都为零。反过来，如果 $E^{p}_{,r}{}^{q}(I)$ 和$F^{p}_{,r}{}^{q}(\gamma)$ 重合并在 $E_2$ 处退化，那么它们的极限计算出$H^{p+q}\mathbf{D}(f)$的相同分次片；因此这些群同时为零。 □

**引理 4.24.** 对于每个 $n$，与短正合序列相关联的长正合列中的连接态射

$$0 \longrightarrow I^{n+1}/I^{n+2} \longrightarrow R/I^{n+2} \longrightarrow R/I^{n+1} \longrightarrow 0$$

诱导出一个自然微分

$$d_I^{p,q} : E_r^{p,q}(I) \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}(I),$$

以及中心列中的交换子商序列

$$0 \longrightarrow \gamma_{n+1}/\gamma_{n+2} \longrightarrow G/\gamma_{n+2} \longrightarrow G/\gamma_{n+1} \longrightarrow 0$$

诱导出

$$d_\gamma^{p,q} : F_r^{p,q}(\gamma) \longrightarrow F_r^{p+r,q-r+1}(\gamma).$$

两个微分的双次数均为$(r, -r+1)$，并满足 $d_I^2 = d_\gamma^2 = 0$。

证明。 这由滤过复形的格罗滕迪克谱序列的一般构造可知：连续子商短正合列的边界映射给出这些微分，而 $d^2 = 0$ 由连接态射复合所成长序列的正合性可得。

□

**引理 4.25**。 假设对所有 $p + q \le k$， $E^{p}{}_{,2}{}^{q}(I)$ 与 $F^{p}{}_{,2}{}^{q}(\gamma)$ 相同。那么，在该范围内所有 $d^{p}{}_{,I}{}^{q}$ 和 $d^{p}{}_{,\gamma}{}^{q}$ 消失，当且仅当两个谱序列都在 $E_2$ 处退化。

证明。 如果总次数 $\le k$ 中的所有微分都消失，则所有后续页均稳定，并且谱序列在该范围内于 $E_2$ 退化。等价性源于：根据假设，两组微分都计算相同的分次对象。

□

**定理 4.26**（双中心坍缩与局部–整体伦理性）**：** 设 $\mathcal{E}$ 为一个具有足够多的内射对象的阿贝尔范畴， $R \in \mathcal{E}$ 为一个具有有限内射维数的资源对象， $\mathbb{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 为其导出对偶性， $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{E}})$ 具有下中心列 $\gamma_\bullet(G)$，并且 $I^\bullet$ 具有一个在 $G$下稳定的 $R$ 正合理滤过。对于一个态射$f : A \to B$，对任意固定的 $k \ge 0$，以下条件等价：

(*i*) $f$ 在整体上是 $k$-伦理的，即对于所有 $i \le k$， $H^i\mathbf{D}(f) = 0$；

(*ii*) 对于所有 $n \ge 0$，局部化态射 $f_n : A/I^nA \to B/I^nB$ 都是 $k$-伦理的，并且中心塔上由此诱导的 *Ext*群映射满足 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}(A/\gamma_n(G)\ R) = 0$ 对 $i \le k$成立；

*(iii)* 谱序列 $E^{p}{}_{,r}{}^{q}(I)$和 $F^{p}{}_{,r}{}^{q}(\gamma)$在总次数 $p+q \le k$ 的 $E_2$ 处退化，且它们的 $E_\infty$极限一致。

证明。 (iii)⇒(i)：若两个谱序列都在 $E_2$ 处退化，则 $H^{p+q}\mathbf{D}(f)$ 可直接由 $E^{p}{}_{,2}{}^{q}(I)$（或等价地由 $F^{p}{}_{,2}{}^{q}(\gamma)$）计算得出；根据假设，它们在指定范围内均为零，从而得到全局 $k$-Ethicity。

(i)⇒(ii)：若 $H^i\mathbf{D}(f) = 0$对 $i \le k$成立，则应用精确商函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}/I^n$和中心函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}/\gamma_n(G)$ 会保留这些消失条件，因为

这两个函子都是正合的，并且根据滤子的稳定性，它们与 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,R)$ 可交换，其中 $G$。

(ii)⇒(iii)：根据前面的引理，沿两种滤过的 Ext群均消失，这迫使所有微分 $d^{p,\,I}{}^{q}$ 和 $d^{p,\,\gamma}{}^{q}$（其中 $p+q\le k$）都消失；因此，在该范围内，两条谱序列均退化于 $E_2$。它们在 $E_2$ 上的一致性意味着极限页 $E_\infty = F_\infty$相等。 □

**推论4.27**。 在定理的假设下，态射 $f$ 的全局 $k$-伦理性等价于理想谱序列和同伦谱序列在总次数 $\le k$处同时稳定。特别地，任一序列的最小稳定指标等于 $H^i\mathbf{D}(f)$不消失的最小次数。

我们继续在阿贝尔范畴 $\mathcal{E} = \mathrm{Mod}_A$ 中工作，其中对象是固定交换诺特环 $A$ 上的有限生成模；该范畴配备了资源对象 $R = A$ 和伦理对偶函子

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(-,A) : D^+(\mathcal{E})^{\mathrm{op}} \longrightarrow D^+(\mathcal{E}).$$

固定一个理想 $I \subset A$。对于 $n \ge 0$，我们用 $X_n = X/I^nX$ 表示沿着 $I$滤过的 $X$ 逐次商，并用

$$G_n = I^nX/I^{n+1}X$$

相应的分次层。以下所有模和极限均取自 $\mathrm{Mod}_A$，且 $\varprojlim^{\,p}$ 表示逆极限的第 $p$ 个右导出函子。

注记 4.28。 这一对 $(X_n, G_n)$ 是 $X$ 的典范理想塔；它刻画了通过有限 $I$-进截断对 $X$ 进行的离散逼近。导出对偶性 $\mathbf{D}$ 通过对塔的每一项施加 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(-,A)$，作用于该塔，并由此得到相应的伦理上同调群塔。

**引理 4.29** （Milnor 谱序列）。 设 $\{X_n\}$ 是 $E$ 中对象的一个逆系统。对于每个 $A$-模 $Y$，存在一个第一象限谱序列

$$E_2^{p,q} = \varprojlim{}^{p}\,\mathrm{Ext}_A^q(X_n, Y) \;\Longrightarrow\; \mathrm{Ext}_A^{p+q}\Big(\varprojlim_n X_n, Y\Big),$$

其边缘映射对每个 $k \ge 0$ 给出短正合列

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^{1}\,\mathrm{Ext}_A^{k-1}(X_n, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^k\Big(\varprojlim_n X_n, Y\Big) \longrightarrow \varprojlim \mathrm{Ext}_A^k(X_n, Y) \longrightarrow 0.$$

证明。 这是逆极限导出函子的标准谱序列，参见 [Wei94]。其推导使用了 $Y$ 的内射分解、逆极限在满射逆系统上的函子精确性，以及复合函子 $\varprojlim \circ \mathrm{Hom}_A(-,Y)$ 的 Grothendieck构造。 □

**定理 4.30** （沿理想滤过的伦理完备性）。 设 $A$ 为诺特环，$I \subset A$ 为理想，且 $X$ 为有限生成的 $A$-模。对每个整数 $k \ge 0$，都存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^{1}\,\mathrm{Ext}_A^{k-1}(X_n, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^k\Big(\varprojlim_n X_n, A\Big) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Ext}_A^k(X_n, A) \longrightarrow 0.$$

若对所有 $0 \le j \le k$，逆系统 $\{\mathrm{Ext}_A^j(X_n,\ A)\}_n$ 均满足 *Mittag–Leffler* 条件，则典范映射

$$\mathrm{Ext}_A^j\Big(\varprojlim_n X_n, A\Big) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{Ext}_A^j(X_n, A)$$

对所有 $j \le k$ 都是同构。此外，若这些系统稳定到$\mathrm{Ext}_A^j(X, A)$的值，则自然映射 $X \to \varprojlim_n X_n$ 会诱导出$\mathrm{Ext}_A^j(-, A)$ 对所有 $j \le k$ 的同构；此时我们称 $X$ 是 $k$ 阶伦理完备的。

证明。 将引理 4.29 应用于 $Y = A$。陈述中所示的短正合列恰好是 Milnor 谱序列的低次截断。若每个系统$\{\mathrm{Ext}_A^j(X_n, A)\}_n$ 都满足 Mittag–Leffler 条件 [Wei 94], ，则 $\varprojlim^1 = 0$ 与边缘映射会给出同构。当这些稳定值与 $\mathrm{Ext}_A^j(X, A)$ 一致时，自然态射 $X \to \varprojlim X_n$ 会在所有 $j \le k$ 的 $\mathrm{Ext}^j(-, A)$ 上诱导同构，从而证明所声称的伦理完备性。 □

**引理 4.31**。 对于每个 $n \ge 0$，短正合列

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_n \longrightarrow 0$$

诱导出伦理上同调群的长正合列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^k(X_n, A) \xrightarrow{\alpha_n^k} \mathrm{Ext}_A^k(X_{n+1}, A) \xrightarrow{\beta_n^k} \mathrm{Ext}_A^{k+1}(G_n, A) \xrightarrow{\partial_n^{k+1}} \mathrm{Ext}_A^{k+1}(X_n, A) \longrightarrow \cdots$$

对每个 $k \ge 0$ 均成立。

证明。 将反变函子 $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ 应用于给定的短正合列，并转而考察其右导出函子，根据上同调 $\delta$–函子 [Wei94] 的标准公理，可得到这一长正合列。 □

**定理 4.32** （伦理误差估计）。 在上述假设下，对于每个 $n \ge 0$ 和 $k \ge 0$，都存在引理 *4.31* 中的典范态射 $\alpha_n^k$ 和 $\beta_n^k$，且其核与余核满足

$$\ker(\alpha_n^k) \twoheadleftarrow \mathrm{Ext}_A^k(G_n, A), \qquad \mathrm{coker}(\alpha_n^k) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_A^{k+1}(G_n, A).$$

特别地，若对于所有 $n \ge N$，都有 $\mathrm{Ext}_A^k(G_n, A) = \mathrm{Ext}_A^{k+1}(G_n, A) = 0$，则序列 $\mathrm{Ext}_A^k(X_n, A)$ 对 $n \ge N$ 稳定。

证明。 引理 4.31 中序列的正合性意味着 $\mathrm{im}(\beta_n^{k-1}) = \ker(\alpha_n^k)$ 且 $\mathrm{im}(\alpha_n^k) = \ker(\beta_n^k)$。陈述中的箭头是由这些识别得到的典范映射。若所有群 $\mathrm{Ext}_A^k(G_n,\ A)$ 和 $\mathrm{Ext}_A^{k+1}(G_n,\ A)$ 对于 $n \ge N$ 都消失，则对于此类 $n$，$\ker(\alpha_n^k) = \mathrm{coker}(\alpha_n^k) = 0$，因此 $\alpha_n^k$ 是同构，且系统 $\mathrm{Ext}_A^k(X_n,\ A)$ 稳定。 □

**定理 4.33** (伦理紧致性)。 设 $A$ 是诺特的，$I \subset A$ 是一个理想，且 $X$是一个有限生成的 $A$-模。假设存在整数 $s$、$N \ge 0$

$$\mathrm{Ext}_A^j(G_n, A) = 0 \quad \textit{for all } n \ge N \textit{ and all } 0 \le j \le s+1.$$

那么，对每个 $0 \le k \le s$，序列 $\mathrm{Ext}_A^k(X_n, A)$ 在第 $n = N$ 阶稳定，并且

$$\mathrm{Ext}_A^k\Big(\varprojlim_n X_n, A\Big) \;\cong\; \mathrm{Ext}_A^k(X_N, A).$$

此外，若每个系统 $\{\mathrm{Ext}_A^j(X_n, A)\}_n$ 对于 $j \le s$ 都满足 *Mittag–Leffler* 条件，则典范映射 $X \to \varprojlim_n X_n$ 在所有 $k \le s$上诱导同构 $\mathrm{Ext}_A^k(-, A)$；也就是说，$X$ 与其 $I$-进完备化在阶 $s$ 上伦理等价。

证明。由定理 4.32，若 $k \le s$，则 $\mathrm{Ext}_A^k(G_n, A)$ 和 $\mathrm{Ext}_A^{k+1}(G_n, A)$ 的消失意味着所有映射 $\alpha_n^k$ 对于 $n \ge N$都是同构。因此，对于 $n \ge N$，$\mathrm{Ext}_A^k(X_n, A) \cong \mathrm{Ext}_A^k(X_N, A)$，从而证明了稳定性。应用定理 4.30，并利用 Mittag–Leffler 条件，我们有 $\varprojlim^1 = 0$，于是 $\mathrm{Ext}_A^k(\varprojlim X_n, A) \cong \varprojlim \mathrm{Ext}_A^k(X_n, A) \cong \mathrm{Ext}_A^k(X_N, A)$。最后一个结论成立，是因为典范映射 $X \to \varprojlim X_n$ 在所有 $k \le s$上诱导 $\mathrm{Ext}_A^k(-, A)$ 的相同同构。

□

定理 4.30–4.33 为沿理想塔进行离散逼近提供了一套完整的演算：

- 定理 4.30 保证在温和的有限性假设（伦理完备性）下，伦理对偶与 $I$-进极限可交换。
- 定理 4.32 通过分次部分中显式的 Ext 层，测度局部截断的偏差（伦理误差）。
- 定理 4.33 给出了精确重构伦理不变量的有限阶段判据（伦理紧致性）。

它们共同为理想塔赋予了一种精确的同调控制机制，用于伦理形式体系中的离散逼近。

# 5 $P$ 与 $NP$ 的重新表述

**定义 5.1**（伦理环境与主要障碍）。设$\mathcal{E}$ 为一个有足够多内射对象的阿贝尔范畴，并固定 $R \in \mathcal{E}$。记 $\mathbf{D} = \mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-, R) : D^+(\mathcal{E})^{\mathrm{op}} \to D^+(\mathrm{Ab})$，表示带单位 $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathbf{D}^2$ 的右导出对偶。对于 $A \in \mathcal{E}$和 $k \ge 0$，定义 $H^k\mathbf{D}(A) := \mathrm{Ext}^k \varepsilon(A, R) = H^k\mathbf{D}(A)$。我们称 $H^1\mathbf{D}(A)$ 为主要障碍。

**定义 5.2**（规模与深度指标）。对于语言 $L \subseteq \{0,1\}^*$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_{L,n} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为特征函数的限制。对于任意$X^\bullet \in D^+(\mathcal{E})$，记 $q \in \mathbb{N}$ 为 $X^\bullet_{\le q}$ 的典范截断（内部深度 $q$）。

**定义 5.3**（可容许伦理模型）。一个可容许伦理模型将函子性定义的对象 $D^\bullet_{L,n} \in D^+(\mathcal{E})$$L, n$ 的每一对关联起来，使得：

*(M1)* 一致可呈现性。存在一个确定性对数空间转导器，在输入 $1^n$时，输出长度为 $n^{O(1)}$ 的有限描述 $\langle D^\bullet_{L,n} \rangle$；此外，根据$\langle D^\bullet_{L,n} \rangle$ 和 $q$，它可在 $\mathrm{poly}(n+q)$ 时间内计算出 $\langle (D^\bullet_{L,n})_{\le q} \rangle$。

*(M2)* 验证提取。 存在一个固定的确定性多项式时间过程，给定 $\langle (D^{\bullet}_{L,n})_{\le q}\rangle$ 后，会输出一个大小为 $\mathrm{poly}(n+q)$ 的布尔电路 $V_{n,q}$，满足

$$H^0\mathbf{D}\Big((D^{\bullet}_{L,n})_{\le q}\Big)(x,w) = V_{n,q}(x,w) \quad \text{for all } x\in\{0,1\}^n \text{ and witnesses } w.$$

（*M3*）伦理深度等于公式/*KW* 深度。对于每个 $n$，使得 $q$ 为满足$H^{>q}\mathbf{D}(D^{\bullet}_{L,n}) = 0$ 等于$f_{L,n}$的最小布尔公式深度和确定性 Karchmer–Wigderson 深度的最小 $= 0$。

（*M4*）计算提取。存在一个确定性多项式时间过程，给定$\langle (D^{\bullet}_{L,n})_{\le q}\rangle$，输出一个计算 $f_{L,n}$ 的布尔电路 $C_{n,q}$，其深度为$O(q)$，大小为 $\mathrm{poly}(n+q)$；当 $q$ 由 $n$ 的一个多项式给定时，电路族 $\{C_{n,q}\}_n$ 是对数空间一致的。

**定义 5.4**（伦理类 $\mathbf{NP}_{\partial}$ 和 $\mathbf{P}_{\partial}$）。设 $D^{\bullet}_{L,n}$ 来自一个容许模型。令 $\Delta_L(n,q) := H^1\mathbf{D}((D^{\bullet}_{L,n})_{\le q})$。定义如下：

- $L\in\mathbf{NP}_{\partial}$ 当且仅当存在多项式 $q_{\mathrm{ver}}(n)$ $p(n)$，使得对所有 $n$，由（*M2*）得到的电路$V_n := V_{n,q_{\mathrm{ver}}(n)}$ 满足

$$x\in L \iff \exists\, w\in\{0,1\}^{\le p(n)} \;\; V_n(x,w)=1.$$

- $L\in\mathbf{P}_{\partial}$ 如果存在一个多项式 $Q(n)$，使得

$$\Delta_L(n,Q(n)) = 0 \quad \text{for all } n,$$

并且，记 $C_n := C_{n,\,Q(n)}$ 来自 *(M4)*，则族 $\{C_n\}$ 是对数空间一致的，其规模为 $n^{O(1)}$，深度为 $O(Q(n))$。

**定义 5.5**（图灵机复杂性类）。 $\mathbf{P}_{\mathrm{TM}}$ 由可由确定性图灵机在时间$n^{O(1)}$ 内判定的语言组成；$\mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$ 由具有多项式时间验证器且见证长度有多项式界的语言组成。

**引理 5.6**（通过 Cook–Levin 定理捕获验证器）。 设 $L\in\mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$。那么存在多项式 $q_{\mathrm{ver}}(n)$ 和 $p(n)$，使得对于第 *3.3* 节的 *bar/cobar* 模型$D^{\bullet}_{L,\,n}$ 截断深度 $q_{\mathrm{ver}}(n)$满足

$$H^0\mathbf{D}\Big((D^{\bullet}_{L,\,n})_{\le q_{\mathrm{ver}}(n)}\Big)(x,w) = 1 \iff w\in\{0,1\}^{\le p(n)} \text{ 是 } x\in\{0,1\}^n\text{.的一个接受见证}$$

此外，映射 $1^n\mapsto\langle (D^{\bullet}_{L,n})_{\le q_{\mathrm{ver}}(n)}\rangle$ 是对数空间一致的。

证明。根据 Cook–Levin 定理，对于 $L\in\mathrm{NP}_{\mathrm{TM}}$，存在一个对数空间一致归约 $x\mapsto\Phi_n(x,\cdot)$，将问题归约为大小为 $n^{O(1)}$ 的合取范式公式，使得 $x\in L\iff \exists w\in\{0,1\}^{\le p(n)}:\Phi_n(x,w) =$ 当且仅当 [Sip13, AB09, Coo71, Lev73, Kar72]。在合取范式模板 $\Phi_n$ 的关联代数上应用第 3.3 节的 bar/cobar 构造；按设计，每个联结词/约束都会在 $D^{\bullet}_{L,n}$ 中贡献一个常数大小的宏，并使内部深度增加 $O(1)$。因此存在一个多项式 $q_{\mathrm{ver}}(n)$，使得截断 $(D^{\bullet}_{L,n})_{\le q_{\mathrm{ver}}(n)}$ 在 $H^0\mathbf{D}$ 处对 $(x,w)$ 的合取范式谓词求值，且结果正合，即 $H^0\mathbf{D}((D^{\bullet}_{L,n})_{\le q_{\mathrm{ver}}(n)})(x,w) = \Phi_n(x,w)$。由于归约和宏展开都是局部且可流式处理的，只需 $O(\log n)$ 空间状态，因此该构造具有对数空间一致性；由于模板实例的数量为 $n^{O(1)}$，规模上界为多项式。

□

**引理 5.7 (**一致性深度–时间桥接，适用于 **P**)。 语言 $L$ 属于 $\mathbf{P}_{\mathrm{TM}}$，当且仅当存在一个对数空间一致的布尔电路族 $\{C_n\}$，其规模为 $n^{O(1)}$、深度为$n^{O(1)}$，并在 $n$ 上计算 $f_L$。

证明。 这是对**P**的一致性标准刻画；参见 [Sip13, AB09] 以及经典的深度/规模关系 [PF79]。 □

**引理 5.8** （伦理可验证性蕴含图灵可验证性）。 若 $L \in \mathbf{NP}_{\eth}$，则$L \in \mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$。

证明。 根据$\mathbf{NP}_{\eth}$ 的定义，存在多项式 $q_{\mathrm{ver}}, p$，使得 $V_n := V_{n,q_{\mathrm{ver}}(n)}$（来自*(M2)*）满足 $x \in L \iff \exists w \in \{0,1\}^{\le p(n)}\colon\ V_n(x,w) = 1$。一致可呈现性*(M1)* 确保$\{V_n\}$具有对数空间一致性。因此，根据**NP**的标准电路刻画，$L \in \mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$，参见 [Sip13, AB09]。 □

**引理 5.9** （伦理多项式重构可编译为多项式规模、多项式深度电路）。 若 $L \in \mathbf{P}_{\eth}$ 具有见证 $Q$，则存在一个对数空间一致的电路族 $\{C_n\}$，其规模为 $n^{O(1)}$、深度为 $O(Q(n))$，用于计算$f_{L,n}$。

证明。 根据假设 $\Delta_L(n,\ Q(n)) = 0$；因此 $(D^{\bullet}_{L,\ n})_{\le Q(n)}$ 属于伦理 $t$–结构的心，其通过 $\mathbf{D}$ 进行的重构与$f_{L,\ n}$一致。应用*(M4)*可得到 $C_n := C_{n,\ Q(n)}$，其深度为 $O(Q(n))$，大小为 $\mathrm{poly}(n + Q(n)) = n^{O(1)}$。对数空间一致性由 *(M1)* 以及 *(M4)*中编译的局部性推出。 □

**引理 5.10 (**Ethic 深度等于公式/KW 深度)。 对于每个 $n$，满足$H^{>q}\mathbf{D}(D^{\bullet}_{L,\ n}) = 0$ 的最小 $q$ 等于$f_{L,\ n}$的最小布尔公式深度和确定性 *Karchmer–Wigderson* 深度。

证明。 这是文章中确立的定理 3.10（同调的 Karchmer–Wigderson 识别）。 □

**定理 5.11** （伦理与图灵 $P{=}NP$的等价）。 $\mathbf{P}_{\eth} = \mathbf{NP}_{\eth}$ 当且仅当 $\mathbf{P}_{\mathrm{TM}} = \mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$。

证明。**(⇒)**。假设 $\mathbf{P}_{\eth} = \mathbf{NP}_{\eth}$。令 $L \in \mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$ 为任意对象。根据引理 5.6（通过 Cook–Levin 定理捕获验证器），存在多项式 $q_{\mathrm{ver}}(n)$ 和 $p(n)$，使得对每个 $n$，

$$x \in L \iff \exists\, w \in \{0,1\}^{\le p(n)}\colon\ H^0\mathbf{D}\Big((D^{\bullet}_{L,n})_{\le q_{\mathrm{ver}}(n)}\Big)(x,w) = 1.$$

根据 *(M1)–(M2)*（验证提取），截断 $(D^{\bullet}_{L,n})_{\le q_{\mathrm{ver}}(n)}$ 可编译为一个对数空间一致的验证器电路族 $V_n$，其大小为 $\mathrm{poly}(n)$，并且

$$x \in L \iff \exists\, w \in \{0,1\}^{\le p(n)}\colon\ V_n(x,w) = 1.$$

因此，根据$\mathbf{NP}_{\eth}$ 的定义，$L \in$。由假设$\mathbf{P}_{\eth} = \mathbf{NP}_{\eth}$，我们得出$L \in \mathbf{P}_{\eth}$。因此，存在一个多项式 $Q(n)$，使得 $H^1\mathbf{D}((D^{\bullet}_{L,n})_{\le Q(n)}) = 0$对所有 $n$ 均成立，并且计算提取器*(M4)* 生成电路 $C_n := C_{n,\ Q(n)}$，用于计算 $f_{L,n}$，其深度为 $O(Q(n))$，规模为 $n^{O(1)}$，且关于 $n$ 是对数空间一致的。根据引理 5.9，

族$\{C_n\}$ 具有多项式规模和多项式深度，并且根据**P** 的统一电路刻画（引理 5.7），我们得到 $L \in \mathbf{P}_{\mathrm{TM}}$。由于 $L \in \mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$ 是任意的，因此$\mathbf{NP}_{\mathrm{TM}} \subseteq \mathbf{P}_{\mathrm{TM}}$，从而$\mathbf{P}_{\mathrm{TM}} = \mathbf{NP}_{\mathrm{TM}}$。

（⇐）。假设 $\mathrm{P}_{\mathrm{TM}} = \mathrm{NP}_{\mathrm{TM}}$。令 $L \in \mathrm{NP}_{\partial}$。由引理 5.8，$L \in \mathrm{NP}_{\mathrm{TM}}$，因此$L \in \mathrm{P}_{\mathrm{TM}}$。由引理 5.7，存在一个对数空间一致的多项式规模、多项式深度电路族 $\{C_n\}$，用于计算 $f_L$。由引理 5.10，最小伦理内部深度等于公式/KW 深度，且关于 $n$ 有多项式界；因此存在一个多项式 $Q$，使得 $H^{>Q(n)}\mathbf{D}(D^{\bullet}_{L,n}) = 0$ 对所有 $n$ 都成立，由此可得 $\Delta_L(n, Q(n)) = 0$。最后，(M4) 给出了所需的对数空间一致电路 $C_{n,Q(n)}$，并满足 $\mathrm{P}_{\partial}$ 的定义。因此 $\mathrm{NP}_{\partial} \subseteq \mathrm{P}_{\partial}$，等式得证。 □

**命题 5.12** (存在一个满足 *(M1)–(M4)*) 的可采纳伦理模型。存在一个具体构造 $D^{\bullet}_{L,n} \in D^{+}(E)$，使得 (M1)–(M4) 成立。

证明。我们采用文章第 3.3 节中针对 $f_{L,n}$（或等价地，针对其关联代数谓词）给出的 bar/cobar 表示，从而函子性地得到 $A^{\bullet}_{L,n}$ 和$D^{\bullet}_{L,n}$，它们具有有限的组合描述。

*(M1)*：描述 $\langle D^{\bullet}_{L,n} \rangle$ 是一个有限的生成元与微分列表，其基数由关于 $n$ 的固定多项式上界所界定（该构造针对每个输入变量和每个联结词，都只使用有界数量的代数基本操作）。确定性对数空间转导器可以在输入 $1^n$ 时，通过遍历变量/联结词索引并输出相应的局部模板，流式生成该描述；维护循环索引只需$O(\log n)$ 比特。截断 $(-)_{\leq q}$ 通过丢弃高于同调次数 $q$ 的分量并限制微分来计算；这只需对描述进行一次扫描，运行时间为 $\mathrm{poly}(n+q)$。

*(M2)*：在实例 $(x, w)$ 上对 $H^0\mathbf{D}\big((D^{\bullet}_{L,n})_{\leq q}\big)$ 求值，是以下操作的有限复合：(i) 可加线性映射（基环/群上的矩阵—向量乘法），(ii) 有限乘积/和，以及 (iii) 由单位 $\eta$导出的投影。每种基本操作都可编译成一个常深度、常扇入电路块；其连线遵循微分图，该图的规模为 $\mathrm{poly}(n+q)$。复合这些电路块即可得到规模为 $\mathrm{poly}(n+q)$ 的 $V_{n,q}$。该构造完全局部且机械化，因此可在确定性多项式时间内完成。

*(M3)*：已证明，具有 $H^{>q}\mathbf{D}(D^{\bullet}_{L,n}) = 0$ 的最小 $q$ 等于最小布尔公式深度和 $f_{L,n}$ 的确定性 KW 深度。我们采用这一已确立的等价关系。

*(M4)*：由于 $(D^{\bullet}_{L,n})_{\leq q}$ 当且仅当 $H^{>0}\mathbf{D}((D^{\bullet}_{L,n})_{\leq q}) = 0$ 时属于心，其重构与$f_{L,n}$一致。编译器会将每个局部模板（生成元/微分子句）映射为一个常数规模电路宏，用于实现对 $x$ 比特的相应操作。按照截断微分图连接这些宏，即可生成深度为 $O(q)$ 的电路 $C_{n,q}$（每个同调层会使深度增加 $O(1)$），其规模为 $\mathrm{poly}(n+q)$。根据 *(M1)*，一致性得以保证，因为宏库是固定的，且索引以 $O(\log n)$ 空间流式处理。

这四项性质均成立，因此该模型是可采纳的。 □

## 相关工作

本小节概述了几种针对 $P$ 与 $NP$ 问题的重要重述或密切相关的框架，并将我们的伦理/同调表述置于这些框架之中加以比较。我们重点关注：（i）适用范围与正合性（该重述是否与经典的 $P{=}NP$或其类比严格等价）；（ii）所采用的数学语言与工具；（iii）起作用的“资源”概念；以及（iv）已知的优势、局限与障碍。文中为规范性论述和证明提供了参考文献。

描述复杂性。 Fagin 定理将 $NP$ 与有限结构上的存在二阶（ESO）逻辑对应起来 [Fag74], ，而 Immerman–Vardi 定理则将 $P$ 与有序结构上的带最小不动点算子的一阶逻辑（$FO$(LFP)）对应起来 [Var82, Imm86, Imm99]。因此，在有序有限结构上，

$$P = FO(\mathrm{LFP}), \qquad NP = \mathrm{ESO},$$

并且等式 $P{=}NP$在此情形下成为逻辑表达能力的等式， $FO$(LFP) =ESO。**范围**。在有序性假设下，这是严格等价。**工具**。 有限结构上的模型论、不动点逻辑。**资源**。归纳深度/元数和二阶量化，而非时间本身。**比较**。 我们的表述同样独立于机器，并以一个内在不变量取代时间；不过，我们在阿贝尔/导出范畴框架中使用同调消失（$\mathrm{Ext}^1 = 0$ ，在多项式内部深度之后），而描述复杂性则将复杂性类编码为逻辑片段。这两种视角互为补充：二者都将 $P{=}NP$转化为内在表达能力（逻辑的与导出函子性的）等价。

*Karchmer–Wigderson* 深度对偶性。 对于任意布尔函数 $f$，最小公式深度等于 $f$ [KW90] 的确定性 Karchmer–Wigderson 通信博弈的深度。**范围**。 这是关于深度的正合对偶性，而非对 $P$ 与 $NP$ 的直接改写。**工具**。 通信复杂性与公式复杂性。**资源**。 公式/分解深度。**比较**。 在我们的设定中，这种对偶性被内化了（伦理内部深度 $=$ 公式/KW 深度）。它提供了深度锚点，随后我们将其与 $\mathrm{Ext}^1$–消失及一致编译相结合，从而关联回 $P$。

证明复杂性。 Cook–Reckhow 对命题证明系统进行了形式化，并将 $NP$ 与 $coNP$ 联系起来，指出 TAUT 存在多项式有界证明系统 [CR79]。特别地，$NP = coNP$ 当且仅当存在某个 TAUT 的 p 有界证明系统。**范围**。 这为 $NP$ 与 $coNP$ 提供了正合改写，但并未直接改写 $P$ 与 $NP$。**工具**。 命题证明系统、插值、下界；关键障碍包括 Natural Proofs [RR97]。**比较**。 证明复杂性与我们的方法都将“可行推导性”具体化；我们将可行性表达为多项式内部深度之后的函子精确性（$\mathrm{Ext}^1 = 0$），而证明复杂性衡量句法推导的存在性/长度。我们的框架或许能绕过某些“自然性”问题，因为同调性质并非真值表上的稠密组合谓词。

代数复杂性与几何复杂性理论。 Valiant 引入了代数类 VP 和 VNP，以及永久式与行列式范式 [Val79]。几何复杂性

理论（GCT）计划由 Mulmuley–Sohoni 提出，旨在通过轨道闭包上的表示论障碍来分离这些类 [MS01, Mul08]。**范围**。这些是布尔$P$与 $NP$的类比（代数投影），而非严格的重新表述。**工具**。 代数几何、不变理论。**资源**。 代数电路规模/次数、轨道闭包奇点。**比较**。 与 GCT 一样，我们的方法将复杂性转移到丰富的数学环境中；不同于 GCT，我们与图灵 $P{=}NP$的等价性已得到证明（通过 bar/cobar 模型满足的一致性与编译假设），而 GCT 则在代数框架下追求下界，并面临各自独立的障碍。

电路／一致性刻画： $P$。标准的深度—时间等价性断言， $L \in P$ 当且仅当 $L$ 具有一个由多项式规模、多项式深度电路组成的对数空间一致族 [Sip13, AB09, PF79]。**范围**。对 $P$的精确刻画。**资源**。一致电路的规模和深度。**比较**。这些结果提供了我们等价性所用的外部桥梁：一旦伦理深度为多项式，且 $\mathrm{Ext}^1$ 在该深度处消失，我们的编译便会生成多项式规模、多项式深度的一致电路，从而表明其属于 $P$。

我们的伦理重述在精神上最接近描述复杂性（两者都给出与机器无关的等式）。它还将 KW深度对偶性内化为内在的内部深度，并以导出正合性判据（$\mathrm{Ext}^1 = 0$）加以扩展，作为可行重构的替代。电路刻画提供了一致性以及规模／深度方面的桥梁，使我们回到图灵计算，从而在容许模型假设下，与经典的 $P{=}NP$形成严格等价。与几何复杂性理论和证明复杂性相比，我们的结论主张的是等价而非类比；它运用范畴／导出方法（t-结构、截断、谱序列退化），其中核心障碍具有函子性和几何性质，而非句法性质。最后，已知的元障碍（相对化、代数化、Natural Proofs）促使人们寻求此类非句法不变量；我们的同调判据恰好提供了这样的不变量，代价是需要开发并验证容许的一致模型，而我们已在 bar/cobar 设定中构造性地完成了这一工作。

# 6 应用

在本节中，我们假设所有模都是有限生成的，所有锥都是有限维的，因此 $\mathrm{Ext}^i$ andthe 导出对偶D 定义良好且具有有限振幅。

## 6.1 优化

### 6.1.1 线性规划

**定义 6.1** （混合资源范畴与对偶性）。 设 $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ =Mod-$\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}}$ ， 且$\mathcal{E}_{\mathbb{R}} = \mathrm{FinVect}_{\mathbb{R}}$。设 $\mathcal{C}_K$ 为一个范畴，其对象是形如 $(V, K)$ 的有序对，其中 $V$ 是有限维实向量空间，$K \subseteq V$ 是非空闭凸锥；态射 $T\colon (V, K) \to (W, L)$ 是线性映射 $T\colon V \to W$，满足 $T(K) \subseteq L$。定义乘积范畴

$$\mathcal{E} \;=\; \mathcal{E}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{E}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{C}_K.$$

逐分量定义反变对偶函子如下

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{D}_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{D}_K, \qquad \mathbb{D}_{\mathbb{Z}}(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}),\ \mathbb{D}_{\mathbb{R}}(V) = V^*,\ \mathbb{D}_K(V, K) = (V^*, K^\circ),$$

其中 $K^\circ = \{y \in V^* : \langle y, x\rangle \geq 0\ \forall x \in K\}$ 是 [Roc70] 的极锥。

范畴 $\mathcal{C}_K$ 仅在面上的闵可夫斯基加法下具有加法结构，并非阿贝尔范畴。所有涉及 $\mathrm{Ext}^1$ $c_K$ 的陈述，均理解为在阿贝尔包络 $\mathrm{Ab}(\mathcal{C}_K)$ 中成立；该包络通过自由添加面包含的核与余核得到。在有限维情形下，此阿贝尔化等价于 $K$ 的面模范畴。

定义 6.2（原始实例、伦理对偶可行性、对偶目标）。设 $X = (X_{\mathbb{Z}}, X_{\mathbb{R}}, (X, K)) \in \mathsf{E}$ 为决策对象，$Y = (Y_{\mathbb{Z}}, Y_{\mathbb{R}}, (Y, L)) \in \mathsf{E}$ 为约束对象，且 $f = (f_{\mathbb{Z}}, f_{\mathbb{R}}, f_K) : X \to Y$ 为一个态射。设 $c = (c_{\mathbb{Z}}, c_{\mathbb{R}}, c_K) \in \mathbb{D}(X)$ 且 $b = (b_{\mathbb{Z}}, b_{\mathbb{R}}, b_K) \in Y_{\mathbb{Z}} \oplus Y_{\mathbb{R}} \oplus Y$。原始问题为

$$\min \langle c_{\mathbb{Z}}, x_{\mathbb{Z}}\rangle + \langle c_{\mathbb{R}}, x_{\mathbb{R}}\rangle + \langle c_K, x\rangle \quad \text{s.t.} \quad f_{\mathbb{Z}}(x_{\mathbb{Z}}) = b_{\mathbb{Z}},\ f_{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{R}}) = b_{\mathbb{R}},\ f_K(x) = b_K,\ x \in K.$$

对偶变量为 $\lambda = (\lambda_{\mathbb{Z}},\ \lambda_{\mathbb{R}},\ \lambda_K) \in \mathbb{D}(Y)$。伦理对偶可行性意味着每个分量都与双对偶单位交换；具体而言

$$c_{\mathbb{Z}} + f_{\mathbb{Z}}^\top \lambda_{\mathbb{Z}} = 0, \qquad c_{\mathbb{R}} + f_{\mathbb{R}}^\top \lambda_{\mathbb{R}} = 0, \qquad c_K + f_K^\top \lambda_K \in K^\circ.$$

The 对偶目标为 $\max\ -\langle \lambda_{\mathbb{Z}},\ b_{\mathbb{Z}}\rangle - \langle \lambda_{\mathbb{R}},\ b_{\mathbb{R}}\rangle - \langle \lambda_K,\ b_K\rangle$ 在伦理对偶可行解上取最大值 $\lambda$.

**引理 6.3** (逐分量正合性与障碍)。假设所有对象均为有限生成，且 $E_{\mathbb{Z}}, E_{\mathbb{R}}$ 有足够多的内射对象。$\mathbb{D}_{\mathbb{Z}}$ 是左正合的，其右导出函子为 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$；对于有限生成的 $\mathbb{Z}$-模，$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \cong$ 扭$(M)$[*Wei94*]。$\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ 在$\mathrm{FinVect}_{\mathbb{R}}$ 上正合（没有同调障碍）。对于 $\mathcal{C}_K$，极对偶化$(V, K) \mapsto (V^*, K^\circ)$ 保留面的包含并反转箭头；正合性将通过由面构成的短正合列来刻画。

证明。$\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ 的左正合性，以及 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ 与挠之间的对应关系，都是标准结果 [Wei94]。有限维向量空间上的对偶化是正合的，这一点是初等的。有限维情形下的极性性质可由凸分析推出[Roc70]。 □

**定义 6.4**（通过面得到 $\mathcal{C}_K$ 中的短正合列）。设 $C = \{x \in K : f_K(x) = b_K\}$。设 $F \triangleleft K$ 为包含 $C$的 $K$ 的最小面。考虑包含映射 $i : (F, F) \to (X, K)$ 和商映射 $q : (X, K) \twoheadrightarrow (X/F, K/F)$，其中$K/F := \{[x] : x \in K\}$ 位于商空间 $X/F$ 中。我们称

$$0 \to (F, F) \xrightarrow{i} (X, K) \xrightarrow{q} (X/F, K/F) \to 0$$

是 $\mathcal{C}_K$ 中的短正合列。应用 $\mathbb{D}_K = \mathrm{Hom}(-, K^\circ)$ 可得逆变序列

$$0 \leftarrow (F^\perp, K^\circ|_F) \xleftarrow{i^\vee} (X^*, K^\circ) \xleftarrow{q^\vee} ((X/F)^*, (K/F)^\circ) \leftarrow 0,$$

其中间项处的正合性可能会失效。

**引理 6.5** (面上的 Slater 条件、极性与正合性)。 设 $F$ 是包含 $C$ 的 $K$ 的最小面。以下命题等价:

***(a)*** $C$ 在 $F$ 中具有非空相对内部（ $F$上的 ***Slater*** 条件），即 $\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(F) \neq \varnothing$[ *Roc70]*。

***(b)*** $\mathbb{D}_K$ 在$(X^*, K^\circ)$ 处关于面序列正合，即$\ker(i^\vee) = \mathrm{im}(q^\vee)$。

*(c)* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_K}\Big((X/F, K/F), (X^*, K^\circ)\Big) = 0.$

证明。下文所有 $\mathbf{Ext}^1\ \mathbf{C}_K$ 均在阿贝尔化 $\mathbf{Ab}(\mathbf{C}_K)$ 中计算。$(a) \Rightarrow (b)$: 若 $\mathbf{ri}(C) \cap \mathbf{ri}(F) \neq \varnothing$，则 $F$的法锥等于 $F^\circ$，且极性配对在 $F \times F^\circ$ [Roc70]上的限制非退化。因此， $K^\circ$ 中任何在 $F$ 上为零的线性泛函都属于 $q^\vee$的像，从而 $\mathbf{ker}(i^\vee) = \mathbf{im}(q^\vee)$。$(b) \Leftrightarrow (c)$: 这是 $\mathbf{Hom}(-, (X^*, K^\circ))$ 的右导出函子的长正合列中连接态射消失的定义，参见通过面进行的阿贝尔化以及标准同调代数 [Wei94]。$(c) \Rightarrow (a)$: 若 $\mathbf{Ext}^1 \neq 0$，则存在一个非平凡扩张，阻碍正合性；由分离定理 [Roc70] ，这对应于一个暴露泛函 $y \in K^\circ$ ，使得对所有 $x \in C$ 都有 $y, x = 0$ ，但 $y, \cdot$ 在 $F$上不为零，这与 $F$的极小性矛盾。因此 $\mathbf{ri}(C) \cap \mathbf{ri}(F) \neq \varnothing$。 □

**定理 6.6** （由伦理正合性得到的锥规划强对偶）。 假设锥分量可行且有下界。那么

$$\inf_{x \in K,\ f_K(x) = b_K} \langle c_K, x \rangle \;=\; \sup_{\lambda_K} \{ -\langle b_K, \lambda_K \rangle :\ c_K + f_K^\top \lambda_K \in K^\circ \}$$

当且仅当存在一个包含 $0$ $F \triangleleft K$ $6$ $C$ $F$ $^1{}_K\big(\ X/F\ K/F\ ,\ X^*\ K^\circ\ \big) =$ 的面，使得 $\mathrm{Ext}c(,)(,)$。等价地，根据引理 *.5*，当且仅当在 上满足 ***Slater*** 条件时，强对偶成立。在这种情况下，对偶最优值可达 *[Roc70]*。

证明。 $\mathbb{D}_K$ 的正合性以及项 $\mathbf{Ext}^1\ \mathbf{C}_K$ ，是在面范畴的阿贝尔化 $\mathbf{Ab}(\mathbf{C}_K)$ 内解释的；在该阿贝尔化中，面包含的核与余核被自由添加。在有限维情形下，这种阿贝尔化与凸分析中的标准面模形式体系一致。考虑 $\phi(x) = c_K, x + \delta_K(x)$ 和$\psi(x) = \delta_{\{x : f_K(x) = b_K\}}(x)$。根据 Fenchel–Rockafellar 对偶 [Roc70], , $\mathbf{inf}(\phi + \psi) = \mathbf{max}\ -\phi^*(-y) - \psi^*(y)$，前提是满足约束资格条件 $\mathbf{ri}(\mathbf{dom}\,\phi) \cap \mathbf{ri}(\mathbf{dom}\,\psi) \neq \varnothing$。在引理 6.5 给出的面 $F$ 上，该约束资格条件成立；计算共轭函数可得标准锥对偶，其极锥为 $K^\circ$ [Roc70]。由 [ Roc70]可得最优值可达。反过来，若存在对偶间隙，则每个包含该对象的面上都不满足约束资格条件，因此根据引理 6.5，$\mathbf{Ext}^1$非零。

□

对于任意有限生成阿贝尔群 $M$,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(M_{\mathrm{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong M_{\mathrm{tors}}.$$

在所有整数分量中，均默认使用这一对应关系。

**引理 6.7** (由正合性得到的整数对偶性)。 假设所有 $\mathbb{Z}$–模都是有限生成的，因此 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{tors}(M)$。令 $0 \to K_{\mathbb{Z}} \to X_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{f_{\mathbb{Z}}} \mathrm{im}\ f_{\mathbb{Z}} \to 0$ 为整数约束序列。那么

$$\max_{\lambda_{\mathbb{Z}}} \{ -\langle b_{\mathbb{Z}}, \lambda_{\mathbb{Z}} \rangle :\ c_{\mathbb{Z}} + f_{\mathbb{Z}}^{\top} \lambda_{\mathbb{Z}} = 0 \}$$

当且仅当 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{coker}\, f_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = 0$ 时，它等于原始整数最优值。等价地，$\mathrm{coker}\, f_{\mathbb{Z}}$ 无挠；这可由 $f_{\mathbb{Z}}$ 的史密斯标准形来刻画：其不变因子全都等于 $1$ *[Sch86]*。

证明。 </style}若 -模不是有限生成的，*Ext(*, $\mathbb{Z}$) 可能是无限的；有限生成性确保 tors($M$) 有限，且上述对应成立。对 $0 \to K_{\mathbb{Z}} \to X_{\mathbb{Z}} \to$ im $f_{\mathbb{Z}} \to 0$ 应用 Hom$_{\mathbb{Z}}$(−, $\mathbb{Z}$)，并沿着 $0 \to$ im $f_{\mathbb{Z}} \to Y_{\mathbb{Z}} \to$ coker $f_{\mathbb{Z}} \to 0$ 继续，得到长正合列 [Wei94]。Hom$_{\mathbb{Z}}$(im $f_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}$) 处的正合性等价于 Ext$^1_{\mathbb{Z}}$(coker $f_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}$) $= 0$。有限生成 $M$ 的 Ext$^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \cong$ tors($M$) 对应是标准结果 [Wei94]。史密斯标准形判据是经典结果[ Sch86]。 □

**定理 6.8** （MILP/LP/SDP 的统一强对偶性）。 在混合范畴 $\boldsymbol{E}$ 中，原始–对偶等式

$$\min\ \langle c_{\mathbb{Z}}, x_{\mathbb{Z}} \rangle + \langle c_{\mathbb{R}}, x_{\mathbb{R}} \rangle + \langle c_K, x \rangle \ =\ \max\ -\langle \lambda_{\mathbb{Z}}, b_{\mathbb{Z}} \rangle - \langle \lambda_{\mathbb{R}}, b_{\mathbb{R}} \rangle - \langle \lambda_K, b_K \rangle$$

成立当且仅当

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{coker}\, f_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = 0 \quad \textit{and} \quad \exists\ F \triangleleft K :\ \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_K}\Big( (X/F, K/F), (X^*, K^\circ) \Big) = 0.$$

此外，当且仅当后者$\mathrm{Ext}^1$ 消失时，对偶最优值在锥分量中可取到（等价地，根据引理 *6.5*， $F$ 上满足 *Slater* 条件）；当且仅当伴随丢番图系统 $f_{\mathbb{Z}}^{\top} \lambda_{\mathbb{Z}} = -c_{\mathbb{Z}}$ 可解时，对偶最优值在整数分量中可取到（余核无挠）。

对于乘积范畴$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$，有

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2}((A_1, A_2), (R_1, R_2)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}_1}(A_1, R_1) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{E}_2}(A_2, R_2),$$

因为 Hom 和 Ext 逐分量作用。定理 6.8 中所有 Ext 消失都应按逐分量理解。

证明。 结合引理 6.3、定理 6.6 和引理 6.7。实线性分量不会产生障碍，因为 $\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ 在 FinVect$_{\mathbb{R}}$ 上是正合的。可取到性结论来自锥侧的 [Roc70] 以及整数侧的可解性。

□

**推论 6.9** (线性规划和半定规划的恢复)。 若不存在整数分量且 $K = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，则对于任何非空可行集，*Slater* 条件都成立，定理 *6.8* 可特化为线性规划强对偶 *[Roc70]*。若 $K = \mathbb{S}^n_+$，则存在有限的面约化链，可暴露一个面 $F \triangleleft \mathbb{S}^n_+$，在该面上 *Slater* 条件成立，因而强对偶成立；*Ramana* 精确对偶通过将暴露序列编码为辅助锥变量而得到，这明确呈现了条件 $\mathrm{Ext}^1\ c_K = 0$*[BW81, Pat98, Pat13, Ram97]*。

**定义 6.10** (统一强对偶性的算法证书)。 证书由三个部分组成。

(i) 一个整数证书：史密斯标准形 $Uf_{\mathbb{Z}}V = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_s, 0, \dots, 0)$，其中所有 $d_i = 1$，证明余核 $f_{\mathbb{Z}}$ 无挠，从而 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}} = 0$ [Sch86]。(ii) 一个锥证书：有限暴露序列 $y_1, \dots, y_t \in K^\circ$ 定义面 $K = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_t =: F$，其中 $\mathrm{ri}(F) \cap \{x \in F : f_K(x) = b_K\} \neq \varnothing$，由引理 6.5 和定理 6.6 证明 $\mathrm{Ext}^1\ c_K = 0$ 。(iii) Ethic 对偶变量 $\lambda = (\lambda_{\mathbb{Z}}, \lambda_{\mathbb{R}}, \lambda_K)$ 满足 $c_{\mathbb{Z}} + f_{\mathbb{Z}}^\top \lambda_{\mathbb{Z}} = 0$、$c_{\mathbb{R}} + f_{\mathbb{R}}^\top \lambda_{\mathbb{R}} = 0$ 和 $c_K + f_K^\top \lambda_K \in F^\circ$，以及 $F$ 上的原始可行性。

**算法 1** 统一 Ethic 证书构造（混合整数线性规划/线性规划/半定规划）

**要求：** $(f_{\mathbb{Z}}, f_{\mathbb{R}}, f_K)$, $b = (b_{\mathbb{Z}}, b_{\mathbb{R}}, b_K)$, $c = (c_{\mathbb{Z}}, c_{\mathbb{R}}, c_K)$

. 1：计算史密斯标准形 $Uf_{\mathbb{Z}}V = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_s, 0, \dots, 0)$。2：如果某个 $d_i > 1$ ，则 3：返回失败，并附上不变因子 $\{d_i > 1\}$（整数障碍：$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}} \neq 0$）。4：否则 5：在 $\mathbb{Z}$ 上求解 $f_{\mathbb{Z}}^\top \lambda_{\mathbb{Z}} = -c_{\mathbb{Z}}$ ，以获得整数对偶乘子。6：结束 if。7：初始化 $F \leftarrow K, i \leftarrow 0$。8：当 Slater 条件在 $F$ 上相对于 $f_K(x) = b_K$ 不成立时，执行 9：找到暴露 $y_{i+1} \in F^\circ$ ，使得对所有可行的 $x$ ，$y_{i+1}, x = 0$ （例如，通过投影/分离）。10：更新 $F \leftarrow F \cap \{x : y_{i+1}, x = 0\}$，$i \leftarrow i + 1$。11：如果可行集变为空，则 12：返回不可行性证书 $y_{i+1}$。13：结束 if。14：结束 while。15：在 $F$上求解约化后的锥对偶：找到 $\lambda_K$，使得 $c_K + f_K^\top \lambda_K \in F^\circ$ 最大化–$b_K, \lambda_K$。16：求解实数线性伴随问题 $f_{\mathbb{R}}^\top \lambda_{\mathbb{R}} = -c_{\mathbb{R}}$。17：返回证书 $\left(\{\lambda_{\mathbb{Z}}, \lambda_{\mathbb{R}}, \lambda_K\}, \{y_j\}_{j=1}^i\right)$。

**引理 6.11** （算法 1 的正确性）。 如果算法返回不可行性或整数障碍证书，则相应的原始问题不可行，或存在整数对偶间隙。如果算法返回 $(\lambda, y_1, \dots, y_t)$ ，则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$（余核 $f_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}$） $= 0$，存在一个由 $\{y_j\}$ 暴露的面 $F$ ，在该面上 *Slater* 条件成立，且原始–对偶等式可达成；因此，该输出是有效的统一强对偶证书。

证明。 整数步骤：若某个 $d_i > 1$，则 coker $f_{\mathbb{Z}}$ 有挠，因此根据引理 6.7，Ext $^1_{\mathbb{Z}} \neq 0$ 和强对偶可能失效。若所有 $d_i = 1$，则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}} = 0$ ，且伴随方程有整数解，从而确立整数分量上的伦理可行性。锥步骤：每个暴露向量 $y_j \in F_{j-1}^\circ$ 都归约到一个面 $F_j$；在有限维 [BW81], 中，Slater 条件保证过程终止；在 $F$ 上，根据

引理 6.5。约化对偶由 [Roc70] 达到。实线性分量是正合的。汇总这三个分量，根据定理 6.8 可得强对偶且最优值能够达到。

□

对于半定规划，根据极点 [Pat98] 上的秩论证，面链的长度至多为 $n$；[Pat13] 对实用的面约化方案和证书进行了综述。该算法的子程序（SNF、有限维分离定理、约化锥规划求解）都是标准的；对于固定维数，SNF 关于位长是多项式时间的，而锥规划子问题继承线性规划／半定规划预言机的复杂度。对于固定秩，SNF 是多项式时间的，但在一般维数下则是指数时间的

**定义 6.12** （设定与记号）。 在 $\mathcal{E}$ =Mod-$\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}}$ 中，考虑逆变函子 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$、单位 $\eta_A$： $A \to \mathbb{D}^2(A)$，以及伦理态射的概念（交换方块 $\mathbb{D}^2(f)\circ\eta_X = \eta_Y \circ f$）。令 $f$: $X \to Y$，其中有 $X = \mathbb{Z}^n$、$Y = \mathbb{Z}^m$、 $f(x) = Ax$、 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$。记 $G =$ 余核 $A$。我们将范围限制在正子幺半群 $X_+ = \mathbb{N}^n \subset X$ 和 $Y_+ = \mathbb{N}^m \subset Y$上，并令

$$R \;=\; \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_m] \;\cong\; \mathbb{Z}[\mathbb{N}^m]$$

是 $Y_+$ 的幺半群代数。对于列 $A_1,\dots,A_n \in \mathbb{N}^m$，设基本关系为 $r_j$: $= z^{A_j} - 1 \in R$，并对 $b \in \mathbb{N}^m$ 定义目标元 $u_b := z^b - 1 \in R$。

**定义 6.13** （关系锥（无“伦理”公设））。 令 $\mathcal{C}_A \subset R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 为由基本关系的所有乘法平移生成的凸锥：

$$\mathcal{C}_A \;:=\; \mathrm{cone}\Big\{\, z^{\alpha}\, r_j \;:\; \alpha \in \mathbb{N}^m,\; j = 1,\dots,n \,\Big\}.$$

我们将 $I_A^+ := \mathcal{C}_A \cap R$ 记为由 $\{r_j\}$ 生成的正二项式理想（其移位的非负整数线性组合）。

**引理 6.14 (同调背景)。** 对短正合列 $0 \to K \to X \xrightarrow{A} Y \to G \to 0$ 应用 $\mathbb{D}$，可得一个长正合列，其中 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y,\mathbb{Z})$ 处的正合性成立，当且仅当 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) = 0$。对于有限生成阿贝尔群 $G$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{tors}(G)$ *[魏94]*。这是下文所用的定理 *1.9* 的特例。

**引理 6.15 (有限截断)。** 对于每个固定的 $A \in \mathbb{N}^{m\times n}$ 和 $b \in \mathbb{N}^m$，都存在一个次数界 $N = N(A,b)$，满足以下性质：如果 $u_b$ 在 $\mathbb{R}[z]$（或在 $\mathbb{Z}[z]$）上有一个表示 $u_b = \sum_{j=1}^{n} Q_j(z)\, r_j$，那么它有一个表示使得对所有 $j$，次数 $Q_j \le N$。因此，可以在由总次数不超过 $\le N$ +最大值$_j \,\|A_j\|_1$ 的单项式张成的有限维子空间 $R_{\le N}$ 中判定是否属于 $u_b \in \mathcal{C}_A$。

证明。 两边乘以适当的单项式以避免负指数，并比较次数不超过 $\|b\|_1$ 和 $\max_j \|A_j\|_1$的系数。 [Las03], 给出了一个明确的上界，由此为离散 Farkas 表示提供了统一的次数界；同一上界也界定了 $R_{\le N}$中的搜索区域。因此， $u_b \in \mathcal{C}_A$ 的可行性可归结为一个有限线性系统。

□

**命题 6.16** （有限维空间中的双极性）。 设 $\mathcal{C}_{A,\,\le N} := \mathcal{C}_A \cap R_{\le N}$，并定义对偶锥

$$\mathcal{C}^{\circ}_{A,\le N} \;:=\; \Big\{ \Phi \in R^{*}_{\le N} :\; \Phi(p) \ge 0 \;\; \textit{for all } p \in \mathcal{C}_{A,\le N} \Big\}.$$

那么 $\mathcal{C}_{A,\,\le N}$ 是闭的、凸的且尖的，并且满足双极恒等式

$$\mathcal{C}_{A,\le N} \;=\; \{\, u \in R_{\le N} :\; \Phi(u) \ge 0 \;\; \textit{for all } \Phi \in \mathcal{C}^{\circ}_{A,\le N} \,\}.$$

特别地，若 $u \notin \mathcal{C}_{A,\,\le N}$ 则存在 $\Phi \in \mathcal{C}^{\circ}_{A,\,\le N}$ 使得 $\Phi(u) < 0$。

证明。 $\mathcal{C}_{A,\,\le N}$ 是有限集 $\{z^{\alpha} r_j : \deg(z^{\alpha} r_j) \le N\}$的（有限）锥包，因此是一个闭凸锥。由双极定理和有限维分离定理可得所述恒等式 [Roc70]。 □

**定理 6.17** (伦理态射 $\Rightarrow$ 正二项式表示)。 假设$f :\; X \to Y$按正文中的定义是伦理的。那么对每个 $b \in \mathbb{N}^m$，都有

$$u_b \;=\; z^b - 1 \;\in\; \mathcal{C}_A \quad \textit{and, in particular,} \quad z^b - 1 = \sum_{j=1}^{n} Q_j(z)\,(z^{A_j} - 1) \;\; \textit{with} \;\; Q_j \in \mathbb{R}_{\ge 0}[z].$$

如果限制为整数值对偶见证（见下文），则相同结论对$Q_j \in \mathbb{N}[z]$也成立。

证明。 固定 $b$，并令 $N = N(A,\; b)$取自引理 6.15。反设 $u_b \notin \mathcal{C}_{A,\,\le N}$。由命题 6.16，存在 $\Phi \in R^{*}_{\le N}$ 使得对于所有 $p \in \mathcal{C}_{A,\,\le N}$，都有 $\Phi(p) \ge 0$，但 $\Phi(u_b) < 0$。将 $\Phi$ 以零扩展为 $R$上的线性泛函。

由 $\Phi$ 构造加法映射 $\lambda\colon Y_+ \to \mathbb{R}$，定义为

$$\lambda(y) \;:=\; \Phi(z^y - 1) \qquad (y \in \mathbb{N}^m).$$

于是 $\lambda(0) = 0$，且 $\lambda$ 是次可加的；当拼接不超过次数 $N$ 时，等号成立（这对下文已足够，因为所有用法都受 $N$ 截断）。此外，对于每个基本关系以及次数 $\le N$ 范围内的每个移位，我们有

$$\Phi\Big(z^{\alpha}(z^{A_j} - 1)\Big) \;\ge\; 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\alpha + A_j) - \lambda(\alpha) \;\ge\; 0.$$

因此，沿着 $A$ 步， $\lambda$ 在次数 $N$范围内是保序的。定义 $c \in \mathbb{R}^n$ 为 $c := -A^{\top}\tilde{\lambda}$，其中 $\tilde{\lambda}\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}$ 是 $\lambda$ 的加法扩张，通过在标准基上取线性延拓得到（在次数 $\le N$ 上定义良好）。于是，“伦理”驻定关系 $c + A^{\top}\tilde{\lambda} = 0$ 在所有列 $A_j$ 上成立（按构造即如此），因此对于 $(c,\; \lambda)$，对偶 $\tilde{}$ 方块在所有截断生成元上与 $\eta$ 交换。

现在对 $b$求值：根据定义， $\Phi(u_b) = \lambda(b) - \lambda(0) = \lambda(b) < 0$。这意味着，对偶见证 $(c, \lambda)$ 在 $u_b$ 上赋予严格负的求值，同时在截断范围内所有移位关系上保持非负。但$\mathbb{D}^2(f)$与 $\eta$ 的伦理交换禁止这种符号模式：保序（在关系上非负）的对偶求值必须将 $u_b$ 映射为非负值，否则针对 $Y_+$ 的截断自由表示（通过生成元 $r_j$ 及其移位构造）的自然性方块便不成立（根据引理 6.15，该截断表示满射到与 $b$ 相关的子幺半群）。这一矛盾表明 $u_b \in \mathcal{C}_{A,\le N}$；因此 $u_b \in \mathcal{C}_A$。

最后，如果限制对偶见证在 $R$ 上取整数值（整数值加性泛函），由于$\mathcal{C}_{A,\le N}$是有理多面锥，因此同样可以通过整数方式实现分离；根据希尔伯特基论证，所得表示具有 $Q_j \in \mathbb{N}[z]$ （参见 [Las03]，其中给出了显式的整数构造）。 □

**引理 6.18**（正二项式表示 $\Rightarrow$ 伦理交换）。假设对于每个 $b \in \mathbb{N}^m$，都存在 $Q_j \in \mathbb{R}_{\ge 0}[z]$，使得 $u_b = \sum_j Q_j(z)\, r_j$。那么，任何保序对偶求值（即任何满足 $\Phi(\mathcal{C}_A) \ge 0$ 的 $\Phi$）都不会将 $u_b$ 映射为负值，并且自然性方块 $\mathbb{D}^2(f)$ 。 $\eta_X = \eta_Y$ 。 $f$ 在由 $\{r_j\}$ 及其移位生成的 $Y_+$ 自由表示上成立；因此 $f$ 具有伦理性。

证明。由线性性可知，对于每个正的 $\Phi$，都有 $\Phi(u_b) = \sum_j \Phi(Q_j(z) r_j) \ge 0$。将 $\Phi$ 解释为 $Y_+$ 截断自由表示上的对偶见证，可知单位 $\eta$ 在生成元上受到 $\mathbb{D}^2(f)$ 的保持，因而在商上也如此；也就是说，伦理方块是交换的。 □

**定理 6.19**（离散 Farkas 引理）。设 $A \in \mathbb{N}^{m\times n}$、 $b \in \mathbb{N}^m$。以下条件等价：

*(a)* 存在 $x \in \mathbb{N}^n$，使得 $Ax = b$。*(b)* $z^b - 1$ 属于正二项式锥 $\mathcal{C}_A$（等价地，$z^b - 1 = \sum_j Q_j(z)(z^{A_j} - 1)$ 且满足 $Q_j \in \mathbb{R}_{\ge 0}[z]$；若采用整数对偶见证，则 $Q_j \in \mathbb{N}[z]$）。*(c)* 将伦理方块 $\mathbb{D}^2(f)$ 。 $\eta_X = \eta_Y$ 。 $f$ 限制在正子幺半群 $X_+$ 和 $Y_+$ 上时成立（即，不存在与这些关系相容的正对偶求值将 $u_b$ 映射为负值）。

此外，*(b)* 中 $Q_j$ 的次数可以像 *[Las0* 那样明确界定。 *3].*

证明。(a)⇒(b)：对于满足 $x \in \mathbb{N}^n$ 的 $Ax = b$，将 $z^{Ax} - 1$ 展开为望远镜式，得到$u_b \in \mathcal{C}_A$（经典论证）。(b)⇒(c)：引理 6.18。(c)⇒(b)：定理 6.17。最后，(b)⇒(a) 可通过清除分母后比较系数得到（见 [Las03]）； $Q_j$ 中的非负系数给出列 $A_j$ 的非负整数线性组合，该组合等于 $b$。 □

**定理 6 20** $Z$ $F\ z\ c\ = \prod_{j=1}^{n} 1 -$。（通过 - 变 $c^{c_j} z^{-A_j\ -1}$ $b\ c$ $Z$
换得到解析等价）。设(;)()为生成核， $f_d$(、)为其在 $b$ *[Las02]* 处的逆 - 变换求值。以下条件等价：

（*a*）$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$（余核 $A$，$\mathbb{Z}$）$= 0$（无挠），即 $\mathbb{D}$ 在$\mathrm{Hom}(Y,\ \mathbb{Z})$ 处正合（根据引理 *6.14*）。（*b*） $F$（$z$；$c$）没有非实极点（在单位环面上没有留数），因此 $f_d$（$b$，$c$）与连续拉普拉斯值一致，且整数对偶间隙消失*[Las02]*。

*(c)* 对每个 $b \in \mathbb{N}^m$，都有 $z^b - 1 \in \mathcal{C}_A$（因此得到定理 *6.19*）。

证明。 (a)⇔(b)：单位环面上的极点对应于余核 $A$ 中的挠（利用有限阿贝尔挠子群上的史密斯标准形和离散傅里叶特征标），参见 [Las02]。(b)⇒(c)：不存在周期留数，意味着所有与 $r_j$ 兼容的对偶求值在 $u_b$上均取非负值；由命题 6.16 和引理 6.15 可得 $u_b \in \mathcal{C}_A$。(c)⇒(a)：若存在挠，就会在 $f_d(b,\ c)$ 中产生周期修正项（非零留数），这与 (c) 矛盾，依据的是同一分离论证。

□

### 6.1.2 伽罗瓦下降

这个应用表明，伦理对偶性的范畴形式体系可以扩展到算术和离散情形。在这些情形中，环境范畴由整群环上的模构成，而同调不变量则可解释为伽罗瓦下降的算术障碍。特别地，$\mathrm{Ext}^1$ 可与群上同调 $H^1(\Gamma,\ -)$对应，并衡量沿正规覆盖塔传递的 $\Gamma$–不变数据在全局相干性上的缺失。其基本图景将作用于树上的群的巴斯–塞尔理论、图的有限伽罗瓦覆盖，以及作为下降相容性形式类比的伦理判据 $\mathbb{D}^2(f)\eta = \eta f$ 联系起来。

设 $\Gamma$ 是一个有限生成离散群，它在连通图 $T$（视为单纯树）上自由作用，并令 $G = \Gamma\backslash T$ 为其商。记 $\mathcal{E} = \text{Mod-}\mathbb{Z}[\Gamma]$为左 $\mathbb{Z}[\Gamma]$–模构成的阿贝尔范畴，并固定一个带平凡 $\Gamma$–作用的 $R = \mathbb{Z}$。所有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{E}}$群均在此范畴中计算；我们采用约定 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,\ R)$。

**定义 6.21** (算术资源范畴)。 与 $\Gamma$相关联的算术资源范畴是阿贝尔范畴

$$\mathcal{E} = \mathrm{Mod}\text{-}\mathbb{Z}[\Gamma],$$

其对象为整系数 $\Gamma$–模，态射为 $\Gamma$–等变同态。资源对象是 $R = \mathbb{Z}$，带有平凡的 $\Gamma$–作用，而对偶函子

$$\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(-, \mathbb{Z})$$

定义了一种内部反射概念。导出对偶 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}(-, \mathbb{Z})$ 与计算 $\Gamma$ 群上同调的标准上链复形相一致。

**引理 6.22** (同调识别)。 对于每个 $\Gamma$–模 $M$ 和整数 $k \geq 0$，存在一个典范同构

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(M, \mathbb{Z}) \ \cong\ H^k(\Gamma, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})),$$

其中右端表示 $\Gamma$ 通过共轭作用于系数模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$所得的群上同调。

证明。 应用平凡 $\Gamma$–模 $\mathbb{Z}$的标准巴尔分解 $B_\bullet(\Gamma)$。根据定义，$\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(M,\ \mathbb{Z}) = H^k(\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}(B_\bullet(\Gamma)\otimes M,\ \mathbb{Z}))$，这恰好是 $H^k(\Gamma,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\ \mathbb{Z}))$；参见 [Bro82]。

□

**定义 6.23**（伦理伽罗瓦下降）。设 $\pi\colon\ G \to G$ 是一个连通有限图的有限正规覆盖，其覆盖变换群为 $\Gamma = \mathrm{Deck}(\pi)$。若一个取值于阿贝尔群 $A$ 的标记或配置 $\widehat{x}\colon\ V(G) \to A$ 满足伦理下降，即它是 $\Gamma$–不变的，也就是说，

$$\widehat{x}(\gamma v) = \widehat{x}(v) \quad \forall\, \gamma \in \Gamma, v \in V(\widehat{G}).$$

换言之，$\widehat{x}$ 属于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}[V(G)],\ A)$。当存在 $x\colon V(G) \to A$，使得 $\widehat{x} = x \circ \pi$ 时，这种 $\widehat{x}$ 便伦理下降到 $G$。

**引理 6.24**（下降的上同调障碍）。设 $\pi\colon\ G \to G$，且 $\Gamma$ 如上。记 $C_0(G,\ A)$ 和 $C_1(G,\ A)$ 分别为 $G$ 上取值于 $A$ 的 *0* 链和 *1* 链所构成的 $\Gamma$– 模，并令 $R = \mathbb{Z}$ 带有平凡作用。那么，对于一个 $\Gamma$–不变配置，其伦理下降存在的障碍属于群

$$H^1(\Gamma, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_0(\widehat{G}, A), R)) \ \cong\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(C_0(\widehat{G}, A), R),$$

且当且仅当该配置可以下降时，此障碍才消失。

证明。 $\Gamma$–不变标记是一个 $\Gamma$–等变映射 $C_0(G,\ A) \to R$。此类映射对应于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(C_0(G,\ A)\ R)$ 中的元素。将局部 $\Gamma$–等变映射从顶点延拓为正合的 $\Gamma$–等变 1–余循环，其障碍是将 Hom 和 Ext 应用于 $0 \to \ker \partial_1 \to C_1 \to \mathrm{im}\ \partial_1 \to 0$ 所得长正合列中连接态射的类。根据引理 6.22，此类属于$H^1(\Gamma,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_0(\widehat{G},\ A)\ R))$，且当且仅当存在全局下降时才消失。 □

**定理 6.25 (**伦理伽罗瓦下降定理)。设 $G$ 是一个有限连通图，$\pi_k : G_k \to G$ 是一个甲板变换群为 $\Gamma_k \trianglelefteq \pi_1(G)$ 且围长递增的有限正规覆盖塔。对于每个 $k$，令 $\widehat{x}_k$ 为定义在 $G_k$ 上的一个 *2–CSP* 实例（例如最大割）的最优配置，其取值属于 *{*±1*}*。假设对于无穷多个 $k$，$\widehat{x}_k$ 都是 $\Gamma_k$–不变的。那么存在一个标记 $x\colon V(G) \to \{\pm 1\}$，使得

$$\mathrm{val}_G(x) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{val}_{\widehat{G}_k}(\widehat{x}_k),$$

并且 $x$ 在 $G$上是全局最优的。此外，这种不变序列存在与否的障碍由同调类刻画：

$$[\widehat{x}] \in \varprojlim_k H^1(\Gamma_k, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_0(\widehat{G}_k, \mathbb{Z}), R)) \simeq \varprojlim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[\Gamma_k]}(C_0(\widehat{G}_k, \mathbb{Z}), R).$$

当且仅当该族在伦理意义上下降到$G$时，这个类才对序列 $(\widehat{x}_k)$ 消失。

证明。 每个 $\widehat{x}_k$ 都在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma_k]}(C_0(G_k,\ \mathbb{Z})\ R)$ 中定义一个元素。根据引理 6.24，两个在 $G$ 上投影相同的 $\Gamma_k$–不变配置之差，表示 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[\Gamma_k]}(C_0(\ \widehat{G}_k,\ \mathbb{Z})\ R)$ 中的一个类。如果这些类沿着一个无限子序列消失，则射影极限为零，这意味着整个塔具有相容性。诱导的 $x$ 标记在 $G$ 上继承了最优性，因为每个 $G_k$ 都关于边权等距覆盖 $G$；树上正合解（围长较大）的极限会在底层给出一个全局最优解。反过来，如果存在一个全局最优解 $x$，它的

提升 $\widehat{x}_k = x \circ \pi_k$ 是 $\Gamma_k$–不变的，并在极限中定义零类，因而得到等价。

该论证可原样应用于 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 上的任意有限维模，表明伦理下降等价于相应系数系统的第一上同调消失。

□

定理 6.25 可视为普遍调和定理（定理 2.5）应用于函子 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(-, \mathbb{Z})$ 后得到的离散算术类比。这里，$H^1\mathbf{D}$ 度量了未下降所造成的伦理缺陷，而它的消失则表达了莫里塔不变定律：在伦理相干性条件下，树状覆盖上的局部最优性意味着全局最优性。这种诠释与树上的群作用和图覆盖之间的 Bass–Serre 对应相呼应 [Ser77]。

### 6.1.3 非凸优化

设 $V$ 是一个带有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和范数 $\| \cdot \|$ 的有限维实向量空间。我们考虑如下形式的优化问题

$$\min_{x \in V} F(x),$$

其中 $F : V \to \mathbb{R}$ 二阶连续可微，且具有孤立临界点。我们假设 $F$ 是 Morse 可容许的，即

1. 每个临界点 $x^*$ 处的海森矩阵 $\nabla^2 F(x^*)$ 都是非奇异的，并且
2. 所有次水平集 $V_{\leq \alpha} = \{x : F(x) \leq \alpha\}$ 都是紧致的，且具有分段光滑边界。

这些假设保证存在良定义的 Morse 复形 $M_*(V; F)$，它由 $-\nabla F$ [Mil63] 的梯度轨线构成。全文中，我们在有限维 $\mathbb{R}$ 上的向量空间所构成的阿贝尔范畴 $\mathcal{E} = \mathrm{Mod}\text{-}\mathbb{R}$ 中工作，其对偶函子为 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R})$，导出增强为 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R})$。单位 $\eta$ 是典范评价 $x \mapsto (f \mapsto f(x))$。

令 $C_*(V)$ 为 $V_{\leq \alpha}$ 的一个三角剖分的胞腔链复形，其中 $\alpha$ 足够大，使得 $\partial V_{\leq \alpha} = \emptyset$。对于分隔 $F$ 的临界值的正则值 $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N$，定义 Morse 过滤 $\mathcal{F}_i C_*(V) = C_*(V_{\leq \alpha_i})$。对于每个附着 $V_{\leq \alpha_i} \hookrightarrow V_{\leq \alpha_{i+1}}$，都有一个链映射 $r_{i,i+1} : C_*(V_{\leq \alpha_{i+1}}) \to C_*(V_{\leq \alpha_i})$，它由沿着 $\nabla F$ 的梯度变形收缩给出。

**定义 6.26**（伦理梯度流）。$\Phi_t$ 的梯度流 $-\nabla F$ 是伦理的，当且仅当每个回缩 $r_{i,\,i+1}$ 和包含 $j_{i,\,i+1}$ 都满足伦理自然性条件

$$\mathbb{D}^2(r_{i,i+1})\eta = \eta r_{i,i+1}, \qquad \mathbb{D}^2(j_{i,i+1})\eta = \eta j_{i,i+1}.$$

在此情况下（$C_*(V)$，$\mathcal{F}_\bullet$）成为 $\mathcal{E}$ 中的伦理过滤对象。

**引理 6.27 (**伦理 Morse 约化的存在性)。如果 $\Phi_t$ 是 $C^1$，且其线性化 $D\Phi_t$ 对所有 $t$ 都是自伴的，那么 $\Phi_t$ 就是伦理的。特别地，具有对称雅可比矩阵的光滑实值函数的梯度流是伦理的。

证明。 自伴性给出 $\langle D\Phi_t u,\ v\rangle = \langle u,\ D\Phi_t v\rangle$；因此 $D\Phi_t$ 与其双对偶 $\mathbb{D}^2(D\Phi_t)$重合，从而使 $\mathbb{D}^2(D\Phi_t)\eta = \eta D\Phi_t$ 在每个链群上成立。 □

**定理 6.28** （非凸函数的伦理莫尔斯对偶）。 设 $F: V \to \mathbb{R}$ 是 *Morse* 可容许的，且具有伦理梯度流。则有以下结论：

*1.* 由梯度轨线得到的 *Morse* 复形 $M_*(V;\ F)$ 是 $C_*(V)$ 的伦理约化；特别地

$$\mathbf{D}(C_*(V)) \simeq \mathbf{D}(M_*(V;F)) \quad in\ D^+(\mathcal{E}).$$

*2.* 指标为 $i$ 的临界点数满足

$$\#\{ethic\ critical\ points\ of\ index\ i\} \geq \operatorname{rank} H^i\mathbf{D}(C_*(V)).$$

*3.* 若 $F_1$、$F_2$ 是两个由伦理同伦$H$：$[0,1]\times V \to \mathbb{R}$连接的 *Morse* 可容许函数，且其梯度流保持 $\eta$，则它们的 *Morse* 复形在 $D^+(E)$ 中等价，因此具有相同的 $H^*\mathbf{D}$。

证明。 根据 [Mil63]， $C_*(V)$ 和 $M_*(V;\ F)$ 通过梯度变形收缩链同伦等价；流的 Ethicity 保证其与 $\eta$ 交换，从而得到导出等价。结论（2）和（3）分别由定理 6.28 以及满足伦理条件的同伦上的 $\mathbf{D}$ 的函子性得出。 □

给定一个约束问题

$$\min_{x\in V} F(x) \quad \text{s.t. } G(x) = 0,$$

其中 $G$: $V \to \mathbb{R}^m$ 光滑，且约束流形 $M = G^{-1}(0)$ 紧致且˜正则，定义拉格朗日函数 $\mathcal{L}(x,\ \lambda) = F(x) + \langle\lambda,\ G(x)\rangle$。令 $V = V \times \mathbb{R}^m$和$H(x,\ \lambda) = \mathcal{L}(x,\ \lambda)$。假设 $H$是 Morse 可容许的，并且对 $(F,\ G)$ 而言，$(x,\ \lambda)$ 的相应流 $\mapsto -\nabla H(x,\ \lambda)$ 是伦理的（自伴海森矩阵块形式）。

**命题 6.29** （伦理拉格朗日对偶性）。 对于每个满足 $G(x^*) = 0$的伦理临界点 $(x^*,\ \lambda^*)$ *of* $H$，其 $(x^*,\ \lambda^*)$ 的莫尔斯指标等于 $x^*$ 在 $M$中的不稳定流形的维数；此外，

$$H^i\mathbf{D}(C_*(M)) \ \cong\ H^i\mathbf{D}(C_*(\tilde{V}))\Big/\!\sim,$$

其中商将对应于拉格朗日伴随方向的轨迹相识别。特别地， $H$ 的伦理 *Morse* 复形计算该约束问题的对偶不变量。

证明。 Ethicity 确保分块海森矩阵 $\nabla^2 H = \begin{pmatrix} \nabla^2 F & \nabla G^\top \\ \nabla G & 0 \end{pmatrix}$ 是对称的，˜从而在 $V$ 上产生自伴流。商对应关系可通过沿着正合的 $\mathbb{D}$-交换微分消去 $\lambda$，并与 $C_*(V)$ 的链级卡鲁什 – 库恩 – 塔克子复形˜进行比较而得出。

□

设目标函数 $F$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上为 $C^2$，且具有有限个孤立临界点和有界的下水平集。计算型伦理 Morse 约化算法如下：

**算法 2** 伦理 Morse 约化（非凸情形）**要求：** 光滑函数 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，容差 $\epsilon>0$。
用立方或单纯网格离散化 $V_{\le\alpha}$；构建 $C_*(V)$。使用梯度下降/上升估计临界点及其指标，直到$\|\nabla F(x^*)\|<\epsilon$。通过沿 $-\nabla F$ 方向将每个非临界胞腔与一个邻近胞腔配对，构造离散 Morse 匹配 $V$，并满足局部伦理性：验证 $\mathbb{D}^2(m_{\sigma\to\tau})\,\eta = \eta m_{\sigma\to\tau}$（雅可比矩阵对称条件）。将匹配对退化，得到伦理 Morse 复形 $M_*(V;F)$。在约化后的复形上，通过标准持久同调程序计算 $H^i\mathbf{D}(M_*(V;F))$。**确保：** 伦理对偶不变量 $\{H^i\mathbf{D}\}$ 以及伦理临界点的数量。

算法的复杂度主要由离散 Morse 匹配决定，其复杂度关于单元数量 [For98] 呈多项式增长。由于伦理检查（步骤 3）完全是局部的代数操作，因此在维数 $n$ 固定时，该过程的运行时间随网格大小线性增长。所得不变量量化了全局最优性的同调障碍：$H^1\mathbf{D}\neq 0$ 可证明存在非平凡吸引域（多个极小值），而 $H^{>1}\mathbf{D}$ 为零则表明能量景观在拓扑上是单对象的，适合进行全局优化。

## 6.2 图几何

本小节中，除非另有说明，我们均假设所有群都是有限生成的自由阿贝尔群；因此，$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$可与其参数的挠子群等同。所有复形均为有界复形，且投射维数为 $\le 1$。

定义 6.30（固定设定与记号）。我们在阿贝尔范畴 $\mathsf{E}=\text{Mod-}\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}}$ 中工作，并采用固定的反变对偶函子 $\mathbb{D}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ 及单位$\eta_A:A\to\mathbb{D}^2(A)$。我们转至有界下导出范畴 $D^+(\mathsf{E})$，并将导出对偶函子记作 $\mathbf{D}=\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ [Wei94, GM03]。对于有限连通图 $G=(V,E)$，令 $C_0(G)=\mathbb{Z}^V$, $C_1(G)=\mathbb{Z}^E$，并固定边的定向；边界映射为 $\partial:C_1\to C_0$，组合拉普拉斯算子为 $L=\partial\partial^{\top}$。我们将除子群记作 $\mathrm{Div}(G)=\mathbb{Z}^V$，将主除子子群记作 $\mathrm{Prin}(G)=\mathrm{im}(L)$，并将雅可比群（临界群／沙堆群）记作 $\mathrm{Jac}(G)=\mathrm{Div}(G)/\mathrm{Prin}(G)$ [Big93, Dha90, BN07]。

**定义 6.31**（主两项复形）。考虑两项链复形

$$C_\bullet(G)\;:=\;\Big[\,C_1(G)\xrightarrow{\;\partial\;}C_0(G)\,\Big]\qquad(C_1\text{ in degree }1,\;C_0\text{ in degree }0).$$

其余链对应物为 $C^\bullet(G) = [\, C^0 \xrightarrow{\partial^\top} C^1 \,]$，其中 $C^0 = C_0^*$、 $C^1 = C_1^*$。我们还将使用次数为 1 的映射锥

$$\mathrm{Cone}(\partial) \;:=\; \Big[ C_1 \xrightarrow{\binom{\partial}{0}} C_0 \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(\deg, -\mathrm{id})} \mathbb{Z} \Big],$$

其中 $\deg : C_0 \to \mathbb{Z}$ 表示坐标之和（总质量）。所有复形都位于$D^+(\mathcal{E})$中。

**引理 6.32** （锥的除子实现）。 在$D^+(\mathcal{E})$中存在一个拟同构

$$\mathrm{Cone}(\partial) \;\simeq\; \Big[ \mathrm{Prin}(G) \hookrightarrow \mathrm{Div}(G) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \Big] \;=: D_{\mathrm{div}}(G),$$

其中，中间项置于次数 $0$，左侧项置于次数 $-1$，右侧项则依照所示箭头置于次数 $0$ 。

证明。 取短正合列 $0 \to \ker(\deg) \to \mathrm{Div} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$ ，并注意到 $\ker(\deg) = \{x \in \mathbb{Z}^V : \sum_v x_v = 0\}$。像 $\mathrm{Prin}(G) = \mathrm{im}(L) \subseteq \ker(\deg)$，而商将 $\ker(\deg)/\mathrm{Prin}(G) \cong \mathrm{Jac}(G)$ 同一化。锥 $\mathrm{Cone}(\partial)$ 是通过生成元 $C_0$ 以及来自 $\partial$ 的关系对 $\ker(\deg)$ 的标准表示（加入全局次数即可分离出 $\mathbb{Z}$）。通过常规的图表追逐可知，自然映射 $C_0 \oplus \mathbb{Z} \to \mathrm{Div}$（将 $(x,t)$ 映为 $\mapsto x$ ）以及 $C_1 \to \mathrm{Prin}$（将 $e \mapsto \partial\partial^\top$ 映为 $(\delta_e)$）在同调上诱导同构；因此，$\mathrm{Cone}(\partial) \simeq D_{\mathrm{div}}(G)$ 是一个拟同构。（参见 [Big93] 和 [BN07] 中的标准表示。） □

**引理 6.33** （导出对偶、长正合列与次数）。 对$\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ 作用于$\mathrm{Cone}(\partial)$（或等价地作用于 $D_{\mathrm{div}}(G)$），可得到一个特异三角以及一个关于上同调的长正合列

$$0 \to H^0\mathbf{D} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Div}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{Prin},\mathbb{Z})} \cdots \longrightarrow H^1\mathbf{D} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Div}, \mathbb{Z}) \to \cdots,$$

但 $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Div}\ \mathbb{Z}) = 0$ 和 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ （自由模），而 $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Jac}(G)\ \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Jac}(G)\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq$ 的挠子为 $\mathrm{Jac}(G)$。 *[魏94]*。因此 $H^k\mathbf{D}(\mathrm{Cone}(\partial)) = 0$ 对于$k \geq 2$，且

$$H^0\mathbf{D} \;\cong\; \{\, \textit{harmonic linear forms on } \mathrm{Div} \;\; \textit{vanishing on } \mathrm{Prin} \,\},$$
$$H^1\mathbf{D} \;\cong\; \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Jac}(G), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{tors}\ \mathrm{Jac}(G).$$

证明。 由于所有链群 $C_i(G)$ 都是自由阿贝尔群，应用 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ 后，正合性在 1 次以内得以保持。因此，唯一非零的 Ext 项来自有限阿贝尔商群 $\mathrm{Jac}(G)$，对于它，$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Jac}(G)\ \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Jac}(G)\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{tors}\ \mathrm{Jac}(G)$。

由于 $C_0$ 和 $C_1$ 是自由的，只有余核的挠部分会进入 $H^1$。这些识别来自泛系数正合列，以及 Div 和主除子群是自由阿贝尔群而 Jac 是有限阿贝尔群这一事实；参见 [Wei94]。对于 $k \geq 2$，其消失是因为 $\mathrm{Cone}(\partial)$ 的振幅位于次数$\{-1, 0, 1\}$，且所有项的投射维数均为 $\leq 1$。 □

**定理 6.34 (**通过 $H^1\mathbf{D}$**)** 的基尔霍夫矩阵树定理。 对于任意有限连通图 $G$，挠群 $H^1\mathbf{D}(\mathrm{Cone}(\partial)) \cong \mathrm{tors}\ \mathrm{Jac}(G)$ 的阶等于生成树的数量 $\tau(G)$ 。等价地，

$$|\mathrm{tors}\ \mathrm{Jac}(G)| \;=\; |\mathrm{tors}\,\mathrm{coker}(L)| \;=\; \det L_{vv} \;=\; \tau(G),$$

其中 $L_{vv}$ 是任意一个余因子（约化拉普拉斯矩阵） *[Kir47，Big93]*。

证明。 根据引理 6.33，$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ 的长正合列给出 $H^1\mathbf{D}$ $\cong$Ext$^1_{\mathbb{Z}}$(Jac($G$) $\mathbb{Z}$) $\simeq$ tors,Jac($G$)。阿贝尔沙堆（临界）群与 tors coker($L$) [Dha90], 典范同构，因此 $|H^1\mathbf{D}| = |$tors coker($L$)$|$。基尔霍夫经典定理指出，该阶等于任意约化行列式 det $L_{vv}$，而后者计数生成树 $\tau$($G$) [Big93]。因此，所有这些量都相等。 □

$H^1\mathbf{D}$ 衡量伦理正合性的失效程度（即对偶缺陷）。定理 6.34 表明，对于图而言，这种缺陷恰好就是沙堆挠元（“潜在电荷”的丰盛程度）；而伦理正合性（ $H^1$为零）则对应于平凡的临界群，也就是一棵树（唯一的全局相干性）。

**引理 6.35** （平面对偶与图特递归的导出版）。 若 $G$ 是平面的，且其对偶图为 $G^*$，那么主复形 $C_\bullet(G)$ 与 $C_\bullet(G^*)$ 在$\mathbb{D}$作用下互换（相差典范识别），从而在 $D^+$（$E$） *[Tut54*、*Big93]*中的删边–缩边特异三角层面上得到 $T_G\,(x,y) \;=\; T_{G^*}\,(y,x)$ 。

证明。 对于平面嵌入图，割集与圈互为正交补； $G$ 上的边界 $\partial$ 对应于 $G^*$上的余边界 $\partial^\top$ 。删边–缩边短正合列与 $\partial$的映射锥三角相匹配，而$\mathbf{D}$的函子性将它们互换，从而得到 Tutte 对称性 [Big93]。 □

**定义 6.36** （导出表示中的秩与典范除子）。 令$g = |E| - |V| + 1$ 为圈秩。对于 $D \in$ Div($G$)，定义其秩 $r$($D$)为

$$r(D) \;:=\; \max\{\, k \in \mathbb{Z}_{\geq -1} : \forall E' \subset V,\ |E'| = k\ \exists\, \varphi \in \mathrm{Prin}(G) \text{ s.t. } D - \varphi - \mathbf{1}_{E'} \geq 0 \,\},$$

贝克–诺里恩概念 [BN07]。令 $K$ 为典范除子，满足 $K$($v$) =deg($v$) $-2$，且 deg $K = 2g - 2$。

**引理 6.37** （除子三角和欧拉示性数）。 短正合序列$0 \to$ 主除子群 $\to$ 除子 $\xrightarrow{q}$ Jac $\to 0$ 在将主除子群 置于次数 $-1$ 、将 除子 置于次数 0后，给出特异三角 [主除子群 $\to$ 除子 $\to$ Jac] $\to$ 除子[0] $\to$ 主除子群[1] ，位于 $D^+$（$E$）中。应用 $\mathbf{D}$ 得到一个长正合列，其欧拉示性数等于

$$\chi\Big(\mathbf{D}(D_{\mathrm{div}})\Big) \;=\; \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}(\mathrm{Div},\mathbb{Z})) - \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}(\mathrm{Prin},\mathbb{Z})) \;=\; |V| - (|V|-1) \;=\; 1.$$

证明。 正合性显然；Div $\cong \mathbb{Z}^V$ 和 Prin $\cong$ im($L$) 的秩为 $|V| - 1$（连通性）。$\mathbf{D}$ 的欧拉示性数等于该秩之差，因为对于 $i > 1$，所有更高阶 Ext$^i$ 均消失，而唯一非平凡的 Ext$^1$ 项对应于 Jac($G$)，它贡献挠，但不影响欧拉示性数。 □

**定理 6.38**（通过导出对偶性得到的 Baker–Norine 黎曼–罗赫定理）。 对于每个除子 $D$ 在有限连通图上 $G$，

$$r(D) \;-\; r(K-D) \;=\; \deg D \;+\; 1 \;-\; g,$$

其中 $g = |E| - |V| + 1$。等价地，秩亏由主复形的欧拉示性数决定，而唯一的障碍位于 $H^1\mathbf{D} \;\cong \text{tors}\ \mathrm{Jac}(G)$。

证明。 根据 [BN07]，$r(D) + 1$ 等于线性系 $|D|$中有效截面空间的维数（关于 $\mathbb{Z}$），也就是说，等于满足 $x \in \mathrm{Div}^{\geq 0}$且具有 $x \sim D$的解集大小。在我们的表示 $D_{\mathrm{div}}$中，这恰好是通过 $D$平移得到的扭曲复形的秩$_{\mathbb{Z}} H^0\mathbf{D}$ 。典范扭曲 $K - D$ 通过通常的伴随对应于对偶上同调（在图的情形下，这是由 $\partial, \partial^\top$诱导的离散霍奇星算子）；因此 $r(K - D) + 1 =$ 秩$_{\mathbb{Z}} H^0\mathbf{D}$(对偶扭曲)。由于 $D_{\mathrm{div}}$ 位于一个长度为 2 的复形中，欧拉示性数可计算

$$\Big(r(D)+1\Big) \;-\; \Big(r(K-D)+1\Big) \;=\; \chi\Big(\mathbf{D}(D_{\mathrm{div}})\Big) \;+\; \deg D \;-\; g,$$

其中，按 $\deg D - g$ 移位是点火模型中由典范次数带来的标准修正（每个筹码增加一次次数，并使循环空间维数减少一个单位）。由于 $D_{\mathrm{div}}$ 的振幅为 $\{0,1\}$ 且其所有项都是自由阿贝尔群，$\mathbf{D}(D_{\mathrm{div}})$是一个两项复形，其欧拉示性数可直接由秩计算：$\chi(\mathbf{D}(D_{\mathrm{div}})) =$ 秩$_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Hom}(\mathrm{Div}\ \mathbb{Z}) -$ 秩$_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Hom}(\mathrm{Prin}\ \mathbb{Z}) = 1$。根据引理 6.37，$\chi(\mathbf{D}(D_{\mathrm{div}})) = 1$，由此得到所述恒等式 $r(D) - r(K - D) = \deg D + 1 - g.$。所有挠贡献都位于 $H^1\mathbf{D} \cong \mathrm{tors}\ \mathrm{Jac}(G)$ 中，并在计算秩时抵消，恰如 [BN07] 中一样。 □

定理 6.34 和定理 6.38 来自同一主复形上的同一个导出对偶。Kirchhoff 计算了 $H^1\mathbf{D}$ （伦理缺陷）中的挠，而 Riemann–Roch 则是欧拉示性数为 1 的对偶三角的 $H^0$ 部分之间的秩相等；唯一的障碍存在于同一个 $H^1$中。平面对偶（Tutte 对称性）是$\mathbf{D}$ 在删除–收缩三角 [Tut54, Big93]上的函子性。

上述所有上同调计算都发生在 $D^+(\mathrm{Mod}-\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}})$ 中，因此 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\ \mathbb{Z})$ 的振幅为 $\leq 1$。这保证了 $H^0\mathbf{D}$ 和 $H^1\mathbf{D}$ 已经涵盖图复形的所有对偶信息。

计算 $L$ 的史密斯标准形可同时得到：(i) $|\mathrm{Jac}(G)| = |\mathrm{tors}\ \mathrm{coker}(L)|$（Kirchhoff）；(ii) $H^0\mathbf{D}$ 中出现的秩，以及由此通过点火类中的有效成员判定（Dhar 燃烧检验）得到的 Baker–Norine 秩[Dha90]。因此，单个同调证书（史密斯标准形）即可证明这两种对偶性。

## 6.3 时间与内存

**定义 6.39**（固定框架与记号）。 我们仍处于阿贝尔资源范畴 $\mathcal{E}$中，并固定对偶函子 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$ 及单位 $\eta_A\colon A \to \mathbb{D}^2(A)$。在导出范畴 $D^+(\mathcal{E})$ 中，我们记 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$。时间演化是一族态射离散族 $f_t : X_t \to X_{t+1}$；截至时间 $t$ 的复合

为 $F_t = f_t \circ \cdots \circ f_1$。导出对偶序列 $\mathbf{D}(F_t)$ 描述了伦理响应。我们设

$$M_t := H^1(\mathbf{D}(F_t)), \qquad S_{\mathrm{eth}}(t) := \log |\mathrm{tors}\, M_t|.$$

我们称 $M_t$ 为时刻 $t$的伦理记忆，并称 $S_{\mathrm{eth}}(t)$ 为伦理熵 [Wei94, GM03]。

**引理 6.40** （导出正合性与伦理可逆性）。 对任意 $F \in \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(X)$，以下条件等价：

*(a)* $\mathbb{D}^2(F) \circ \eta = \eta \circ F$*(伦理正合性); (b)* $H^1(\mathbf{D}(F)) = 0$*; (c)* $\mathbf{D}(F)$ 与 $H^0$ 上的恒等映射拟同构。

证明。 (a)⇒(b)：$\mathrm{Hom}(-, R)$ 在短正合列 $0 \to \ker F \to X \xrightarrow{F} X \to \mathrm{余核} F \to 0$ 上的正合性消去了连接同态 $H^0 \to H^1$，从而推出 $H^1 = 0$。(b)⇒(c)： $H^1$ 的消失意味着 $\mathbf{D}(F)$ 在$H^0$上作为同构作用。(c)⇒(a)：由 $\eta$ 的自然性，定义 6.40 中的图表交换，因此得到$\mathbb{D}^2(F)\eta = \eta F$。 □

**定义 6.41** （时间复合与滞后）。 设 $\{f_t\}$ 为一个有限时间链，且 $F_t = f_t \circ \cdots \circ f_1$。复合 $\mathbf{D}(F_t)$ 定义了一个导出复形链及其长正合列

$$\cdots \to H^1\mathbf{D}(F_{t-1}) \xrightarrow{f_t^*} H^1\mathbf{D}(F_t) \xrightarrow{\delta_t} H^2\mathbf{D}(F_{t-1}) \to \cdots .$$

该链的伦理滞后是挠子群 $\mathrm{tors}\, H^1\mathbf{D}(F_t)$；其大小$S_{\mathrm{eth}}(t)$量化了循环后保留下来的记忆。

**定理 6.42** （伦理记忆的单调衰减）。 假设每个 $f_t$ 在 *0* 次上都是伦理的，即 $\mathbb{D}^2(f_t)\eta = \eta f_t$。则存在一个满同态

$$H^1(\mathbf{D}(F_{t-1})) \twoheadrightarrow H^1(\mathbf{D}(F_t)),$$

因此 $S_{\mathrm{eth}}(t) \le S_{\mathrm{eth}}(t-1)$；若步骤 $f_t$ 在 *1* 次上也正合，则不等式严格成立。

证明。 将 $\mathbf{D}$ 作用于由 $F_t = f_t \circ F_{t-1}$ 诱导的特异三角，并取上同调。连接态射 $H^0\mathbf{D}(f_t) \to H^1\mathbf{D}(F_{t-1})$ 由 0 次正合性而为零，从而得到所述满同态。若 $f_t$ 在 1 次上正合，则像为真子集，因此不等式严格成立。 □

**定理 6.43** (循环上的次可加性)。 对于闭轨迹（复合）$\gamma_1, \gamma_2$ 及其拼接 $\gamma_1 \# \gamma_2$，伦理熵满足次可加性：

$$S_{\mathrm{eth}}(\gamma_1 \# \gamma_2) \le S_{\mathrm{eth}}(\gamma_1) + S_{\mathrm{eth}}(\gamma_2),$$

当且仅当 $H^1\mathbf{D}(\gamma_i)$ 的挠部分相互独立时，等号成立。

证明。 在导出范畴中，$\mathbf{D}(\gamma_1 \# \gamma_2) = \mathbf{D}(\gamma_2) \circ \mathbf{D}(\gamma_1)$，因此挠阶像史密斯标准形中的行列式一样相乘；取对数后得到次可加性。 □

**定理 6.44** （伦理可逆性判据）。 对于闭态态射 $F\colon\ X \to X$，以下条件等价：

*(a)* $F$ 是一个伦理同构（$\mathbb{D}^2(F)\eta = \eta F$）；*(b)* $H^1(\mathbf{D}(F)) = 0$ （无滞后）；*(c)* $\mathbf{D}(F)$ 拟同构于$\mathrm{id}_X$。

证明。 这是针对自同态的引理 6.40 特例。 □

**定理 6.45** （伦理记忆与周期性）。 如果某个$k > 1$ 满足 $F^k \simeq \mathrm{id}$ 属于 $D^+(\mathcal{E})$，但 $F \not\simeq \mathrm{id}$，那么 $H^1\mathbf{D}(F) \neq 0$。任何非平凡的周期动力学都会携带残余记忆。

证明。 由$\mathbf{D}(F^k) \simeq \mathbf{D}(\mathrm{id})$可得一个滤过，其伴随的长正合列表明，$H^1\mathbf{D}(F)$必须包含非平凡的类，才能在第 $k$次迭代时相互抵消；否则 $F$ 本来就会拟同构于id。 □

**定理 6.46** （伦理重构定理）。 对于一条轨迹$(F_t)$，若对所有 $t$都有$H^{>1}\mathbf{D}(F_t) = 0$，则群族 $M_t = H^1\mathbf{D}(F_t)$ 以及定理 *6.42* 的过渡映射，能够在 $D^+(\mathcal{E})$中唯一确定 $F_t$ （差一个同构）。

证明。 对于振幅 $\leq 1$ 复形，$H^0, H^1$ 及连接映射的数据足以在拟同构意义下重构该复形 [Wei94]。因此，带有连接态射的$\{M_t\}$ 决定了动力学的伦理影子。 □

**定理 6.47 (**滞后的算法证书**)**。 若 $\mathcal{E} = \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}}}$，则每个 $F_t$ *ad-* 都有一个矩阵表示 $A_t$，其史密斯标准形 $U_tA_tV_t = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$给出

$$|\mathrm{tors}\, M_t| = \prod_{i:d_i>1} d_i.$$

因此 $S_{\mathrm{eth}}(t) = \sum_{i:d_i>1} \log d_i$；计算史密斯标准形即可得到记忆及其衰减的显式证书。

在孔采维奇的语言中，移位 $[1]$ 在 $D^+(\mathcal{E})$ 中表示一个时间单位，而 $\mathrm{Ext}^1$ 记录了连续切片之间的残余耦合——他称之为“过去的痕迹”。我们的框架使其定量化：$H^1\mathbf{D}$ 就是这种痕迹，可计算为导出对偶的挠。定理 6.42–6.46 给出了动力学定律：伦理正合性会抹去这种痕迹；不完美的步骤则会使其以滞后的形式累积。因此，孔采维奇意义上的范畴时间，在伦理对偶形式体系中成为一个可测量、可计算的过程。

## 6.4 草图

### 6.4.1 社会选择

**定义 6.48** （资源理论中的机制）。 设$\mathcal{E}$ 为具有对偶函子 $\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, R)$、单位 $\eta_A\colon\ A \to \mathbb{D}^2(A)$ 以及伦理态射概念（自然性方块 $\mathbb{D}^2(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$）的阿贝尔资源范畴。

机制是一个二元组 $(f, e)$，其中 $f: S \to O$（结果映射），而 $e: O \to \mathbb{D}(S)$（评价/确认）。若 $e$见证了 $f$ 的伦理性，即

$$\mathbb{D}(f) \circ e \;=\; \eta_S \circ f.$$

我们将 $\mathsf{Mech}(\mathcal{E})$ 记作这样一个范畴：其对象是形如 $(S, (f, e))$ 的对；其态射 $(u, v) : (S, (f, e)) \to (S', (f', e'))$ 是 $\mathcal{E}$ 中的交换方块，其满足 $v \circ f = f' \circ u$ 以及 $\mathbb{D}(u) \circ e = e' \circ v$。

等式 $\mathbb{D}(f) \circ e = \eta_S \circ f$ 表明，机制的自我报告 $e$ 与伦理单位 $\eta$ 相协调；这正是专门针对机制的伦理相干性概念。

**定义 6.49**（修正自函子）。定义修正自函子 $\mathcal{F} : \mathsf{Mech}(\mathcal{E}) \to \mathsf{Mech}(\mathcal{E})$：

$$\mathcal{F}(S, (f, e)) \;:=\; \Big(S,\, (f^\sharp, e^\sharp)\Big), \qquad f^\sharp \;:=\; \mathrm{coev}_S;\; e;\; \mathrm{ev}_S \;\in \mathcal{E}(S, S), \qquad e^\sharp \;:=\; \eta_S,$$

其中 $\mathrm{coev}_S : I \to S \otimes \mathbb{D}(S)$ 和 $\mathrm{ev}_S : \mathbb{D}(S) \otimes S \to I$ 是第 1.3 节中的（余）评价映射；我们通过紧闭反馈 $S \xrightarrow{\mathrm{coev}\otimes\mathrm{id}} S \otimes \mathbb{D}(S) \otimes S \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes e\otimes\mathrm{id}} S \otimes \mathbb{D}(S) \otimes S \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}} S$ 来看待 $f^\sharp$。[1] 对于态射 $(u, v)$，令 $\mathcal{F}(u, v) := (u, u)$；coev,ev 的相容性保证了函子性。

**引理 6.50**（F 的单调性与连续性）。假设 $\mathcal{E}$ 具有可数余极限，且 $\mathbb{D}$ 在对偶侧保极限（对于$\mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ 以及本文所用层次上的Mod-$\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}}$ 均成立）。在每个 $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(S)$ 上赋予由阿贝尔结构诱导的逐点序。则 $\mathcal{F}$ 在每个纤维 $\mathrm{Mech}(\mathcal{E})_S$ 上单调，并保留 $\omega$-链的余极限。

证明。单调性：若 $(f, e) \le (f, e')$ 逐分量成立，则 $f^\sharp$由与余评价、评价及 $e$复合构成，因此关于 $e$是单调的；同理，$e^\sharp = \eta_S$ 是常量。连续性：在紧闭子范畴中，滤过余极限与张量积及复合可交换；$\mathbb{D}$ 在$\mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ 上正合，在 Mod-$\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}}$ 上左正合，而余评价、评价的使用仅涉及有限极限/余极限，因此$\mathcal{F}$ 保留 $\omega$-链的余极限。□

**定义 6.51**（伦理不动点（普适机制））。$S$上的普适机制是一个机制（$f^*$，$e^*$），并带有一个结构同构

$$\theta : (f^*, e^*) \xrightarrow{\;\cong\;} \mathcal{F}(f^*, e^*)$$

在 $\mathsf{Mech}(\mathcal{E})_S$中。我们称（$f^*$，$e^*$）为伦理不动点。

**定理 6.52** (伦理不动点的存在性)。对于 $\mathcal{E}$ 的紧闭子范畴中的任意对象 $S$，纤维 $\mathrm{Mech}(\mathcal{E})_S$ 都有一个 $\mathcal{F}$ 的伦理不动点。此外，在 $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(S)$ 上的逐点序下，存在一个最小不动点。

[1]此处的所有恒等态射都是 $\mathcal{E}$ [的紧闭（或*-自伴）子范畴中的标准弦图反馈，参见 Kel82、Bar79]。在纯加性情形下，通过 $\mathbb{D}$ 由第 1.3 节诱导的典范余评价/求值，可得到相同的构造。

证明。通过迭代 $(f_{k+1}, e_{k+1}) = \mathsf{F}(f_k, e_k)$，从一个基础机制 $(f_0, e_0)$ 生成 $\omega$-链。由连续性，余极限 $(f, \bar{e}) = \operatorname{colim}_k (f_k, e_k)$ 存在。F 的定义关于 $(f, e)$ 是代数的（与固定的余评价、评价 $\eta$复合），因此可传递到余极限；于是 $\mathsf{F}(f, \bar{e}) \cong (f, \bar{e})$，也就是说，$(f, \bar{e})$ 是一个不动点。最小性由每个完备格 $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(S)$ 中的 Knaster–Tarski 原理得出（或者，由于 F 是单调且 $\omega$-连续，也可对 $\omega$-链使用标准的域论论证）。除余极限的存在性和第 1.3 节中已有的范畴对偶外，无需使用任何外部公理。

□

**引理6.53** (不动点处的内部认证)。 若$(f^*, e^*)$是 $F$ 的不动点，则 $e^* = \eta_S$和 $f^*$满足伦理交换 $\mathbb{D}^2(f^*) \circ \eta_S = \eta_S \circ f^*$，即 $f^*$是伦理态射。

证明。 根据定义，F 固定 $(f^*, e^*)$ 当且仅当 $e^* = \eta_S$和 $f^* =$满足余评价$_S$； $e^*$；评价$_S$。代入$e^* = \eta_S$ 并利用余评价,评价的三角恒等式，可得$\eta$ 的自然性方块，其中 $f^*$；这正是第 1.2 节中已用到的伦理性条件。 □

**定理 6.54** (同调正合性下同构意义下的唯一性)。 若$\mathrm{Ext}^1\, \mathcal{E}(-, R) = 0$在由 $S$生成的全子范畴上成立（即 $\mathbb{D}$ 在相关短正合列上正合），则 $S$ 上的任意两个伦理不动点在$\mathrm{Mech}(F)_S$中同构，且它们的底层自同态 $f^* \in \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(S)$相同。

证明。 设 $(f^*, \eta_S)$ 和 $(g^*, \eta_S)$ 是不动点。Ethicity 使二者都与 $\eta$ 交换； $\mathbb{D}$ 的正合性将相应的 Hom /Ext 长正合列变为短正合列（定理 1.9），从而迫使 $\mathbb{D}$ 侧诱导态射相等，并且根据紧子范畴上的自反性， $f^*, g^*$ 相等。因此，$\mathrm{Mech}(\mathcal{E})_S$ 中的同构为 $(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_S)$。

□

**推论6.55** (无穷倒退的消解)。 迭代的“机制修订”链 $(f_k, e_k)$ 稳定于伦理不动点 $(f^*, \eta_S)$；无需外部元层次来认证该机制。这在我们的理论中重现了社会选择模型中的无穷倒退消解：通过普适机制实现，正如 *[Ala90]*, 所述，但在此它是伦理对偶框架的直接推论（无需外部公理）。

**定义 6.56** （$\mathcal{E}$ 中的经济博弈与纳什型平稳性）。 一个（一次性）经济博弈是一个由 $S = \bigotimes_{i=1}^{N} S_i$ 策略、一个结果对象 $O$以及一个机制（$f$， $e$）构成的对象，其中 $f$： $S \to O$，$e$： $O \to \mathbb{D}$（$S$）。对于（$f$， $e$），纳什型平稳剖面是一个态射 $\sigma$： $I \to S$，满足

$$\mathbb{D}(f) \circ e \circ f \circ \sigma \;=\; \eta_S \circ f \circ \sigma,$$

即伦理交换在“实现的剖面”上成立。伦理均衡是一个伦理不动点（$f^*$， $\eta_S$）以及关于 $f^*$的平稳 $\sigma^*$。

**定理 6.57** （纳什需求博弈：伦理不动点的存在性与识别）。 在 $E = \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ 中，采用标准对偶性 $V \mapsto V^*$。考虑一个双人纳什需求博弈，其中 $S = S_1 \otimes S_2 = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$、 $O = \mathbb{R}^2_{\geq 0}$，并且结果映射 $f$ 是对称且有效的（总和固定为 $B > 0$）。那么，伦理修正 $F$ 有唯一不动点 （$f^*, \eta_S$），且 $f^*$是对称分配器

$$f^*(x_1, x_2) \;=\; \left(\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right).$$

此外，对于 $(f^*, \eta_S)$ 的任何纳什型平稳剖面，都与对称分配一致。

证明。 在 **FinVect**中，$\mathbb{R}$、 $\mathbb{D}$ 是正合的，且 coev、ev 是标准双线性配对映射；定理 6.52 给出了存在性，定理 6.54 给出了唯一性。 $f$ 的对称性与效率（帕累托前沿 $x_1 + x_2 = B$）意味着，任何与 $\eta$ 交换且在翻转 $S_1 \leftrightarrow S_2$ 下保持不变的伦理端同态 $f^\sharp$ 都必须是投影到中点的对称投影算子；唯一具有这些性质的幂等线性映射是常值分配器。平稳性归结为 $f^*$ 的幂等性与对称性，从而迫使该剖面处于中点。

□

### 6.4.2 语义

设 $H$ 是 $\mathcal{E}$中的一个 Hopf 对象，表示《树》[MBC23]的句法代数。记 $\mu$: $H \otimes H \to H$为乘积，记 $\Delta$: $H \to H \otimes H$为余乘积，记 $S$为对跖映射，并记 $\varepsilon$: $H \to R$为余单位。结构（$H$、 $\mu$、 $\Delta$、 $S$、 $\varepsilon$）是交换的，并按合并节点的数量分次。我们构造其句法链复形

$$C_\bullet(H): \qquad H^{\otimes 2} \xrightarrow{\Delta_2 - \Delta_1} H \oplus H \xrightarrow{\Delta} H \to 0, \tag{6.1}$$

它编码了句法推导的组合分解； $C_\bullet(H)$ 是$\mathbf{D}^+(\mathcal{E})$ 的一个对象。

应用对偶函子可得 $\mathbb{D}(H) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(H, R)$，即从 $H$ 到 $R$的态射所构成的内部 $R$-模。对于任意 Hopf 代数 $H$ 和交换代数 $R$，取值于 $R$ 的态射所构成的特征群满足

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hopf}}(H, R) \cong \{\varphi : H \to R \mid \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\}, \tag{6.2}$$

这由$\mathcal{E}$ 中 Hom 的泛性质以及 $\mu, \Delta$ 的乘法性得出。因此， $\mathbb{D}(H)$ 的对象与 [MBC23]意义下句法推导的语义解释一一对应。因此，语义层自然地作为句法 Hopf 对象的伦理对偶产生。

现在我们证明 $\mathbb{D}$ 满足罗塔–巴克斯特恒等式。对于自同态$x, y \in \mathrm{End}_{\mathcal{E}}(H)$, Hom 的复合规则蕴含

$$\mathbb{D}(x)\mathbb{D}(y) = \mathbb{D}(\mathbb{D}(x)y) + \mathbb{D}(x\mathbb{D}(y)) - \mathbb{D}(xy), \tag{6.3}$$

这就是权为 $\lambda = -1$ [Guo12] 的罗塔–巴克斯特恒等式。因此， $\mathbb{D}$ 充当一个规范的罗塔–巴克斯特算子 $P: R \to R$。由 $\mathbb{D}$ 定义的伦理投影将任意态射 $\varphi: H \to R$ 分解为其正合部分与缺陷部分。

考虑 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(H, R)$ 上的卷积乘积，

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(h) = \mu_R\Big((\varphi_1 \otimes \varphi_2)\Delta(h)\Big), \tag{6.4}$$

其中 $\mu_R$ 是 $R$中的乘法。伦理分解 $\mathbb{D}^2(\varphi)\eta = \eta\varphi$ 导出一个 Birkhoff 分解

$$\varphi = \varphi_-^{-1} * \varphi_+, \tag{6.5}$$

其中 $\varphi_+$ 满足 $\mathbb{D}^2(\varphi_+)\eta = \eta\varphi_+$。这正是用于重整化 [CK98] 以及代数句法—语义模型 [MBC23]的 Connes– Kreimer Birkhoff 分解的精确对应。

**定理 6.58**。 设 $H$ 是 $E$ 中的 *Hopf* 对象， $R$ 是资源代数。对于任意特征 $\varphi$ : $H \to R$ ，存在唯一的态射 $\varphi_+$ 和 $\varphi_-$ ，属于 $\mathbb{D}(H)$ ，使得

*1.* $\varphi = \varphi_-^{-1} * \varphi_+$*; 2.* $\varphi_+$ 是伦理精确的: $\mathbb{D}^2(\varphi_+)\eta = \eta\varphi_+$*; 3.* $H^1\mathbf{D}(C_\bullet(H)) \cong \ker(\varphi_+) \cap \mathrm{im}(\varphi_-)$。

证明。 前两项由 Rota–Baxter 代数中 Birkhoff 分解的标准存在性和唯一性得出 [Guo12]。第三个陈述则是将 $\mathbf{D}$ 作用于链复形$C_\bullet(H)$，并应用其上同调中的长正合列得出的；上同调 $H^1$ 测量对偶映射 $\varphi_+$ 的不正合性，因而识别缺陷 $\varphi_-$ 的像与伦理部分 $\varphi_+$的核之间的交叠。

□

将语义过程的伦理记忆定义为 $M = H^1\mathbf{D}(C_\bullet(H))$。其挠子群 $\mathrm{tors}\, M$ 量化残余语义歧义：非平凡元素对应于依赖推导历史的意义成分。伦理熵为 $S_{\mathrm{eth}} = \log |\mathrm{tors}\ M|$。根据伦理记忆的单调衰减定理，迭代句法组合会降低伦理熵，

$$S_{\mathrm{eth}}(t+1) \le S_{\mathrm{eth}}(t), \tag{6.6}$$

表达连续的诠释如何趋向伦理相干性。当 $H^1\mathbf{D}(C_\bullet(H)) = 0$ 时，语义态射与句法态射在对偶性意义下相一致： $\mathbb{D}^2(\varphi)\eta = \eta\varphi$。这种状态对应于完全的语义相干性。

结构定理给出了语义精确度的定量度量：挠群 $|\mathrm{tors}\, H^1\mathbf{D}|$ 的阶，就是重整化后剩余歧义的代数规模。该群消失意味着语义完全符合伦理（相干）。

从哲学角度看，这一结果改变了语义的地位。语义并非句法的外部诠释，而是由同一范畴资源结构决定的自反对偶 $\mathbb{D}(H)$。意义成为伦理对偶的内在不变量：语义相干性对应于导出障碍$H^1\mathbf{D}$的消失，而诠释过程就是抹除这一障碍的导出流。歧义、惯用语转变和语境敏感性表现为 $H^1\mathbf{D}$ 中可测量的挠类；而理解与意义形成，则对应于对偶复形在伦理心 $\heartsuit_{\mathrm{eth}} \subset D^+(\mathcal{E})$ 中的稳定。

### 6.4.3 散射

现在，我们将散射表述为感知–伦理对的范畴化表述，并说明经典 Born 近似和 Lippmann–Schwinger 方程如何源自同一普适感知定律。全文中，$\mathcal{E}$ 和$\mathcal{F}$ 表示以阿贝尔群范畴 Ab 为丰的阿贝尔范畴。$\mathcal{E}$ 中的对象表示源态（入射场），而$\mathcal{F}$ 中的对象表示可观测构型（出射场）。固定波数 $k > 0$ 决定背景传播子 $G_k(x - y) =$

$(4\pi)^{-1}e^{ik|x-y|}/|x-y|$。相互作用势 $V$是$\mathcal{E}$中的一个对象，作为源态上的自同态发挥作用。

定义感知核

$$K : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{Ab}, \qquad K(E,F) \;=\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\Big(G_k \otimes E,\, F\Big) \otimes_{\mathsf{Ab}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E,V),$$

将其解释为一个 pro函子，用于编码源通过介质 $V$的显现。其卷积幂 $K^{\star n}$ 表示 $V$与传播子 $G_k$的多次相互作用，而 pro函子范畴中的复合则刻画多重散射。感知实现函子是余端

$$\mathbf{A}(A) \;=\; \int^{E \in \mathcal{E}} K(E,-) \otimes \mathcal{E}(E,A),$$

它通过导出卷积级数作用于入射态 $\phi_0 \in \mathcal{E}$

$$\mathbf{A}(\phi_0) \;=\; \sum_{n \geq 0} K^{\star n} \phi_0,$$

将其解释为总显现场。典范映射 $\iota_{E,A}:\; K(E,-) \otimes \mathcal{E}(E,A) \;\to \mathbf{A}(A)$ 满足余端的泛性质，而自然变换

$$\alpha_A : \mathbf{A}(A) \longrightarrow A, \qquad \alpha_A \circ \iota_{E,A} = \Big\langle K(E,-) \otimes \mathcal{E}(E,A) \xrightarrow{\mathrm{ev}} A \Big\rangle$$

在显现的求值或“观测”中发挥作用。定义 $\mu_K : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$为复合 $\alpha \circ \mathbf{A}$；它表示通过 $K$ 发生的一次散射事件的作用。

**定理 6.59 (普适感知散射定律)。** 对于任意源 $A \in \mathcal{E}$ 和任意自由场 $\eta_{\phi_0} \in \mathcal{F}$，观测构型 $\psi \in \mathcal{F}$ 满足普适方程

$$\psi \;=\; \eta_{\phi_0} \;+\; \mu_K(\psi), \qquad \textit{or equivalently} \qquad (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} - \mu_K)\psi \;=\; \eta_{\phi_0}.$$

若 $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} - \mu_K$ 在 $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ 中可逆，则解唯一，且由 $\psi = (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} - \mu_K)^{-1}\eta_{\phi_0}$ 给出，其形式纽曼展开为 $\psi = \sum_{n \geq 0} \mu_K^n(\eta_{\phi_0})$。

证明。 根据构造，态射 $\alpha_A$ 将一种感知显现退化回 $A$，而余端余自然性意味着，总域与其在 $\mu_K$ 下的像相差自由分量 $\eta_{\phi_0}$。根据关于 $K$ 的标准谱假设，$(\mathrm{id} - \mu_K)$ 可逆；纽曼展开则表达了 $V$ 经由 $G_k$ 的一系列连续显现。

□

定理 6.59 完全是范畴论的，不需要解析假设。当 pro函子 $K$ 是核可表的，也就是说，存在一个对象 $\mathcal{K} \in \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{F}$，使得

$$K(E,F) \;\simeq\; \mathcal{F}(\mathcal{K} \otimes E, F) \quad \text{naturally in } (E,F),$$

感知函子化简为$\mathbf{A}(A) \;\simeq \mathcal{K} \otimes A$，而 $\mu_K$ 通过求值$\mathcal{K} \otimes (-) \to (-)$作用。将其代入定理 6.59，可得核形式

$$\psi \;=\; \eta_{\phi_0} \;+\; \mathcal{K} \otimes \psi,$$

其在$\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^3)$中的解析实现（核为$K(x,\ y) = G_k(x-y)V(y)$）成为经典积分方程

$$\psi(x) \;=\; \phi_0(x) \;+\; \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\, V(y)\,\psi(y)\,dy,$$

即 Lippmann–Schwinger 方程 [LS50, RS79]。在这一可表表示的情形下，同调塔 $H_n\mathbf{A} \simeq K^{\star n}\phi_0$ 重现玻恩级数 [Bor26, CK13, KG08]。

**定理 6.60**（感知玻恩定理）。设 $E = F = L^{2,s}(\mathbb{R}^3)$ $(s > 1/2)$ 且 $V \in L^{3/2,1}(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，其中 $\|V\|_{L^{3/2,1}}$ 足够小，使得 $\|K\| \le \eta < 1$ 对于 $(Kf)(x) = \int G_k(x-y)V(y)f(y)\,dy$。那么 $A(\phi_0) = \sum_{n\ge 0} K^{\star n}\phi_0$ 在 $L^{2,s}$ 中收敛，且第一层

$$(H_1\mathbf{A}\,\phi_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\, V(y)\,\phi_0(y)\,dy$$

具有渐近振幅

$$f_{\mathrm{Born}}(\hat{x},\hat{d}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik\hat{x}\cdot y}\,V(y)\,e^{ik\hat{d}\cdot y}\,dy = \frac{1}{4\pi}\,\widehat{V}\big(k(\hat{d}-\hat{x})\big),$$

而余项 $R_2(x) = \sum_{n\ge 2} K^{\star n}\phi_0(x)$ 满足 $\|R_2\|_{L^{2,s}} \le C(k)\|V\|_{L^{3/2,1}}^2$ [Agm75, IS68, RS79]。

*证明。* 由于 $\|K\| \le \eta < 1$，$(\mathrm{id}-K)^{-1}$ 的纽曼展开在 $\mathcal{B}(L^{2,\,s})$ 中收敛，从而得到 $\mathbf{A}(\phi_0) = \sum_{n\ge 0} K^{\star n}\phi_0$ 以及 $H_n\mathbf{A} = K^{\star n}\phi_0$。远场渐近由 $G_k$ 的驻相展开得出；代入 $\phi_0(y) = e^{ik\hat{d}\cdot y}$ 即得到所示的玻恩振幅。余项估计由 $\|K^{\star n}\| \le \eta^n$ 和 $\eta \lesssim \|V\|_{L^{3/2,\,1}}$ [CK13、RS79] 得出。 $\square$

将定理 6.59 的普适定律通过伴随 $\mathbf{A} \dashv \mathbf{D}$ 传递，得到伦理对偶条件

$$\mathbf{D}^2(\psi)\,\eta_{\phi_0} \;=\; \eta_{\mathbf{A}(\phi_0)}\,\psi,$$

在核可表示性条件下，它具有上述 Lippmann–Schwinger 方程的解析形式。因此，由 $H_1\mathbf{A}$ 和 Lippmann–Schwinger 自洽关系推导出的感知玻恩公式，是同一范畴律的两种对偶显现：感知函子根据势生成域，而伦理函子则确保它与该势相容。在对称介质（$K^\dagger \simeq K$）中，塔 $\{H_n\mathbf{A}\}$ 和 $\{H^n\mathbf{D}\}$ 逐阶重合；而在吸收介质或非厄米情形下，它们的失配则体现了相干性损失，以及显现与反映之间的不对称性。

### 6.4.4 编码理论

我们固定两个带有博雷尔 σ-代数的可测空间 $(X,\ \Sigma_X)$ 和 $(Y,\ \Sigma_Y)$。令 $\mathrm{Prob}(X)$ 和 $\mathrm{Prob}(Y)$ 分别表示 $X$ 和 $Y$ 上所有博雷尔概率测度的集合。信道是一个马尔可夫核 $W\colon X \rightsquigarrow Y$，即一个映射 $x \mapsto W(\cdot|x) \in \mathrm{Prob}(Y)$

在 $(x,\ B)$ 中可测。对于每个信道，我们记 $\mathcal{E}_W$ 为源范畴——其对象是对 $(X,\ P_X)$，态射由马尔可夫算子 $T\colon \mathsf{Prob}(X) \to \mathsf{Prob}(X')$ 给出；记 $\mathcal{F}_W$ 为观测范畴——其对象是对 $(Y,\ P_Y)$，态射由类似的随机算子给出。复合通过对核积分定义，并由托内利–富比尼定理保证定义良好 [Bog07], [Kal02]。

对于对象 $(X,\ P_X) \in \mathcal{E}_W$、$(Y,\ P_Y) \in \mathcal{F}_W$，将感知核定义为

$$K_W((X,P_X),(Y,P_Y)) = \Big\{ f \in L^1(P_X \otimes P_Y) :\ f(x,y) \geq 0,\ \int f(x,y)\, P_Y(dy) = 1 \text{ for } P_X\text{–a.e. } x \Big\}.$$

$K_W$ 的一个典范元素是似然密度 $\ell_W(x,\ y) = \frac{dW}{dP_Y}(\cdot\,|x)(y)$，只要 $W(\cdot\,|x) \ll P_Y$ $P_X$–几乎处处成立。于是，核 $K_W$ 编码了信息的前向显现：从源分布 $P_X$ 到输出 $P_Y = \int W(\cdot|x) P_X(dx)$。

感知函子 $\mathbf{A}_W : \mathcal{E}_W \to \mathcal{F}_W$ 作用于 $P_X \in \mathsf{Prob}(X)$ 上，定义为

$$(\mathbf{A}_W P_X)(B) = \int_X W(B|x) P_X(dx),$$

也就是说，这是通过信道的推前（见 [CK11], [Gra11]）。迭代 $\mathbf{A}_W$ 对应于级联的独立信道使用：$\mathbf{A}_W^n P_X$ 是 $n$ 重输出分布。

固定一个伦理模型 $Q :\ Y \rightsquigarrow X$，它可能不同于 $W$；在贝叶斯语言中，$Q$ 是候选后验分布 $Q_{X|Y}$。伦理函子 $\mathbf{D}^Q : \mathcal{F}_W \to \mathcal{E}_W$ 充当条件重构

$$(\mathbf{D}_Q P_Y)(A) = \int_Y Q(A|y) P_Y(dy),$$

根据解体定理[Bog07]，正则条件概率下的定义是良好的。一般而言，$\mathbf{A}_W$ 和 $\mathbf{D}^Q$ 并非伴随：$W$ 与 $Q$ 之间的分歧量化了感知传播与伦理重构之间的不对称性。

对于固定的 $(W, P_X, P_Y)$，定义感知巴复形如下：

$$A_n = L^1(X^n \times Y,\, P_X^{\otimes n} \otimes P_Y), \qquad (\partial f)(x_{1:n-1}, y) = \int_X f(x_{1:n-1}, x_n, y) W(dy|x_n) P_X(dx_n),$$

并定义伦理余巴复形如下：

$$D^n = L^\infty(X^n \times Y,\, Q_X^{\otimes n} \otimes P_Y), \qquad (\delta g)(x_{1:n}, y) = g(x_{1:n-1}, y) - \int_X g(x_{2:n}, x', y) Q(dx'|y).$$

映射 $\partial^2 = 0$, $\delta^2 = 0$ 由核复合的结合律和托内利定理 [Kal02] 得出。它们的同调群和上同调群，

$$H_n(\mathbf{A}_W) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}, \qquad H^n(\mathbf{D}_Q) = \ker \delta^n / \operatorname{im} \delta^{n-1},$$

衡量信道及其重构的非幂等性所对应的连续次数。对于可测的 $f \in A_n$、$g \in D^n$，定义

$$\langle f, g \rangle = \int f(x_{1:n}, y)\, g(x_{1:n}, y) \prod_{i=1}^{n} \frac{dW(\,\cdot\,|x_i)}{dQ(\,\cdot\,|x_i)}(y)\, P_X^{\otimes n}(dx_{1:n}) P_Y(dy),$$

只要 Radon–Nikodym导数存在于 $L^{\alpha}(P_Y)$ 中，且对某个 $\alpha>1$ 成立。那么， $\partial$ 和 $\delta$ 在形式上互为伴随，差一个缺陷算子 $\mathfrak{o}_n:=\partial\delta+\delta\partial$，该算子取决于 $W$ 与 $Q$ 之间的散度。

对于长度为 $n$ 、码率为 $R$ 的分组码，平均错误概率满足

$$P_e^{(n)} \;\geq\; \|\mathfrak{o}_n\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 Bochner $L^2$ 空间中的算子范数；这由贝叶斯错误的变分表示和 Neyman–Pearson引理 [PPV10] 得出。范数 $\|\mathfrak{o}_n\|$ 等于零，当且仅当 $\mathbf{A}_W$ 与 $\mathbf{D}^{Q}$ 完全伴随，即模型 $Q$ 与真实信道 $W$ 相匹配。

**定理6.61** （强球面打包作为审美–伦理散度）。 设 $(X,Y)$ 为标准*Borel*空间，且 $W:X\rightsquigarrow Y$ 是具有有限输入字母表和可测核的信道。则存在仅依赖于 $W$ 的 $\gamma>0$ ，使得对于任意一列 $(n,R_n)$ 码，只要 $\liminf R_n>C_{\mathrm{sp}}(W)$ ，就有

$$\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} \;\geq\; 1-e^{-\gamma n}.$$

等价地，若块码率超过球面打包阈值，链复形$\mathbf{A}_\bullet$ 仍具有非零同调，其阶为 $n$ ，指数权重为 $\|\mathfrak{o}_n\|\approx e^{-nE_{\mathrm{sp}}(R)}$。

证明。 根据错误指数的变分公式 [CK11]，平均错误满足

$$P_e^{(n)} \geq \inf_{Q_Y} \exp\Big(-nE_{\mathrm{sp}}(R;W,Q_Y)\Big),$$

其中， $E_{\mathrm{sp}}$ 是球面打包指数。由比较配对计算得到的 $\mathfrak{o}_n$的 $L^2$–范数中也出现了相同的线性泛函，这里使用了 Hölder–Orlicz不等式和指数倾斜 $dW_\lambda(y|x)$ $\propto e^{\lambda i(x;y)}dW(y|x)$， $i(x;y)=\log \frac{dW}{(\cdot|x)\,dQ_Y}$。带权 $e^{-nE_{\mathrm{sp}}}$ 的 $H_n(\mathbf{A}_W)$不消失，对应于错误的持久性；若$R>C_{\mathrm{sp}}$，这些类会在无限多个 $n$中保持非零，从而迫使 $\liminf P_e^{(n)}\geq 1-e^{-\gamma n}$。解析细节见 [CK11] 和 [Gal68]。 □

**定理6.62** （失配容量作为上同调极限）。 令 $W:X\rightsquigarrow Y$，并固定一个伦理解码器核 $Q:Y\rightsquigarrow X$。定义广义互信息

$$I_Q(X;Y)=\sup_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}\Big[\log \mathbb{E}\Big(e^{\lambda\,\imath_Q(X;Y)}\;\Big|\;X\Big)\Big],\qquad \imath_Q(x;y)=\log\frac{dW(\,\cdot\,|x)}{d\bar{Q}(\,\cdot\,)}(y),$$

其中， $\bar{Q}$ 是 $Q$ 在 $Y$上的任意边缘分布。则在解码器 $Q$ 下以误差趋于零实现的最大码率满足

$$C_{\mathrm{mm}}(W,Q)=\sup_{P_X} I_Q(X;Y),$$

且对于 $R>C_{\mathrm{mm}}(W,Q)$，存在 $\eta>0$使得 下极限$_n\,P_e^{(n)}\geq 1-e^{-\eta n}$。此外，$R\leq C_{\mathrm{mm}}(W,Q)$ 当且仅当 上极限$_n\,\frac{1}{n}$对数 $\|H^1(\mathbf{D}_Q^{(n)})\|\leq 0$。

证明。 $C_{\mathrm{mm}}(W,\ Q)$ 的表达式是经典的 GMI公式 [Lap96], [ML96]。在当前框架下， $\|H^1(\mathbf{D}_Q^{(n)})\|$ 度量了解码器余条复形的剩余上同调：根据比较配对 $\|H^1\| = \|\mathfrak{o}_n\|$。对于 $R > C_{\mathrm{mm}}$， $\|\mathfrak{o}_n\|$ 的指数严格为正，因此得到 $\|\mathfrak{o}_n\| \geq e^{-\eta n}$，进而得到强逆定理。如果 $R < C_{\mathrm{mm}}$， $\|\mathfrak{o}_n\|$ 的指数衰减意味着 $H^1$ 消失且解码可靠。这重现了失配容量定理及其强逆定理[ML96], [CK11]。

□

这两个定理表达了编码理论的主要极限——球形打包和失配容量——即源于前向（感知）核与后向（伦理）核之间散度的同调类或上同调类的持久性。当 $Q = W$时，比较缺陷 $\mathfrak{o}_\bullet$ 消失，复形变为对偶，并恢复经典的香农容量定理 [Gal68], [CK11]。一般而言，非伴随对（$\mathbf{A}_W$、$\mathbf{D}_Q$）量化了编码与解码之间的相干性损失；其同调量给出了从解析信息论中已知的指数错误指数，但在此处则是从测度、核以及余端/端的结构出发，以范畴论方式推导出来的。

### 6.4.5 贝尔曼对偶

固定一个具有足够多内射对象的阿贝尔范畴$\mathcal{E}$ 以及一个特选的资源对象$R \in \mathcal{E}$。令 $\mathbb{D} = \mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(-,\ R)$ 和 $\mathbf{D} = \mathbf{RHom}_{\mathcal{E}}(-,\ R)$，其单位为 $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathbb{D}^2$。在本小节中，强化学习的概率或组合数据均编码于$\mathcal{E}$中；下述定理首先纯粹属于范畴论范畴，之后可通过标准的向经典贝尔曼方程的解析化约而得到经典贝尔曼理论[Bel57,BT96, Put94]。

**定义 6.63** （范畴论马尔可夫决策过程数据）。 范畴论马尔可夫决策数据是$\mathcal{E}$ 中的三元组 $(S, P, r)$，其中 $S \in \mathcal{E}$ 是状态对象， $P\colon\ S \to S$ 是动作—转移自同态（可以将其理解为经过选定线性化后得到的马尔可夫核或策略—转移算子），而 $r : S \to R$ 是奖励态射。折扣因子是一个标量 $\gamma \in \mathbf{End}_{\mathcal{E}}(R)$，其中 $\|\gamma\| < 1$ 属于解析约化；在范畴论中，我们只要求 $\gamma$ 在态射群上中心作用。定义贝尔曼态射 $B_{(P,r,\gamma)} : S \to \mathbb{D}(S)$ 如下：

$$B \ :=\ r \ \oplus\ \gamma \cdot \mathbb{D}(P) \circ \mathrm{coev}_S,$$

其中 $\mathrm{coev}_S\colon\ R \to S \oplus \mathbb{D}(S)$ 是由 $\mathbb{D}$ 确定的典范余评价（在$\mathcal{E}$中，若存在，这就是$\mathbf{C} \dashv \mathbf{D}$ 伴随的单位；或者是 $\eta$ 在典范识别 $\mathbb{D}(S) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(S, R)$ 下的像）。

贝尔曼态射将通常的仿射算子 $v \mapsto r + \gamma P v$ 封装为一个单一箭头 $S \to \mathbb{D}(S)$；它通过 $\mathbb{D}$在 $r$ 上协变作用，并在 $P$ 上逆变作用。

**定义 6.64** （伦理价值对象）。 配备了一个态射$u\colon\ S \to V$的对象 $V \in \mathcal{E}$，如果存在一个态射 $v\colon\ V \to R$使得 $B$ 可分解为 $S \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} R$，即 $B = v \circ u$，则称其为 $(S,\ P,\ r)$ 的价值呈现。偶对 $(V,\ u)$ 是伦理精确的

当 $(S,\ P,\ r)$ 的伦理贝尔曼方块

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathbb{D}(V) \\ {\scriptstyle \eta_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}^2(u)} \\ \mathbb{D}^2(S) & \xrightarrow[\mathbb{D}(B)]{} & \mathbb{D}^2(\mathbb{D}(S)) \end{array}$$

在 $\mathcal{E}$ 中交换（或在应用固定的内射分辨率后，于 $D^+(\mathcal{E})$ 中交换）。

该方块表明，通过 $\eta_S$ 将 $S$ 评价到其双对偶中，再进行 $B$ 反射，等同于将 $S$ 推入 $\mathbb{D}(V)$，并沿 $u$ 进行两次反射。这是贝尔曼不动点的范畴论影像。

**引理 6.65**（伦理贝尔曼恒等式）。若 $(V、\ u)$ 对 $(S、\ P、\ r)$ 是伦理精确的，则存在唯一的 $v:\ V \to R$，使得

$$\mathbb{D}^2(u) \circ \eta_S \ = \ \mathbb{D}(v \circ u) \circ \eta_S \qquad and\ hence \qquad u \ = \ \mathbb{D}(v) \circ \eta_S$$

在 $(E\ \mathbb{D})$ 的伦理心上（即在自反对象上对 $\eta$ 求逆之后）。等价地，$u$ 是仿射自同态 $X \mapsto \mathbb{D}(v) \circ \eta_S$ 的不动点。

证明。伦理贝尔曼方块的交换性给出 $\mathbb{D}^2(u)\eta_S = \mathbb{D}(B)\eta_S = \mathbb{D}(v \circ u)\eta_S$。在自反子范畴 $\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}$ 上，单位 $\eta$ 是同构，因此 $\mathbb{D}^2(u) = \mathbb{D}(v \circ u)$。应用 $\mathbb{D}$ 并使用双对偶识别，得到 $u = \mathbb{D}(v) \circ \eta_S$。$v$ 的唯一性由米田识别 $\mathrm{Hom}(V, R) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(V)\ \mathbb{D}(R))$ 以及 $\mathbb{D}$ 在 $\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}$ 上的忠实性推出。 □

**定理 6.66**（范畴贝尔曼方程）。设 $(S, P, r)$ 是范畴论马尔可夫决策过程数据。假设存在一个价值呈现 $(V, u)$，它对于 $(S, P, r)$ 是伦理精确的。那么存在唯一的 $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(V, R)$，使得

$$u \ = \ \mathbb{D}(r) \circ \eta_S \ + \ \gamma \cdot \mathbb{D}(P) \circ u,$$

也就是说，$u$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(S, \mathbb{D}(S))$ 中满足范畴贝尔曼不动点方程。反过来，任何满足该方程的 $u$ 都会使 $(V, u)$ 成为伦理精确的。

证明。由引理 6.65 可得 $u = \mathbb{D}(v) \circ \eta_S$。因式分解 $B = v \circ u$ 根据 $B$ 的定义给出：

$$\mathbb{D}(v) \circ \eta_S \ = \ \mathbb{D}(r) \circ \eta_S + \gamma \cdot \mathbb{D}(P) \circ \mathbb{D}(v) \circ \eta_S,$$

这就是所展示的恒等式。反过来，如果 $u$ 满足该恒等式，那么根据函子性以及 $\eta$ 的自然性，$\mathbb{D}^2(u)\eta_S = \mathbb{D}(B)\eta_S$，因此伦理方块交换。 □

**引理 6.67**（贝尔曼障碍塔）。考虑 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(S, \mathbb{D}(S))$ 以及仿射自同态 $T(u) := \mathbb{D}(r) \circ \eta_S + \gamma \cdot \mathbb{D}(P) \circ u$。在 $D^+(E)$ 中，存在一个 *Postnikov* 塔 [*Pos52*、*Whi49*、*Nee01*]，对应于 $T$ 的锥 $u - T(u)$，其逐级障碍位于

$$\mathrm{ob}_{k+1}(u) \ \in \ H^{k+1}\mathbf{D}(S) \ \cong \ \mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathcal{E}}(S, R).$$

所有 障碍$_k$ 均消失，当且仅当存在解 $u^*$，使其满足$(E\ \mathbb{D})$的伦理心中的范畴贝尔曼方程。

证明。 将 $\mathbf{D}$ 应用于特异三角 $\mathrm{Cone}(u-\mathcal{T}(u)) \to 0 \to S \xrightarrow{u-\pi(u)} \mathbb{D}(S)$，并利用沿 Postnikov 截断 [GM03], [BBD82]的标准障碍提升诠释。 □

**定义 6.68** （下中心滤过与 Mikhailov–Singh控制）。 设 $\mathsf{G}$ 是一个小幺半范畴（例如，关于复合的策略），作用于 $S$。记 $\gamma_1\mathsf{G} = \mathsf{G}$，并递归定义 $\gamma_{k+1}\mathsf{G} = [\mathsf{G}\ \gamma_k\mathsf{G}]$ 为其抽象下中心列。假设$S$ 带有相容的 $\mathsf{G}$–模结构，并记 $\mathrm{gr}_\gamma S := \bigoplus_{k\ge 1} \gamma_k S/\gamma_{k+1}S$。按照 [MS11]，伴随分次对象具有一个典范的李代数对象 $L = \mathrm{gr}_\gamma(\mathsf{G})$，它作用于 $\mathrm{gr}_\gamma S$；并且 $\gamma$–滤过与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(S,\ \mathbb{D}(S))$ 上诱导的 $L$–进滤过之间存在一个函子性比较。

**定理 6.69** （幂零控制下的有限步收敛）。 假设$\mathsf{G}$ 对 $S$ 的作用是步长为 $c$ 的 $\gamma$–幂零作用，即 $\gamma_{c+1}\mathsf{G}$ 在 $S$ 上平凡作用，并且 $r$ 是 $\gamma$–中心的。那么，范畴值迭代

$$u_{n+1} \;:=\; \mathbb{D}(r)\circ\eta_S \;+\; \gamma\cdot\mathbb{D}(P)\circ u_n, \qquad n\ge 0,$$

在 $(E\ \mathbb{D})$ 的伦理心中，最多经过 $c$ 步即可稳定，从而得到范畴贝尔曼方程的一个解。此外，唯一可能的障碍位于$H^{\le c}\mathbf{D}(S)$ 中，并沿着 $\gamma$–滤过归纳地消失。

证明。 仿射映射 $u \mapsto \mathbb{D}(r)\eta_S + \gamma\mathbb{D}(P)u$ 是 $\gamma$–滤过的：它与恒等映射的偏差至少会使 $\gamma$–次数提高一，因为 $\mathbb{D}(P)$ 可经由 $\gamma$–作用分解。在 $\gamma_{c+1}$–平凡性条件下，第 $(c{+}1)$ 阶偏差消失，因此迭代经过 $c$ 次修正后即告终止，且这些修正发生在伴随分次对象中。沿着滤过提升，可消去次数为 $1,\dots,c$的障碍类（每一步都利用下一个障碍位于下一个分次片这一事实），从而实现精确稳定。形式上的论证是由下中心列控制的标准幂零迭代，并将其转化到模对象 $S$ 上，如 [MS11] 中所述。 □

**推论 6.70** （高阶障碍的 Whitehead坍缩）。 如果 $\pi_k$（$\mathrm{Map}(S,\mathbb{D}(S)) = 0$ 对于 $2\le k\le c$ 而言，处于由 $\gamma$–幂零结构诱导的 *Whitehead*范围内（例如，通过与 $\gamma$相容的 *Postnikov* 塔截断），那么求解范畴贝尔曼方程的唯一障碍存在于 $H^1\mathbf{D}(S)$ 中，并且可在伴随分次对象上检测到。特别地，如果 $H^1\mathbf{D}(S) = 0$，那么 $u^*$ 存在且在伦理心中唯一。 *[Whi49，Pos52]*

证明。 Postnikov 塔与 $\gamma$–滤过的相容性，根据所假定的 Whitehead范围，导致高阶障碍$_k$ 消失；唯一性由伦理 $t$–结构论证得到（心是阿贝尔群范畴且 $\eta$–自反的）。 □

**定理 6.71** （向经典贝尔曼方程的解析化约）。 假设 $E = \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$、$R=\mathbb{R}$、$\mathbb{D} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(-、\ \mathbb{R})$，$P$ 是价值函数赋范空间上的随机线性算子，$r \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(S、\ \mathbb{R})$ 有界，且 $\gamma \in (0,\ 1)$。则定理 *6.66* 的范畴贝尔曼方程化约为经典标量贝尔曼方程

$$v \;=\; r \;+\; \gamma\, Pv,$$

关于 $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(S、\ \mathbb{R})$，根据巴拿赫不动点定理*[BT96], [Put94]*，它具有唯一解。此外，范畴价值迭代与标准价值迭代一致，并且呈几何收敛。

证明。 在 $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ 中，单位 $\eta$ 是典范求值同构，而 $\mathbb{D}(P) = P^{\top}$ 在 $S$ 赋予标准对偶后，与 $P$ 相同。算子 $u \mapsto \mathbb{D}(r)\eta_S + \gamma \mathbb{D}(P)u$ 在 $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(S, \mathbb{R})$ 上变为 $v \mapsto r + \gamma P v$。在 $\gamma \in (0, 1)$ 上关于上确界范数的压缩性保证了唯一性和几何收敛 [BT96, Put94]。 □

**定理 6.72** (混合强化学习+整数线性规划，具有有限步稳定性)。 设 $E = \text{模-}\mathbb{Z}^{\mathrm{fg}} \times \textbf{有限维向量空间}_{\mathbb{R}}$ 编码了一个混合决策模型，其中整数可行性约束通过有限生成的移动幺半群 $G$ 作用于 $\mathbb{Z}$–分量，而 $P$ 则随机地作用于 $\mathbb{R}$–分量。假设 $G$–作用是步长为 $c$ 的 $\gamma$–幂零作用，且实分量满足定理 *6.71* 的条件。那么，范畴值迭代收敛，并在整数侧至多经过 $c$ 次策略提升后稳定，同时在实数侧收缩。特别地，若 $\mathrm{Ext}^{\leq c}_{\mathbb{Z}}(S_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = 0$，则混合贝尔曼方程有唯一解。

证明。 乘积范畴使 Ext 按分量解耦， $\mathbb{R}$–侧收缩（定理 6.71），而 $\mathbb{Z}$–侧至多经过 $c$ 步便会根据定理 6.69 稳定。整数侧的障碍消失由所述 Ext 假设保证（例如，相关短正合列中的余核无挠）。 □

注记 6.73（与面约化和经典强化学习的比较）。 幂零控制定理 6.69 提供了一个由结构性下中心滤过驱动的有限步终止证书；标准面约化或经典贝尔曼理论中并无此类证书，后者虽能提供可行性与收缩性，却无法实现函子性有限步稳定。引理 6.67 所述的障碍演算将贝尔曼方程求解失败的原因定位到具体的 Ext 层，这是经典情形中所没有的同调精细化。

**定理 6.74** （策略改进即怀特海德提升）。 设 $\Pi$ 是一个作用于 $S$ 的策略小范畴，并将 $\pi \in \Pi$ 下的转移记为 $P_\pi$。假设 $\Pi$ 存在一个怀特海德塔 $\Pi \to \cdots \to \Pi^{(2)} \to \Pi^{(1)}$，使得其在 $u_\pi$–解上诱导的塔在第 $N$ 阶后截断。那么，任何与该塔相容的策略改进序列 $\pi_0, \pi_1, \ldots$ 都能提升并在至多 $N$ 阶后稳定，且终端值 $u_{\pi^*}$ 满足关于 $P_{\pi^*}$ 的范畴贝尔曼方程。*[Whi49, Pos52]*

证明。 沿着塔，每次提升都会消除下一个障碍类；在 $N$ 之后截断意味着所有高阶障碍都消失了。定理 6.66 在终端阶段求解范畴贝尔曼方程。 □

### 6.4.6 草图化

我们考虑一个紧致度量空间 $X \subset \mathbb{R}^d$ 以及一个由半径为 $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n \to 0$ 的 $\varepsilon$–网组成的嵌套序列 $\{S_n\}_{n \geq 0}$。每个 $S_n$ 都会产生一个由矩阵 $A_n \in \mathbb{Z}^{r_n \times m_n}$ 表示的离散线性草图，该矩阵作用于参数向量 $u \in \mathbb{Z}^{m_n}$。第 $n$ 层的道德模块定义为

$$X_n = \mathrm{coker}(A_n : \mathbb{Z}^{m_n} \to \mathbb{Z}^{r_n}), \qquad G_n = I^n X / I^{n+1} X \simeq \ker(A_{n+1} \to A_n),$$

使得 $0 \to G_n \to X_{n+1} \to X_n \to 0$ 是正合的。伦理对偶函子 $\mathbf{D} = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ 产生上同调群 $H^k\mathbf{D}(X_n) = \mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}}(X_n,\mathbb{Z})$。挠元大小

$$|\operatorname{tors}\,\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X_n,\mathbb{Z})| = \operatorname*{det}_{\mathrm{SNF}}(A_n)$$

量化了分辨率 $\varepsilon_n$ 下草图的残余不相干性；其对数 $\mathrm{Seth}_n = \log|\mathrm{tors}\ \mathrm{Ext}^1(X_n,\ \mathbb{Z})|$ 即为伦理熵。

**引理 6.75** (层控制)。 对于每个 $n$，短正合列 $0 \to G_n \to X_{n+1} \to X_n \to 0$ 都会导出以下正合片段：

$$\mathrm{Ext}^1(X_n,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha_n} \mathrm{Ext}^1(X_{n+1},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(G_n,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

因此，$|\mathrm{tors}\ \mathrm{Ext}^1(X_{n+1})| \le |\mathrm{tors}\ \mathrm{Ext}^1(X_n)|\,|\mathrm{tors}\ \mathrm{Ext}^2(G_n)|$.

证明。 将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\ \mathbb{Z})$作用于该序列，并转而考察导出函子，可得长正合列 $\cdots \to \mathrm{Ext}^1(X_n) \to \mathrm{Ext}^1(X_{n+1}) \to \mathrm{Ext}^2(G_n) \to 0$。取挠子群仍保持正合性，因此其基数满足相应的不等式。 $\square$

**引理 6.76** (分次层的矩阵估计)。 假设每个 $A_n$ 都是 $w$–稀疏的，且更新 $\Delta A_n = A_{n+1}\restriction_{S_n} - A_n$ 满足逐列利普希茨界 $\|\Delta A_n\|_{\mathrm{col}} \le L\,\varepsilon_n^{\alpha}$，其中 $L > 0$ 和 $\alpha > 0$ 为某些参数。设 $B_n$ 是 $G_n$ 的表示矩阵，它至多包含 $r'_n$ 个新增行，且每行最多支撑 $w$ 个条目。那么

$$\log|\operatorname{tors}\,\mathrm{Ext}^2(G_n,\mathbb{Z})| \le r'_n\Big(\tfrac{1}{2}\log w + \log(B_0 + L\,\varepsilon_n^{\alpha})\Big),$$

其中 $B_0 =$ 最大 $\|b^{(j)}$ 基$\|_\infty$ 是最大绝对基系数。

证明。 群挠子 $\mathrm{Ext}^2(G_n,\ \mathbb{Z}) \cong$ 余核的挠子 $\mathrm{coker}(B_n)$。对于 $B_n$ 的任意方形子矩阵$M$，史密斯标准形给出 $|$余核的挠子 $\mathrm{coker}(B_n)| \le$最大值 $|$行列式 $M|$。根据哈达玛不等式（[HJ90]），$|$行列式 $M| \le \prod_j \|b^{(j)}\|_2 \le (\sqrt{w}\,\|b^{(j)}\|_\infty)^{r'_n}$。利普希茨条件给出的 $\|\overline{b}^{(j)}\|_\infty$ 上界可得所需估计。 $\square$

**定理 6.77** (细粒度 $\varepsilon$–伦理相干性)。 在引理 *6.75–6.76* 的假设下，若 $X$ 的覆盖数满足 $r'_n \le C_d\Big(N(X,\varepsilon_{n+1}) - N(X,\varepsilon_n)\Big)$，其中常数 $C_d$ 仅取决于环境维数，则伦理熵增量满足

$$\mathrm{Seth}_{n+1} - \mathrm{Seth}_n \;\le\; C_d\,\Delta N_n\Big(\tfrac{1}{2}\log w + \log(B_0 + L\,\varepsilon_n^{\alpha})\Big),$$

$$\Delta N_n = N(X,\varepsilon_{n+1}) - N(X,\varepsilon_n).$$

因此，当 $\sum_n \Delta N_n \log(B_0 + L\varepsilon_n^{\alpha}) <$ 时，$\sum_n |\mathrm{Seth}_{n+1} - \mathrm{Seth}_n| < \infty$ $C$ $\infty$.

证明。 结合引理 6.75 与引理 6.76：

$$\mathrm{Seth}_{n+1} - \mathrm{Seth}_n \le \log|\operatorname{tors}\,\mathrm{Ext}^2(G_n)| \le r'_n\Big(\tfrac{1}{2}\log w + \log(B_0 + L\varepsilon_n^{\alpha})\Big).$$

代入 $r'_n$ 的覆盖估计，即可得到所述不等式。绝对可和性源于右侧加权级数的收敛性。 $\square$

**推论 6.78**（伦理—几何速率定律）。设 $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \theta^n$ 满足 $\theta \in (0,\ 1)$，并假设 $X$ 的有效覆盖维数为 $d_{\mathrm{eff}}$，使得 $N(X,\ \varepsilon) \simeq C\,\varepsilon^{-d_{\mathrm{eff}}}$。则

$$\mathrm{Seth}_{n+1} - \mathrm{Seth}_n \lesssim C'\,\theta^{-n d_{\mathrm{eff}}} \log(B_0 + L\,\varepsilon_0^{\alpha}\theta^{\alpha n}),$$

因此，只要 $\alpha > d_{\mathrm{eff}}^{-1}$，累积伦理记忆 $\sum_n (\mathrm{Seth}_{n+1} - \mathrm{Seth}_n)$ 就会收敛。

方程 (6.77) 给出了一个定量规律：每次细化分辨率 $\varepsilon_n$，伦理熵的降低幅度至多为右侧明确给出的预算。在实践中，这意味着离散草图的相干性恢复经验速率：更精细的网能提升对偶一致性，其速率由稀疏性 $w$、光滑性（$L,\ \alpha$）和几何复杂性 $d_{\mathrm{eff}}$ 决定。

# 讨论

本文的结果为阿贝尔环境和导出环境中的原始—对偶现象提供了统一的同调表述。其核心结构要素是反变函子

$$D = \mathrm{Hom}_E(-, R),$$

及其典范单位 $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow D^2$。由交换条件 $D^2(f)\ \eta = \eta\, f$ 定义的伦理态射，精确地确定了原始与对偶数据相一致的位置。转到导出范畴后得到函子$D = \mathbf{RHom}_E(-,\ R)$，其上同调群

$$H_k^D(A) \cong \mathrm{Ext}_E^k(A, R)$$

构成了偏离对偶自洽性的分次层级。从这一视角看，原始-对偶间隙恰好对应于 $\mathbf{Ext}^1$，，而更高阶的 $\mathbf{Ext}^k$ 则衡量更深层的障碍，例如多层记忆或不稳定性。相关的障碍塔记录了对偶一致性的所有失效，并且恰好在所有高阶导出障碍都消失时稳定下来。由此诱导的伦理 $t$-结构确定了一个心，其中的对象都能从其对偶中完美恢复；障碍塔的稳定等价于属于这个心。

该框架的一个关键特征是 Morita 不变性。由于所有构造都仅依赖于导出对偶对（$D^+(E)$，$\mathbf{RHom}_E(-,\ R)$），伦理不变量在导出等价下保持不变。这意味着，以这种语言表达的原始-对偶定律并不依赖于具体的基底——无论是算术、组合、几何还是语义基底——而只取决于环境中的对偶化对象及其函子性行为。

将这一框架与其他一般性的对偶性概念进行对比是很有启发性的。经典伴随描述的是一对函子，但无法量化自反性的失效，也无法提供分次障碍。幺半群对偶（紧闭范畴或 $*$-自对偶范畴中的求值／余求值对）编码了内在的代数对称性，却不会将同调不变量附加到相容性的违反上。Grothendieck–Verdier 对偶性和 Serre 对偶性提供了强大的几何对偶，但它们的障碍理论依赖于层论或上同调背景，并不独立于底层结构。

通过 Fenchel 共轭得到的凸对偶提供了原始—对偶对应，但缺少用于衡量正合性分层失效的导出塔。相比之下，伦理对偶是纯粹的代数的、函子性的和普适的：障碍层级 $\{\mathrm{Ext}_E^k(-,R)\}$ 提供了一个规范的、定量的原始—对偶不一致性谱，并且在任何具有对偶化对象的阿贝尔范畴中均成立。

这一同调视角阐明了多种对偶现象。在线性优化和锥优化中，强对偶恰好表现为 $\mathrm{Ext}^1$, 的消失，而代数对偶间隙则与这些群中的挠相一致。在图几何等离散情形中，Kirchhoff 型和 Baker–Norine 型恒等式体现为伦理正合性的实例。在动力系统中，导出障碍塔为持久性和记忆衰减提供了定量模型，其中 $\mathrm{Ext}^1$ 代表对偶重构的最小障碍，而更高层则编码长程效应。

这一框架也可扩展至复杂性理论背景。对 Karchmer–Wigderson 深度的同调转译，将有界深度下原始与对偶数据的协调解释为低次障碍最终消失。在标准一致性假设下，这便以第一导出障碍消失的形式，对 $P$与 $NP$ 给出了范畴论的另一种表述。

第 6 节所展示的应用仅体现了该框架在表示方面的广度，而非不同的机制。在优化、算术、图论、时间—内存模型和语义学中，所有示例都遵循同一原则：原始—对偶正合性等价于 $\mathrm{Ext}^1$, 消失，而所有高阶效应都对应于导出障碍塔的逐层结构。这些观察提示了若干自然的未来研究方向，包括 $\infty$-范畴论精化、与幺半结构的相互作用，以及

$*$-自对偶性，以及同调证书的计算用途。

# 参考文献

[AB09] Sanjeev Arora 和 Boaz Barak。《计算复杂性：一种现代方法》。剑桥大学出版社，2009年。[Agm75] S. Agmon。薛定谔算子与散射理论的谱性质。《比萨高等师范学院年刊》，2:151–218，1975年。[Ala90] Fadi Alameddine。社会选择模型中的一些无限倒退问题：一种范畴论解决方案。技术报告工作论文9016，克利夫兰联邦储备银行，1990年。[AM69] Michael Artin 和 Barry Mazur。《étale 同伦论》，数学讲义第100卷。施普林格，1969年。[Bar79] Michael Barr。《*-自主范畴》，数学讲义第752卷。施普林格，1979年。[BBD82] A. A. Beilinson、J. Bernstein 和 P. Deligne。《反常层》。《Astérisque》，100:5–171，1982年。

[BE10] Anders Björner 和 Torsten Ekedahl。论贝祖式的形状。载于《配置、局部系统与奇点》，数学进展丛书第283卷，第55–70页。Birkhäuser，2010年。关于关联代数和偏序集（上）同调的背景资料。[Bel57] Richard Bellman。《动态规划》。普林斯顿大学出版社，1957年。[Big93] Norman Biggs。《代数图论》。剑桥大学出版社，第2版，1993年。[BK72] A. K. Bousfield 和 D. M. Kan。《同伦极限、完备化与局部化》，数学讲义第304卷。施普林格，1972年。[BN07] Matthew Baker 和 Serguei Norine。有限图上的黎曼–罗赫定理与阿贝尔–雅可比理论。《数学进展》，215(2):766–788，2007年。[Bog07] Vladimir I. Bogachev。《测度论》。施普林格，2007年。[Bor26] M. Born。《碰撞过程的量子力学》。《物理学杂志》，37:863–867，1926年。[Bor94] Francis Borceux。《范畴代数手册》，第1–3卷。剑桥大学出版社，1994年。[Bro82] Kenneth S. Brown。《群上同调》，数学研究生教材第87卷。施普林格，纽约，1982年。[BT96] Dimitri P. Bertsekas 和 John N. Tsitsiklis。《神经动态规划》。Athena Scientific，1996年。[BW81] J. M. Borwein 和 H. Wolkowicz。抽象凸规划的正则化。《J. Math. Anal. Appl.》，83:495–530，1981年。[CK98] Alain Connes 和 Dirk Kreimer。霍普夫代数、重整化与非交换几何。《数学物理通讯》，199(1):203–242，1998年。[CK11] Imre Csiszár 和 János Körner。《信息论：离散无记忆系统的编码定理》。剑桥大学出版社，第2版，2011年。[CK13] D. Colton 和 R. Kress。《散射理论中的积分方程方法》。工业与应用数学学会，第2版，2013年。[Coo71] Stephen A. Cook。定理证明过程的复杂性。载于第三届年度 ACM计算理论研讨会（STOC）论文集，第151–158页，1971年。

[CR79] Stephen A. Cook 和 Robert A. Reckhow。命题证明系统的相对效率。《符号逻辑杂志》，44(1):36–50，1979年。[Dha90] Deepak Dhar。沙堆自动机模型的自组织临界态。Physica A，263(4):4–8，1990年。[Fag74] Ronald Fagin。广义一阶谱与可在多项式时间内识别的集合。《计算复杂性》，第43–73页，1974年。[For98] Robin Forman。胞腔复形的莫尔斯理论。《数学进展》，134(1):90–145，1998年。[Gab62] Pierre Gabriel。阿贝尔范畴。《法国数学会通报》，90:323–448，1962年。[Gal68] Robert G. Gallager。《信息论与可靠通信》。威利出版社，1968年。[Gir87] Jean-Yves Girard。线性逻辑。载于《理论计算机科学》，第50卷，第1–102页。Elsevier，1987年。[GM03] Sergei I. Gelfand 和 Yuri I. Manin。《同调代数方法》。施普林格，第2版，2003年。[Gra11] Robert M. Gray。《熵与信息论》。施普林格，第2版，2011年。[GRS97] Edward L. Green、Idun Reiten 和 Øyvind Solberg。Artin代数上同调的对偶性。《纯粹与应用代数杂志》，121(3):211–229，1997年。[Guo12] Li Guo。《Rota–Baxter 代数导论》。International Press，2012年。[HJ90] Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[Ill71] Luc Illusie。《余切复形与变形 I》，《数学讲义》第239卷。施普林格，1971年。[Imm86] Neil Immerman。可在多项式时间内计算的关系查询。《信息与控制》，68(1-3):86–104，1986年。[Imm99] Neil Immerman。《描述复杂性》。施普林格，1999年。[IS68] T. Ikebe 和 Y. Saito。薛定谔算子的极限吸收方法与绝对连续性。《京都大学数学杂志》，12(3):513–542，1968年。[Jan25] Martin Jankovec。带基点的阿贝尔 $\ell$-群的子簇。arXiv 预印本 arXiv:2509.05044，2025。

[Juk12] Stasys Jukna。《布尔函数复杂度：进展与前沿》，《算法与组合学》第27卷。施普林格，2012年。[Kal02] Olav Kallenberg。《现代概率论基础》。施普林格，第2版，2002年。[Kar72] Richard M. Karp。组合问题之间的可约性。《计算机计算复杂性》，第85–103页，1972年。[Kel82] G. M. Kelly。《富化范畴论基本概念》。剑桥大学出版社，1982年。[Kel94] Bernhard Keller。导出 DG 范畴。《高等师范科学年刊》，27(1):63–102，1994年。[KG08] A. Kirsch 和 N. Grinberg。《反问题的因子分解法》。牛津大学出版社，2008年。[Kir47] 古斯塔夫·基尔霍夫。论研究线性电流分布时所导出的方程组的求解。《物理与化学年鉴》，72:497–508，1847年。[Kon08] 马克西姆·孔采维奇。范畴与时间。载于《国际数学家大会》，2008年。关于范畴时间与记忆的讲义。[KW90] Mauricio Karchmer 和 Avi Wigderson。计算连通性所需的单调电路具有超对数深度。载于《第20届ACM年度计算理论研讨会论文集》（STOC），第539–550页。美国计算机协会，1990年。[Lan98] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》，《数学研究生教材》第5卷。施普林格，第2版，1998年。[Lap96] Amos Lapidoth。加性非高斯噪声信道的最近邻译码。《IEEE 信息论汇刊》，42(5):1520–1529，1996年。[Las02] Jean B. Lasserre。整数规划的对偶性与 Farkas 引理。《运筹学快报》，30(1):1–9，2002年。[Las03] Jean B. Lasserre。离散 Farkas 引理。《运筹学数学》，28(2):241–254，2003年。[Lei14] Tom Leinster。《范畴论基础》，《剑桥高等数学研究》第143卷。剑桥大学出版社，2014年。[Lev73] Leonid A. Levin。通用搜索问题。《信息传输问题》，9(3):265–266，1973年。[LS50] B. A. Lippmann 和 J. Schwinger。散射过程的变分原理。一。《物理评论》，79:469–480，1950年。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。https://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017年。预印本手稿。

[MBC23] Matilde Marcolli、Robert C. Berwick 和 Noam Chomsky。句法—语义接口：一种代数模型。arXiv预印本 arXiv:2311.06189，2023年。[Mil63] John Milnor。《莫尔斯理论》，数学年刊研究丛书第51卷。普林斯顿大学出版社，1963年。[ML96] Neri Merhav 和 Amos Lapidoth。失配在率失真理论中的作用。IEEE 信息论汇刊，42(6):1956–1968，1996年。[MS01] Ketan D. Mulmuley 和 Milind Sohoni。几何复杂性理论 I：一种研究 $p$ vs. $np$ 及相关问题的方法。SIAM计算杂志，31(2):496–526，2001年。[MS11] Roman Mikhailov 和 Manish Singh。关于群的下中心列与导出函子。纯粹与应用代数杂志，215(12):3006–3020，2011年。[Mul08] Ketan D. Mulmuley。几何复杂性理论 VI：通过饱和实现翻转。美国数学会杂志，21(1):137–212，2008年。[Nee01] Amnon Neeman。《三角范畴》。普林斯顿大学出版社，2001年。[Pat98] Gábor Pataki。关于半定规划中极端矩阵的秩以及最优特征值的重数。运筹学数学，23(2):339–358，1998年。[Pat13] Gábor Pataki。通过面约化实现锥规划中的强对偶。计算优化与应用，54(2):243–259，2013年。[PF79] Nicholas Pippenger 和 Michael J. Fischer。复杂度度量之间的关系。ACM杂志，26(2):361–381，1979年。[Pos52] M. M. Postnikov。单连通空间在稳定范围内的同伦群结构。苏联科学院通报，84:923–926，1952年。[PPV10] Yury Polyanskiy、H. Vincent Poor 和 Sergio Verdú。有限码长区间内的信道编码率。IEEE 信息论汇刊，56(5):2307–2359，2010年。[Put94] Martin L. Puterman。《马尔可夫决策过程：离散随机动态规划》。威利出版社，1994年。[Qui67] Daniel Quillen。《同伦代数》，数学讲义第43卷。施普林格，1967年。

[Ram97] M. Ramana。半定规划的精确对偶理论。《数学规划》，77(1):129–162，1997年。[Ric89] Jeremy Rickard。导出范畴的 Morita 理论。《伦敦数学学会杂志》，39(3):436–456，1989年。[Roc70] R. Tyrrell Rockafellar。《凸分析》。普林斯顿大学出版社，1970年。[RR97] Alexander A. Razborov 和 Steven Rudich。Natural Proofs。《计算机与系统科学杂志》，55(1):24–35，1997年。[RS79] M. Reed 和 B. Simon。《现代数学物理方法》第III卷：散射理论。学术出版社，1979年。[Sam53] Hans Samelson。李群的拓扑学。《美国数学会通报》，59:1119–1132，1953年。[Sch86] Alexander Schrijver。《线性与整数规划理论》。威利出版社，1986年。[Ser77] Jean-Pierre Serre。《树》。施普林格数学专著。施普林格，柏林，1977年。[Sip13] Michael Sipser。《计算理论导论》。圣智学习，第3版，2013年。[Toë07] Bertrand Toën。微分分次范畴的同伦论与导出 Morita 理论。《数学发明》，167(3):615–667，2007年。[Tut54] W. T. Tutte。对色多项式理论的贡献。《加拿大数学杂志》，6:80–91，1954年。[Val79] Leslie G. Valiant。代数中的完备性类。第11届年度ACM计算理论研讨会（STOC）论文集，249–261页，1979年。[Var82] Moshe Y. Vardi。关系查询语言的复杂度。第14届年度ACM计算理论研讨会（STOC）论文集，137–146页，1982年。[Ver67] Jean-Louis Verdier。《阿贝尔范畴的导出范畴》。巴黎大学，1967年。[Wei94] Charles A. Weibel。《同调代数导论》。剑桥大学出版社，1994年。[Whi49] J. H. C. Whitehead。组合同伦论 II。《美国数学会通报》，55:453–496，1949年。[Woo98] Daniel Woodcock。一些关联代数的上同调。纯粹与应用代数杂志，130(2):263–277，1998年。