arXiv:2512.17175v1 [math.CA] 19 Dec 2025

关于具有变指数的 Calder´on-Hardy 空间的一个注记

Pablo Rocha

2025年12月22日

摘要

在这篇短文中，我们改进了作者在 Math. Ineq. &appl., Vol. 19(3)(2016), 1013-1030] 中得到的定理 1 中出现的参数 q [。

记号与术语：

- 符号 $A \lesssim B$ 表示不等式 $A \leq cB$，其中c为某个正数常量；而$A \approx B$ 表示$B \lesssim A \lesssim B$。

- 我们用$Q(x_0,r)$表示以$x_0 \in \mathbb{R}^n$为中心、边长为r的立方体。给定立方体$Q = Q(x_0,r)$，令 $\delta Q = Q(x0,\delta r)$。

- 对于可测子集$E \subseteq \mathbb{R}^n$，我们分别用 $|E|$ 和 χ_E 表示E 的勒贝格测度和E 的示性函数。

- M 表示 Hardy-Littlewood极大算子，其定义为

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} |Q|^{-1} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

其中f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数，上确界取遍所有包含x的立方体Q 。

- Δ^m 表示作用于 $\mathbb{R}^n$上的迭代拉普拉斯算子。

关键词：变指数Calder´on-Hardy 空间，变指数Hardy空间，原子分解。**2020年数学主题分类：**42B25，42B30

- 可测函数 $p(\cdot):\ \mathbb{R}^n \to (0,\ \infty)$ 称为指数函数，或简称指数，并设 $p_- = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)$、$p_+ = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)$ 和 $p\ = \min\{p_-,\ 1\}$。

- 如果存在正数常量C_0 使得.....，则称指数$p(\cdot)$局部对数-H¨older 连续，并记为 $p(\cdot)\ \in LH_0(\mathbb{R}^n)$。

$$|p(x)-p(y)| \le \frac{C_0}{-\log|x-y|},\ |x-y| < \frac{1}{2}.$$

- 如果存在正数常量C_∞ 使得.....，则称指数$p(\cdot)$在无穷远处对数-H¨older 连续，并记为$p(\cdot)\ \in LH_\infty(\mathbb{R}^n)$。

$$|p(x)-p(y)| \le \frac{C_\infty}{\log(e+|x|)},\ |y| \ge |x|.$$

- $\left(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\ \|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$上的变指数勒贝格空间，其中

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}dx \le 1\right\}.$$

- $\left(H_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\ \|\cdot\|_{H^{p(\cdot)}}\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的变指数 Hardy 空间（见 [2]）。

- 如果存在一个立方体Q，则称 $\mathbb{R}^n$ 上的函数$a(\cdot)$为一个（$p(\cdot)$，p_0,$d^{p(\cdot)}$）-原子。

$a_1)$ 支撑$(a)\ \subset Q$,

$a_2)\ \|a\|_{p_0} \le \frac{|Q|^{\frac{1}{p_0}}}{\|\chi_Q\|_{p(\cdot)}}$, $0<p_-\le p_+<p_0\le\infty$ 和$p_0\ge 1$,$a_3)\ \int a(x)x^\alpha dx$ $=0$对所有 $|\alpha|\le d^{p(\cdot)}:=$最小$\{l\ \in\mathbb{N}\cup\{0\}:p_-(n+l+1)>n\}$.

- 对于非负数列 $\{k^j\}^\infty{}_{j=1}$和立方体 $\{Q_j\}^\infty{}_{j=1}$，以及指数 $p(\cdot)$: $\mathbb{R}^n\to(0,\infty)$, 我们定义

$$\mathscr{A}\left(\{k_j\}_{j=1}^\infty,\{Q_j\}_{j=1}^\infty,p(\cdot)\right) = \left\|\left\{\sum_{j=1}^\infty\left(\frac{k_j\chi_{Q_j}}{\|\chi_{Q_j}\|_{p(\cdot)}}\right)^{\underline{p}}\right\}^{\frac{1}{\underline{p}}}\right\|_{p(\cdot)}.$$

- 每个 $f\in H_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 都具有原子分解 $f=\sum_{j=1}^\infty k_j a_j$(见 [2])，其中$\{k_j\}^\infty{}_{j=1}$ 是一个非负数序列，a_j 是（$p(\cdot)$,p_0,d）-原子，并且

$$\mathscr{A}\left(\{k_j\}_{j=1}^\infty,\{Q_j\}_{j=1}^\infty,p(\cdot)\right)\lesssim\|f\|_{H^{p(\cdot)}}.$$

- $\left(\mathscr{H}_{p(\cdot)\,q,2m}(\mathbb{R}^n)\|\cdot\|_{\mathscr{H}^{p(\cdot)\,q,2m}}\right)$ 是具有变指数的 Calder´on-Hardy 空间（见 $\mathbb{R}^n$ [3]）。

在 [3],中，我们证明了以下结果。

定理 *1.* 设 $p(\cdot)$ 是属于 $LH_0(\mathbb{R}^n)\cap LH_\infty(\mathbb{R}^n)$ 的指数，且满足 $1<q<\infty$和 $m\in\mathbb{N}$使得 $0<p_-\le p_+<\infty$且 $n(2m+n/q)^{-1}<p$。那么，当 q 充分大时，算子 Δ^m 是从 $\mathscr{H}p(\cdot)\,q,2m(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的双射。此外，存在两个正数常量 c_1 和 c_2，使得

$$c_1\|F\|_{\mathscr{H}^{p(\cdot)}_{q,2m}}\le\|\Delta^m F\|_{H^{p(\cdot)}}\le c_2\|F\|_{\mathscr{H}^{p(\cdot)}_{q,2m}}$$

对所有 $F\in\mathscr{H}p(\cdot)\,q,\,2m(\mathbb{R}^n)$均成立。

换言之，定理 1 表明，方程

$$\Delta^m F=f,\quad \text{for } f\in H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n),$$

有唯一解 F，且 F 属于 $\mathscr{H}_{p(\cdot)\,q,\,2m}(\mathbb{R}^n)$，其中 $1<q<\infty$ **(充分大)**，且 $m\in\mathbb{N}$ 满足 $n(2m+n/q)^{-1}<p$。

如果n 很大，并且由于定理 1 中的参数 q 足够大，为了满足条件$n(2m+n/q)^{-1}<p=\min\{p_-,1\}$，就不得不让$m$也很大。例如，当$n$ 很大而n/q 较小时，情况便是如此。这限制了固定n 较大时m的可能取值。在本文中，我们将去掉q必须足够大的条件。

接下来，我们给出改进定理 1 中参数q 的主要步骤。

按照 [3,第 1026],页定理 1 的证明，我们计算以下逐点不等式的$\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$-范数

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}k_jN_{q,2m}(B_j;x)&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}k_j\frac{\left[M(\chi_{Q_j})(x)\right]^{\frac{2m+n/q-\mu}{n}}}{\|\chi_{Q_j}\|_{p(\cdot)}}+\sum_{j=1}^{\infty}k_j\chi_{4\sqrt{n}Q_j}(x)M(a_j)(x)\\&+\sum_{j=1}^{\infty}k_j\chi_{4\sqrt{n}Q_j}(x)[M(M^q(a_j))(x)]^{1/q}\\&+\sum_{j=1}^{\infty}k_j\chi_{4\sqrt{n}Q_j}(x)\sum_{|\alpha|=2m}T^*_\alpha(a_j)(x)\\&=I+II+III+IV,\end{aligned}$$

其中，a_j 是（$p(\cdot)$，p_0,$d^{p(\cdot)}$）- 原子，对应于任意元素 $f \in H_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的原子分解，并且每个 a_j 都支集于 Q_j。

我们注意到，只需改进*III*的估计，其中

$$III = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \chi_{4\sqrt{n}Q_j}(x)[M(M^q(a_j))(x)]^{1/q}.$$

事实上，在 [3] 为了估计*III*，我们取足够大的$q > 1$，使得 $\delta = {}^1/_q$ 满足 [2]中的引理 4.11 的假设。也就是说，q 必须满足 ${}^1/_q \in (0, -\log_{2(\beta)n+1})$，其中$\beta$ 是 (0,1) 中的一个未指明常数。对于*I*、*II* 和*IV* 的估计，则不要求q取较大值。

为了改进*III*的估计，我们需要两个辅助结果。第一个是 K.-P. Ho 得到的 [1, 引理 5.4] 的一个版本，第二个涉及数量 $\mathscr{A}\left(\{k_j\}^{\infty}{}_{j=1}, \{Q_j\}^{\infty}{}_{j=1}, p(\cdot)\right)$。

命题 2. 设 $p(\cdot): \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 满足 $p(\cdot) \in LH_0 \cap LH_\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $0 < p_- \le p_+ < \infty$。设 $s > 1$ 且 $0 < p_* < p$ 满足 $sp_* > p_+$，并设 $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $L^s(\mathbb{R}^n)$ 中的非负函数序列，其中每个 b_j 的支集都包含在一个立方体 $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ 中，并且

$$\|b_j\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \le A_j |Q_j|^{1/s}, \tag{1}$$

其中对所有 j，$A_j > 0 \ge 1$。那么，对于任意非负数序列 $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$，我们有

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} k_j b_j \right\|_{L^{p(\cdot)/p_*}(\mathbb{R}^n)} \le C \left\| \sum_{j=1}^{\infty} A_j k_j \chi_{Q_j} \right\|_{L^{p(\cdot)/p_*}(\mathbb{R}^n)},$$

*wh*其中 C 是一个正数常量，与 $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$、$\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ 无关。

证明。 证明与 [4, 命题 3.3] 中给出的证明类似。 □

引理 3。 设 $p(\cdot): \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ 是一个指数，满足 $0 < p_- \le p_+ < \infty$，并设 $\{Q_j\}$ 是满足有界交性质的立方体族。若 $0 < p_* < p$，则

$$\left\| \left\{ \sum_j \left(\frac{k_j \chi_{Q_j}}{\|\chi_{Q_j}\|_{L^{p(\cdot)}}} \right)^{p_*} \right\}^{1/p_*} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \approx \mathscr{A}\left(\{k_j\}_{j=1}^{\infty}, \{Q_j\}_{j=1}^{\infty}, p(\cdot) \right)$$

对于任意非负数序列 $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$。

证明。 证明类似于 [4,引理 5.7]中的证明。 □

现在我们可以给出一个关于 III 的新估计。

III 的新估计：给定 $1<q<\infty$ 和一个指数 $p(\cdot)\in LH_0\cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$，令 $0<p_*<p$ 为固定值，$p_0>\max\{p_+,2q\}$，并令 $a(\cdot)$ 为一个 $(p(\cdot),p_0,d^{p(\cdot)})$-原子。那么，

$$\begin{aligned}\left\|[M(M^q(a_j))]^{p_*/q}\right\|_{L^{p_0/p_*}(4\sqrt{n}Q_j)} &= \left\|[M(M^q(a_j))]^{1/q}\right\|^{p_*}_{L^{p_0}(4\sqrt{n}Q_j))}\\ &\lesssim \left\|M(a_j)\right\|^{p_*}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \left\|a_j\right\|^{p_*}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \frac{|Q_j|^{\frac{p_*}{p_0}}}{\left\|\chi_{Q_j}\right\|^{p_*}_{L^{p(\cdot)}}}\\ &\lesssim \frac{\left|4\sqrt{n}Q_j\right|^{\frac{p_*}{p_0}}}{\left\|\chi_{4\sqrt{n}Q_j}\right\|_{L^{p(\cdot)/p_*}}},\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 [2] 中的引理 2.2 得出。现在，由于 $0<p_*<1$，我们应用 p_*-不等式以及命题 2，其中 $b_j=\left(\chi_{4\sqrt{n}Q_j}\cdot[M(M^q(a_j))]^{p_*/q}\right)$，$A_j=\left\|\chi_{4\sqrt{n}Q_j}\right\|_{L^{p(\cdot)/p_*}}$，以及 $s=p_0/p_*$，从而得到

$$\begin{aligned}\|III\|_{L^{p(\cdot)}} &\lesssim \left\|\sum_j\left(k_j\,\chi_{4\sqrt{n}Q_j}\,[M(M^q(a_j))]\right)^{p_*/q}\right\|^{1/p_*}_{L^{p(\cdot)/p_*}}\\ &\lesssim \left\|\sum_j\left(\frac{k_j}{\left\|\chi_{4\sqrt{n}Q_j}\right\|_{L^{p(\cdot)}}}\right)^{p_*}\chi_{4\sqrt{n}Q_j}\right\|^{1/p_*}_{L^{p(\cdot)/p_*}}.\end{aligned}$$

容易验证，$\chi_{4\sqrt{n}Q_j}\le[M(\chi_{Q_j})]^2$。由该不等式、[2] 中的引理 2.2 以及 [2], 中的引理 2.4, 我们有

$$\begin{aligned}\|III\|_{L^{p(\cdot)}} &\lesssim \left\|\left\{\sum_j\left(\frac{k_j^{p_*/2}}{\left\|\chi_{Q_j}\right\|^{p_*/2}_{L^{p(\cdot)}}}M(\chi_{Q_j})\right)^2\right\}^{1/2}\right\|^{2/p_*}_{L^{2p(\cdot)/p_*}}\\ &\lesssim \left\|\left\{\sum_j\left(\frac{k_j\chi_{Q_j}}{\|\chi_{Q_j}\|_{L^{p(\cdot)}}}\right)^{p_*}\right\}^{1/p_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}.\end{aligned}$$

最后，引理 3 给出

$$\|III\|_{L^{p(\cdot)}}\lesssim\mathscr{A}\left(\{k_j\}_{j=1}^\infty,\{Q_j\}_{j=1}^\infty,p(\cdot)\right)\lesssim\|f\|_{H^{p(\cdot)}}.$$

因此，我们现在得到定理 1 的以下改进版本。

定理 *4.* 设 $p(\cdot)$ 是属于 $LH_0(\mathbb{R}^n) \cap LH_\infty(\mathbb{R}^n)$ 的指数，$1 < q < \infty$ 且 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $0 < p_- \le p_+ < \infty$ 且 $n(2m + n/q)^{-1} < p_-$。那么，算子 Δ^m 是从 $\mathcal{H}^{p(\cdot)}_{q,2m}(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的双射。此外，存在两个正数常量 c_1 和 c_2，使得

$$c_1 \|F\|_{\mathcal{H}^{p(\cdot)}_{q,2m}} \le \|\Delta^m F\|_{H^{p(\cdot)}} \le c_2 \|F\|_{\mathcal{H}^{p(\cdot)}_{q,2m}}$$

对所有 $F \in \mathcal{H}^{p(\cdot)}_{q,2m}(\mathbb{R}^n)$，均成立。

参考文献

[1] K.-P. Ho，变指数加权 *Hardy* 空间的原子分解，Tohoku Math. J. 69 (3) (2017), 383-413.[2] E. Nakai and Y. Sawano，变指数 *Hardy* 空间与广义 *Campanato* 空间，Journal of Functional Analysis, 262, 3665-3748, (2012). [3] P. Rocha，变指数 *Calderón-Hardy* 空间及方程 $\Delta^m F = f$（其中 $f \in H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$）的解，《数学不等式与应用》Vol 19 (3) (2016), 1013-1030.[4] P. Rocha，海森堡群上的卷积算子与变指数 *Hardy* 空间，Acta Math. Hung. 174 (2) (2024), 429-452.

Pablo Rocha，数学研究所（INMABB），数学系，南方国立大学（UNS）-CONICET，布兰卡港，阿根廷。电子邮箱：pablo.rocha@uns.edu.ar