arXiv:2512.17205v1 [math.CV] 19 Dec 2025

手稿

L-函数与一般亚纯函数唯一性问题的一般刻画

Sanjay Mallick 和 Ripan Saha

Abstract. 在本文中，针对 Yi [**23**], 提出的一个问题，我们研究了 L函数与一般亚纯函数唯一性的普遍判据。我们的结果将这一方向上现有的所有结果加以改进和推广[**23, 18, 17, 4**] ，使其达到最一般的情形。此外，我们还给出了大量例子，以佐证我们的论断，并证实这些结果具有广泛的应用。

1. 引言与相关结果

通过 Nevanlinna 理论研究 Selberg 类中 L-函数的值分布，是近年来研究 L-函数不同性质以及唯一确定这些函数的一种趋势。这类 L-函数包括黎曼ζ函数$\infty\zeta(s) = \sum n^{-s}$ ，以及本质上所有可能满足$_{n=1}$黎曼猜想的狄利克雷级数。此类 L函数定义 [**19, 20**] 为狄利克雷级数

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{-s}}$$

其中 $a(1) = 1$ 满足以下公理:

- (i) ***Ramanujan*** 猜想: $a(n) \ll n^{\varepsilon}$ 对每个 $\varepsilon > 0$;
- (ii)解析延拓: 存在一个非负整数 m，使得 $(s-1)^m\mathcal{L}(s)$ 是有限阶整函数;
- (iii)函数方程: $\mathcal{L}$ 满足以下类型的函数方程

$$\Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \omega\overline{\Lambda_{\mathcal{L}}(1-\overline{s})},$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11M36; 30D35。
Key words and phrases. L函数; 亚纯函数; 共享集合; 唯一性。由印度 SERB、DST 以及印度 NBHM、DAE 资助。由.....传达。

其中

$$\Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \mathcal{L}(s)Q^s \prod_{j=1}^{k} \Gamma(\lambda_j s + \nu_j),$$

其中 Q, λ_j 为正实数， ν_j, ω 为复数，且 $\mathrm{Re}\nu_j \geqslant 0$ 和 $|\omega| = 1$;

- (iv) 欧拉乘积假设： $\log \mathcal{L}(s) = \sum^{\infty} {}^{b_{(n)}\, n^s}$ ， 其中 $b(n) = 0$ ， 除非 $n = m$ 是素数的正整数次幂，并且 $b(n) \ll n^{\theta}$ ，对某个 $\theta < \frac{1}{2}$ 成立。

在本文中，L函数始终指上述类型的L函数，亚纯函数始终指在 $\mathbb{C}$ 中定义的亚纯函数。我们记作 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。$\mathbb{N}$ 表示所有自然数组成的集合。尽管本文采用的标准定义请参阅 [9], ，但为方便起见，我们将 f 的阶记为 $\rho(f)$，其中

$$\rho(f) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log(T(r, f))}{\log r}.$$

我们用 $S(r, f)$ 表示满足以下条件的任意量：对所有 r，可能除去一个有限线性测度的集合，均有 $S(r, f) = O(\log(rT(r, f)))$。若 f 是有限阶函数，则对所有 r，有 $S(r, f) = O(\log r)$。

然而，近年来，尤其是过去十年间，许多作者在 L-函数的值分布方面开展了大量研究。随着时间推移，这项研究逐渐转向研究如何利用具有有限个极点的亚纯函数唯一确定 L-函数，从而使我们能够通过有关这类特殊亚纯函数的既有文献，了解 L-函数的各种性质。下面我们回顾其中一些结果及其逐步发展。在此之前，我们需要说明以下基本定义，以便清楚地理解这些结果。

Definition 1.1. [6] 对于非常数亚纯函数 f 和 $a \in \mathbb{C}$，设 $E_f(a) = \{(z, p) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}: f(z) = a \text{ with multiplicity } p\}\big(E_f(a) = \{(z, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}: f(z) = a\}\big)$，则称 f, g以计重（不计重）方式分担值 a，如果 $E_f(a) = E_g(a)\big(E_f(a) = E_g(a)\big)$对于 $a = \infty$，我们定义 $E_f(\infty) := E_{1/f}(0)\big(E_f(\infty) := E_{1/f}(0)\big)$。

Definition 1.2. [6] 对于非常数亚纯函数 f 和 $S \subset \mathbb{C}$，设 $E_f(S) = \bigcup_{a \in S}\{(z, p) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}: f(z) = a \text{ with multiplicity } p\}\big(E_f(S) = \bigcup_{a \in S}\{(z, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}: f(z) = a\}\big)$，则称 f、 g以计重（不计重）方式分担集合 S，如果 $E_f(S) = E_g(S)$ $\big(E_f(S) = E_g(S)\big)$。

Definition 1。3. [12, 13] 设 k 为非负整数或无穷大。对于 $a \in \mathbb{C}$，我们用 $E_k(a; f)$ 表示 f 的所有 a点组成的集合，其中一个重数为m 的 a-点在 $m \leqslant k$时计为 m次，在 $m > k$时计为 $k + 1$次。若 $E_k(a; f) = E_k(a; g)$，则称 f、 g 以权 k分担值 a。

我们用 f, g分担 (a, k) 表示 f、 g以权 k分担值 a。显然，若 f、 g分担 (a, k)，则对任意整数 p， f、 g都分担 (a, p)。此外，我们注意到， f、 g不计重或计重地分担一个值 a，当且仅当 f、 g分别分担 $(a, 0)$ 或 (a, ∞)。

Definition 1.4. [12]对于 $S \subset \overline{\mathbb{C}}$，我们定义 $E_f(S, k) = \cup_{a \in S} E_k(a; f)$，其中 k 为非负整数 $a \in S$或无穷大。显然， $E_f(S) = E_f(S, \infty)$，且$E_f(S) = E_f(S, 0)$。如果 $E_f(S, k) = E_g(S, k)$，那么我们称 f 和 g 以权 k 分担集合 S 。

显然，定义 1.3 和定义 1.4 分别是定义 1.1 和定义 1.2 的精细化概念。不过，接下来我们将给出上文提到的结果。

Theorem A. [14] 设 a 和 b 是两个不同的有限值，且 f 是复平面上的亚纯函数，并且 f 在复平面上有有限个极点。如果 f 与一个非常数 L函数 $\mathcal{L}$ 分担(a, ∞) 和 $(b, 0)$，那么 $\mathcal{L} = f$。

2018年，考虑到著名的 Gross问题 [8] ，Yuan、Li 和 Yi[23] 在共享集的框架下推广了 $\mathcal{L}$ 和 f 的唯一性问题，并提出了以下亟待解决的问题。

Question 1。1. [23] 若亚纯函数 f 与L函数 $\mathcal{L}$ 满足 f 和 $\mathcal{L}$ 共享一个或两个集合，那么二者之间的关系会是怎样的?

关于问题 *1.1*，Yuan、Li 和 Yi 给出了以下结果。

Theorem B. [23] 设 $Q(z) = z^n + az^m + b$，其中 a、 b 为非零常数，且满足最大公约数$(m, n) = 1$ 和 $n \geqslant 2m + 5$。进一步假设 f 是一个只有有限个极点的非常数亚纯函数，$\mathcal{L}$ 是一个非常数L函数，且 $E_f(S, \infty) = E_{\mathcal{L}}(S, \infty)$，其中 $S = \{z : \ Q(z) = 0\}$。那么 $f = \mathcal{L}$。

后来，Sahoo-Sarkar [18]通过将共享集的权从计重放宽到权 2，改进了定理 B 。

Theorem C. [18] 设 S 的定义与定理 B 和 $n \geqslant 2m + 5$中的相同。假设 f 是一个在 $\mathbb{C}$ 中只有有限个极点的非常数亚纯函数，且 $\mathcal{L}$ 是一个非常数 L函数。若 f 与 $\mathcal{L}$ 以$(S,2)$共享，则 $f = \mathcal{L}$。

与此同时，Sahoo-Halder 也考虑了权为‘0’时的同一问题，并证明了以下结果。

Theorem D. [17] 设 S 的定义与定理 B 和 $n \geqslant \max\{2m+5, 4q + 9\}$中的相同，其中 $q = n - m \geqslant 1$。设 f 是一个在 $\mathbb{C}$ 中只有有限个极点的非常数亚纯函数，且 $\mathcal{L}$ 是一个非常数 L函数。若 f 与 $\mathcal{L}$以$(S,0)$共享，则 $f = \mathcal{L}$。

尽管定理 C和定理 D 后来被 Banerjee-Kundu 在 [4]中证明是错误的。因此，Banerjee-Kundu 给出了以下结果，以弥补这些定理中的漏洞。

THEOREM E. [4] 设 S 如定理 B中所定义，f 是一个在 $\mathbb{C}$ 中只有有限个极点的非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$ 是一个非常数 L函数，且 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t)$。若

(i) $t \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 2m+5$，或
(ii) $t = 1$ 和 $n \geqslant 2m+6$，或(iii)
$t = 0$ 和 $n \geqslant 2m+11$，那么
$f = \mathcal{L}$。

在同一篇论文中，Banerjee-Kundu 还证明了以下与定理 E类似的结果。

THEOREM F. [4] 设 $S = \{z : \ z^n + az^{n-m} + b = 0\}$，其中 a, b 是非零常数，且 $\gcd(n,m) = 1$。设 f 是一个在 $\mathbb{C}$ 中只有有限个极点的非常数亚纯函数，且 $\mathcal{L}$ 是一个非常数 L函数，使得 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t)$。如果

(i) $t \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 2m+5$，或
(ii) $t = 1$ 和 $n \geqslant 2m+6$，或(iii)
$t = 0$ 和 $n \geqslant 2m+11$，那么
$f = \mathcal{L}$。

由此，依据*B-F*定理 自然可以得到以下观察。

(i) 所有作者始终使用以下多项式之一。

$$P(z) = z^n + az^m + b \ \ or \ \ P(z) = z^n + az^{n-m} + b, \tag{1.1}$$

其中 a， b为非零常数，且 gcd(n， m) $= 1$。

(ii) 作者始终考察一类特殊的亚纯函数，即具有有限个极点的亚纯函数，以研究它们与 L函数之间的唯一性。**(iii)** 作者还认为，由 **(1.1)** 给出的多项式的零点集可能含有重零点。

关于观察 **(i)**，自然会提出以下问题。

QUESTION 1.2. *</style}*由 ***(1.1)*** 给出的这些多项式，是否就是其零点集能够保证 f 和 $\mathcal{L}$唯一性的全部多项式?

如果答案是否定的，那么我们希望了解以下一般性问题的答案。

QUESTION 1.3. 能否一般性地刻画这样一类多项式：其零点集能够确保 f 和 $\mathcal{L}$的唯一性?

关于观察（ii），我们想指出，问题 ***1.1*** 针对的是一般亚纯函数，而同一问题下的所有定理（定理 B–F）仅针对具有有限个极点的亚纯函数。在这种情况下，自然会有如下疑问。

QUESTION 1.4. 能否将观察(ii) 推广到整个亚纯函数类，从而完整回答问题1.1?

最后，关于观察（iii），我们有如下评述。

REMARK 1.1. 最近，[**5**, see paragraph between Theorem H and Theorem I] Banerjee-Kundu 指出，所有*B-F*定理中的结果仅在多项式具有单零点，或具有重零点且共享集的权为 0 时才成立；其他情况下均不成立。此外，仔细研读这些定理的证明可以发现，多项式的重零点这一概念并未带来任何分析或技术上的优势。

因此，本文仅研究只具有单零点的多项式，并对上述问题*1.1-1.4*均给予肯定回答。事实上，我们为任意一般多项式给出了一般判据，使其零点集能够保证其与一般亚纯函数的唯一性 $\mathcal{L}$，而非仅与具有有限个极点的亚纯函数的唯一性 f。也就是说，我们将所有这些结果推广到了最一般的情形。因此，上述所有结果都是我们主要定理的特殊情形。此外，我们的主要定理显著改进了上述忽略重数的结果，给出了更优的最小基数估计；即 11 而非 13。简言之，我们的主要定理以改进后的形式，将现有所有定理统一纳入一个框架，并推广到了最一般的情形。

在**“应用”**一节中，我们给出了若干示例，证明了所有论断均成立，并展示了我们结果的广泛应用。

在介绍主要结果之前，我们先简要讨论一般多项式的结构，因为这将在整篇论文中发挥关键作用。

考虑以下仅有单零点、次数为 n 的一般多项式 $P(z)$。

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{1.2}$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是复数，且 $a_n, a_0 \neq 0$, a_i 是 $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ 中第一个非零系数。令

$$S = \{z : P(z) = 0\}. \tag{1.3}$$

注意到，(1.2) 可写成如下形式

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{p} (z - \alpha_i)^{m_i} + a_0, \tag{1.4}$$

其中 p 表示 $P(z) - a_0$ 的互异零点个数。另记 s 为 $P'(z)$ 的互异零点个数。因此我们有

$$P'(z) = n a_n \prod_{i=1}^{s} (z - \eta_i)^{r_i}, \tag{1.5}$$

其中，r_i 表示 $P'(z)$的互异零点的重数。

Set

$$R(z) = -\frac{a_n z^n}{a_i z^i + a_{i-1} z^{i-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = -\frac{a_n z^n}{a_i \prod_{j=1}^{k} (z-\beta_j)^{m_j}} = -\frac{a_n z^n}{\phi(z)}, \tag{1.6}$$

其中， $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_i$ 如(1.2)中所定义，而 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ 是方程的根

$$\phi(z) = a_i z^i + a_{i-1} z^{i-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,$$

计重 m_1， m_2，……， m_k。显然

$$R(z) - 1 = -\frac{P(z)}{\phi(z)},$$

其中， $P(z)$由(1.2)定义，显然 $P(z)$和 $\phi(z)$没有任何公共零点。因此，(1.3)中定义的 S 可视为

$$S = \{z : P(z) = 0\} = \{z : R(z) - 1 = 0\}. \tag{1.7}$$

设 $R'(z)$有 l 个互异零点，分别为 δ_1， δ_2，……，……， δ_l，其重数分别为 q_1， q_2，……， q_l。那么由(1.6)可得

$$R'(z) = \frac{\gamma \prod_{j=1}^{l} (z-\delta_j)^{q_j}}{\prod_{j=1}^{k} (z-\beta_j)^{p_j}}, \tag{1.8}$$

其中，对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$， $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ 且 $p_j \in \mathbb{N}$。

Remark 1.2. 注意，在一般多项式$P(z)$的定义(1.2)中，条件 $a_i \neq 0$ 对至少一个 $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ 而言是必要的。否则，我们将得到一个非常数L函数 $\mathcal{L}$ 和一个非常数亚纯函数 f，它们分担集合 $S = \{z : P(z) = 0\}$ 计重，但 $f \neq \mathcal{L}$。

例如，令 $a_i = 0$ 对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$成立。于是 $S = \{z : a_n z^n + a_0 = 0\}$。考虑非常数 L函数 $\mathcal{L}$ 和非常数亚纯函数 f，使得 $f = \zeta\mathcal{L}$，其中 ζ 是满足 $\zeta \neq 1$的 n 次单位根。显然，

$$a_n f^n + a_0 = a_n \mathcal{L}^n + a_0;$$

$$i.e., \prod_{i=1}^{n} (f - \sigma_i) = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{L} - \sigma_i),$$

其中 $\sigma_i \in S$对 $i = \{1, 2, \ldots, n\}$成立。也就是说， f和 $\mathcal{L}$共享 S计重，但 $f \neq \mathcal{L}$。

2. 主要结果

以下两个定理是本文的主要结果。

THEOREM 2.1. 设 $P(z)$ 由（*1.4*）定义，其中 $p \geqslant 2$，且 S、s 分别由（*1.3*）、（*1.5*）定义。设 f 是非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$是一个具有(S, t)的非常数 L函数。那么，当 $t \geqslant 2$时，若 $n \geqslant \max\{2p+2, 2s+5\}$；当 $t=1$ 时，若 $n \geqslant \max\{2p+2, 2s+6\}$；且当 $t=0$时，若$n \geqslant \max\{2p+2, 2s+11\}$，以下命题等价:

(i) $P(f)=P(\mathcal{L}) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$;
(ii) $E_f(S,t)=E_{\mathcal{L}}(S,t) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$.

THEOREM 2.2. 设 $R(z)$ 由（*1.6*）定义，其中 $k \in \mathbb{N}$，且 S、l 分别由（*1.7*）、（*1.8*）定义，其中

(a) $k \geqslant 2$，或(b) $k=1$ 和 $n \geqslant 3b_1+1$，其中

$b_1=gcd(m_1, n)$。

设 f 为非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$ 为共享(S, t)的非常数 L函数。那么对于 $n \geqslant \max\{2k+4, 2l+5\}$，当 $t \geqslant 2$ 时；
$n \geqslant \max\{2k+4, 2l+6\}$，当 $t=1$ 时；且对于 $n \geqslant \max\{2k+4, 2l+11\}$，当$t=0$时；以下命题等价:

(i) $R(f)=R(\mathcal{L}) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$;
(ii) $E_f(S,t)=E_{\mathcal{L}}(S,t) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$.

接下来，我们分别针对定理 2.1 和定理2.2，陈述以下两个关于具有有限个极点的亚纯函数的推论。

COROLLARY 2.1. 设 $P(z)$、 p、 S、 s 如定理 *2.1* 中所定义。假设f 为具有有限个极点的非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$ 为共享(S, t)的非常数 L函数。那么对于 $n \geqslant \max\{2p+1, 2s+3\}$，当$t \geqslant 2$时； $n \geqslant \max\{2p+1, 2s+4\}$，当 $t=1$ 时；且对于 $n \geqslant \max\{2p+1, 2s+7\}$，当 $t=0$ 时；以下命题等价:

(i) $P(f)=P(\mathcal{L}) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$;
(ii) $E_f(S,t)=E_{\mathcal{L}}(S,t) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$.

COROLLARY 2.2. 设 $R(z)$、 k、 S、l 如定理2.2 中所定义，且

(a) $k \geqslant 2$，或(b) $k=1$ 和 $n \geqslant 2b_1+1$，其中

$b_1=gcd(m_1、 n)$。

设 f 是一个只有有限个极点的非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$是一个与$(S、 t)$共享的非常数 L函数。那么，当$t \geqslant 2$时， $n \geqslant \max\{2k+3, 2l+3\}$；当 $t=1$ 时， $n \geqslant \max\{2k+3, 2l+4\}$；当 $t=0$时， $n \geqslant \max\{2k+3, 2l+7\}$；以下条件等价:

(i) $R(f)=R(\mathcal{L}) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$;
(ii) $E_f(S,t)=E_{\mathcal{L}}(S,t) \Longrightarrow f=\mathcal{L}$.

3. 应用

本节中，我们给出若干不同的例子来应用主要定理和推论，清楚地展现了结果的广泛适用性，特别是

需要指出的是，*B-F*定理 属于我们结果的特殊情形。此外，当共享集的权为“0”时，我们的结果显著改进了*B-F*定理。下面通过以下两个例子来说明这一点。

EXAMPLE 3.1. 考虑多项式

$$P(z) = z^n + az^{n-m} + b = z^{n-m}(z^m + a) + b,$$

其中 n、m 是互素整数，满足 $n - m > 1$，且 a、b 是非零常数，使得该多项式没有重零点。设 $S = \{z : P(z) = 0\}$。这里

$$p = m + 1 \geqslant 2 \quad and \quad gcd(n, n - m) = 1.$$

Also

$$P'(z) = z^{n-m-1}(nz^m + a(n - m));$$

即，

$$s = m + 1.$$

设对于任意非常数亚纯函数 f 和非常数 L 函数 $\mathcal{L}$，有 $P(f) = P(\mathcal{L})$，则我们有

$$f^n - \mathcal{L}^n = -a(f^{n-m} - \mathcal{L}^{n-m}). \tag{3.1}$$

若 $f^n \neq \mathcal{L}^n$，则我们可以将 *(3.1)* 重写为

$$\mathcal{L}^m = -a\frac{(h - v)(h - v^2)...(h - v^{n-m-1})}{(h - u)(h - u^2)...(h - u^{n-1})}, \tag{3.2}$$

其中 $h = \frac{f}{\mathcal{L}}$，$u = exp(2\pi i/n)$ 以及 $v = exp(2\pi i/(n-m))$。注意到 n 和 $(n-m)$ 是互素的正整数，因此 *(3.2)* 的分子和分母没有公因子。由于 $\mathcal{L}$ 在复平面上至多有一个极点，并且每当 $n \geqslant 5$ 时，我们可以看到 $h^n = 1$ 至少有三个不同的根，它们是 h 的皮卡例外值。因此，由 *(3.2)* 可知，h 进而 $\mathcal{L}$ 都是常数，这是不可能的。

因此，我们必有 $f^n = \mathcal{L}^n$。由此，根据 *(3.1)* 也有 $f^{n-m} = \mathcal{L}^{n-m}$。由于 n 和 $(n-m)$ 是互素的正整数，我们可推出 $f = \mathcal{L}$。于是，当 $n \geqslant 5$时，我们看到 $P(f) = P(\mathcal{L}) \implies f = \mathcal{L}$。

现在我们应用**定理 2.1**，求出 n 的最小值，使得我们可以断定 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \implies f = \mathcal{L}$。

因此，对于 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \implies f = \mathcal{L}$

（1） $n \geqslant$最大$\{2m + 4, 2m + 7\} = 2m + 7$ 当 $t \geqslant 2$ 时，（2） $n \geqslant$最大$\{2m + 4, 2m + 8\} = 2m + 8$ 当 $t = 1$ 时，以及（3） $n \geqslant$最大$\{2m + 4, 2m + 13\} = 2m + 13$ 当 $t = 0$ 时。

同样，若 f 是一个只有有限个极点的非常数亚纯函数，且 $\mathcal{L}$ 是一个非常数 L 函数，则由**推论 2.1** 可得 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \implies f = \mathcal{L}$

(1) $n \geqslant$最大值$\{2m + 3, 2m + 5\} = 2m + 5$ 当 $t \geqslant 2$,(2) $n \geqslant$最大值$\{2m + 3, 2m + 6\} = 2m + 6$ 当 $t = 1$, 并且

(3) $n \geqslant \max\{2m+3, 2m+9\} = 2m+9$ *when* $t = 0$.

EXAMPLE 3.2. 考虑多项式

$$P(z) = z^n + az^m + b,$$

其中 m 和 n 是正整数，使得 $n \geqslant m+4$、 a 和 b 是满足 $b^{n-m} \neq (-1)^n m^m (n-m)^{n-m}$ 的有限非零复数。~~于是， $P(z)$ 只有单零点。~~令 S 表示 $P(z)$ 的零点集。假设

$$R(z) = -\frac{z^n}{az^m + b}. \tag{3.3}$$

于是我们得到 $S = \{z : R(z) - 1 = 0\}$。由 (*3.3*) 式可得

$$R'(z) = -\frac{z^{n-1}[a(n-m)z^m + bn]}{(az^m + b)^2}.$$

现在，对于非常数亚纯函数 f 和非常数 L函数 $\mathcal{L}$，考虑 $R(f) = R(\mathcal{L})$。于是我们有

$$\begin{aligned} \frac{f^n}{af^m + b} &= \frac{\mathcal{L}^n}{a\mathcal{L}^m + b} \\ \Longrightarrow a(f^n\mathcal{L}^m - f^m\mathcal{L}^n) - b(\mathcal{L}^n - f^n) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

设 $h = \frac{f}{\mathcal{L}}$。假设 h 是非常数亚纯函数。则由 (*3.4*) 式可得

$$\begin{aligned} & ah^m\mathcal{L}^{n+m}(h^{n-m} - 1) + b\mathcal{L}^n(h^n - 1) = 0 \\ \Longrightarrow\ & \mathcal{L}^m = -\frac{b(h^n - 1)}{ah^m(h^{n-m} - 1)} = -\frac{b}{a}\frac{(h-u)(h-u^2)...(h-u^{n-1})}{h^m(h-v)(h-v^2)...(h-v^{n-m-1})}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $u = exp(2\pi i/n)$，且 $v = exp(2\pi i/(n-m))$。由于 n 与 m 互素，因此 n 与 $n-m$ 也互素。因此，(*3.5*) 的分子和分母没有公因子。此外，函数 $\mathcal{L}$ 在复平面上至多有一个极点，由此可知， h 在 $\{0, v, v^2, ..., v^{n-m-1}\}$ 中至少有 $n-m-1$ 个皮卡例外值。

显然，由于 $n \geqslant m+4$，这构成矛盾。因此 h 为常数。于是由 (*3.5*) 必有 $h^n = 1 = h^{n-m}$，进而推出 $h = 1$；即 $f = \mathcal{L}$。

现在我们来计算满足 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \Longrightarrow f = \mathcal{L}$ 的集合 S 的基数。在这种情况下，对于 $R(z)$，我们有

$$l = m+1, \quad k = m.$$

因此，我们得到 $R(z)$ 在以下情况下满足条件 ***(a)***：*[* 且 $m \geqslant 2$*]*；或条件 ***(b)***：*[*，且 m*=1]*，并满足**定理 2.2** 中的 ***(i)***。因此，对于 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \Longrightarrow f = \mathcal{L}$，有

(1) $n \geqslant$ 最大值$\{2m+4, 2m+7\} = 2m+7$ 当 $t \geqslant 2$ 时，(2)

$n \geqslant$ 最大值$\{2m+4, 2m+8\} = 2m+8$ 当 $t = 1$ 时，以及 (3)

$n \geqslant$ 最大值$\{2m+4, 2m+13\} = 2m+13$ 当 $t = 0$ 时。

现在设 f 为一个具有有限个极点的非常数亚纯函数，并设 $\mathcal{L}$ 为一个非常数 L 函数。由 **推论2.2** 可得 $E_f(S, t) = E_{\mathcal{L}}(S, t) \Longrightarrow f = \mathcal{L}$ 对于

(1) $n \geqslant$ 最大值$\{2m+3, 2m+5\} = 2m+5$ 当 $t \geqslant 2$ 时，(2)
$n \geqslant$ 最大值$\{2m+3, 2m+6\} = 2m+6$ 当 $t = 1$ 时，以及(3)
$n \geqslant$ 最大值$\{2m+3, 2m+9\} = 2m+9$ 当 $t = 0$ 时。

REMARK 3.1. 请注意，对于具有有限个极点的亚纯函数，例*3.1* 和例*3.2* 中得到的结论与*B-F*定理 中的所有现有结果相当，而在权为'0'的情况下有所改进（即，基数从 $2m+11$ 降至 $2m+9$）。

我们还想借此机会探讨一点：*B-F*定理中使用的多项式都是临界单射多项式 [**4**, , 参见引理 4]。为了方便读者，我们重述这种特殊类型多项式的定义。

DEFINITION 3.1. 设 $P(z)$ 是一个多项式，使得 $P'(z)$ 具有互异零点 d_1、d_2、.....、d_r，其重数分别为 q_1、q_2、.....、q_r。那么，如果 $P(d_i) \neq P(d_j)$ 对 $i \neq j$ 成立，其中 i、$j \in \{1, 2, \cdots, r\}$，则称 $P(z)$ 是临界单射多项式。

任何非临界单射多项式都称为非临界单射多项式。

显然，任何多项式要么是临界单射的，要么是非临界单射的。考虑到这一点，我们构造定理时采用了这样的方式，使非临界单射多项式也适用于我们的定理。甚至那些尚未确定是临界单射还是非临界单射的多项式，也适用于我们的定理。也就是说，我们的结果涵盖了所有类型的多项式，并对问题*1.1-1.4*作出肯定回答。下面我们分别给出这三类多项式的例子，以证明上述说法。

EXAMPLE 3.3. 考虑多项式:

$$P(z) = z^n + az^{n-m} + bz^{n-2m} + c, \tag{3.6}$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ 满足 $P(z)$ 没有重根，$gcd(m, n) = 1$ 与 $n \geqslant 2m+4$，且 $\frac{a^2}{4b} = {}^{n}($ $_{n-2m)\ (n-m)^2}$，$c \neq \frac{\beta_i\beta_j}{\beta_i+\beta_j}$。~~这里 $\beta_i = -(c_i^n + ac_i^{n-m} + bc_i^{n-2m})$~~，其中 c_i 是方程 $nz^{2m} + (n-m)az^m + b(n-2m) = 0$的根，其中$i = 1$、2、.....、$2m$。设 S 表示 *(3.6)* 的零点集。

显然，$P(z)$ 只有简单零点，并且是临界单射 [**6**, 见引理 2。7]。由 *(3.6)* 可得

$$\begin{aligned} P'(z) &= z^{n-2m-1}[nz^{2m} + a(n-m)z^m + b(n-2m)] \\ &= nz^{n-2m-1}\left(z^m + \frac{a(n-m)}{2n}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由 *(3.6)* 和 *(3.7)* 可得

$$p = 2m+1 \quad and \quad s = m+1.$$

在 [**6**, 定理 **1** 的证明1], 中还证明了，$P(f) = P(g)$ 蕴含 $f = g$，其中 $n \geqslant 2m+4$，f和 g 是非常数亚纯函数。因此，对于非常数亚纯函数 f和一个*L*函数 $\mathcal{L}$，我们有 $P(f) =$

$P(\mathcal{L}) \implies f = \mathcal{L}$当 $n \geqslant 2m+4$时。因此， $P(z)$满足本文**定理 2.1** 的条件 ***(i)***，因此对于 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \implies f = \mathcal{L}$

(1) $n \geqslant$最大值$\{4m+4, 2m+7\} \geqslant 9$ 当 $t \geqslant 2$ 时，(2)
$n \geqslant$最大值$\{4m+4, 2m+8\} \geqslant 10$ 当 $t = 1$ 时，以及(3)
$n \geqslant$最大值$\{4m+4, 2m+13\} \geqslant 15$ 当 $t = 0$ 时。

再者，若 f 是一个只有有限个极点的非常数亚纯函数，且 $\mathcal{L}$ 是一个非常数 L 函数，那么根据**推论 2.1** ，我们有 $E_f(S,\ t) = E_{\mathcal{L}}(S,\ t) \Longrightarrow f = \mathcal{L}$ 对于

(1) $n \geqslant$最大值$\{4m+3, 2m+5\} = 2m+5 \geqslant 7$ 当 $t \geqslant 2$ 时，(2)
$n \geqslant$最大值$\{4m+3, 2m+6\} = 2m+6 \geqslant 8$ 当 $t = 1$ 时，以及(3)
$n \geqslant$最大值$\{4m+3, 2m+9\} = 2m+9 \geqslant 11$ 当 $t = 0$ 时。

REMARK 3.2. 注意，多项式

$$P(z) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}z^n - n(n-2)z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2} - c, \tag{3.8}$$

其中 $n \geqslant 6,\ c \neq 0$,1，由 Frank-Reinders [**7**] 引入，是 (3.6) 在 $m = 1$, $a = \frac{-2n}{n-1}$, $b = \frac{n}{n-2}$和 $c \in \mathbb{C} - \{0, \frac{-1}{(n-1)(n-2)}\}$时的特例。因此，当 $t \geqslant 2$时，$E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \implies f = \mathcal{L}$；当 $t = 1$时， $n \geqslant 9$；当 $t = 0$时， $n \geqslant 15$。其中 S 表示 (3.8) 的零点集，而 f和 $\mathcal{L}$ 分别表示非常数亚纯函数和非常数 L函数。

EXAMPLE 3.4. 令

$$P(z) = z^n - 4z^{n-1} + 4z^{n-2} + c,$$

其中 $n(\geqslant 5)$ 为奇数， $c \in \mathbb{C}$ 使得 $P(z)$ 没有任何重零点。此外，我们有

$$P'(z) = z^{n-3}\left(nz^2 - 4(n-1)z + 4(n-2)\right).$$

这里， P（z）是一个非临界单射多项式 [**15**, 见（**1.1**）] ，我们可以看到

$$p = 2,\ \ s = 3.$$

设 $S = \{z:\ P(z) = 0\}$。令 f 和 $\mathcal{L}$ 分别为两个非常数亚纯函数和L函数，满足

$$P(f) = P(\mathcal{L}).$$

由于 $\mathcal{L}$在 $\mathbb{C}$中至多有一个极点，因此按照 [**15**] 的定理1.3的情形3或 [**16**] 的例4.4中的证明思路进行推导，我们也可得到$f = \mathcal{L}$。

因此， P（z）满足**定理 2.1**的条件（***i***）。由此我们得出，当满足以下条件时，E_f（S,t）$= E_{\mathcal{L}}$（S,t）$\implies f = \mathcal{L}$

(1) $n \geqslant \max\{2.2+2, 2.3+5\} = 11$ 对于 $t \geqslant 2$，**(2)**
$n \geqslant \max\{2.2+2, 2.3+6\} = 12$ 对于 $t = 1$，以及**(3)**
$n \geqslant \max\{2.2+2, 2.3+11\} = 17$ 对于 $t = 0$。

现在设 f 为一个只有有限个极点的非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$ 为一个非常数 L 函数。则根据**推论 2.1**，有 $E_f（S，t）=E_{\mathcal{L}}（S，t）\implies f=\mathcal{L}$ 对于

(1) $n\geqslant$ 最大值$\{2.2+1,2.3+3\}=9$ 当 $t\geqslant 2$，(2) $n\geqslant$ 最大值$\{2.2+1,2.3+4\}=10$ 当 $t=1$，以及(3) $n\geqslant$ 最大值$\{2.2+1,2.3+7\}=13$ 当 $t=0$。

Example 3.5. 考虑多项式

$$P(z)=az^n-n(n-1)z^2+2n(n-2)bz-(n-1)(n-2)b^2,$$

其中 $n(\geqslant 6)$ 是一个整数，且 a、 b 是满足$ab^{n-2}\neq 1$的两个非零复数，$ab^{n-2}\neq 1$ 2。在 [**3**, 参见第 5], 节中，我们可以发现这个多项式是否为临界单射或非临界单射仍未确定。设 $S=\{z:\ P(z)=0\}$。显然， $n(n-1)z^2-2n(n-2)bz+(n-1)(n-2)b^2=0$；有两个不同的根，记作 α_1 和 α_2。这里

$$R(z)=\frac{az^n}{n(n-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}. \tag{3.9}$$

因此 $S=\{z:\ R(z)-1=0\}$。由 (*3.9*) 可得

$$R'(z)=\frac{(n-2)az^{n-1}(z-b)^2}{n(n-1)(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)^2}.$$

设 f *a* 为非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$ 为非常数 L函数。由于每个 L函数在 $\mathbb{C}$ 中都是亚纯的，因此 $R(f)=R(\mathcal{L})\implies f=\mathcal{L}$ 对$n\geqslant 6$ 显然成立（ [**1**, 见第 67]页）。我们还发现，在此情形下

$$l=2,\ \ k=2.$$

由于 $P(z)$ 满足**定理2.2**的条件 *(a)* 和 *(i)*，因此我们得到$E_f(S,t)=E_{\mathcal{L}}(S,t)\implies f=\mathcal{L}$ 对

(1) $n\geqslant$ 最大值$\{2k+4,2l+5\}=9$ 当 $t\geqslant 2$，(2) $n\geqslant$ 最大值$\{2k+4,2l+6\}=10$ 当 $t=1$，以及(3) 对于 $n\geqslant$ 最大值$\{2k+4,2l+11\}=15$ 当 $t=0$。

同样，若 f 是一个只有有限个极点的非常数亚纯函数，且 $\mathcal{L}$ 是一个非常数 L函数，则由**推论2.2** 可得 $E_f(S,t)=E_{\mathcal{L}}(S,t)\implies f=\mathcal{L}$ 对于

(1) $n\geqslant$ 最大值$\{2k+3,2l+3\}=7$ 当 $t\geqslant 2$时，(2) $n\geqslant$ 最大值$\{2k+3,2l+4\}=8$ 当 $t=1$时，以及(3) $n\geqslant$ 最大值$\{2k+3,2l+7\}=11$ 当 $t=0$时。

4. 引理

本节将证明一些引理，这些引理将在我们的主要结果的证明中用到。在陈述这些引理之前，为方便读者，我们先简要回顾以下定义。

Definition 4。1. [**22**] 设 f 和 g 是两个非常数亚纯函数，使得 f 和 g 分担（*1*，*0*）。设 z_0 是 f 的一个重数为 p的*1*点，同时也是 g的一个重数为 q的*1*点。我们用 $N_L(r, 1; f)$表示 f和 g的满足 $p > q$的那些*1*点的约化计数函数，用 $N^{1)}_E(r, 1; f)$表示 f和 g的满足 $p = q = 1$的那些*1*点的计数函数。同理，可以定义 $N_L(r, 1; g)$，$N^{1)}_E(r, 1; g)$。类似地，对于$a \in \mathbb{C}$，可以定义 $N_L(r, a; f)$ 和 $N_L(r, a; g)$。

Definition 4.2. [**12, 13**]设 f、 g共用 $(a, 0)$。我们用 $N_*(r, \overline{a}; f, g)$表示 f 中那些 a点的约化计数函数，这些点的重数与 g中相应 a点的重数不同。

显然

$$\overline{N}_*(r, a; f, g) \equiv \overline{N}_*(r, a; g, f) \text{ and } \overline{N}_*(r, a; f, g) = \overline{N}_L(r, a; f) + \overline{N}_L(r, a; g).$$

Definition 4.3. [**13**]对于 $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，我们用 $N(r, a; f = 1)$表示 f 中简单 a 点的计数函数。对于正整数 m ，我们用$N(r, a; f \leqslant m)(N(r, a; f \geqslant m))$ 表示 f 中重数不大于（不小于） m 的 a 点的计数函数，其中每个 a 点均按其重数计数。

$\overline{N}(r, a; f \leqslant m)\,(N(r, \overline{a}; f \geqslant m))$ 的定义类似，其中在计数 f 的a点时，我们忽略其重数。

此外， $N(r, a; f < m)$ $N(r, a; f > m)$ $\overline{N}(r, a; f < m)$ and $\overline{N}(r, a; f > m)$ 的定义类似。

Definition 4。 4. [**2**]设 $a, b_1, b_2, \ldots, b_q \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。我们用 $N(r, a; f\ g \neq b_1, b_2, \ldots, b_q)$ 表示那些 a 点的计数函数，这些点属于 f，按重数计数，且不是当 $i = 1, 2, \ldots, q$ 时 g的 b_i 点。

对于两个非常数亚纯函数 F 和 G，令

$$H = \left(\frac{F''}{F'} - \frac{2F'}{F-1}\right) - \left(\frac{G''}{G'} - \frac{2G'}{G-1}\right). \tag{4.1}$$

Lemma 4。 1. [**22**]设 F, G 共享$(1, 0)$且 $H \neq 0$。于是

$$N^{1)}_E(r, 1; F) = N^{1)}_E(r, 1; G) \leqslant N(r, H) + S(r, F) + S(r, G).$$

Lemma 4.2。设 f 为非常数亚纯函数， $\mathcal{L}$ 为与集合 S 不计重共享的非常数 L函数，其中 $|S| \geqslant 3$。于是 $\rho(f) = \rho(\mathcal{L}) = 1$。此外， $S(r, f) = O(\log r) = S(r, \mathcal{L})$。

Proof. 按照定理 5 证明中采用的类似方法，[**23**, 见第 6], 页，我们可得 $\rho(f) = \rho(\mathcal{L}) = 1$。因此省略证明。由于 $\rho(f) = \rho(\mathcal{L}) = 1$，根据 $S(r, f)$ 的定义可得 $S(r, f) = O(\log r) = S(r, \mathcal{L})$。□

Lemma 4.3. 设 f、 g 是两个共享 *(1,t)* 的非常数亚纯函数，其中 $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。则

$$\overline{N}(r, 1; f) + \overline{N}(r, 1; g) \leqslant N^{1)}_E(r, 1; f) + (1 - t)\,\overline{N}_*(r, 1; f, g) + N(r, 1; f).$$

PROOF. 由于 f 和 g 共享 $(1,\ t)$，我们可观察到

$$\overline{N}(r,1;f)+\overline{N}(r,1;g)=2\overline{N}(r,1;f).$$

情况一： 假设 $t\geqslant 2$。
设 z_0 是 f 的一个 1 点，其重数为 p； g 的一个 1 点，其重数为 q。由于 f 和 g 共享 $(1,t)$，因此 $p\leqslant t$ 推出 $p=q$。

子情况一：当 $p\leqslant t$时。若 $p=1$，则在 $N^{1)}_E(r,1;f)$ 和 $N(r,1;f)$ 中，z_0各计一次。另一方面，z_0不计入 $N_*(r,1;f,g)$。再若 $p\neq 1$，则 z_0在 $N(r,1;f)$ 中计 p 次（即至少计 2 次）；在这种情况下，z_0不计入 $N^{1)}_E(r,1;f)$ 和 $N_*(r,1;f,g)$。因此，z_0在 $N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)N_*(r,1;f,g)+N(r,1;f)$ 中至少计 2 次。

子情形 - II：当 $p\geqslant(t+1)$ 时。若 $p=q$，则 z_0 在 $N(r,1;f)$ 中计数 p 次（即至少 3 次），而 z_0在 $N^{1)}_E(r,1;f)$ 和 $N_*(r,1;f,g)$ 中不计数。当 $p\neq q$ 时，则 z_0在 $(1-t)N_*(r,1;f,g)$ 中计数 $(1-t)$ 次，并在 $N(r,1;f)$ 中计数 p次（即至少 $t+1$次），而 z_0在 $N^{1)}_E(r,1;f)$ 中不计数；即，z_0在 $N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)N_*(r,1;f,g)+N(r,1;f)$ 中至少计数 $(1-t)+(t+1)=2$次。

现在，由于 z_0 在 $N(r,1;f)$ 和 $+N(r,1;g)$中各被计数两次。因此，在任何子情形中，我们都有

$$\overline{N}(r,1;f)+\overline{N}(r,1;g)\leqslant N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)\,\overline{N}_*(r,1;f,g)+N(r,1;f).$$

情况二： 假设 $t=1$。
那么显然

$$\begin{aligned}2\overline{N}(r,1;f) &\leqslant N(r,1;f|=1)+N(r,1;f)\\ &= N^{1)}_E(r,1;f)+N(r,1;f).\end{aligned}$$

因此，对于 $t=1$

$$\overline{N}(r,1;f)+\overline{N}(r,1;g)\leqslant N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)\,\overline{N}_*(r,1;f,g)+N(r,1;f).$$

情形三： 假设 $t=0$。
设 z_0 是 f 中重数为 p 的一个 1 点，也是 g 中重数为 q的一个 1 点。若 $p=q=1$，则 z_0 在 $2N(r,1;f)$ 和 $N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)N_*(r,1;f,g)+N(r,1;f)$ 中均被计数两次，因为 $N_*(r,1;f,g)$ 不计入 z_0。若 $p=1,\ q\neq 1$，则 z_0 在 $2N(r,1;f)$ 中也被计数两次，并且

$N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)N_*(r,1;f,g)+N(r,1;f)$，如本例中，$N^{1)}_E(r,1;f)$ 不计入 z_0。最后，如果 $p\neq 1$，那么 z_0 在 $(1-t)N_*(r,1;f,g)+N(r,1;f)$ 中至少被计数 2 次，而 z_0 不计入 $N^{1)}_E(r,1;f)$。Therefore, for $t=0$,

$$\overline{N}(r,1;f)+\overline{N}(r,1;g)\leqslant N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)\,\overline{N}_*(r,1;f,g)+N(r,1;f).$$

因此，无论如何，

$$\overline{N}(r,1;f)+\overline{N}(r,1;g)\leqslant N^{1)}_E(r,1;f)+(1-t)\,\overline{N}_*(r,1;f,g)+N(r,1;f).$$

□

LEMMA 4.4. 设 $F^*-1=\dfrac{a_n\prod_{i=1}^{n}(f-w_i)}{\psi(f)}$ 和 $G^*-1=\dfrac{a_n\prod_{i=1}^{n}(\mathcal{L}-w_i)}{\psi(\mathcal{L})}$，其中 f 是非常数亚纯函数，$\mathcal{L}$ 是非常数 L 函数，$a_n, w_i \in \mathbb{C}-\{0\}$；$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$ 和 $\psi(z)$ 是次数小于 n 的多项式，且 $\psi(w_i)\neq 0$；$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$。进一步假设 F^* 和 G^* 共享 $(1,t)$，其中 $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。那么

$$\overline{N}_L(r,1;F^*)\leqslant\frac{1}{t+1}\left[\overline{N}(r,\infty;f)+\overline{N}(r,0;f)-N_1(r,0,f')\right]+O(\log r),$$

其中 $N_1(r、0、f')=N(r、0;f'|f\neq 0、w_1、w_2、...、w_n)$。对于 $N_L(r、1;G^*)$，也有类似的表达式。

PROOF. 由于 F^* 和 G^* 共享（1，t），因此利用第一基本定理可得

$$\begin{aligned}
\overline{N}_L(r,1;F^*) &\leqslant \overline{N}(r,1;F^*|\geqslant t+2)\\
&\leqslant \frac{1}{t+1}\left[N(r,1;F^*)-\overline{N}(r,1;F^*)\right]\\
&\leqslant \frac{1}{t+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(N(r,w_i;f)-\overline{N}(r,w_i;f)\right)\right]\\
&\leqslant \frac{1}{t+1}\left[N(r,0;f'|f\neq 0)-N_1(r,0,f')\right]\\
&\leqslant \frac{1}{t+1}\left[N(r,0;\frac{f'}{f})-N_1(r,0,f')\right]\\
&\leqslant \frac{1}{t+1}\left[N(r,\infty;\frac{f}{f'})-N_1(r,0,f')\right]+O(\log r)\\
&\leqslant \frac{1}{t+1}\left[N(r,\infty;\frac{f^{'}}{f})-N_1(r,0,f')\right]+O(\log r)\\
&\leqslant \frac{1}{t+1}\left[\overline{N}(r,\infty;f)+\overline{N}(r,0;f)-N_1(r,0,f')\right]+O(\log r)
\end{aligned}$$

这就证明了该引理。 □

LEMMA 4.5. 设 $P(z)$、S 和 s 分别如（*1.4*）、（*1.3*）和（*1.5*）所定义。假设 f、$\mathcal{L}$ 共享 $(S、t)$，其中 $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 f 分别为非常数亚纯函数和 L-函数。进一步假设

$$\mathcal{F}=\frac{P(f)-a_0}{-a_0}\ \ and\ \ \mathcal{G}=\frac{P(\mathcal{L})-a_0}{-a_0}. \tag{4.2}$$

于是，当 $t\geqslant 2$ 时，对于 $n\geqslant 2s+5$；当 $t=1$ 时，对于 $n\geqslant 2s+6$；当 $t=0$ 时，对于 $n\geqslant 2s+11$，我们得到如下结果。

$$\frac{1}{\mathcal{F}-1}=\frac{A}{\mathcal{G}-1}+B,$$

其中 $A(\neq 0)$ $B\in\mathbb{C}$。

Proof. 根据引理的假设，显然有 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 共享 $(1,t)$，并且

$$\mathcal{F}^{'}=-\frac{na_n}{a_0}\prod_{i=1}^{s}(f-\eta_i)^{m_i}f^{'};\quad \mathcal{G}^{'}=-\frac{na_n}{a_0}\prod_{i=1}^{s}(\mathcal{L}-\eta_i)^{m_i}\mathcal{L}^{'},$$

其中 $\sum_{i=1}^{s} m_i=n-1$。现在考虑由 (4.1) 给出的 H，其中 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$。

情况一： 假设 $H\not\equiv 0$。那么，很容易验证 H 只有简单极点，这些极点来自以下点。

(i) η_i 个 f 和 $\mathcal{L}$ 的点。(ii) f 和 $\mathcal{L}$ 的极点。(iii) $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的 1 点，且重数不同。(iv) $f^{'}$ 和 $\mathcal{L}^{'}$ 中不是 $\prod_{i=1}^{s}(f-\eta_i)(\mathcal{F}-1)$ 和 $\prod_{i=1}^{s}(\mathcal{L}-\eta_i)(\mathcal{G}-1)$ 的零点的那些零点

respectively.

因此，我们得到

$$\begin{aligned}(4.3)\quad N(r,H) &\leqslant \sum_{i=1}^{s}\left[\overline{N}(r,\eta_i;f)+\overline{N}(r,\eta_i;\mathcal{L})\right]+\overline{N}(r,\infty;f)+\overline{N}(r,\infty;\mathcal{L})\\ &\quad+\overline{N}_{*}(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+\overline{N}_0(r,0,f^{'})+\overline{N}_0(r,0,\mathcal{L}^{'}),\end{aligned}$$

其中，$\overline{N}_0(r,0,f^{'})$ 和 $\overline{N}_0(r,0,\mathcal{L}^{'})$ 分别表示 $f^{'}$ 和 $\mathcal{L}^{'}$ 中不是 $\prod_{i=1}^{s}(f-\eta_i)(\mathcal{F}-1)$ 和 $\prod_{i=1}^{s}(\mathcal{L}-\eta_i)(\mathcal{G}-1)$ 零点的那些零点的约化计数函数。利用第二基本定理可得

$$\begin{aligned}(4.4)\qquad &(n+s-1)T(r,f)\\ &\leqslant \overline{N}(r,1;\mathcal{F})+\sum_{i=1}^{s}\overline{N}(r,\eta_i;f)+\overline{N}(r,\infty;f)-N_0(r,0,f^{'})+S(r,f),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4.5)\qquad &(n+s-1)T(r,\mathcal{L})\\ &\leqslant \overline{N}(r,1;\mathcal{G})+\sum_{i=1}^{s}\overline{N}(r,\eta_i;\mathcal{L})+\overline{N}(r,\infty;\mathcal{L})-N_0(r,0,\mathcal{L}^{'})+S(r,\mathcal{L}).\end{aligned}$$

记 $T(r)$ 为 $=\max\{T(r,f)\ T(r,\mathcal{L})\}$。现在结合 (4.4) 和 (4.5)，并利用引理 **4.2** 以及 $N(r,\infty;\mathcal{L})=O(\log r)$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}(4.6)\qquad &(n+s-1)\{T(r,f)+T(r,\mathcal{L})\}\\ &\leqslant \overline{N}(r,1;\mathcal{F})+\overline{N}(r,1;\mathcal{G})+\sum_{i=1}^{s}\left[\overline{N}(r,\eta_i;f)+\overline{N}(r,\eta_i;\mathcal{L})\right]\\ &\quad+\overline{N}(r,\infty;f)-N_0(r,0,f^{'})-N_0(r,0,\mathcal{L}^{'})+O(\log r).\end{aligned}$$

由引理**4.3**、引理 **4.2**、引理 **4.1**、**(4.3)**，并注意到 $N(r,\ \infty;\ \mathcal{L}) = O(\log\ r)$，现在可得

$$\begin{aligned}(4.7)\qquad & \overline{N}(r,1;\mathcal{F})+\overline{N}(r,1;\mathcal{G})\\ \leqslant\ & (s+1)T(r,f)+sT(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+N(r,1;\mathcal{F})\\ & +\overline{N}_0(r,0,f')+\overline{N}_0(r,0,\mathcal{L}')+O(\log r).\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(4.8)\qquad & \overline{N}(r,1;\mathcal{F})+\overline{N}(r,1;\mathcal{G})\\ \leqslant\ & (s+1)T(r,f)+sT(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+N(r,1;\mathcal{G})\\ & +\overline{N}_0(r,0,f')+\overline{N}_0(r,0,\mathcal{L}')+O(\log r).\end{aligned}$$

Now from (4.6) , (4.7) and using $T(r,\mathcal{F}) = nT(r,f)$ we get

$$\begin{aligned}(n+s-1)\{T(r,f)+T(r,\mathcal{L})\}\ \leqslant\ & (2s+2)T(r,f)+2sT(r,\mathcal{L})\\ & +(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+nT(r,f)+O(\log r);\end{aligned}$$

即,

$$\begin{aligned}(4.9)\qquad & nT(r,\mathcal{L})\\ \leqslant\ & (s+3)T(r,f)+(s+1)T(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+O(\log r).\end{aligned}$$

.

此外，由（**4.6**）、（**4.8**）并利用 $T(r,\mathcal{G}) = nT(r,\mathcal{L})$，我们得到

$$\begin{aligned}(n+s-1)\{T(r,f)+T(r,\mathcal{L})\}\ \leqslant\ & (2s+2)T(r,f)+2sT(r,\mathcal{L})+\\ & (2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+nT(r,\mathcal{L})+O(\log r);\end{aligned}$$

即,

$$\begin{aligned}(4.10)\qquad & nT(r,f)\\ \leqslant\ & (s+3)T(r,f)+(s+1)T(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+O(\log r).\end{aligned}$$

.

因此，由（**4.9**）和（**4.10**）可得,

$$(4.11)\qquad nT(r)\leqslant(2s+4)T(r)+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+O(\log r).$$

现在对于 $t\geqslant 2$；由 **(4.11)** 可得

$$nT(r)\leqslant(2s+4)T(r)+O(\log r),$$

这对于 $n \geqslant 2s+5$ 是一个矛盾。当 $t<2$
时，由 (4.11) 可得

$$\begin{aligned}(4.12)\qquad nT(r) &\leqslant (2s+4)T(r)+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathcal{F},\mathcal{G})+O(\log r)\\ &\leqslant (2s+4)T(r)+\frac{(2-t)}{t+1}[\overline{N}(r,\infty;f)+\overline{N}(r,0;f)\\ &\quad +\overline{N}(r,\infty;\mathcal{L})+\overline{N}(r,0;\mathcal{L})]+O(\log r)\\ &\leqslant \left(2s+4+\frac{3(2-t)}{t+1}\right)T(r)+O(\log r).\end{aligned}$$

现在对于 $t=1$；由 (4.12) 得到

$$nT(r)\leqslant (2s+4+\frac{3}{2})T(r)+O(\log r),$$

这对于 $n \geqslant 2s+6$ 是一个矛盾。
对于 $t=0$；由 (4.12) 得到

$$nT(r)\leqslant (2s+4+6)T(r)+O(\log r),$$

这对于 $n \geqslant 2s+11$ 是一个矛盾。

情况二： 设 $H\equiv 0$。现在对 (4.1) 积分，我们得到

$$\frac{1}{\mathcal{F}-1}=\frac{A}{\mathcal{G}-1}+B,\quad \text{where } A(\neq 0),B\in\mathbb{C}.$$

□

LEMMA 4.6. 设 $R(z)$、S 和 l 分别由（*1.6*）、（*1.7*）和（*1.8*）定义。假设 f、$\mathcal{L}$ 分担 $(S$、$t)$，其中 $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 f 分别为一个非常数亚纯函数和一个 L- 函数。进一步假设

$$(4.13)\qquad \mathbb{F}=R(f)\ \ and\ \ \mathbb{G}=R(\mathcal{L}).$$

于是，当 $t\geqslant 2$ 时，对于 $n\geqslant 2l+5$；当 $t=1$ 时，对于 $n\geqslant 2l+6$；以及当 $t=0$ 时，对于 $n\geqslant 2l+11$，我们得到如下结果。

$$\frac{1}{\mathbb{F}-1}=\frac{A}{\mathbb{G}-1}+B,$$

其中 $A(\neq 0)\ B\in\mathbb{C}$。

PROOF. 显然，$\mathbb{F},\mathbb{G}$ 分担（1, t），由（1.8）可得

$$\mathbb{F}'=\frac{\gamma\prod_{j=1}^{l}(f-\delta_j)^{q_j}}{\prod_{j=1}^{k}(f-\beta_j)^{p_j}}f',\qquad \mathbb{G}'=\frac{\gamma\prod_{j=1}^{l}(\mathcal{L}-\delta_j)^{q_j}}{\prod_{j=1}^{k}(\mathcal{L}-\beta_j)^{p_j}}\mathcal{L}'.$$

现在考虑由（4.1）给出的 H，其中 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{G}$。

情况一： 假设 $H\neq 0$。由于 H 只有简单极点，且在此情况下，这些极点来自以下各点。

(i) f 和 $\mathcal{L}$ 的 δ_j 点。(ii) f_l 和 $\mathcal{L}$ 的极点。(iii) $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{G}$ 中重数不同的 1 点。(iv) $f^{'}$ 和 $\mathcal{L}^{'}$ 中不是 $\prod_{j=1}^{l}(f-\delta_j)(\mathbb{F}-1)$ 和 $\prod_{j=1}^{l}(\mathcal{L}-\delta_j)(\mathbb{G}-1)$ respectively.

因此，我们得到

$$\begin{aligned}(4.14)\ N(r,H) \leqslant\ & \overline{N}(r,\infty;f)+\sum_{j=1}^{l}\overline{N}(r,\delta_j;f)+\overline{N}_0(r,0;f')+\overline{N}(r,\infty;\mathcal{L})\\ &+\sum_{j=1}^{l}\overline{N}(r,\delta_j;\mathcal{L})+\overline{N}_0(r,0;\mathcal{L}')+\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})\\ &+S(r,f)+S(r,\mathcal{L}),\end{aligned}$$

其中，我们用 $\overline{N}_0(r,\ 0;\ f')$ 表示 f' that不是 $(\mathbb{F}-1)$ $\prod(f-\delta_j)^{q_j}$的零点的零点的约化计数函数， $N_0(r,\ 0;\ \mathcal{L}')$ 的定义类似。现在利用$_{j=1}$第二基本定理可得

$$\begin{aligned}(4.15)\qquad & (n+l-1)T(r,f)\\ \leqslant\ & \overline{N}(r,1;\mathbb{F})+\sum_{i=1}^{l}\overline{N}(r,\delta_i;f)+\overline{N}(r,\infty;f)-N_0(r,0,f^{'})+S(r,f),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4.16)\qquad & (n+l-1)T(r,\ \mathcal{L})\\ \leqslant\ & \overline{N}(r,1;\mathbb{G})+\sum_{i=1}^{l}\overline{N}(r,\delta_i;\mathcal{L})+\overline{N}(r,\infty;\mathcal{L})-N_0(r,0,\mathcal{L}^{'})+S(r,\mathcal{L}).\end{aligned}$$

记 $T(r)=\max\{T(r,\ f)\ T(r,\ \mathcal{L})\}$。结合 (4.15)、(4.16)，并利用引理 **4.2** 以及 $N(r,\infty;\ \mathcal{L})=O(\log\ r)$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}(4.17)\qquad & (n+l-1)\{T(r,f)+T(r,\mathcal{L})\}\\ \leqslant\ & \overline{N}(r,1;\mathbb{F})+\overline{N}(r,1;\mathbb{G})+\sum_{i=1}^{l}\left[\overline{N}(r,\delta_i;f)+\overline{N}(r,\delta_i;\mathcal{L})\right]\\ &+\overline{N}(r,\infty;f)-N_0(r,0,f^{'})-N_0(r,0,\mathcal{L}^{'})+O(\log r).\end{aligned}$$

现在由引理 **4.3**、引理 **4.2**、引理 **4.1** 和 (4.14)，并注意到 $N(r,\infty;\ \mathcal{L})=O(\log\ r)$，可得

$$\begin{aligned}(4.18)\qquad & \overline{N}(r,1;\mathbb{F})+\overline{N}(r,1;\mathbb{G})\\ \leqslant\ & (l+1)T(r,f)+lT(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})+N(r,1;\mathbb{F})\\ &+\overline{N}_0(r,0,f^{'})+\overline{N}_0(r,0,\mathcal{L}^{'})+O(\log r).\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(4.19)\qquad &\overline{N}(r,1;\mathbb{F})+\overline{N}(r,1;\mathbb{G})\\ \leqslant\ &(l+1)T(r,f)+lT(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})\\ &+N(r,1;\mathbb{G})+\overline{N}_0(r,0,f')+\overline{N}_0(r,0,\mathcal{L}')+O(\log r).\end{aligned}$$

现在由 (4.17)、(4.18)，并利用 $T(r,\mathbb{F})=nT(r,f)$，可得

$$\begin{aligned}(n+l-1)\{T(r,f)+T(r,\mathcal{L})\}\ \leqslant\ &(2l+2)T(r,f)+2lT(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})\\ &+nT(r,f)+O(\log r);\end{aligned}$$

也就是说,

$$\begin{aligned}(4.20)\qquad &nT(r,\mathcal{L})\\ \leqslant\ &(l+3)T(r,f)+(l+1)T(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})+O(\log r).\end{aligned}$$

此外，由 (4.17)、(4.19)，并利用 $T(r,\ \mathbb{G})=nT(r,\ \mathcal{L})$，可得

$$\begin{aligned}(n+l-1)\{T(r,f)+T(r,\mathcal{L})\}\ \leqslant\ &(2l+2)T(r,f)+2lT(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})\\ &+nT(r,\mathcal{L})+O(\log r);\end{aligned}$$

也就是说,

$$\begin{aligned}(4.21)\qquad &nT(r,f)\\ \leqslant\ &(l+3)T(r,f)+(l+1)T(r,\mathcal{L})+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})+O(\log r).\end{aligned}$$

因此，由 (4.20) 和 (4.21) 可得,

$$(4.22)\qquad nT(r)\leqslant(2l+4)T(r)+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})+O(\log r).$$

现在对于 $t\geqslant 2$；由 (4.22) 可得

$$nT(r)\leqslant(2l+4)T(r)+O(\log r),$$

这对于 $n\geqslant 2l+5$ 而言是一个矛盾。
当 $t<2$ 时，由（4.22）可得

$$\begin{aligned}(4.23)\qquad &nT(r)\\ \leqslant\ &(2l+4)T(r)+(2-t)\overline{N}_*(r,1;\mathbb{F},\mathbb{G})+O(\log r)\\ \leqslant\ &(2l+4)T(r)+\frac{(2-t)}{t+1}\overline{N}(r,\infty;f)+\overline{N}(r,0;f)+\overline{N}(r,\infty;\mathcal{L})\\ &+\overline{N}(r,0;\mathcal{L})+O(\log r)\\ \leqslant\ &\left(2l+4+\frac{3(2-t)}{t+1}\right)T(r)+O(\log r).\end{aligned}$$

现在对于 $t=1$；由 (4.23) 得到

$$nT(r)\leqslant(2l+4+\frac{3}{2})T(r)+O(\log r),$$

这对于 $n \geqslant 2l+6$ 是一个矛盾。
对于 $t=0$; 由 (4.23) 可得

$$nT(r) \leqslant (2l+4+6)T(r) + O(\log r),$$

这对 $n \geqslant 2l+11$ 是一个矛盾。

情况二： 假设 $H \equiv 0$。现在对 (4.1) 积分，得到

$$\frac{1}{\mathbb{F}-1} = \frac{A}{\mathbb{G}-1} + B, \quad \text{where } A(\neq 0), B \in \mathbb{C}.$$

□

LEMMA 4。7. [**21**]设 F 和 G 是两个非常数亚纯函数，使得

$$\frac{1}{F-1} = \frac{A}{G-1} + B,$$

其中 $A(\neq 0)$ $B \in \mathbb{C}$。若

$$\overline{N}(r,0;F) + \overline{N}(r,\infty;F) + \overline{N}(r,0;G) + \overline{N}(r,\infty;G) < T(r),$$

其中 $T(r) =$最大值$\{T(r,F)\ T(r,G)\}$. 那么，要么 $FG=1$，要么 $F=G$.

LEMMA 4.8. 令 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 由 *(4.2)* 定义。若 $p \geqslant 2$，则 $\mathcal{FG} \neq a$，其中 a 是非零复常数。

PROOF. 反之，假设 $\mathcal{FG} = a$。那么

$$\prod_{i=1}^{p}(f-\alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{p}(\mathcal{L}-\alpha_i)^{m_i} = a\left(\frac{a_0}{a_n}\right)^2 = a_1(say). \tag{4.24}$$

由 (4.24) 可知， f 的每个 α_i-点都是 $\mathcal{L}$ 的极点，反之亦然。
情况一： 令 $p \geqslant 4$。由于一个 L-函数至多有一个极点，根据 (4.24)，我们可以说 f 至少有三个 α_i-点，它们是皮卡例外值。也就是说，亚纯函数 f 至少漏掉 3 个值，因此 f 必为常数。这与我们的假设矛盾。
情况二： 令 $p=3$。与上述论证类似，我们可以说 f 漏掉两个值，例如 α_1， α_2。因此， f 的 α_3 点是 $\mathcal{L}$的极点。由于 $\mathcal{L}$只有一个极点，令 $z=1$ 为 f 的 α_3-点，其重数为 r ，同时也是 $\mathcal{L}$ 的极点，其重数为 u。那么 $m_3 r = nu$。由于 $u \geqslant 1$，所以 $r \geqslant \frac{n}{m_3}$; 即 $\frac{1}{r} \leqslant \frac{m_3}{n}$。因此，利用第二基本定理，我们得到

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leqslant \sum_{i=1}^{3} \overline{N}(r,\alpha_i;f) + S(r,f) \\ &\leqslant \frac{m_3}{n} N(r,\alpha_3;f) + O(\log r), \end{aligned}$$

这与 $m_3 < n$矛盾。
情形三： 令 $p=2$。

由于 L- 函数至多有一个极点，因此根据 (4.24)，我们可以说 f 至少遗漏一个 α_i-点，例如 α_1。

设 z_0 是 α_2 的 $\mathcal{L}$ 阶零点，则它将是 f 的 ν阶极点，使得 $rm_2 = \nu n$。由于 $\nu \geqslant 1$，所以 $r \geqslant \frac{n}{m_2}$；即 $\frac{1}{r} \leqslant \frac{m_2}{n}$.。现在，鉴于 N，使用第二基本定理 $T(r, \infty; \mathcal{L}) = O(\log r)$，我们得到

$$\begin{aligned} T(r,\mathcal{L}) &\leqslant \overline{N}(r,\alpha_1;\mathcal{L}) + \overline{N}(r,\alpha_2;\mathcal{L}) + \overline{N}(r,\infty;\mathcal{L}) + S(r,\mathcal{L}) \\ &\leqslant \frac{m_2}{n}T(r,\mathcal{L}) + O(\log r), \end{aligned}$$

这与 $n > m_2$矛盾。 □

LEMMA 4.9. 设 $\mathbb{F}$、$\mathbb{G}$ 如 *(4.13)* 中所定义。若

(a) $k \geqslant 2$，或(b) $k = 1$ 和 $n \geqslant 3b_1 + 1$，其中

$b_1 = gcd(m_1, n)$,

则 $\mathbb{F}\mathbb{G} \neq a$，其中 a 是非零复常数。

PROOF. 反过来，假设 $\mathbb{F}\mathbb{G} \equiv a$。那么

$$\frac{f^n}{\prod_{j=1}^{k}(f-\beta_j)^{m_j}} \cdot \frac{\mathcal{L}^n}{\prod_{j=1}^{k}(\mathcal{L}-\beta_j)^{m_j}} \equiv a\left(\frac{a_i}{a_n}\right)^2 = a^{'}(say), \tag{4.25}$$

因此

$$T(r,f) = T(r,\mathcal{L}) + O(1). \tag{4.26}$$

由 (4.25) 显然可知，β_j 点是 f 的零点，反之亦然。

(a) 设 $k \geqslant 2$。若 z_0 是 $\mathcal{L} - \beta_j$ 的一个重数为 p的零点，则 z_0 是 f 的一个重数为 q 的零点，使得 $m_j p = nq$；即 $p \geqslant \frac{n}{m_j}$。因此 $\overline{N}(r,\beta_j;\mathcal{L}) \leqslant \frac{m_j}{n}N(r,\beta_j;\mathcal{L})$.

因此，利用第二基本定理和 $N(r,\mathcal{L}) = O(\log r)$，可得

$$\begin{aligned} (k-1)T(r,\mathcal{L}) &\leqslant \sum_{j=1}^{k}\overline{N}(r,\beta_j;\mathcal{L}) + \overline{N}(r,\infty;\mathcal{L}) + S(r,\mathcal{L}) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k}\frac{m_j}{n}T(r,\mathcal{L}) + O(\log r) \\ &\leqslant (1-\frac{1}{n})T(r,\mathcal{L}) + O(\log r), \end{aligned}$$

这与 $k \geqslant 2$ 矛盾。

(b) 令 $k = 1$ 和 $gcd(n, m_1) = b_1$，因此 $gcd(n, n - m_1) = b_1$。由 (4.25) 可得

$$\frac{\mathcal{L}^n}{(\mathcal{L}-\beta_1)^{m_1}} = \frac{a^{'}(f-\beta_1)^{m_1}}{f^n}. \tag{4.27}$$

若 z_0 是 $\mathcal{L} - \beta_1$ 的一个重数为 p 的零点，则 z_0 是 f 的一个重数为

q 使得 $m_1p = nq$。由于 $gcd(n, m_1) = b_1$，因此对于某些 η、$\zeta \in \mathbb{N}$，有 $m_1 = b_1\eta$ 和 $n = b_1\zeta$，其中 $gcd(\eta, \zeta) = 1$。现在 $m_1p = nq$ 蕴含 $b_1\eta p = qb_1\zeta$；即 $\eta p = q\zeta$。由于 $gcd(\eta, \zeta) = 1$，所以 ζ 整除 p。因此 $p \geqslant \zeta$；即 $p \geqslant \frac{n}{b_1}$。因此，$N(r, \beta_1; \mathcal{L}) \leqslant \frac{b_1}{n}T(r, \overline{\mathcal{L}})$，类似地 $N(r, \beta_1; f) \leqslant \frac{b_1}{n}T(r, f)$。

又设 z_0 是 f 的一个重数为 ν的极点，则 z_0 将是 $\mathcal{L}$ 的一个重数为ξ 的零点，使得 $\nu(\underline{n - m_1}) = \xi n$。由于 $gcd(n, n - m_1) = b_1$，因此 $\frac{1}{\nu} \leqslant \frac{b_1}{n}$。所以$N(r, \infty; f) \leqslant \frac{b_1}{n}T(r, f)$。此外，我们知道$N(r, \infty; \mathcal{L}) = O(\log r)$。

现在由 (4.27) 可知，$N(r, 0; \mathcal{L}) = \overline{N}(r, \infty; f) + \overline{N}(r, \beta_1; f)$。现在结合 (4.26) 使用第二基本定理，得到

$$\begin{aligned} T(r, \mathcal{L}) &\leqslant \overline{N}(r, \beta_1; \mathcal{L}) + \overline{N}(r, \infty; \mathcal{L}) + \overline{N}(r, 0; \mathcal{L}) + S(r, \mathcal{L}) \\ &\leqslant \frac{3b_1}{n}T(r, \mathcal{L}) + O(\log r) \end{aligned}$$

这与 $n \geqslant 3b_1 + 1$ 矛盾。 □

5. 定理的证明

定理1.1的证明： 我们按以下步骤逐步证明该定理。

(i) $\Longrightarrow$ (ii)：设 f 为非常数亚纯函数，$\mathcal{L}$ 为非常数L函数，且 $E_f(S, t) = E_{\mathcal{L}}(S, t)$，其中 $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。考虑由(4.2)定义的$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 。则对于

(a) $t \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 2s + 5$，或(b)
$t = 1$ 和 $n \geqslant 2s + 6$，或(c)
$t = 0$ 和 $n \geqslant 2s + 11$,

由引理 *4.5* 可得 $\frac{1}{\mathcal{F} - 1} = \frac{A}{\mathcal{G} - 1} + B$，其中 $A(\neq 0)$ $B \in \mathbb{C}$。因此有

$$T(r, \mathcal{F}) = T(r, \mathcal{G}) + O(1). \tag{5.1}$$

由于

$$T(r, \mathcal{F}) = nT(r, f) + O(1) \ \ and \ \ T(r, \mathcal{G}) = nT(r, \mathcal{L}) + O(1). \tag{5.2}$$

因此(5.1)意味着

$$T(r, f) = T(r, \mathcal{L}) + O(1). \tag{5.3}$$

现在，结合 $N(r, \infty, \mathcal{L}) = O(\log r)$，利用(5.2)和(5.3)，可得

$$\begin{aligned} & \overline{N}(r, 0; \mathcal{F}) + \overline{N}(r, \infty; \mathcal{F}) + \overline{N}(r, 0; \mathcal{G}) + \overline{N}(r, \infty; \mathcal{G}) \\ \leqslant\ & pT(r, f) + pT(r, \mathcal{L}) + \overline{N}(r, \infty; f) + \overline{N}(r, \infty; \mathcal{L}) \\ =\ & (2p + 1)T(r, f) + O(\log r) \\ <\ & \frac{2p + 2}{n}T(r, \mathcal{F}) \\ \leqslant\ & T(r, \mathcal{F}) \quad [\because n \geqslant 2p + 2]. \end{aligned}$$

因此，鉴于引理 *4.7*，我们有 $\mathcal{F}\mathcal{G} = 1$ 或 $\mathcal{F} = \mathcal{G}$。

现在再次根据引理 *4.8*，我们有 $\mathcal{FG} \neq 1$。因此 $\mathcal{F} = \mathcal{G}$。也就是说，我们得到

$$P(f) = P(\mathcal{L}),$$

根据条件 (i)，可推出 $f = \mathcal{L}$。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：设 $P(f) = P(\mathcal{L})$。也就是说，

$$\prod_{i=1}^{p}(f-\alpha_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{p}(\mathcal{L}-\alpha_i)^{m_i},$$

这意味着 f 和 $\mathcal{L}$ 分担 $(S,\ \infty)$。因此，显然 f 和 $\mathcal{L}$ 对于 $(S,\ t)$ 分担 $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。由条件 (ii)，我们有 $f = \mathcal{L}$。

定理 1.2 的证明： 考虑由 (4.13) 定义的 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{G}$。设 f 为非常数亚纯函数，$\mathcal{L}$ 为非常数 L函数，使得 $E_f(S,\ t) = E_{\mathcal{L}}(S,\ t)$，其中 $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。那么 $\mathbb{F}$，$\mathbb{G}$ 分担 $(1,\ t)$。现在对于

(a) $t \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 2l+5$，或

(b) $t = 1$ 和 $n \geqslant 2l+6$，或

(c) $t = 0$ 和 $n \geqslant 2l+11$,

鉴于引理 *4.6*，我们有

$$\frac{1}{\mathbb{F}-1} = \frac{A}{\mathbb{G}-1} + B, \tag{5.4}$$

其中 $A(\neq 0)$ $B \in \mathbb{C}$。

由 (5.4) 可容易得到

$$T(r,f) = T(r,\mathcal{L}) + S(r,f). \tag{5.5}$$

现在，鉴于 $N(r,\overline{\ \infty,\ }\mathcal{L}) = O(\log\ r)$，由 (5.5) 以及 $\mathbb{F}$和 $\mathbb{G}$ 的构造可得

$$\begin{aligned}
& \overline{N}(r,0;\mathbb{F}) + \overline{N}(r,\infty;\mathbb{F}) + \overline{N}(r,0;\mathbb{G}) + \overline{N}(r,\infty;\mathbb{G}) \\
\leqslant\ & \overline{N}(r,0;f) + \sum_{j=1}^{k}\overline{N}(r,\beta_j;f) + \overline{N}(r,\infty;f) + \overline{N}(r,0;\mathcal{L}) + \sum_{j=1}^{k}\overline{N}(r,\beta_j;\mathcal{L}) + \overline{N}(r,\infty;\mathcal{L}) \\
\leqslant\ & (2+k)T(r,f) + (1+k)T(r,\mathcal{L}) + O(\log r) \\
=\ & (2k+3)T(r,f) + O(\log r) \\
<\ & \frac{2k+4}{n}T(r,\mathbb{F}) \\
\leqslant\ & T(r,\mathbb{F}) \ \ [\because\ \ n \geqslant 2k+4].
\end{aligned}$$

因此，鉴于引理 *4.7*，我们有 $\mathbb{FG} \equiv 1$ 或 $\mathbb{F} \equiv \mathbb{G}$。同样，鉴于引理 *4.9*，我们有 $\mathbb{FG} \not\equiv 1$。因此 $\mathbb{F} \equiv \mathbb{G}$；即，$R(f) = R(\mathcal{L})$。

因此我们得到 $E_f(S,\ t) = E_{\mathcal{L}}(S,\ t) \implies f = \mathcal{L}$，只要 $R(f) = R(\mathcal{L}) \implies f = \mathcal{L}$。也就是说，$(i) \implies (ii)$。

为证明 $(ii) \implies (i)$，假设 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t) \implies f = \mathcal{L}$。令$R(f) = R(\mathcal{L})$，则有 $R(f) - 1 = R(\mathcal{L}) - 1$；即，$P(f)\,\phi(f) = P(\mathcal{L})\,\phi(\mathcal{L})$ 。因此 f和 $\mathcal{L}$ 共享 (S,∞)，这意味着 $E_f(S,t) = E_{\mathcal{L}}(S,t)$，从而得到 $f = \mathcal{L}$。

推论 2.1 和推论2.2的证明： 推论 *2.1* 和推论*2.2* 的证明分别可直接由定理 *2.1*和定理*2.2*的证明推出，考虑到 $N(r,\infty;\ f) = O(\log\ r)$。因此我们略去证明。

ACKNOWLEDGEMENT. Sanjay Mallick 感谢“印度政府科学技术部科学与工程研究委员会”提供的经费支持，使其得以在项目编号 EEQ/2021/000316 下开展本研究。

Ripan Saha 感谢印度原子能部（DAE）提供的经费支持，使其得以开展本研究，项目编号为 [No. 0203/13(41)/2021-*R*&*D-II*/13168]。

参考文献

[1] T. C. Alzahary, *Meromorphic functions with weighted sharing of one set*,《庆北数学杂志》, 47(2007), 57-68. [2] A. Banerjee, *Uniqueness of meromorphic functions sharing two sets with finite weight II*,《淡江数学杂志》, 41(4)(2010), 379-392. [3] A. Banerjee, *Fujimoto's theorem - a further study*,《当代数学分析杂志》, 51(2016), 199-207. [4] A. Banerjee and A. Kundu, *Weighted value sharing and uniqueness problems concerning L-functions and certain meromorphic functions* **61** 2021 161 179 ,《立陶宛数学杂志》, ( ), – . [5] A. Banerjee and A. Kundu, *Uniqueness of L-function with special class of meromorphic function under restricted sharing of sets* 2103 00731 1 [ ] 1 2021 , arXiv: . v math.CV Mar . [6] A. Banerjee and S. Mallick, *On the characterisations of a new class of strong uniqueness polynomials generating unique range sets* **17** 2017 19 45 ,《计算方法与函数理论》, ( ), - . [7] G. Frank and M. Reinders, *A unique range set for meromorphic functions with 11 elements*,《复变函数理论与应用》, 37(1)(1998), 185-193. [8] F. Gross, *Factorization of meromorphic functions and some open problems*, 收录于 J.D. Buckholtz and T.J. Suffridge (编), *Complex Analysis*. 1976年5月18—22日在肯塔基大学举行的会议论文集,《数学讲义》第599卷，施普林格，柏林、海德堡，1977年，第51-69页。[9] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, 牛津数学专著丛书，克拉伦登出版社，牛津，1964年. [10] P. C. Hu and B. Q. Li, *A simple proof and strengthening of a uniqueness theorem for L-functions* **59** 2016 119 122 ,《加拿大数学通报》, ( ), - . [11] J. Kaczorowski and A. Perelli, *On the structure of the Selberg class, I:* $0 \leqslant d \leqslant 1$,《数学学报》, 182(1999), 207-241. [12] I. Lahiri, *Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions*,《名古屋数学杂志》, 161(2001), 193-206. [13] I. Lahiri, *Weighted value sharing and uniqueness of meromorphic functions*,《复变函数理论与应用》, 46(2001), 241-253. [14] B. Q. Li, *A result on value distribution of L-functions*,《美国数学会会刊》138(2010), 2071-2077. [15] S. Mallick, *On the existence of unique range sets generated by non-critically injective polynomials and related issues* **13** 4 2020 81 101 ,《第比利斯数学杂志》, ( ) ( ), - . [16] S. Mallick, *Unique Range Sets - A Further Study*, Filomat, 34 (5) (2020), 1499-1516.

[17] P. Sahoo and S. Haldar, *Results on L functions and certain uniqueness question of gross*, 《立陶宛数学杂志》, **60**(1)(2020), 80-91. [18] P. Sahoo and A. Sarkar, *On the uniqueness of L-function and meromorphic function sharing one or two sets* **66** 1 2020 81 92 ,

《亚历山德鲁·Ioan·库扎大学数学科学年鉴》, ( )( ), - . [19] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, in*: 阿马尔菲解析数论会议论文集（马约里，1989年），萨莱诺大学，萨莱诺，1992年，第367-385页。[20] J. Steuding, *Value distribution of L-functions*,《数学讲义》第1877卷，施普林格出版社，柏林，2007年。[21] H. X. Yi,*Meromorphic functions that share one or two values*,《复变函数理论与应用》, **28**(1995), 1-11. [22] H. X. Yi, *Meromorphic functions that share one or two values II*,《古代数学杂志》, **22**(1999), 264-272.[23] X. M. Li, Q. Q. Yuan and H. X. Yi, *Value distribution of L-functions and uniqueness questions of F. Gross* **58** 2 2018 249 262 ,

《立陶宛数学杂志》, ( )( ), - .Department of Mathematics,
Cooch Behar Panchanan Barma University, CoochBehar, India*Email address*:
sanjay.mallick1986@gmail.com, smallick.ku@gmail.comDepartment of Mathematics,
Cooch Behar Panchanan Barma University, CoochBehar, India*Email address*:
ripan.tfg.saha@gmail.com