arXiv:2512.17261v1 [math.OA] 19 Dec 2025

中心纯 C*-代数

FRANCESC PERERA, HANNES THIEL, EDUARD VILALTA

Abstract. 我们证明，可分的 C^*代数 A 是 $\mathcal{Z}$稳定的，当且仅当其未修正中心序列代数 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是纯的；而这又当且仅当 Kirchberg 中心序列代数 $F(A)$是纯的。

更一般地，我们证明， C^*代数 A是可分地 $\mathcal{Z}$稳定的，当且仅当对每个可分子代数 $B \subseteq A_{\mathcal{U}}$，相对中心序列代数 $B' \cap A_{\mathcal{U}}$ 都是纯的。

1. 引言

纯性和 $\mathcal{Z}$稳定性已成为 C^*代数结构理论与分类理论中的关键正则性性质。它们的核心作用在 Elliott 纲领的发展过程中逐渐显现出来；该纲领旨在对带有编码 K理论数据和迹数据的不变量的单核C^*代数进行分类。Toms [Tom08]构造了具有相同不变量却并不同构的此类代数实例：一个是 $\mathcal{Z}$稳定的（即它在张量意义下吸收 Jiang-Su 代数 $\mathcal{Z}$），另一个则不是。这些开创性的实例表明，在分类纲领中，额外的正则性假设不可或缺。

后续研究已证实， $\mathcal{Z}$-稳定性恰好是所需的额外正则性假设。事实上，经过数十年的研究，一系列里程碑式成果 [TWW17、EGLN25、GLN20] （另见近期方法 [CGS+23]及综述 [Whi23]）确立了这样一个结论：满足普适系数定理（UCT）的单、可分、核、 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*代数，可由其 Elliott 不变量分类至同构。此外，UCT 条件或许并非必要，也可能可以用基于 KK 理论的分类框架取代 [Sch24]。

纯性由 Winter 在其关于单、核 C^*-代数结构的奠基性工作 [Win12] 中提出，被定义为 Cuntz 半群中的严格比较与近乎可除性的结合（见第 3 节；另见[APTV24、APTV25] ，其中对纯 C^*-代数进行了更系统的研究）。它与 $\mathcal{Z}$-稳定性密切相关：Rørdam [Rør04] 证明了， $\mathcal{Z}$-稳定性一般蕴含纯性，而著名的 Toms–Winter 猜想 [Win18] 预测，对于单、可分、非初等、核 C^*-代数， $\mathcal{Z}$-稳定性与严格比较是等价的；这一点已在许多重要情形中得到验证 [Win12、Sat12、KR14、TWW15、Thi20]。由于纯性介于严格比较与 $\mathcal{Z}$-稳定性之间，该猜想特别预言，在此情形下纯性与 $\mathcal{Z}$-稳定性相一致。更广义地说，非单 Toms–Winter 猜想 [APTV24] 提出

Date: 2025年12月22日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 46L05；次要分类号 19K14、46L80、46L85。FP 和 EV 的部分研究经费由西班牙国家研究署通过项目 PID2023-147110NB-I00 提供，另由加泰罗尼亚自治区政府大学与研究委员会（项目编号 2021-SGR-01015）提供。FP 还获得了西班牙国家研究署通过 Severo Ochoa 和 Mar´ıa de Maeztu 研发卓越中心与单位计划（CEX2020-001084-M）提供的资助。HT 和 EV 的部分研究经费由克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会（KAW 2021.0140）提供。HT 的部分研究经费由瑞典研究委员会项目资助 2024-04200 提供。

可分、处处非散射的核 C^*-代数是 $\mathcal{Z}$-稳定的，当且仅当它是纯的。这一点已在某些情形中得到验证，例如见 [RT17，第 7.10、7.15] 定理。

超出核的情形，纯性仍发挥着重要作用。例如，约化自由群 C^*-代数是纯的 [AGKEP24]，尽管它们并非 $\mathcal{Z}$-稳定，这表明在 $\mathcal{Z}$-稳定性不适用的情况下，纯性仍能提供正则性。此外，稳定秩一情形下秩问题的解[Thi20, APRT22] 表明，对于稳定秩一的单非初等 C^*-代数——更一般地，对于稳定秩一的处处非散射 C^*-代数——纯性等价于严格比较。

本文建立了 $\mathcal{Z}$-稳定性与纯性之间的另一种密切联系。对于 $\mathbb{N}$上的自由超滤子 $\mathcal{U}$，记 $A_{\mathcal{U}}$ 为 A的超幂。我们的主要结果是：

定理 A (见 3.6)。设 A 是一个可分 C^*-代数。则下列命题等价：

(1) A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的。(2) 中心序列代数 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是纯的。(3) ***Kirchberg*** 中心序列代数 $F(A) := (A' \cap A_{\mathcal{U}})/(A^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}})$ 是纯的。

这表明，$\mathcal{Z}$-稳定性可以用中心纯性来刻画。这也说明，纯性可以被解释为 $\mathcal{Z}$-稳定性的非中心类比。

我们还得到了不可分推广。回顾一下，若任意可分子-C^*-代数都包含在某个可分的、$\mathcal{Z}$-稳定的子-C^*-代数中，则称 C^*-代数 A 是可分 $\mathcal{Z}$-稳定的；参见引理 2.3及其前面的注释。

定理 B (见 3.8)。设 A 是一个 C^*-代数。则以下条件等价：
(1) A 是可分 $\mathcal{Z}$-稳定的。(2) 对于每个可分子代数 $B \subseteq A_{\mathcal{U}}$，相对中心序列代数 $B' \cap A_{\mathcal{U}}$ 都是纯的。(3) 对于每个可分子代数 $B \subseteq A_{\mathcal{U}}$，商 $(B' \cap A_{\mathcal{U}})/(B^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}})$ 都是纯的。

在此过程中（第 2 节），我们汇集并精简了若干关于吸收强自吸收 C^*-代数的经典结果，其中有些结果此前尚未在文献中以如此一般的形式出现。在最后一节（第 4 节），我们研究中心序列代数中的可整除性。我们的结果表明，良好的中心可整除性蕴含良好的中心比较，因此$\mathcal{Z}$-稳定性已可由中心可除性来判定。事实上，对于一个 C^*-代数而言，只要其中心序列代数对某个固定的 n 满足 n-近乎可除性，它便是 $\mathcal{Z}$-稳定的（引理 4.4）。更弱的可除性，例如函数可除性，是否也足够，仍是一个开放问题（引理 4.5）。

2. Absorption of a strongly self-absorbing C^*-algebra

本节介绍若干基本结果，用以刻画可分的 C^*-代数何时张量吸收强自吸收的 C^*-代数 $\mathcal{D}$；参见引理 2.2。这些结果广为人知，但其中某些方面似乎迄今尚未见诸文献，或仅在附加假设（如含单位性）下才有论述。我们还给出了在不要求可分的情形下，可分 $\mathcal{D}$-稳定性的刻画；参见引理 2.6。

全文中，$\mathcal{U}$ 表示 $\mathbb{N}$上的自由超滤子。给定一个 C^*代数 A，我们用 $\prod_{\mathbb{N}} A$ 表示 A 中有界序列构成的 C^*代数，而 A的超幂记为 $A_{\mathcal{U}}$，定义为商 $\prod_{\mathbb{N}} A/c_{\mathcal{U}}(A)$，其中 $c_{\mathcal{U}}(A)$

是由下式给出的闭双边理想

$$c_{\mathcal{U}}(A) := \left\{ (a_n)_n \in \prod_{\mathbb{N}} A : \lim_{n\to\mathcal{U}} \|a_n\| = 0 \right\}.$$

我们通过自然嵌入 $A \to A_{\mathcal{U}}$ 将 A 视为 $A_{\mathcal{U}}$ 的子代数，该嵌入将元素 $a \in A$ 映射为常值序列 $(a,\ a,\ \ldots) \in \prod_{\mathbb{N}} A$ 在 $A_{\mathcal{U}}$ 中的像。A 的中心序列代数定义为 $A_{\mathcal{U}}$ 中 A 的交换子，记作 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$。注意，序列 $(a_n)_n \in \prod_{\mathbb{N}} A$ 在 $A_{\mathcal{U}}$ 中的像属于 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} \|a_n b - b a_n\| = 0$$

对每个 $b \in A$ 都成立。

$A_{\mathcal{U}}$ 中 A 的湮灭子（记作 $A^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}}$）是满足 $bA = \{0\} = Ab$ 的元素 $b \in A_{\mathcal{U}}$ 所构成的集合。这是 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 中一个闭双边理想，而*Kirchberg* 中心序列代数为 $F(A) := (A' \cap A_{\mathcal{U}})/(A^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}})$；参见 [Kir06，定义 1.1]。为强调 $F(A)$ 与 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 的区别，我们有时将后者称为未修正中心序列代数。

如果 A 是含单位元的，那么 $A^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}} = \{0\}$，于是得到 $F(A) = A' \cap A_{\mathcal{U}}$；但一般而言，$F(A)$ 是 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 的真商。如果 A 是 σ-含单位元的，那么 $F(A)$ 是含单位元的。

含单位元的可分 C^*-代数 $\mathcal{D}$ 若满足 $\mathcal{D} \neq \mathbb{C}$，且存在一个 $*$-同构 $\mathcal{D} \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$，它与 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \otimes 1_{\mathcal{D}}$ 近似酉等价，则称其为强自吸收；参见 [TW07，定义 1.3]。已知强自吸收 C^*-代数自动是单代数且为核代数，目前已知的例子只有 Jiang-Su 代数 $\mathcal{Z}$、Cuntz代数 $\mathcal{O}_2$ 和 $\mathcal{O}_\infty$、无限型 UHF代数，以及 $\mathcal{O}_\infty$ 与无限型 UHF代数的张量积。对于 $\mathcal{D}$强自吸收，若 C^*-代数 A 满足 $A \cong A \otimes \mathcal{D}$，则称其为 $\mathcal{D}$-稳定。

下一个结果是民间常识。只要 A是可分的，其逆命题也成立；参见引理 2.2。

引理 2.1。设 $\mathcal{D}$ 是一个强自吸收 C^*-代数，并设 A 是一个（不一定可分的）含幺 C^*-代数，且它是 $\mathcal{D}$-稳定的。那么存在一个含幺嵌入 $\mathcal{D} \to A' \cap A_{\mathcal{U}}$。

证明。含幺嵌入序列

$$\varphi_n : \mathcal{D} \to A \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \otimes \cdots, \quad d \mapsto 1_A \otimes 1_{\mathcal{D}} \otimes \cdots_n \otimes 1_{\mathcal{D}} \otimes d \otimes 1_{\mathcal{D}} \otimes \cdots$$

在如下意义下是近似中心的：

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d)a - a\varphi_n(d)\| = 0.$$

对每个 $d \in \mathcal{D}$和 $a \in A \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \otimes \cdots$。利用

$$A \cong A \otimes \mathcal{D} \cong A \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \otimes \cdots,$$

序列 $(\varphi_n)_n$ 诱导出一个含幺嵌入 $\mathcal{D} \to A' \cap A_{\mathcal{U}}$。 □

下一个结果是专家们熟知的。(1) 与 (3) 等价性由 [TW07, 定理 2.2] 证明，其依据是 Rørdam 近似交错定理 [Rør02, 定理 7.2.2]；另见 [KR15, 定理 2.5]。据我们所知，关于非幺 C^*-代数，(1) 与 (4) 等价性此前仅在 [Naw13, 命题 5.1], 中针对 Jiang-Su 代数的张量吸收出现过；我们改编 Nawata 的论证，得到一般性结果。一个关键要素是 Winter 的结果：强自吸收 C^*-代数是K_1-单射的 [Win11]；另见 Kirchberg 关于张量吸收的结果 [Kir06, 命题 4.11]。对于 C^*-代数 A，我们用 $M(A)$ 表示其乘子代数。

定理 2.2. 设 A 是一个可分 C^*-代数，且 $\mathcal{D}$ 是一个强自吸收 C^*-代数。则以下命题等价：

(1) C^*-代数 A是 $\mathcal{D}$-稳定的。(2) 存在一个 $\mathcal{D}$-稳定的 C^*-代数 B，满足 $A \subseteq B \subseteq M(A)$ 和 $1_{M(A)} \in B$。(3) 存在一个含幺 $*$-同态 $\mathcal{D} \to A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}$。(4) 存在一个含幺 $*$-同态 $\mathcal{D} \to F(A)$。

证明。 我们证明蕴含关系‘(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)’。

(1)⇒(2)：假设 A 是 $\mathcal{D}$-稳定的，并固定一个 $*$-同构 $\varphi\colon A \to A \otimes \mathcal{D}$。这诱导出一个 $*$-同构 $M(\varphi)\colon M(A) \to M(A \otimes \mathcal{D})$。令 $\iota\colon A \to M(A)$ 和$\iota'\colon A \otimes \mathcal{D} \to M(A \otimes \mathcal{D})$ 表示自然包含。于是 $\iota \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$将 $A \otimes \mathcal{D}$识别为 $M(A) \otimes \mathcal{D}$中的本质闭理想。根据乘子代数的泛性质，我们得到一个（唯一的）含幺单射 $*$-同态 $\psi\colon M(A) \otimes \mathcal{D} \to M(A \otimes \mathcal{D})$，使得 $\iota' = \psi \circ (\iota \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}})$。具体情形如下方交换图所示：

$$\begin{array}{ccccc} A & & \xrightarrow{\qquad\qquad\iota\qquad\qquad} & & M(A) \\ \cong\downarrow & \varphi & & & \cong\downarrow M(\varphi) \\ A \otimes \mathcal{D} & \xrightarrow{\iota \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}}} & M(A) \otimes \mathcal{D} & \xrightarrow{\psi} & M(A \otimes \mathcal{D}). \end{array}$$

所需的代数为 $B := M(\varphi)^{-1}(\psi(M(A) \otimes \mathcal{D}))$。

(2)⇒(3)：令 B 为一个具有 $A \subseteq B \subseteq M(A)$ 和 $1_{M(A)} \in B$ 的 $\mathcal{D}$-稳定 C^*-代数。应用引理 2.1，可得一个含幺 $*$-同态 $\mathcal{D} \to B' \cap B_{\mathcal{U}}$。将其与自然包含 $A' \cap B_{\mathcal{U}} \subseteq A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}$复合，便得到所需的映射

$$\mathcal{D} \to A' \cap B_{\mathcal{U}} \subseteq A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}.$$

(3)⇒(4)：令 $(e_n)_n$ 为 A 中的一个压缩近似单位。这诱导出一个（良定义的）压缩线性映射 $M(A)_{\mathcal{U}} \to A_{\mathcal{U}}$：将 $[(x_n)_n] \in M(A)_{\mathcal{U}}$映射到 $[(e_n x_n)_n] \in A_{\mathcal{U}}$，其限制给出一个映射 $\pi_0\colon A' \cap M(A)_{\mathcal{U}} \to A' \cap A_{\mathcal{U}}$。

虽然 π_0 不一定是乘法的，但对于所有 x，$y \in A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}$，我们有 $\pi_0(xy) - \pi_0(x)\pi_0(y) \in A^{\perp}$。由此可知，$\pi_0$ 与商映射 $A' \cap A_{\mathcal{U}} \to F(A)$ 的复合是一个 $*$-同态 $\pi\colon A' \cap M(A)_{\mathcal{U}} \to F(A)$。可以证明，$\pi$ 是满射，而且与 A 中压缩近似单位的选取无关。

现在，若存在一个含单位元的 $*$-同态 $\mathcal{D} \to A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}$，那么通过与 π 复合，我们得到一个含单位元的 $*$-同态 $\mathcal{D} \to F(A)$。

(4)⇒(1)：根据假设，存在一个含单位元的 $*$-同态 $\alpha\colon \mathcal{D} \to F(A)$。为验证 $A \cong A \otimes \mathcal{D}$，我们考虑 $M(A \otimes \mathcal{D})$ 的子代数 $A \otimes 1$，它诱导出嵌入 $A \otimes 1 \subseteq (A \otimes 1)_{\mathcal{U}} \subseteq M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}}$。我们将证明存在一个酉元序列 $(u_n)_n$，属于 $(A \otimes 1)' \cap M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}\big(u_n b u_n^*, (A \otimes 1)_{\mathcal{U}}\big) = 0$$

对所有 $b \in A \otimes \mathcal{D} \subseteq M(A \otimes \mathcal{D}) \subseteq M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}}$ 均成立。由 Rørdam 近似交错定理 [Rør02, 命题 7.2.1]，可得 $A \cong A \otimes \mathcal{D}$。

为求出 $(A \otimes 1)' \cap M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}}$ 中的酉元，我们考虑商

$$C := \Big(\big(A \otimes 1\big)' \cap M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}} \Big) \,/\, \Big(\big(A \otimes 1\big)^{\perp} \cap M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}} \Big),$$

并令 $\pi\colon (A \otimes 1)' \cap M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}} \to C$表示商映射。子代数$1 \otimes \mathcal{D} \subseteq M(A \otimes \mathcal{D}) \subseteq M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}}$包含在 $A \otimes 1$的交换子中，由此定义了一个含单位元的 $*$-同态

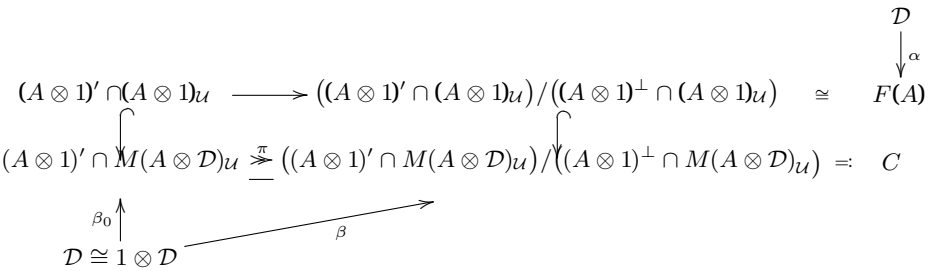
$$\beta_0\colon \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} 1 \otimes \mathcal{D} \to (A \otimes 1)' \cap M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}}.$$

与 π 复合后，我们得到一个含单位元的 $*$-同态 $\beta := \pi \circ \beta_0 \colon \mathcal{D} \to C$。

我们也可以将 α 视为一个以 C为陪域的映射。具体而言，记 $\tilde{\pi} \colon A' \cap M(A)_{\mathcal{U}} \to F(A)$ 为在“(3)⇒(4)”这一蕴含的证明中构造的满射 $*$-同态。可以证明，$\tilde{\pi}$的核为 $A^{\perp} \cap M(A)_{\mathcal{U}}$，由此得到一个自然的 $*$-同构

$$F(A) \cong (A' \cap M(A)_{\mathcal{U}})/(A^{\perp} \cap M(A)_{\mathcal{U}}).$$

这使我们能够将 $F(A)$视为 C 的自然子代数；通过这一识别，我们有 $\alpha \colon D \to C$。以下图示展示了这一情形：



容易验证，映射 $\alpha, \beta \colon \mathcal{D} \to C$ 具有交换的像，并且由于 $\mathcal{D}$是核的，我们得到一个保单位元的 $*$-同态 $\alpha \otimes \beta \colon \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \to C$。根据强自吸收的定义，存在 $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ 中的一列酉元 $(w_n)_n$，使得对于所有 $x, y \in \mathcal{D}$，$\lim_{n\to\infty} w_n(x \otimes y)w_n^* = y \otimes x$（称 $\mathcal{D}$具有近似内翻转）。根据 [TW07，命题 1.13]，，酉元 w_n 可以选为在 $K_1(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D})$ 中平凡。根据 [Win11，定理 3.1]，，每个强自吸收的 C^*-代数本身都是 $\mathcal{Z}$-稳定的，因此它是 K_1-单射的。这意味着酉元 w_n属于 $\mathcal{U}_0(\mathcal{D}\otimes\mathcal{D})$，即酉群中单位元的连通分支。

令 $v_n := (\alpha \otimes \beta)(w_n)$，于是我们有一个由 $\mathcal{U}_0(C)$ 中的酉元构成的序列 $(v_n)_n$，使得

$$\lim_{n\to\infty} v_n \alpha(x)\beta(y)v_n^* = \beta(y)\alpha(x)$$

对所有 x，$y \in \mathcal{D}$ 都成立。由于恒等元连通分支中的酉元可以沿商映射提升，我们可以找到酉元 u_n，它们属于 $(A \otimes 1)' \cap M(A \otimes \mathcal{D})_{\mathcal{U}}$，且满足$\pi(u_n) = v_n$。

为了证明 $(u_n)_n$ 具有所需性质，令 $a \in A$ 和 $d \in \mathcal{D}$。由于$\alpha(\mathcal{D}) \subseteq \pi((A \otimes 1)' \cap (A \otimes 1)_{\mathcal{U}})$，我们可以选取 $x \in (A \otimes 1)' \cap (A \otimes 1)_{\mathcal{U}}$，使得$\pi(x) = \alpha(d)$。于是我们有

$$\pi\big(u_n\beta_0(d)u_n^*\big) = v_n\beta(d)v_n^* \to \alpha(d) = \pi(x).$$

由于 π 的核是 $A \otimes 1$ 的湮灭子，我们推得

$$u_n(a \otimes d)u_n^* = u_n(a \otimes 1)\beta_0(d)u_n^* = (a \otimes 1)u_n\beta_0(d)u_n^* \to (a \otimes 1)x \in (A \otimes 1)_{\mathcal{U}}.$$

这表明，对于每个初等张量$b = a \otimes d$ 属于 $A \otimes \mathcal{D}$，都有 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\big(u_n b u_n^*, (A \otimes 1)_{\mathcal{U}}\big) = 0$，因此对于每个 $b \in A \otimes \mathcal{D}$也成立。□

虽然 $\mathcal{D}$-稳定性的定义对任意 C^*-代数都有意义，但对于不可分 C^*-代数而言，其用处不大，因为即使是自然的候选对象，例如 $\mathcal{D}$ 的超幂，也不满足 $\mathcal{D}$-稳定性。相反，模型论上自然的概念是要求“足够多”的可分子 C^*-代数满足 $\mathcal{D}$-稳定性。文献中曾以不同名称出现过这一概念的变体。我们沿用 Schafhauser [Sch20，定义 1.4] 中的术语；另见 [FS24，命题 1.6]。

定义 2.3。设 $\mathcal{D}$ 是一个强自吸收 C^*-代数。若对每个可分子 C^*-代数 $B_0 \subseteq A$，都存在一个可分子 C^*-代数 $B \subseteq A$，使其满足 $\mathcal{D}$-稳定性，且 $B_0 \subseteq B$，则称 C^*-代数 A 为可分地 $\mathcal{D}$-稳定 。

我们用 Sep(A) 表示给定C^*代数 A 的可分子C^*代数的集合。将模型论定义限定于我们所关注的情形，族 $F \subseteq$Sep(A) 若为俱乐部，则它是共尾 的（也就是说，对于每个 $B_0 \in$Sep(A)，都存在 $B \in F$ 使得 $B_0 \subseteq B$），并且是 σ-完备的（也就是说，对于每个可数有向子集 ~~$F' \subseteq F$~~，都有 $\bigcup_{B \in F'} B \in F$）。

设 $\mathcal{D}$ 是一个强自吸收 C^* 代数。利用 $\mathcal{D}$-稳定性可传递到可分 C^*代数的序列归纳极限这一事实 [TW07, Corollary 3.4], ，可知 C^* 代数 A 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的，当且仅当 A 中可分且 $\mathcal{D}$-稳定的子C^*代数在 Sep(A) 中构成一个俱乐部。

Toms 和 Winter [TW07 第 3] 节证明了可分 C^*-代数中 $\mathcal{D}$-稳定性的保持性质，特别是其传递到商、遗传子-C^*-代数以及扩张的情形。Farah 和 Szab´o [FS 24] 证明了类似的保持性质对于可分 $\mathcal{D}$-稳定性也成立，我们记录如下以备后用。

引理 2.4。设 $\mathcal{D}$ 是一个强自吸收 C^*-代数。则以下陈述成立：

（1）若 $0 \to I \to E \to B \to 0$ 是 C^*-代数的一个扩张，则 E 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的，当且仅当 I 和 B 都是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。（2）若 A 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的，且 $B \subseteq A$ 是一个遗传子-C^*-代数，则 B 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。

证明。第一个陈述已在 [FS24，引理 1.14], 中证明，第二个陈述已在 [FS24，命题 1.12]中证明。□

以下概念在 [FS24，定义 1.11]中引入。

定义 2.5。设 $\mathcal{D}$ 是一个含单位元的 C^*-代数。若对于每个可分子-C^*-代数 $B \subseteq A$，都存在一个含单位元的 $*$-嵌入 $\mathcal{D} \to B' \cap A$，则称含单位元的 C^*-代数 A是 $\mathcal{D}$-饱和的 。

定理 2.6。设 $\mathcal{D}$ 是一个强自吸收 C^*-代数，且设 A 是一个 C^*-代数。则以下各条件等价：
(1) C^*-代数 A 是可分地 $\mathcal{D}$-稳定的。(2) 超幂 $A_\mathcal{U}$ 是可分地 $\mathcal{D}$-稳定的。(3) 对于每个可分子-C^*-代数 $B \subseteq A_\mathcal{U}$，相对交换子 $B' \cap A_\mathcal{U}$ 都是可分地 $\mathcal{D}$-稳定的。
(4) 对于每个可分子-C^*-代数 $B \subseteq A_\mathcal{U}$，商 $(B' \cap A_\mathcal{U})/(B^\perp \cap A_\mathcal{U})$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的。
(5) 对于每个可分子-C^*-代数 $B \subseteq A_\mathcal{U}$，存在一个含单位元的 $*$-同态 $\mathcal{D} \to (B' \cap A_\mathcal{U})/(B^\perp \cap A_\mathcal{U})$。

如果 A 是 σ-幺正的，那么上述陈述也等价于
(6) 乘子代数 $M(A)$ 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。(7) C^*-代数 $M(A)_\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的。

证明。我们证明蕴含关系‘(1)⇔(2)’和‘(1)⇔(5)’、‘(3)⇒(4)⇒(5)⇒(3)’、‘(1)⇔(6)’以及‘(6)⇒(7)⇒(6)’。

(1)⇔(2)：由 [FS24，推论 1.10] 可知，可分 $\mathcal{D}$-稳定性是可公理化的；另见 [FHL+21，定理 2.5.2(21)]。由于可公理化性质在超幂和超根下保持不变（[FHL+21, 定理 2.4.1]），所以 (1) 与 (2) 等价。

(1)⇔(5)：根据 [FS24，推论 1.10(2) 和定义 1.8], ， C^*-代数 A 是可分地 $\mathcal{D}$-稳定的，当且仅当 A满足 [FS24 中的条件 (1),

命题 1.7], 也就是说，对于 A 的任意子-C^*-代数 B_0 ，存在一个含单位元的 $*$-同态 $\mathcal{D} \to (B_0' \cap A_\infty)/(B_0^\perp \cap A_\infty)$。

对于正向蕴含，假设 A 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的，令 $B \subseteq A_\mathcal{U}$为一个可分的子$C^*$-代数。我们考虑从序列代数 $A_\infty := \prod_\mathbb{N} A/c_0(A)$到 $A_\infty \to A_\mathcal{U}$的自然商映射 π：其中 $c_0(A)$ 是由满足 $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$ 的序列 $(a_n)_n$ 构成的闭理想。选取一个满足 $\pi(B_0) = B$ 的可分子C^*-代数$B_0 \subseteq A_\infty$ 。根据 [FS24，命题 1.7 (1)], ，存在一个幺正 $*$-同态 $\mathcal{D} \to (B_0' \cap A_\infty)/(B_0^\perp \cap A_\infty)$。映射 π 限制为一个映射 $B_0' \cap A_\infty \to B' \cap A_\mathcal{U}$，它诱导出一个从 $(B_0' \cap A_\infty)/(B_0^\perp \cap A_\infty)$ 到 $(B' \cap A_\mathcal{U})/(B^\perp \cap A_\mathcal{U})$ 的幺正 $*$-同态。通过复合，我们得到所需的映射

$$\mathcal{D} \to (B_0' \cap A_\infty)/(B_0^\perp \cap A_\infty) \to (B' \cap A_\mathcal{U})/(B^\perp \cap A_\mathcal{U}).$$

对于反向蕴含，我们注意到，命题 (5) 立即推出 [FS24 的命题 1.7], 中的条件 (3)，进而推出 A 是可分 $\mathcal{D}$- 稳定的。

(3)⇒(4)：为验证 (4)，取一个可分的子C^*-代数 $B \subseteq A_\mathcal{U}$ 。令 Q :=$(B' \cap A_\mathcal{U})$ $/(B^\perp \cap A_\mathcal{U})$，并令 π：$B' \cap A_\mathcal{U} \to Q$ 表示商映射。为证明 Q 是 $\mathcal{D}$-饱和的，取一个可分的 $C \subseteq Q$ 。我们需要找到一个含单位元的 $*$-同态 $\mathcal{D} \to C' \cap Q$.

取一个可分的子C^*-代数 $C_0 \subseteq B' \cap A_\mathcal{U}$，使得 $\pi(C_0) = C$。由于由 C_0 和 B 生成的C^*-代数 E 是可分的，根据假设， $E' \cap A_\mathcal{U}$ 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的，因此由引理 2.4，商 $\pi(E' \cap A_\mathcal{U})$ 也是如此。由于 $\pi(E' \cap A_\mathcal{U})$ 是含单位元且可分 $\mathcal{D}$-稳定的，它存在一个含单位元的

从 $\mathcal{D}$ 出发的 $*$-同态，我们将其复合得到所需的映射

$$\mathcal{D} \to \pi(E' \cap A_\mathcal{U}) \subseteq \pi(C_0)' \cap \pi(B' \cap A_\mathcal{U}) = C' \cap Q.$$

(4)⇒(5)：这是因为每个幺元、 $\mathcal{D}$-饱和的 C^*-代数都存在一个从 $\mathcal{D}$ 出发的幺元 $*$-同态。

(5)⇒(3)：假设 (5) 成立。采用与蕴含关系‘(3)⇒(4)’类似的论证，我们可知，对每个可分子-C^*-代数 $B \subseteq A_\mathcal{U}$，$(B' \cap A_\mathcal{U})/(B^\perp \cap A_\mathcal{U})$ 都是 $\mathcal{D}$-饱和的（因此也是可分 $\mathcal{D}$-稳定的）。

为验证 (3)，令 $B \subseteq A_\mathcal{U}$ 为一个可分子-C^*-代数，并考虑扩张

$$0 \to B^\perp \cap A_\mathcal{U} \to B' \cap A_\mathcal{U} \to (B' \cap A_\mathcal{U})/(B^\perp \cap A_\mathcal{U}) \to 0.$$

我们已经证明 (5) 蕴含 (2)，这表明 $A_\mathcal{U}$ 是可分$\mathcal{D}$-稳定的。由于 $B^\perp \cap A_\mathcal{U}$ 是 $A_\mathcal{U}$ 的一个遗传子 -C^*- 代数，由引理 2.4(2) 可得 $B^\perp \cap A_\mathcal{U}$ 是可分 $\mathcal{D}$- 稳定的。此外，如上所述，商 $(B' \cap A_\mathcal{U})/(B^\perp \cap A_\mathcal{U})$ 也是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。现在由引理 2.4(1) 可得 $B' \cap A_\mathcal{U}$ 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。

(1)⇔(6)：假设 A 是 σ-含单位元的，则 (1) 与 (6) 的等价性见于 [FS24，定理 B]。

(6)⇒(7)：假设 $M(A)$ 是可分的 $\mathcal{D}$-稳定的。为证明 $M(A)_\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的，令 $B \subseteq M(A)_\mathcal{U}$ 为可分的。应用 $M(A)$ 中 (1) 与 (3) 的等价性，可得 $B' \cap M(A)_\mathcal{U}$ 是可分的 $\mathcal{D}$-稳定的，特别地，存在一个单位元 $*$-同态 $\mathcal{D} \to B' \cap M(A)_\mathcal{U}$。也就是说，若 B_0 是 $B' \cap M(A)_\mathcal{U}$ 的一个含单位元的可分子-C^*-代数，则存在一个可分的 $\mathcal{D}$-稳定子-C^*-代数 $\tilde{B}_0$ ，使得 $B_0 \subseteq B_0$。

(7)⇒(6)：假设 $M(A)_\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的。注意，每个（含单位元的） $\mathcal{D}$-饱和 C^*-代数 B 都是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。为验证这一点，取 C_0 为 B 的一个可分子 C^*-代数。由于 B 是 $\mathcal{D}$-饱和的，因此存在一个含单位元的 $*$-嵌入 φ: $\mathcal{D} \to C_0' \cap B$。现在， $\mathcal{D}_0 := \varphi(\mathcal{D})$ 是可分的，并且与 C_0 交换，因此若令 $C_1 =$

$C^*(C_0 \cup \mathcal{D}_0) \subseteq B$，我们得到一个包含 C_0 和 $\mathcal{D} \otimes C_0 \to C_1$ 的可分子 C^*-代数，由 $d \otimes c \mapsto \varphi(d)c$ 是一个同构给出。

因此可知，$M(A)_{\mathcal{U}}$ 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。对 $M(A)$ 应用 (1) 与 (2) 的等价性，可知 $M(A)$ 是可分 $\mathcal{D}$- 稳定的。□

对可分的 C^*-代数应用引理 2.6，可得：

推论 2.7。设 A 是可分的 C^*-代数，且 $\mathcal{D}$ 是强自吸收的 C^*-代数。则以下条件等价：

(1) C^*-代数 A是 $\mathcal{D}$-稳定的。(2) 代数 $M(A)_{\mathcal{U}}$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的。(3) 代数 $A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的。(4) （未修正的）中心序列代数 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。(5) *Kirchberg* 中心序列代数 $F(A)$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的。

证明。我们证明蕴含关系“(1)⇔(2)⇒(3)⇒(1)”、“(1)⇔(4)”和“(1)⇔(5)”。(1)⇔(2)：这由引理 2.6 中(1)与(7)的等价性得出。

(2)⇒(3)：一般而言，如果 B 是 $\mathcal{D}$-饱和的 C^*-代数，且 $C \subseteq B$ 是一个可分的子-C^*-代数，那么 $C' \cap B$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的。事实上，如果 $E \subseteq C' \cap B$ 是一个可分的子-C^*-代数，那么 $C^*(E \cup C)$ 也是可分的，并且根据假设存在一个含单位元的 $*$-嵌入 $\mathcal{D} \to C^*(E \cup C)' \cap B \subseteq E' \cap C' \cap B$。现在，由于 A 是可分的，我们看到(2)蕴含(3)。

(3)⇒(1)：假设 $A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的，则可知存在一个幺正 $*$-同态 $\mathcal{D} \to A' \cap M(A)_{\mathcal{U}}$。应用引理 2.2 中的蕴含“(3)⇒(1)”，可知 A 是 $\mathcal{D}$-稳定的。

(1)⇔(4)：由于 A 可分，正向蕴含由引理 2.6 中的蕴含“(1)⇒(3)”得出。对于反向蕴含，假设 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的。由于 $F(A)$ 是 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 的一个商，并且利用引理 2.4(1)，我们推得 $F(A)$ 是可分 $\mathcal{D}$-稳定的，因此存在一个幺正 $*$-同态 $\mathcal{D} \to F(A)$。应用引理 2.2 中的蕴含“(4)⇒(1)”，可知 A 是 $\mathcal{D}$-稳定的。

(1)⇔(5)：由于 A 可分，正向蕴含由引理 2.6 中的蕴含“(1)⇒(4)”得出。反过来，若 $F(A)$ 是 $\mathcal{D}$-饱和的，则它存在一个含单位元的 $*$-同态 $\mathcal{D} \to F(A)$；由引理 2.2 中的蕴含“(4)⇒(1)”可知，A 是 $\mathcal{D}$-稳定的。□

3. Pureness of central sequence algebras

本节证明本文的主要结果（引理 3.6）：可分的 C^*-代数 A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的，当且仅当其中心序列代数 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是纯的。在引理 3.8 中，我们还将通过相对中心序列代数 $B' \cap A_{\mathcal{U}}$ 的纯性，对可分的 $\mathcal{Z}$-稳定性（针对不一定可分的 C^*-代数）给出类似刻画，其中考虑可分的子-C^*-代数 $B \subseteq A_{\mathcal{U}}$。

纯性定义为严格比较与近似可整除性的结合，可以将其视为 Cuntz 半群中良好的比较性质和可除性；具体定义见下文。从这个角度来看，引理 3.6 表明，可分的 C^*-代数是 $\mathcal{Z}$-稳定的，当且仅当其中心序列代数具有良好的比较性质和良好的可除性。

有序幺半群上的关系 $<_s$ 定义为：若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $(n+1)x \leq ny$，则令 $x <_s y$。因此，根据定义，若 Cu(A) 中的 $x <_s y$ 蕴含 $x \leq y$，则 A 具有严格比较性质。这也称为 Cu(A) 是近乎无孔的。若对于 Cu(A) 中任意一对 $x' x \in$，满足 $x' \ll x, k \in \mathbb{N}$，都存在 Cu($A$) 中的 $y \in$，使得 $ky \leq x$ 且 $x' \leq (n+1)(k+1)y$，则称 A 是 n-几乎可除的。若 A 是 0-几乎可除的，则称 C^*-代数 A 为几乎可除的。

现在记录以下观察结果。

命题 3.1. 每个可分的 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数都是纯的。

证明。 Rørdam 在 [Rør04] 中证明，每个 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数的 Cuntz 半群都是几乎无孔的。由 [APT11, 定理 5.35]可知，它也几乎可除，因此是纯的；参见 [APTV24, 命题 5.2]。现在设 A是一个可分的 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数。那么， A 的可分、 $\mathcal{Z}$-稳定子 C^*-代数构成一个归纳系统（以其自身为指标集），其归纳极限与 A同构。根据 [APTV25, 定理 3.8], ， C^*-代数的纯性由可分性决定（这一术语也见于 [APTV25, 定义 2.2]），因此特别地，纯性在归纳极限下保持，这说明 A 是纯的。□

对于 $n \geq 1$，维数下降代数 $Z_{n,\ n+1}$ 定义为由满足以下条件的连续函数 f: $[0,1] \to M_n \otimes M_{n+1}$组成的$C([0,1],\ M_n \otimes M_{n+1})$ 的子-C^*-代数:

$$f(0) \in M_n \otimes 1_{n+1}, \quad \text{and} \quad f(1) \in M_{n+1} \otimes 1_n.$$

在 [RW10 的命题 5.1], 中，Rørdam 和 Winter 证明了，具有稳定秩一的单位 C^*-代数 A 存在单位 $*$-同态 $Z_{n,\ n+1} \to A$ 当且仅当单位元可以在 Cuntz 半群 Cu(A) 中被 n “近乎”整除，即存在一个 Cuntz 类 $x \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $nx \leq [1] \leq (n+1)x$。

在 [DT10 的定理 3.6], 中，Dadarlat 和 Toms 对于具有非空迹状态空间并且满足正元素关于迹状态的严格比较的可分单位 C^*-代数，证明了相同的结果。下一个结果通过去除可分性和非空迹状态空间的假设，并将正元素关于迹状态的严格比较弱化为正元素关于拟迹的严格比较，推广了 Dadarlat 和 Toms 的结果。证明基本上可以在 [NR16 的命题 4.9], 中找到，只需注意，该论证可以调整为仅要求单位元具有近乎可除性。为方便读者，我们在此重述这一（经过调整的）论证。

命题 3.2。 设 A 是一个具有（由拟迹对正元素进行）严格比较性质的含幺 C^*-代数。那么，以下条件等价:
(1) 元素 $[1]$ 在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中几乎可除。(2) 对每个 $n \geq 1$，都存在一个含幺 $*$-同态 $Z_{n,n+1} \to A$。

证明。 假设 (2) 成立，来验证 (1)。要证明 $[1]$ 几乎可除，取 $n \geq 1$。我们需要找到 $y \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $ny \leq [1] \leq (n+1)y$。根据假设，存在一个含幺 $*$- 同态 $\varphi: Z_{n,\ n+1} \to A$。由 [Rør04，引理 4.2], ，存在一个正元素 $e \in Z_{n,n+1}$，使得 $n[e] \leq [1] \leq (n+1)[e]$ 属于 $\mathrm{Cu}(Z_{n,n+1})$。现在$y := [\varphi(e)]$ 具有所需的性质。

假设 (1) 成立，证明 (2)。对于 $a, b \in A_+$，当存在某个 $x \in A$ 使得 $a = xx^*$ 且 $b = x^*x$ 时，记作 $a \simeq b$ 。我们将应用 [RW10，命题 5.1], ，该命题指出：只要能找到两两正交元素 $a_1, \ldots, a_n \in A_+$，满足对每一对 i, j 都有 $a_i \simeq a_j$，且对于某个 $\varepsilon > 0$ 有 $1 - \sum_i a_i \precsim (a_1 - \varepsilon)_+$，那么就存在一个含单位元的 $*$-同态 $Z_{n,n+1} \to A$（其中 $\precsim$ 表示 Cuntz 子等价）。

为验证 (2)，令 $n \geq 1$ 并设 $m = 2n$。由 (1)，存在 $c \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，使得 $m[c] \leq [1] \leq (m+1)[c]$。由于 $[1] \ll [1]$，我们可以选取 $\varepsilon > 0$，使得$[1] \leq (m+1)[(c-\varepsilon)_+]$。因此我们有

$$m[c] \leq [1] \leq (m+1)[(c-\varepsilon)_+].$$

将 [RR13 引理 2.4] （或者更确切地说，其证明）应用于第一个不等式，可得到两两正交元素 $c_1, \ldots, c_m \in A_+$，使得

$$(c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ \simeq c_1 \simeq \ldots \simeq c_m.$$

令 $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 为一个连续函数，它在 $(-\infty, 0]$上取值 0，并在 $[\frac{\varepsilon}{2}, \infty)$ 上取值 1。利用连续函数演算，令$d_j' := (c_j - \frac{\varepsilon}{2})_+$和 $d_j := f(c_j)$，并注意到此时 $d_j' = d_j' d_j$ 对 $j = 1, \ldots, m$成立。由于 d_j属于 $c_j A c_j$，且 $c_1, \ldots, c_m$两两正交，因此 $d_1, \ldots, d_m$也两两正交。

对于每个 $j = 1, \ldots, m$，我们断言 $d_j \simeq f((c - \frac{\varepsilon}{2})_+)$ 且 $d_j' \simeq (c - \varepsilon)_+$。由于 $(c - \frac{\varepsilon}{2})_+ \simeq c_j$，我们可以选取 $x_j \in A$，使得 $(c - \frac{\varepsilon}{2})_+ = x_j x_j^*$ 且 $c_j = x_j^* x_j$。令$x_j = v_j |x_j|$ 为 x_j 在 A^{**} 中的极分解，并设

$$y_j := f\big((c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+\big)^{\frac{1}{2}} v_j, \quad \text{and} \quad z_j := (c - \varepsilon)_+^{\frac{1}{2}} v_j.$$

由于 $f\big((c - \frac{\varepsilon}{2})_+\big)^{\frac{1}{2}}$和 $(c - \varepsilon)_+^{\frac{1}{2}}$ 属于 A|x_j^*| 和 |x_j^*|$v_j = x_j \in A$，我们推得 y_j 和 z_j 属于 A。我们有

$$y_j y_j^* = f\big((c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+\big), \quad \text{and} \quad z_j z_j^* = (c - \varepsilon)_+.$$

注意，$v_j^* (c - \frac{\varepsilon}{2})_+ v_j = v_j^* x_j x_j^* v_j = |x_j||x_j| = c_j$。由于映射 $b \mapsto v_j^* b v_j$定义了从 $(c - \frac{\varepsilon}{2})_+ A (c - \frac{\varepsilon}{2})_+$ 到 $c_j A c_j$的一个 $*$-同构，且函数演算与 $*$-同态相容，我们推得

$$y_j^* y_j = v_j^* f\big((c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+\big) v_j = f\big(v_j^* (c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ v_j\big) = f(c_j) = d_j$$

and

$$\begin{aligned} z_j^* z_j &= v_j^* (c - \varepsilon)_+ v_j \\ &= v_j^* \big((c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ - \tfrac{\varepsilon}{2}\big)_+ v_j \\ &= \big(v_j^* (c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ v_j - \tfrac{\varepsilon}{2}\big)_+ \\ &= (c_j - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ = d_j'. \end{aligned}$$

由此可得

$$d_j = y_j^* y_j \simeq y_j y_j^* = f\big((c - \tfrac{\varepsilon}{2})_+\big), \quad \text{and} \quad d_j' = z_j^* z_j \simeq z_j z_j^* = (c - \varepsilon)_+,$$

如所断言。

给定 A上的一个拟迹 τ，定义 $d_\tau\colon (A \otimes \mathcal{K})_+ \to [0, \infty]$，其中 $d_\tau(a) := \lim_n \tau(a^{1/n})$。在第二步中利用了 $1 - \sum_{j=1}^m d_j$ 与每个d_1'，……，d_m'正交；在最后一步中利用了 $(c - \varepsilon)_+$ 尤其与 d_1'Cuntz 等价，由此得到

$$\begin{aligned} d_\tau\left(1 - \sum_{j=1}^m d_j\right) + m d_\tau(d_1') = d_\tau\left(1 - \sum_{j=1}^m d_j\right) + \sum_{j=1}^m d_\tau(d_j') &\leq d_\tau(1) \\ &\leq (m+1) d_\tau((c - \varepsilon)_+) = (m+1) d_\tau(d_1'). \end{aligned}$$

由于 $d_\tau(d_1') < \infty$，我们可以消去 $m d_\tau(d_1')$，得到

$$d_\tau\left(1 - \sum_{j=1}^m d_j\right) \leq d_\tau(d_1') = \frac{1}{2} d_\tau(d_1') + \frac{1}{2} d_\tau(d_2') = \frac{1}{2} d_\tau(d_1' + d_2').$$

通过令 $a_1 = d_1 + d_2$，……，$a_n = d_{2n-1} + d_{2n}$，将元素 d_j 配对。我们有

$$d_1' = (c_1 - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ \precsim (f(c_1) - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ = (d_1 - \tfrac{\varepsilon}{2})_+$$

类似地，$d_2' \precsim (d_2 - \frac{\varepsilon}{2})_+$。利用 d_1 和 d_2 正交，我们推得

$$d_1' + d_2' \precsim (d_1 - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ + (d_2 - \tfrac{\varepsilon}{2})_+ = (a_1 - \tfrac{\varepsilon}{2})_+.$$

因此我们有

$$d_\tau\left(1-\sum_{j=1}^{n}a_j\right)=d_\tau\left(1-\sum_{j=1}^{m}d_j\right)\leq\frac{1}{2}d_\tau(d_1'+d_2')\leq\frac{1}{2}d_\tau\big((a_1-\tfrac{\varepsilon}{2})_+\big).$$

利用严格比较，可以从前面的函数不等式推出 $1-\sum_{j=1}^{n}a_j\precsim(a_1-\frac{\varepsilon}{2})_+$。证明至此完成。□

推论 3.3 ([NR16, 命题 4。9])。每个含单位元的纯 C^*-代数 A 都存在含单位元的 $*$-同态 $Z_{n,\ n+1}\to A$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。

我们预期下面这个问题的答案是肯定的。在额外假设稳定秩为一的情况下，[APT18, 命题 7.6.5]证明了这一点。

问题 3.4。每个含单位元的纯 C^*-代数都存在一个含单位元的 $*$-同态，其定义域为 $\mathcal{Z}$ 吗?

我们将使用 [Kir06, 命题 1.12], 的以下推论；在 [KR15, 命题 2.2，推论 2.3] 中，该推论是在额外假设 A 含单位元的条件下陈述的。

命题 3.5 (Kirchberg)。设 A 是一个可分 C^*-代数，且 B、$D\subseteq F(A)$ 是满足 $1_{F(A)}\in D$ 的可分子-C^*-代数。则存在一个幺正、单射的 $*$-同态 $D\to B'\cap F(A)$。

因此，存在一个幺正 $*$-同态 $\bigotimes^{\infty}$ 最大 $D\to F(A)$。

定理 3.6。设 A 是一个可分 C^*-代数。则以下条件等价：
(1) A 这个 C^*-代数是 $\mathcal{Z}$-稳定的。(2) （未经修正的）中心序列代数 $A'\cap A_{\mathcal{U}}$ 是纯的。(3) *Kirchberg* 中心序列代数 $F(A)$ 是纯的。

证明。假设 (1) 成立，由引理 2.7 中的蕴含“(1)⇒(4)”可知，$A'\cap A_{\mathcal{U}}$ 是可分 $\mathcal{Z}$-稳定的，因此根据引理 3.1，它是纯的，从而验证了 (2)。蕴含“(2)⇒(3)”成立，这是因为 $F(A)$ 是 $A'\cap A_{\mathcal{U}}$ 的一个商，且根据 APTV25 定理 4.11]，纯性在取商后得以保留。

假设 (3)，我们来验证 (1)。由于 $F(A)$ 是纯的，根据引理 3.3，存在一个含单位元的 $*$-同态 $Z_{2,3}\to F(A)$。众所周知，这意味着 A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的；例如，当 A 是含单位元的时，可参见 [KR15, 定理 2.5] 。为完整起见，我们给出证明：利用 [DT09, 定理 1.1] 和引理 3.5，我们得到含单位元的 $*$-同态

$$\mathcal{Z}\to\bigotimes_{\min}^{\infty}Z_{2,3}=\bigotimes_{\max}^{\infty}Z_{2,3}\to F(A).$$

应用引理 2.2 中的推论“(4)⇒(1)”，可得 A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的。□

注 3.7。与引理 3.6 类似，可以证明，可分 C^*-代数 A 的 $\mathcal{O}_\infty$-稳定性由 $A'\cap A_{\mathcal{U}}$ 和 $F(A)$ 的 Cuntz 半群所刻画。具体而言，以下条件等价：

(1) C^*-代数 A 是 $\mathcal{O}_\infty$-稳定的。(2)（未校正的）中心序列代数 $A'\cap A_{\mathcal{U}}$ 是纯无限的。(3) Kirchberg 中心序列代数 $F(A)$ 是纯无限的。

这依赖于以下事实：可分的 $\mathcal{O}_\infty$-吸收 C^*-代数是纯无限的（类似于引理 3.1），并且含单位元的纯无限 C^*-代数存在一个从 $\mathcal{O}_\infty$ 到 $*$ 的含单位元同态。

定理 3.8。设 A 是一个 C^*-代数。则以下条件等价：(1) C^*-代数 A 是可分 $\mathcal{Z}$-稳定的。

(2) 对于每个可分的 $B \subseteq A_{\mathcal{U}}$，相对交换子 $B' \cap A_{\mathcal{U}}$ 都是纯的。(3) 对于每个可分的 $B \subseteq A_{\mathcal{U}}$，商 $(B' \cap A_{\mathcal{U}})/(B^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}})$ 都是纯的。

证明。我们证明蕴含关系‘(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1)’。

(1)⇒(2)：假设 (1)。为验证 (2)，取一个可分的子-C^*-代数。由引理 2.6 中的蕴含关系‘(1)⇒(3)’可知，$B' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是可分$\mathcal{Z}$-稳定的，因此根据引理 3.1，它是纯的。

(2)⇒(3)：这是因为根据 APTV25 定理 4.11]，纯性可传递到商。

(3)⇒(1)：假设 (3)。我们将验证引理 2.6 中的条件 (5)，由此可推出 A 是可分 $\mathcal{Z}$-稳定的。取一个可分的子-C^*-代数。我们需要找到一个含单位元的 $*$-同态 $\mathcal{Z} \to (B' \cap A_{\mathcal{U}})/(B^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}})$。

令 $Q := (B' \cap A_{\mathcal{U}})/(B^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}})$，并令 $\pi\colon B' \cap A_{\mathcal{U}} \to Q$ 表示商映射。我们首先证明 Q 是$Z_{2,3}$-饱和的。令 $C \subseteq Q$ 为一个可分子-C^*-代数。取一个可分原像，即一个满足 $\pi(C_0) = C$ 的可分子-C^*-代数 $C_0 \subseteq B' \cap A_{\mathcal{U}}$。由于由 C_0 和 B 生成的 $A_{\mathcal{U}}$ 的子-C^*-代数 E 是可分的，由假设可知 $(E' \cap A_{\mathcal{U}})/(E^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}})$ 是纯的，因此根据引理 3.3，存在一个从 $Z_{2,3}$ 到它的含单位元 $*$-同态。

映射 π 诱导出一个 $*$-同态 $E' \cap A_{\mathcal{U}} \to C' \cap Q$，其像包含 $C' \cap Q$ 的单位元。由于 $C_0 \cup B$ 的湮灭子包含于 B 的湮灭子中，该映射可经由对 $E^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}}$ 取商而分解。我们将所需的映射表示为以下含单位元的 $*$-同态的复合

$$Z_{2,3} \to (E' \cap A_{\mathcal{U}})/(E^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}}) \to C' \cap (B' \cap A_{\mathcal{U}})/(B^{\perp} \cap A_{\mathcal{U}}) = C' \cap Q.$$

这表明 Q is$Z_{2,\,3}$-饱和。

利用这一点，我们首先找到任意一个含单位元的 $*$-同态 $\varphi_1\colon Z_{2,\,3} \to Q$，然后依次找到含单位元的 $*$-同态 $\varphi_n\colon Z_{2,\,3} \to Q$，使得 $n \geq 2$

$$\varphi_n(Z_{2,3}) \subseteq \big(\varphi_1(Z_{2,3}) \cup \cdots \cup \varphi_{n-1}(Z_{2,3})\big)' \cap Q.$$

这诱导出一个含单位元的 $*$-同态 $\bigotimes_{\max}^{\infty} Z_{2,\,3} \to Q$。利用 [DT09，定理 1.1]，，我们得到含单位元的 $*$-同态

$$\mathcal{Z} \to \bigotimes_{\min}^{\infty} Z_{2,3} = \bigotimes_{\max}^{\infty} Z_{2,3} \to Q. \qquad \square$$

4. Divisibility of central sequence algebras

本节中，我们证明 $\mathcal{Z}$-稳定性等价于良好的中心可整除性（即中心序列代数是几乎可除的）。也可以说，良好的中心比较是良好中心可整除性的结果。事实上，只要中心序列代数满足更弱的性质 n-近乎可除性（对某个 n），就已经能推出 $\mathcal{Z}$-稳定性；见引理 4.4。目前尚不清楚，假设中心序列代数满足更弱的函数可除性是否足够；见引理 4.5。

给定具有 $N \geq 1$ 的 $N \in \mathbb{N}$，我们通过规定：若对所有 $n \geq N$ 都有 $nx \leq ny$，则 $x \leq_N y$，来定义 Cu-半群上的关系 $\leq_N$。我们回顾 APTV24 的定义 3.6] 中的受控比较定义；另见 APRT24，定义 6.1]。为此，对于任意 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)$，我们按惯例将定义在 $QT(A)$ 上的（下半连续）函数 $[a]$ 记为 $[a](\tau) = d_\tau(a)$。

定义 4.1。若每个 $\gamma \in (0,\ 1)$ 和 $d \geq 1$ 都存在 $N = N(\gamma,\ d) \geq 1$，使得下述陈述成立，则称 C^*-代数 A 具有受控比较：

对每个 $a,\ b \in M_d(A)_+$，若 $\widehat{\ }\ \prec[a] \leq \gamma[b]$ 然后 $[a] \leq_N [b]$。

我们将使用下文给出的稳定 C^*-代数的受控比较刻画，这是 [APRT24，推论 7.6]的一个简单推论。回顾第 3 节中的关系 $<_s$ 。

命题 4.2。设 A 是一个稳定的 C^*-代数。则以下各条件等价：
(1) C^*-代数 A具有受控比较。(2) 存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 x、$y \in \mathrm{Cu}(A)$，$\widehat{x} \leq \widehat{y}$ 蕴含 $x \leq Ny$。(3) 存在 $M \in \mathbb{N}$，使得对于所有 x、$y \in \mathrm{Cu}(A)$，$x <_s y$ 蕴含 $x \leq My$。

证明。(1) 与 (2) 的等价性已在 [APRT24 的推论 7.6] 中证明。利用 $x <_s y$ 蕴含 $\widehat{x} \leq \widehat{y}$，我们得到 (2) 蕴含 (3)，其中 $M = N$。反之，假设 (3) 对某个 $M \in \mathbb{N}$成立。我们验证 $N = 2M$ 的 (2)。设 x，$y \in$Cu(A) 满足 $\widehat{x} \leq \widehat{y}$。则 $\widehat{x} <_s \widehat{2y}$。令 $x' \in$Cu(A)，且 $x' \ll x$。根据 [APT18 的定理 5.2.18]，，我们得到 $x' <_s 2y$，因而根据假设有 $x' \leq 2My$ 。由于这对每个 x' 远低于 x的元素都成立，我们得到 $x \leq 2My$。□

命题 4.3. 设 A是一个 C^*-代数（不一定稳定）。假设存在 $M \in \mathbb{N}$，使得对所有 x, $y \in \mathrm{Cu}(A)$，$x <_s y$ 蕴含 $x \leq My$。那么 A具有受控比较。

证明. 由引理 4.2 可得，$A \otimes \mathcal{K}$ 具有受控比较。由引理 4.1 可直接推出：只要一个 C^*-代数的稳定化具有受控比较，该代数本身也具有受控比较。□

命题 4.4. 设 A 是一个可分的 C^*-代数。则以下条件等价：

(1) C^*-代数 A是 $\mathcal{Z}$-稳定的。(2) 代数 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 几乎可除。
(3) $F(A)$ 的单位元对某个 $n \in \mathbb{N}$是 n-几乎可除的。

证明. 我们证明蕴含关系‘(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1)’。
(1)⇒(2)：若 A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的，则根据引理 3.6，$A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是纯的，因此特别地是几乎可除的。
(2)⇒(3)：假设 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 是几乎可除的。由于 $F(A)$ 是 $A' \cap A_{\mathcal{U}}$ 的一个商，并且由 APTV25 的引理 4.9]，可知近乎可除性可传递到商，因此 $F(A)$ 是几乎可除的。特别地，对于某个 n （即 $n = 0$），$F(A)$ 的单位元是 n-近乎可除的。

(3)⇒(1)：设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $F(A)$ 中的单位元是 n-近乎可除的。我们先验证以下断言：

断言：设 $x, y \in \mathrm{Cu}(F(A))$ 满足 $x <_s y$。则 $x \leq (n+1)y$。
为证明该断言，取 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $(m+1)x \leq my$。利用 $[1]$ 是 n-近乎可除的这一点，我们可得 $z \in$ Cu($F(A)$)，使得

$$mz \leq [1] \leq (n+1)(m+1)z.$$

由于元素 x 和 y，以及 Cuntz 子等价 $(m+1)x \leq my$ 均由 $F(A) \otimes \mathcal{K}$中的可数多个元素实现，我们可以找到一个可分的含单位元子-C^*-代数 $B \subseteq F(A)$，使得 Cu(B) 含有元素 x，y，它们在由包含 $B \to F(A)$ 诱导的映射 Cu(B) $\to$Cu($F(A)$) 下分别映至 x和 y，并且 $(m+1)\bar{x} \leq m\bar{y}$ 在 Cu(B) 中成立。类似地，我们可以找到一个可分的含单位元子-C^*-代数 $D \subseteq F(A)$，使得 Cu(D) 含有一个元素 $\bar{z}$，满足$m\bar{z} \leq [1] \leq (n+1)(m+1)\bar{z}$ 在 Cu(D) 中成立。

根据引理 3.5，我们可以假设 D 包含于 $B' \cap F(A)$。我们得到一个含单位元的 $*$-同态 π：$B \otimes_{\max} D \to F(A)$，使得 $\pi(b \otimes 1) = b$对 $b \in B$成立。如 [APT18 第 6.4 段所述，10], 存在一个自然映射 φ: Cu(B) $\times$

$\mathrm{Cu}(D) \to \mathrm{Cu}(B \otimes_{\max} D)$，使得 $\varphi([b], [d]) = [b \otimes d]$ 对 $b \in B_+$ 和 $d \in D_+$成立。我们考虑复合 $\psi := \mathrm{Cu}(\pi) \circ \varphi$，如下面的图所示：

$$\mathrm{Cu}(B) \times \mathrm{Cu}(D) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cu}(B \otimes_{\max} D) \xrightarrow{\mathrm{Cu}(\pi)} \mathrm{Cu}(F(A)).$$
$$\psi$$

我们注意到，ψ 对每个变量都是可加且保序的，并且 $\psi(\bar{x}, [1]) = x$以及 $\psi(\bar{y}, [1]) = y$。由此我们得到

$$\begin{aligned} x = \varphi(\bar{x}, [1]) &\leq \varphi(\bar{x}, (n+1)(m+1)z) \\ &= \varphi((n+1)(m+1)\bar{x}, z) \\ &\leq \varphi((n+1)m\bar{y}, z) \\ &= \varphi((n+1)\bar{y}, mz) \leq \varphi((n+1)\bar{y}, [1]) = (n+1)y, \end{aligned}$$

这就证明了该断言。

现在，由引理 4.3 可知，$F(A)$ 具有受控比较性。通过与该断言的证明中类似的论证，可以证明，$F(A)$ 中单位元的 Cuntz 类的 n-近乎可除性会传递到所有 Cuntz 类，这意味着 $F(A)$ 是 n-近乎可除的。根据 [APTV24，命题 4.9]，，我们得到 $F(A)$ 是函数可除的。进而由 [APTV24，定理 5.7]，可知 $F(A)$ 是纯的。应用引理 3.6，我们推出 A 是 $\mathcal{Z}$-稳定的。□

在 [APTV24], 中，作者将函数可除性 引入为一种比对每个 n都满足 n-近乎可除性更弱的性质；它与受控比较结合后，仍可推出纯性。鉴于引理 4.4，自然会提出以下问题：

问题 4.5。如果一个可分的 C^*-代数的中心序列代数具有函数可除性，那么它是否为 $\mathcal{Z}$-稳定?

References

[AGKEP24] T. Amrutam, D. Gao, S. Kunnawalkam Elayavalli和 G. Patchell，约化群 C^* 代数中的严格比较，Invent. Math.（即将出版），预印本（arXiv:2412.06031 [math.OA]），2024。[APRT22] R. Antoine, F. Perera, L. Robert和 H. Thiel，稳定秩一的 C^*代数及其 Cuntz 半群，*Duke Math. J.* **171** (2022)，33–99。[APRT24] R. Antoine, F. Perera, L. Robert和 H. Thiel，C^*代数超幂上的迹，*J. Funct. Anal.* **286** (2024)，论文编号 110341。[APT18] R. Antoine, F. Perera和 H. Thiel，张量积与 Cuntz 半群的正则性性质，*Mem. Amer. Math. Soc.* **251** (2018)，viii+191。[APTV24] R. Antoine, F. Perera, H. Thiel和 E. Vilalta，纯 C^*代数，预印本（arXiv:2406.11052 [math.OA]），2024。[APTV25] R. Antoine, F. Perera, H. Thiel和 E. Vilalta，纯 C^*代数的扩张，预印本（arXiv:2506.10529 [math.OA]），2025。[APT 11] P. Ara, F. Perera和 A. S. Toms，算子代数的 K理论。 C^* *Aspects of operator algebras and applications Contemp. Math.* 代数的分类，**534** 1 71 载于 , , Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2011，第 – 页。[CGS+23] J. R. Carrión, J. Gabe, C. Schafhauser, A. Tikuisis和 S. White，分类 * C^* 2307 06480 同态 I：含幺 [ ] 2023 单核-代数，预印本（arXiv: . math.OA ），。[DT09] M. Dadarlat 和 A. S. Toms，$\mathcal{Z}$-稳定性与 C^*代数的无穷张量幂，*Adv. Math.* **220** (2009)，341–366。[DT10] M. Dadarlat 和 A. S. Toms C^* *J. Funct.* ，单-代数中 *Anal.* **259** 2010 1209 1229 的算子秩，( )，–。[EGLN25] G. A. Elliott, G. Gong, H. Lin和 Z. Niu，有限分解秩单可约 C^*代数的分类，II，*J. Noncommut. Geom.*19 (2025)，73–104。[FHL+21] I. Farah, B. Hart M. Lupini L. Robert A. Tikuisis A. Vignati W. Win- , , , , , 和，-代 ter C^* *Mem. Amer. Math. Soc.* **271** 2021 +127 数的模型论，( )，viii 。

[FS24] I. Farah 和 G. Szabó，余环与强自吸收 C^*代数，预印本（arXiv:2411.02274），2024。[GLN 20] G. Gong, H. Lin和 Z. Niu，有限单可约 $\mathcal{Z}$-稳定C^*代数的分类，II：具有有理广义迹秩一的 C^*代数，*C. R. Math.Acad. Sci. Soc. R. Can.* **42** (2020)，451–539。[Kir06] E. Kirchberg，C^*代数中的中心序列与强纯无限代数，载于 *Operator Algebras: The Abel Symposium 2004, Abel Symp.* **1**, Springer，柏林，2006，第175–231页。[KR14] E. Kirchberg 和 M. Rørdam，中心序列 C^*代数与 Jiang-Su 代数的张量吸收，*J. Reine Angew. Math.* **695** (2014)，175–214。[KR15] E. Kirchberg 和 M. Rørdam，中心序列 C^*代数何时具有特征，*Internat. J. Math.* **26** (2015)，1550049，32。[Naw13] N. Nawata，C^* *J. Lond.* 某些稳定无投影-代数的 *Math. Soc. (2)* **88** 2013 161 180 Picard 群，( )，–。[NR16] P. W. Ng 和 L. Robert C^* *Münster J.*，纯-代数中的交换子之 *Math.* **9** 2016 121 154 和，( )，–。[RR13] L. Robert 和 M. Rørdam C^* *Proc. Lond.*，-代数的可除性，( )，–。 *Math. Soc. (3)* **106** 2013 1330 1370 [RT17] L. Robert 和 A. Tikuisis，非单 C^*代数的核维数与 $\mathcal{Z}$-稳定性，*Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017)，4631–4670。[Rør02] M. Rørdam，核单 C^* *Classification of nuclear* 代数的分类，载于，，*C^*-algebras. Entropy in operator algebras Encyclopaedia Math. Sci.* **126** Springer，柏林，2002，第1–145页。[Rør04] M. Rørdam，$\mathcal{Z}$ C^* *Internat. J.* -吸收-代数的稳定秩和实 *Math.* **15** 2004 1065 1084 秩，( )，–。[RW10] M. Rørdam 和 W. Winter *J. Reine Angew. Math.*，重新审视 Jiang-Su 代 **642** 2010 129 155 数，( )，–。[Sat12] Y. Sato，具有有限维极端边界的单核 C^*代数的迹空间，预印本（arXiv:1209.3000 [math.OA]），2012。[Sch20] C. Schafhauser，简单 AF 代数的子代数，*Ann. of Math. (2)* **192** (2020)，309–352。[Sch24] C. Schafhauser，单核C^*代数的 KK 刚性，预印本（arXiv:2408.02745 [math.OA]），2024。[Thi20] H. Thiel，C^* *Comm.*，具有稳定秩一的单-代 *Math. Phys.* **377** 2020 37 76 数中的算子秩，( )，–。[TWW17] A. Tikuisis, S. White和 W. Winter，核 C^*代数的拟对角性，*Ann. of Math. (2)* **185** (2017)，229–284。[Tom08] A. S. Toms，C^* *Ann. of Math.*，核-代数的分类问题，( )，–。 *(2)* **167** 2008 1029 1044 [TWW15] A. S. Toms, S. White和 W. Winter，$\mathcal{Z}$-稳定性与有限维迹边界，*Int. Math. Res. Not. IMRN* (2015)，2702–2727。[TW07] A. S. Toms 和 W. Winter C^* *Trans. Amer.*，强自吸收-代数，( )，–。 *Math. Soc.* **359** 2007 3999 4029 [Whi23] S. White，可约 C^* *ICM—* 代数的抽象分类定理，载 *International Congress of Mathematicians. Vol. 4. Sections 5–8* 于，EMS 出版社，柏林，2023，第3314–3338页。[Win11] W. Winter，C^* $\mathcal{Z}$ *J. Noncommut.*，强自吸收-代数是-稳定 *Geom.* **5** 2011 253 264 的，( )，–。[Win12] W. Winter，$\mathcal{Z}$ C^* *Invent. Math.*，纯-代数的核维数与-稳 **187** 2012 259 342 定性，( )，–。[Win18] W. Winter，核 C^*代数的结构：从拟对角性到分类，再回归，载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians— Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures*，世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克，2018，第1801–1823页。

F. Perera, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Spain, and Centre de Recerca Matemàtica, Edifici Cc, Campus de Bellaterra, 08193 Cerdanyola del Vallès, Barcelona, Spain*Email address*: francesc.perera@uab.cat*URL*: https://mat.uab.cat/web/perera

Hannes Thiel, Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and the University of Gothenburg, SE-412 96 Gothenburg, Sweden*Email address*: hannes.thiel@chalmers.se*URL*: www.hannesthiel.org

Eduard Vilalta, Department de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647 , Barcelona.*Email address*: eduard.vilalta@upc.edu*URL*: www.eduardvilalta.com