arXiv:2512.17285v1 [math.CA] 19 Dec 2025

成就集——当前成果与未解决问题

SZYMON GŁA̧B 和 FRANCISZEK PRUS-WIŚNIOWSKI

摘要。本文综述成就集理论的最新进展，并提出一系列重要的未解决问题。

这篇非传统论文的目的之一，是凸显成就集理论中近期最有趣的成果。不过，本文主要关注该领域的未解决问题。这里提出的几乎所有问题早已为人所知，也曾有多人尝试解决，但至今仍未解决。

撰写本文的构想源于已故的 Dan Waterman [64], [65] 的两篇论文。这些研究激发了人们对他主要研究领域——有界广义变差——的重新关注，并推动了许多后续进展。我们缅怀这位杰出的数学家，更缅怀他那充满智慧与善意的为人。

1. 角谷条件

一百多年前，Soichi Kakeya 是第一位系统研究收敛级数子和集的数学家 [28, 29]。他对这类集合的拓扑性质很感兴趣，他的一项开创性成果指出，子和集（等价地说，成就集）

$$E = E(x_n) := \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists\, A \subset \mathbb{N} \text{ such that } y = \sum_{n \in A} x_n \right\}$$

绝对收敛实级数 $\sum x_n$ 的成就集总是紧致且完美的。事实上，上述定义对任意实数序列 (x_n) 都有意义（见 [27]）；随着时间推移，成就集这一术语逐渐取代了较早使用的名称子和集。成就集理论中的一项基本结果是著名的Guthrie–Nymann分类定理 [25,定理 1]。

Guthrie–Nymann分类定理。 绝对收敛级数的所有子和所构成的集合 E 总是恰好属于以下四种类型之一：

（i）有限集；（ii）多区间集；（iii）康托集；（iv）康托瓦尔。

多区间集是有限个有界闭区间的并集。康托集是与经典三分康托集同胚的集合。康托尔值集是最为复杂的成就集：它们是紧集 $A \subset \mathbb{R}$，满足每个 A-间隙[1] 的端点既是其他 A-间隙的聚点，也是 A-区间[2]的聚点。康托尔值集由 [42] 首次引入，当时称为 M-康托尔值集。Mendes 和 Oliveira 证明，所有康托尔值集都彼此同胚 [42, 附录]（另见[15, 推论 12]）。显然，所有康托集都彼此同胚，而多区间集彼此同胚当且仅当它们具有相同数量的连通分支；有限集也同样如此。因此，将成就集的拓扑类型这一概念用于描述它们是完全合理的。

日期：2025年12月22日。2020年 数学主题分类。主要分类：40A05；次要分类：11B05、28A75。关键词和短语。成就集、康托集、康托瓦尔、距离中心。

[1] A-间隙是 $\mathbb{R} \setminus A$的连通分支。[2] A-区间是 A的非平凡连通分支。

当且仅当它们具有相同数量的连通分支时；有限集也同样如此。因此，将成就集的拓扑类型这一概念用于描述它们是完全合理的。

Guthrie和Nymann给出了一个特别自然的Cantorval例子 [25, 第 326]页。我们称之为模型 *Cantorval*集：它由三进Cantor集 C 与 C标准构造过程中奇数步骤移除的所有区间合并而成。

自然，一个基本问题是如何通过考察级数 $\sum x_n$的项来判断 $E(x_n)$的拓扑类型。Kakeya已经研究过这个问题，探讨了各项 x_n 与余项 $r_n = \sum_{i>n} x_i$之间的关系。Kakeya只考虑了正项收敛级数，这并不影响讨论的一般性，因为

$$E(x_n) = E(|x_n|) + \sum_{n:\, x_n<0} x_n$$

（见 [26], [8]）。指标集合

$$K(x_n) := \{n \in \mathbb{N} :\ x_n > r_n\}$$

称为角谷条件集合。它的补集,

$$K^c(x_n) = \{n \in \mathbb{N} :\ x_n \le r_n\},$$

称为反向 *Kakeya* 条件集合。 $\mathbb{N}$ 的每个子集都恰好属于以下三种简单类别之一：有限集、补集为有限集的集合，以及自身和补集均为无限集的集合。前两类已经出现在Kakeya早期关于级数各项与相应成就集拓扑性质之间关系的结果中。

定理 1. $E(x_n)$ 是多区间集，当且仅当 $K(x_n)$是有限的。

定理 2. 如果 $K(a_n)$ 的补集有限，那么 $E(x_n)$是康托集。

级数 $\sum b_n$ （其中对所有 k，$b_{2k} = b_{2k-1} = \frac{1}{4^k}$ ）表明，这个蕴含不可逆。证明 $E(b_n)$ 是康托集的最简单方法，是应用 [9]中的定理16。根据 Guthrie–Nymann分类定理，上述结果可得出以下简单推论。

推论 3. 如果 $E(a_n)$ 是康托瓦尔，那么 基数 $K(a_n)$ =基数 $K^c(a_n) = \infty$。

这些观察唯一确定了当 $K(a_n)$ 为有限集或余有限集时， $E(a_n)$ 的拓扑类型。Kakeya 认为，card $K(a_n) = \infty$ 意味着 $E(a_n)$ 是康托集。在 [28], 中，他坦率地写道：“关系 $a_n \le r_n$ 仅对有限个 n 值不成立，似乎是集合 $E(a_n)$ 处处稀疏的充要条件；但我对此没有证明。”这段话被称为 Kakeya 1914年猜想，但其知名度不及更广为人知的 Kakeya 1917猜想。

Guthrie–Nymann 康托瓦尔 $E(c_n)$（其中 $c_{2n-1} = \frac{3}{4^n}$和 $c_{2n} = \frac{2}{4^n}$）为这一假设提供了一个反例，因为 $K(c_n) = 2\mathbb{N}$ （见 [25], [14]）。这一例子与 $E(b_n)$一起表明，Kakeya条件并不能唯一确定成就集的拓扑类型，正如$K(c_n) = K(b_n)$所示。然而，Kakeya猜想仍有一定的正确性：对于每个补集无限的无限集 $K \subset \mathbb{N}$，都存在一个绝对收敛级数，其Kakeya条件集为 K ，且其成就集是一个康托集。这一非平凡结果由 J. Marchwicki 和 P. Miska 在 [39, 定理 1.3]中证明。 [43], 给出了一种更简单的证明，但代价是失去了子和的唯一性 [3]。

定理 4。 对于任意 $K \subset \mathbb{N}$满足基数 K =基数 $K^c = \infty$的对象，都存在一个级数 $\sum a_n$ 使得$K(a_n) = K$ 且 $E(a_n)$ 是一个康托集。

[3]子和的唯一性意味着，每个子和只能由一个子级数得到，也就是说，函数 $2^{\mathbb{N}} \to E(x)n) : A \mapsto \sum_{n\in A} x_n$ 是双射。

他们还研究了是否可以将定理 4 中的康托集替换为康托瓦尔 [39,问题 5。1]。这绝不是一个容易的问题。在所有已知的可实现康托瓦尔例子中，至少一半的角谷条件（就渐近密度而言）被反转了。例如，最早已知的可实现康托瓦尔例子由 Weinstein–Shapiro 级数 $\sum d_n$给出，其中

$$d_n = \frac{3}{10} \cdot \frac{9-m}{10^k},$$

且（k, m）是 $\mathbb{N} \times \{1,2,3,4,5$ 中满足 $n = 5(k\}- 1) + m$ [66] 的唯一一对。由于

$$K(d_n) = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 0 \pmod 5\},$$

我们得到 $d(K^c(d_n)) = \frac{4}{5}$。

对于 Guthrie–Nymann 级数 $\sum c_n$，我们有 $d(K^c(c_n)) = \frac{1}{2}$。

受这些例子的启发，Marchwicki 和 Miska 研究了能否从一列满足较低比例反向 Kakeya 条件的序列中得到康托瓦尔。他们用下渐近密度和上渐近密度（分别为 d 和 $\overline{d}$）表述了这个问题，并证明了以下结果 [39,定理 3.10]。

定理 5。 对于任意 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$，存在一个级数 $\sum a_n$，使得 E（a_n）是一个康托瓦尔，并且

$$\underline{d}\, K^c(a_n) = \alpha, \qquad \overline{d}\, K^c(a_n) = \beta.$$

此外，他们还明确提出，是否可能构造一个级数 $\sum a_n$，使得 $E(a_n)$ 是一个康托瓦尔，且 $d(K^c(a_n)) = 0$ [39, 问题 5.2]。去年， [62]给出了肯定的回答。然而，这并非关于角谷条件重要性的最后进展。在题为成就集为康托尔瓦尔的一个新充分条件的特邀报告中，Piotr Nowakowski 在第七届后现代实分析研讨会（波兰 Będlewo 会议中心，2025年11月3日至6日）上展示了一种巧妙的级数构造 $\sum x_n$，使得对于任意给定的无限子集 $S \subset \mathbb{N}$ （其补集也是无限集）， $E(x_n)$ 是一个康托瓦尔，且 $K(x_n) = S$。这一结果肯定地回答了 [39] 中的问题 5.1，并完整展现了角谷条件与拓扑类型之间的关系。

总而言之，通过 Kakeya 条件能够得到的唯一确定性结论，早已由 Kakeya 本人发现。近期结果表明，如果 $K(x_n)$ 是无限集且其补集也无限，那么 $E(x_n)$ 既可能是康托集，也可能是康托瓦尔。因此，与经典的 Kakeya 定理（即定理 1 和定理 2）相比，Kakeya 条件并不能为识别成就集的拓扑类型提供更有效的工具。因此，一维成就集理论的根本问题基本上仍未解决。

问题 1. 根据生成序列 (x_n)，寻找成就集拓扑类型的刻画。

Moroz [38]针对 Pratsiovytyi 和 Karvatskyi[59,的猜想 4.1]构造了一个反例，这进一步表明 Kakeya 条件并非识别拓扑类型的通用工具。Moroz 的例子表明，即使满足以下三个假设：

(1) 对所有 n， $a_n \leq c_n \leq b_n$；(2) $K(a_n) = K(b_n)$ $= K(c_n)$；(3) $E(a_n)$ 和 $E(b_n)$ 具有相同的拓扑类型，

并不意味着 $E(c_n)$ 与另外两个成就集具有相同的拓扑类型。

有限成就集的刻画是显而易见的，而多区间集的刻画早已由 Kakeya 得出（定理 1）。然而，康托集和康托瓦尔的情形仍未解决，这促使人们研究级数的特殊族，或为特定拓扑类型寻找新的充分条件。以下具体问题很好地展现了确定拓扑类型的难度。第一个问题源自 Jones 的一篇论文 [27], ，该论文在大约十五年前推动成就集理论复兴的过程中发挥了重要作用。

问题 2（第一个琼斯问题）。 $E(x_n)$ 的拓扑类型是什么？当 $x_n := \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}$ 时？（参见 [27, 第 518]页）

这个级数只是对初等几何级数 $\sum \frac{1}{2^n}$ 所作的微小改动，而后者的成就集是整个区间 $[0,1]$。然而，十四年过去了， $E(x_n)$ 的拓扑类型仍然未知。角谷定理在此并不适用，因为 $K(x_n) = 2\mathbb{N}$。最近， [61] 中也提出了一个类似的问题。

问题 3. $E(x_n)$ 在 $x_{2n-1} := \frac{1}{2^{2n-1}}$ 和 $x_{2n} := \frac{1}{2^{2n}+1}$ 的情况下，其拓扑类型是什么？

更一般地说，受限目标是寻找判据，以确定满足 $K(x_n) = 2\mathbb{N}$ 或 $K(x_n) = 2\mathbb{N} - 1$ 的级数的成就集的拓扑类型。上述两个问题与第二个琼斯问题密切相关。

问题 4 (第二个琼斯问题)**.** 是否存在一个序列 (x_n) ，使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，并且 $E(x_n)$ 是一个康托瓦尔？ [27, 页。 519]

关于康托瓦尔的已知充分条件的局限性，另一个例证来自对慢收敛级数进行稀疏化的问题。若序列 (x_n) 满足条件 $K^c(x_n) = \mathbb{N}$，则称其为慢收敛（或填满区间）序列。显然，每个这样的序列都包含一个快速收敛子序列 (x_{n_k})，即满足 $K(x_{n_k}) = \mathbb{N}$ 的子序列。根据定理 2，相应的成就集 $E(x_{n_k})$ 是一个康托集。另一方面，已知若对几乎所有指标 n 都有 $x_n = r_n$ ，则 $E(x_{n_k})$ 始终是多区间集或康托集。因此，在这种情况下，不可能通过稀疏化 (x_n) 得到一个生成康托瓦尔的子序列。这引出了另一个未解决问题。

问题 5。 设对所有 n 都有 $r_n > x_n$ 。是否存在一个子序列（x_{n_k}），使得 $E(x_{n_k})$ 是一个康托瓦尔？

即使我们只关注几何序列这一类非常友好的对象，这个问题的答案仍然未知。

问题 6. 每个满足$(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$且 $q \in (\frac{1}{2}, 1)$ 的几何数列，是否都包含一个子序列$(q^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得$(q^{n_k})$ 是一个康托瓦尔？

2. 多几何序列

从成就集的性质这一角度考察，研究得最重要的一类序列是**多几何序列**。它们在该短文的两个未发表版本中均有提及 [50] (见 [48, 第 26] 页及 [49, 第 8]页的脚注)。后来，文献 [10] 对它们作了定义和研究，并建立了第一个一般充分条件 [10, 定理 2.1]。

多几何序列（或级数）构成了一类相对容易从成就集的拓扑分类角度进行分析的对象。通俗地说，多几何序列是若干个具有相同公比的收敛几何序列的单调混合。

形式化地，设 $m \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$，且 $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m > 0$。多几何序列定义为

$$a_n = k_i q^j,$$

其中 (j, i) 是满足 $j \in \mathbb{N}$和 $i \in \{1, \ldots, m\}$使得 $n = (j-1)m + i$ 的唯一一对。多几何序列记作

$$(k_1, \ldots, k_m;\ q),$$

其成就集记作 $E(k_1, \ldots, k_m;\ q)$。注意， $E(k_1, \ldots, k_m;\ q)$ 是代数和

$$k_1 E(1; q) + \cdots + k_m E(1; q)$$

由 m E的缩放副本组成（$1;\ q$）。对于 $q < \frac{1}{2}$，集合 $E(1;\ q)$ 是一个康托集。

从历史上看，Kakeya 的1914年猜想最早的反例是作为多几何序列的成就集构造出来的（参见 [66] ，其中给出了无证明的公告；以及 [18] ，其中给出了证明）。后来，Jones 描述了一个多几何序列的无限族，其成就集是 Cantorval [27, p。 515]。在 [10], 中，建立了使多几何级数产生康托瓦尔的一般充分条件 [10, 定理2。1]。一个重要例子是 Guthrie–Nymann 康托瓦尔$E(3，2；\frac{1}{4})$ [25], [14],，它同时也是一个多几何序列的成就集。

在理解多几何序列的成就集的拓扑类型对比率 q 的依赖关系方面， [1]取得了重大进展。作者分析了在初始系数 $k_1q, k_2q, \ldots, k_mq$ 固定时，拓扑类型如何随 q 变化（见 [1, 第 1025–1026] 页）。令 $E := E(k_1, \ldots, k_m; q)$。存在常数 d_C, d_{CI}, d_I 和 d_{PM}，它们取决于 $k_1, \ldots, k_m$，使得

- 如果 $q < d_C$，那么 E 是一个康托集。
- $q \geq d_I$ 当且仅当 E 是一个区间；此外，在温和的假设下，对于 $q < d_I$，集合 E不是有限个区间的并。
- 如果 $q \geq d_{CI}$，那么 E 包含一个紧区间。
- 对于几乎所有 $q \in [d_C, d_{PM}]$（按勒贝格测度的意义），集合 E都有正测度。
- 存在一个递减序列（q_n）收敛于 d_C，使得 E 是一个零测度的康托集。

始终有 $d_C \leq d_{CI} \leq d_I$和 $d_C < d_{PM}$。如果 $d_{CI} \leq q < d_I$，那么 E是一个康托瓦尔。在 [30]中给出了将这些条件推广到更广泛的级数类的一些推广。注意，对于 $E(1,1; q)$，我们有$d_C = d_I$；对于 $E(3,2; q)$，我们有 $d_C < d_{CI} = d_I$；而对于 $E(4,3,2; q)$，我们有 $d_C < d_{CI} < d_I$。这些例子表明，对于 $k_1, \ldots, k_m$的某些取值，集合 E只能是一个区间或一个康托集；对于另一些取值，上述判据无法确定 E 是否为康托瓦尔；而对于其余取值，上述判据则可以确定。

该子领域最近的进展发表于 [20]。该论文的主要定理[20, 定理 8] 为 $E(k_1, \ldots, k_m; q)$ 在 $q = d_C$ 时具有非空内部提供了若干必要且充分条件（事实上，这些条件适用于更一般的情形）。这一重要结果借助遍历理论和铺砌理论中的工具获得。这些对于成就集研究而言全新的方法，为确定拓扑类型开辟了富有前景的方向。

多几何级数中最著名的子族之一是**Ferens 级数**，其定义和研究见 [5] 和 [12]。

Theo注 6. 设$(x_n) = (m + k - 1, m + k - 2, \ldots, m; q)$ 是一个 *Ferens* 序列。 n

(i) $E(x_n)$ 是单个区间，当且仅当 $q \geq \frac{m}{s+m} = d_I$；(ii) 若 $d_{CI} = \frac{1}{s-2m+1} \leq q < \frac{m}{s+m} = d_I$，则 $E(x_n)$ 是一个~~康托瓦~~尔；(iii)~~若~~ $0 < q < \frac{1}{s-2m+3} = d_C$，则 $E(x_n)$ 是一个康托集；(iv) 存在一个严格递减且收敛到~~$\frac{1}{s-2m+3}$~~ 的序列(q_n)，使得 $(m + k - 1, \ldots, m; q_n)$ 是一个零测度的康托集；(v) $E(x_n)$ 对几乎所有的 $q \in \left(\frac{1}{s-2m+3}, \frac{1}{s-2m+1}\right)$ 都具有正测度（此处“几乎所有”指勒贝格测度意义下）。

———— ————

下一个结果表明，对于 $q = d_C$，可能出现两种不同的情况。

定理 7。 设 $E := E(m + k - 1, \ldots, m; q)$ 是一个 *Ferens* 成就集，且 $q = \frac{1}{s-2m+3} = d_C$。那么

- E 是一个康托集，当 $m \geq 3$ 时；
- E 是一个康托瓦尔，当 $m = 2$ 时。

除区间 $\left(\frac{1}{s-2m+3}, \frac{1}{s-2m+1}\right)$ 外，Ferens 成就集已得到完整分类。因此，剩下的未解问题都聚焦于这个神秘的参数值域。

问题 7。 设(x_n) 是一个 *Ferens* 序列。对于 $\left(\frac{1}{s-2m+3}, \frac{1}{s-2m+1}\right)$ 中的 q，使得 $E(x_n)$ 为零测度的取值是否只有可数个?

可以证明，每个 Ferens 成就集都是一个仿射自相似集。一个由来已久的未解决问题是：欧几里得空间中是否存在具有正勒贝格测度且内点为空的仿射自相似集？这个问题在 [16], 得到了肯定回答，当时有人在平面中构造出了这样一个例子。这种现象能否出现在实数轴上，至今仍不得而知。若下面的问题答案是否定的，就能肯定地回答那个问题；因此，我们认为答案是肯定的。

问题 8. 设(x_n)是一个 *Ferens* 序列。对于 $q \in \left(\frac{1}{s-2m+3}, \frac{1}{s-2m+1}\right)$，集合 $E(x_n)$是否满足 *Palis* 二分法，即它的测度要么为零，要么包含一个区间?

对于多几何级数 $(k_1, \ldots, k_m; \frac{1}{n})$，我们用 Σ 表示 $\{k_1, \ldots, k_m\}$的所有子和构成的集合，即

$$\Sigma = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i k_i : \ \varepsilon_i \in \{0,1\} \Big\}.$$

以下结果本质上归功于 Nitecki [49, 50]。

定理 8. 设$(k_1, \ldots, k_m; \frac{1}{n})$是一个满足 $n = |\Sigma|$的多几何级数。设 $\{\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{n-1}\}$ 是 Σ的一个枚举。对每个 i，令 $t_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 满足 $\sigma_i \equiv t_i$ (模 n)，并假设 $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$。那么

(i) 若 $\sigma_i = i\sigma_1$，则 $E(k_1, \ldots, k_m; \frac{1}{n})$是区间 $\left[0, (k_1 + \cdots + k_m)\frac{n}{n-1}\right]$；

(ii) 否则， $E(k_1, \ldots, k_m; \frac{1}{n})$ 是一个康托瓦尔。

设 $(k_1, \ldots, k_m; 1/n)$ 是一个多几何级数，且 k_1 可被 n 整除，例如 $k_1 = rn$。则

$$E(k_1, k_2, \ldots, k_m; 1/n) = \{0, r\} + E(r, k_2, \ldots, k_m'; 1/n).$$

两个集合具有相同的拓扑类型。因此，在确定 $E(k_1, \ldots, k_m; 1/n)$ 的类型时，我们可以假设 $k_1, \ldots, k_m$ 中没有任何一个可被 n 整除。

作为说明，请考虑序列 $(1, 8; \frac{1}{4})$。在这种情况下， $\Sigma = \{0, 1, 8, 9\}$。注意 th at

$$(1, 8; \tfrac{1}{4}) = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{8}{4}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{8}{16}, \tfrac{1}{64}, \tfrac{8}{64}, \ldots\right) = \left(\tfrac{1}{4}, 2, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{64}, \tfrac{1}{8}, \ldots\right).$$

重新排列各项后，我们得到 $\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$。因此， $E(1, 8; \frac{1}{4}) = [0, 1] \cup [2, 3]$。

这个例子表明，Nitecki 定理不可逆。不过请注意，在这种情况下，8 能被 4 整除。现在我们可以提出以下猜想。

问题 9. 设$(k_1, \ldots, k_m; \frac{1}{n})$是一个多几何级数，使得 $k_i \in \mathbb{N}$, $\Sigma = \{\sigma_0 < \cdots < \sigma_{n-1}\}$有 n 个元素，其中没有一个 $k_1, \ldots, k_m$ 能被 n整除，并且 $E(k_1, \ldots, k_m; \frac{1}{n})$ 具有正的勒贝格测度。余项集合 $t_i < n$ 中满足 $\sigma_i \equiv t_i$ (模 n) 的部分是否等于 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$?

注记。 当 $|\Sigma|$ 是素数时，答案是肯定的；参见 [20]。

3. 代数和与成就集的分解

该子领域的一些新成果已在 [40] 中确立。其中， ϵ-闭（或 ϵ-紧）子集的概念被引入，作为一种工具，用以完整刻画那些成就集包含区间的序列 [40, 命题 28]。尽管在许多情况下这一刻画难以应用，但它已成功用于若干序列，包括非多重几何广义 Ferens 数列 [40, 定理 3.1]。该论文中最引人注目的结果如下 [40, 定理 4.16]。

定理 9。 对任意满足 p、 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的 $p \geq m \geq 2$，都存在一个可实现康托集 C，使得 $C_k := C + \cdots + C$ （k 次） 满足

- C_k 对每个 $k < m$都是一个康托集；

- C_k 对每个满足 $m \le k < p$的 k 都是一个康托瓦尔；
- C_k 对每个 $k \ge p$ 都是一个区间。

特别地，若 C 是一个可实现康托集，且满足 $m = 2$ 和 $p = \infty$，那么 C_2 是一个康托瓦尔，而任意有限个 C 的代数和仍是一个康托瓦尔 [40, 定理 4.14]。此外，[40, 命题 4.4 和 4.5] 给出了以下观察。

定理10. 对于任意可实现的康托瓦尔 D，都存在两个可实现康托集 C 和 C'，使得 $D + C$ 是一个康托瓦尔，而 $D + C'$ 是一个区间。

还有几个类似的问题尚未解决。

问题10. 对于任意可实现康托集 C，是否存在可实现康托集 C' 和 C''，使得 $C + C'$ 是一个康托集，而 $C + C''$ 是一个康托瓦尔？

问题11. 对于任意可实现康托集 C，是否存在可实现的康托瓦尔 D' 和 D''，使得 $C + D'$ 是一个康托瓦尔，而 $C + D''$ 是一个区间？

问题 12. 对于任意一个可实现的康托尔谷 D，是否存在可实现的康托尔谷 D' 和 D''，使得 $D + D'$ 是一个康托瓦尔，而 $D + D''$ 是一个区间？

康托集最简单的子族之一是中心康托集。基本区间为 $[0, y_0]$ 的中心康托集按如下方式构造。第一步，从 $[0, y_0]$ 中移除一个开区间（y_1，x_1），这与标准康托三分构造类似。唯一的要求是 $0 < x_1 - y_1 < y_0$。将剩下的两个闭区间记为 I_1，每个区间的长度为 y_1。第二步，从 I_1 的每个连通分支中移除一个长度相等的中间开区间，确保它小于 y_1，并将最左侧移除的区间记为（y_2，x_2）。归纳地继续，在第 n 步，从 I_{n-1} 的每个 2^{n-1} 连通分支中移除一个长度为 $x_n - y_n$ 的中间开区间，其中$0 < x_n - y_n < y_{n-1}$。以此方式得到的集合 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ 是一个中心康托集。所有被移除的区间都与其所在区间的中心对齐。除非另有说明，我们将考虑基本区间为 $[0, 1]$ 的中心康托集。

每个基本区间为 $[0, 1]$ 的中心康托集，都是级数 $\sum x_n$ 的成就集，其中 x_n 是第 n 步移除的最左侧区间的右端点。该级数快速收敛（$K(x_n) = \mathbb{N}$），其余项 r_n 对应于被移除区间的左端点，即对于所有 n，都有 $r_n = y_n$。反过来，任何和为 1 的快速收敛正项级数，其成就集都是基本区间为 $[0, 1]$ 的中心康托集。

和为 1 的所有快速收敛正项级数的集合与序列 $(a_n) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ 之间存在自然双射 A，其定义为 $A(x_n) = (a_n)$，其中 $a_n := \frac{x_n - r_n}{r_{n-1}}$。其逆映射为 $A^{-1}(a_n) = (x_n)$，其中$x_n := \frac{1+a_n}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1-a_i}{2}$。这些 a_n 称为剖分比，而 $C_{(a_n)}$ 表示与 (a_n) 对应的中心康托集。中心康托集关于$\frac{1}{2}$对称，这意味着

$$C_{(a_n)} + C_{(b_n)} = C_{(a_n)} - C_{(b_n)} + 1,$$

因此，研究中心康托集之和等价于研究它们的差。从成就集的角度研究康托集之差的近期成果见 [51], [19], [52], [53]。特别是，[51]给出了用于判定中心康托集之和的拓扑类型的精细充分判据，并重现了Pourbarat关于常数剖分比康托集之和的结果 [58]。

经典的Newhouse间隙引理 [47], [33, 第 2] 章给出了 $C_1 + C_2$ 为区间的一个充分条件：$\tau(C_1) \cdot \tau(C_2) \ge 1$，其中 τ表示厚度。Nowakowski指出，这一条件远非必要条件 [51, 命题2.8]。

定理11。 给定任意 $\epsilon > 0$，存在序列 (a_n)、$(b_n) \in (0、1)^{\mathbb{N}}$，使得 $\tau(C_{(a_n)}) \cdot \tau(C_{(b_n)}) \le \epsilon$，且 $C_{(a_n)} - C_{(b_n)} = [-1, 1]$。

对于具有恒定细分比 $\alpha, \beta \in (0,1)$ 的中心康托集，若 $\ln \frac{1-\alpha}{2} \ln \frac{1-\beta}{2}$ 为无理数，则 $\dim_H\left(C_{(\alpha)} + C_{(\beta)}\right) = \max\left\{\dim_H C_{(\alpha)} + \dim_H C_{(\beta)}, 1\right\}$ [57]。利用成就集方法，Nowakowski 证明，对于任意康托集，这一等式通常不成立 [51, 命题 2.11]。此外，他未发表的结果给出了两个中心康托集之和为零测度康托集的简单充分条件。

定理12。设 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 是和为 1的快速收敛级数，其余项分别为 r_n^x 和 r_n^y。若

$$\lim_{n\to\infty} 3^n r_n^x = 0,$$

则 $E(x_n) + E(x_n)$ 是一个零测度康托集。若

$$\lim_{n\to\infty} 3^n (r_n^x + r_n^y) = 0,$$

则 $E(x_n) + E(y_n)$ 是一个零测度康托集。

问题13。第一个推论中的常数 3 能否换成更小的数?

问题14。对于所有中心康托集 $C_{(a_n)}$，若 $int(C_{(a_n)} - C_{(a_n)}) \neq \emptyset$，能否推出 $0 \in int(C_{(a_n)})$?

如果这个问题得到肯定回答，那么判断中心康托集的差是否为康托集的判据就会简化，因为只需考察趋近于 0 附近的间隙序列。

另一个问题源于 Moreira 和 Yoccoz 的观察：对于动力系统定义的康托集，Palis 二分法通常成立 [46]。

问题15。 对于中心康托集，*Palis* 二分法是否通常成立? ?

近期的一项算术分解结果 [40] 指出：

定理13。 每个无限成就集都是两个零测度可实现康托集的代数和。

这推广了此前关于中心康托集的一项结果 [63, 定理 1]，并引出了进一步的问题：

问题16。 每个无限成就集都能否分解为两个豪斯多夫维数为 0 的可实现集之和?

鉴于 [51, 命题 2.11]，肯定的答案似乎颇为可信。Piotr Miska 提出了有关成就集之和的相关问题。第一个问题是，是否存在一个豪斯多夫维数为 0 的可实现康托集 C，使得 $C + C$ 也是一个康托集。为表述答案，我们引入齐次康托集和半快速收敛序列。

设 (n_k) 是一个满足 $n_k \geq 2$的整数序列，(c_k) 是一个满足 $n_k c_k < 1$的正数序列。设 I_0 为一个闭区间 $[a, b]$。假设 I_k 由 i_k 个长度相等的闭区间$I_{k,\,i}$ 组成。定义I_{k+1} 如下：从每个$I_{k,\,i}$ 中移除 $n_{k+1} - 1$ 个开区间，使得剩下的 n_{k+1} 个闭区间长度均为$c_{k+1}|I_{k,\,i}|$。那么

$$C_{(n_k),(c_k)} := \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{i_k} I_{k,i}$$

是一个齐次康托集。中心康托尔集是齐次康托集的子族。具体而言，对于 $(a_n) \in (0,\ 1)^{\mathbb{N}}$，我们有 $C_{(a_n)} = C_{(2),\ (\frac{1-a_k}{2})}$。一个齐次康托集 A，其最小值为 $\underline{A} = 0$，对应于一个半快速收敛序列 $(\alpha_k; N_k)$，即 $A = E(\alpha_k; N_k)$ [9, 第 1526-1527] 页。

对于一个齐次康托集$C_{(n_k),\ (c_k)}$，其基本区间为 $[0,\eta]$，我们有 $N_k = n_k - 1$ 和$\alpha_k = \eta\prod_{i=1}^{k} c_i$。其豪斯多夫维数为 [37, 第 804] 页

$$\dim_H C_{(n_k),(c_k)} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(n_1\cdots n_k)}{-\log(c_1\cdots c_k)} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log((N_1+1)\cdots(N_k+1))}{-\log\alpha_k + \log\eta}. \tag{1}$$

现在我们可以对 Miska 的第一个问题作出肯定回答。考虑 $\alpha_k := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{(k-1)^2}} - \frac{1}{3^{k^2}}\right)$。那么 (α_k) 是快速收敛的，因此 $E(\alpha_k)$ 是一个康托集。同样，$(\alpha_k; 2)$ 是半快速收敛的，因此 $E(\alpha_k; 2)$ 是一个康托集 [9, Thm. 16]。此外，

$$\dim_H E(\alpha_k; 2) = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log 3^k}{-\log\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{(k-1)^2}} - \frac{1}{3^{k^2}}\right)} = 0.$$

由于 $E(\alpha_k) \subset E(\alpha_k; 2)$，我们也有 $\dim_H E(\alpha_k) = 0$，从而对 Miska 的第一个问题给出了肯定的回答。他的第二个问题仍未解决：

Prob引理 17。设 $E(x_n)$ 满足 $E(x_n) + E(x_n)$ 是一个康托集。是否可以断言

$$dim_H(E(x_n)) \geq \frac{1}{2}\, dim_H(E(x_n) + E(x_n))\,?$$

4. 康托瓦尔、对偶康托瓦尔及其边界

给定一个紧集 $A \subset \mathbb{R}$，我们可以填补所有 A 间隙，并去除所有 A 区间的内点。我们将所得集合记为 A^*，并称其为 A 的对偶。形式上，

$$A^* = \overline{[\min A, \max A] \setminus A}.$$

任意康托瓦尔的对偶都是康托瓦尔。另一方面，任意康托瓦尔的边界都是康托集。已知 Guthrie–Nymann 康托瓦尔 $E := E(3,\ 2;\ 1\,4)$ 的边界是一个成就集 [12,例 7。2], 而其对偶 E^* 不可实现 [14, 定理 5。3]。

Bartoszewicz 在第五届后现代实分析研讨会上提出了以下问题：

问题 18。是否存在一个成就集 E，使得 $\mathrm{Fr}\ E$ 和 E^* 都是成就集？

显然，可实现多区间集的边界未必是可实现的。当然，可实现康托集的边界是可实现的，但可实现康托瓦尔的情况仍不明确。

问题19。任意可实现康托瓦尔的边界是否都是可实现集？

即使将范围限定为多几何序列，这些问题仍然很有趣。下一个问题看似简单，却凸显了我们对可实现康托瓦尔知之甚少：

问题20。是否存在两个可实现的康托瓦尔 $E(x_n)$ 和 $E(y_n)$，使得它们的并集 $E(x_n)\cup E(y_n)$ 是一个闭区间？

显然，只有当它们共享同一个基本区间时，这种情况才可能发生；也就是说，在所有项均为正数这一标准假设下，若 $\sum x_n = \sum y_n$。

康托瓦尔的边界本身是康托集，因此不会带来拓扑困难，但我们仍然可以探讨它们的大小。以下问题至少九年来一直悬而未决：

问题21。是否存在边界具有正勒贝格测度的可实现康托瓦尔吗？

所有已知的可实现康托瓦尔的边界都具有零测度。这既包括多几何康托瓦尔（Guthrie–Nymann 康托瓦尔 [14, 定理 5.3], Ferens康托尔谷 [5,定理 8], Guthrie–Nymann–Jones康托尔谷 [2, 定理 3.1]），也包括非多几何康托瓦尔（广义Ferens康托尔谷 [40, 定理 3.3], Marchwicki–Miska康托尔谷 [62, 定理 9]）。甚至基辅康托尔谷 [67] 也具有这一性质。

康托瓦尔 $E(x_n)$ 被称为标准 的，当且仅当

$$\overline{\lim}\,\frac{|P_k|}{r_k} > 0,$$

其中， $|P_k|$ 是 E_k-区间的最大长度。最近，Nowakowski 和 Prus-Wiśniowski [54]证明，所有标准的可实现康托瓦尔的边界都具有勒贝格零测度。

问题 22。 每个可实现的康托瓦尔都是标准的吗？

对这一问题的肯定回答将意味着对前一个问题的否定回答。在另一篇近期论文中， [60], Karvatsky 和 Pratsiovytyi 计算了 Guthrie–Nymann 康托瓦尔边界的豪斯多夫维数。他们提出了以下问题：

问题 23。 是否存在一个可实现的康托瓦尔 E 使得

(i) $_H$ 的弗拉涅维奇集合的维数 $= 1$?(ii) $_H$ 的弗拉涅维奇集合的维数 $= 0$?

证明 Guthrie–Nymann分类定理的一个关键工具是 Nymann–Saenz 引理[56,引理 2]。

问题 24. 对于可实现的康托尔谷的区间分支端点，是否存在 *Nymann–Saenz* 引理的类似结果？更确切地说，如果 $E(x_n)$ 是一个康托瓦尔，且 a 和 b 是两个不同的 E-区间的左端点，那么是否存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$E \cap [a-\epsilon, a] \quad is\ a\ translate\ of \quad E \cap [b-\epsilon, b]\,?$$

5. 实平面上的成就集

成就集的概念可以自然地推广到任意巴拿赫空间，尤其是 $\mathbb{R}^n$。此前已有若干研究探讨了这一方向（参见 [11], [13], [21] 及其中的参考文献）。Morán [44, 45], 研究了成就集的分形性质和维数；成就集也可以解释为纯原子向量值测度 [36]的值域。然而，高维成就集理论颇具挑战，目前尚未取得显著成果，主要原因在于不存在一维 Guthrie-Nymann 分类定理的类似结果。因此，这一分支领域的一个基本未解决问题如下：

问题 25。 刻画 $\mathbb{R}^2$ 中的成就集，按同胚分类。

近期论文 [35] 中的命题 3.1 列出了平面中成就集的九种基本拓扑类型。该论文的定理 4.1 表明，在对（a_n）施加温和假设的情况下，任意 P-和集合 S（P， （a_n））都是适当选取的二维成就集的一个水平截面E（x_n， y_n），这意味着至少还存在一种额外的拓扑类型。

下面的未解决问题等价于 [35]中的问题 6.1：

问题 26。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是一个可实现集。每个垂直截面 E_x 是否都是一个 P-和集合?

多维成就集自然地出现在现代数论中。Erdös 和 Straus 的一个经典结果表明， $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ 的二维成就集具有非空内点 [17, p. 65]。最近，Kovač [31]将这一结果推广到了三维。此外，Kovač 和 Tao[32]在最近的研究中利用了关于成就集的一些基本 Kakeya 观察。因此，成就集理论的实质性发展可能会直接影响数学中其他重要领域。

问题 27。 为 $\operatorname{int} E(x_n, y_n) \neq \emptyset$ 找出合理的充分条件。

即使是 $\sum_{n=1}^{\infty}(p^n,\ q^n)$ 的成就集的拓扑性质，也尚未得到完全理解。目前的观察结果为 [35, p. 221]：

- 如果参数 p 或 q 中至少有一个小于或等于 $\frac{1}{2}$，那么 $E(p^n,\ q^n)$ 是一个康托集。
- 如果 $p = q \geq \frac{1}{2}$，那么 $E(p^n,\ q^n)$ 是一条线段。

问题 28。 刻画 $E(p^n, q^n)$ 对所有 $p, q \in (0,\ 1)$的情形。

显然，两个一维成就集的笛卡尔积本身是一个二维成就集。然而，根据 [35]，中的定理 4.1，存在许多不是一维成就集笛卡尔积的二维成就集，因为存在大量不可实现的 P-和。例如，Głab 和 Marchwicki 最近在 [24] 中证明，$[0, +\infty)$ 的每个多区间子集都是一个 P-和集。

6. 基数函数

设 $\mathbf{x} = (x_n)$ 是一个绝对收敛级数。定义 $f\colon\ \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ 为

$$f((\varepsilon_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n.$$

那么 f 是连续的，因此 $f^{-1}(t)$ 是闭集，且其基数属于 $\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \mathfrak{c}\}$。函数 $F_{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{card}(f^{-1}(t))$ 称为 x 的基数函数 。集合

$$U(E(x_n)) := \{t \in E(x_n) : F_{\mathrm{x}}(t) = 1\}$$

称为 $E(x_n)$ 的唯一性集，是一个 $\mathcal{G}_\delta$ 集 [54]。注意，$\{0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n\} \subseteq U(E(x_n))$，当且仅当 $E(x_n)$ 是区间 $[0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n]$ 时等号成立。

在 [22], 以下关系 中，Kakeya 条件与基数函数之间的关系得以确立 :

- 如果对于每个 n 都有 $x_n > r_n$，那么 $U(E(x_n)) = E(x_n)$。
- 如果对于每个 n 都有 $x_n \leq r_n$，并且仅对于有限多个 n 有 $x_n < r_n$，那么 F_{x} 有界。
- 如果对于每个 n 都有 $x_n \leq r_n$，并且对于无穷多个 n 有 $x_n < r_n$，那么 F_{x} 无界，并且存在 t 使得 $F_{\mathrm{x}}(t) \in \{\omega, \mathfrak{c}\}$。

在 [23], 中已证明，$U(GN)$ 在 GN 中是余剩的，这意味着 $GN \setminus U(GN)$ 在拓扑意义上很小。然而，$U(E(x_n))$ 从不包含区间。

问题29。 对于哪些集合 $C \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \mathfrak{c}\}$，存在一个序列 x，使得基数函数 F_{x} 的值域恰好为 C?

部分答案见 [41]。以下具体问题仍未解决:

问题30 ([22])。 是否存在一个序列 x，使得 F_{x} 的值域包含一个无界的自然数序列，但既不包含 ω，也不包含 $\mathfrak{c}$?

如果集合 $\{t \in \mathbb{R}\colon\ F_{\mathrm{x}}(t) = \omega \text{ 或 } F_{\mathrm{x}}(t) = \mathfrak{c}\}$ 非空，那么它在 $E(x_n)$ 中稠密，因此是无限的 [23]。

问题31 ([22])。 是否可以断定，要么 $\{t \in \mathbb{R}\colon\ F_{\mathrm{x}}(t) = \mathfrak{c}\}$（或 $\{t \in \mathbb{R}\colon\ F_{\mathrm{x}}(t) = \omega\}$）为空，要么包含一个康托集?

如果移除任意无限子序列都会改变成就集的拓扑类型，则称序列（x_n）是康托瓦尔或多区间集的极小表示。

问题 32。 已知，如果 E 是一个可实现的多区间集，那么 (x_n) 是 E 的一个最小表示，当且仅当 $x_n < r_{n+1}$ 仅对有限多个 n [23, 定理 7。8] 成立。当 E 是一个康托瓦尔时，这一刻画是否仍然有效?

7. 距离中心

距离中心 是由 Bielas、Plewik 和 Walczyńska [14] 引入的一种度量不变量，用于检测不可达性。给定一个度量空间（X，d），$A \subset X$ 的距离中心为

$$\mathcal{C}(A) := \{\alpha \geq 0 : \forall x \in A, \exists y \in A \text{ with } d(x,y) = \alpha\}.$$

显然，对于任意 $A \subset \mathbb{R}$，$0 \in \mathcal{C}(A) \subset [0,+\infty)$。近期论文 [7] 研究了 $\mathcal{C}$ 作为从 $[0,1]$ 的紧子集超空间到其自身的映射时的基本性质。特别是，该映射的连续点恰好是满足 $\mathcal{C}(A) = \{0\}$ [7, 的紧致 $A \subset [0,1]$ 7]（定理 3）。另一个引人注目的结果如下 [7,（推论 3）：

定理 14. 成就集族在紧子集超空间中属于第一类。

最近已证明，成就集集合在超空间中是闭的，因此处处稀疏 [55,（定理 4）5]。

虽然距离中心在高维中几乎毫无用处，但可以用颇具前景的集合谱概念取而代之，该概念由 Kula和 Nowakowski [35]近期提出。

另一项重要的新成果是以下 [34, 定理 3],，它肯定地回答了一年前 M. Filipczak 提出的问题：

定理 15. *Every* 集 $B \subset \mathbb{R}$ 满足 $0 \in B \subset [0,+\infty)$，是某个集合 $A \subset \mathbb{R}$的距离中心 .

证明使用了超限归纳，因此没有提供关于给定 B时A 的描述性性质的信息。例如：

问题 33. 是否对任意博雷尔集 $0 \in A \subset [0,\infty)$，都存在一个博雷尔集 $B \subseteq \mathbb{R}$，使得$\mathcal{C}(B) = A$?

以下问题尤其值得关注：

问题35。假设 $0 \in C \subseteq [0,\infty)$ 是紧致的。是否存在一个紧致的 $K \subseteq \mathbb{R}$，使得 $\mathcal{C}(K) = C$?

这个问题曾在2020年第一届后现代实分析研讨会上讨论，但只得到了一个不令人满意的部分答案 [7,定理 4.10]。

给定一个中心康托集 $C = C_{(a_n)}$，所有在第 n 步移除的区间的并集 G_n 是良定义的。定义

$$\widehat{C} := C \cup \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}-1} G_n,$$

这是一个称为 C的伴随康托尔区间集的康托瓦尔。例如，$C_{(1/3)}$ 是模型Cantorval集。一个基础但出人意料地顽固的问题是：

问题35。计算 $\mathcal{C}(\widehat{E(q^n)})$ 当 $q \in (0, 1 2)$时。

几乎可以肯定，对于较大的 q，$\mathcal{C}(E(q^n)) = \{0\}$；并且已知，对于 $q < \frac{1}{4}$，$\mathcal{C}(E(q^n))$ 包含区间。[4]

由于任意中心康托集 C 都是某个唯一快速收敛级数 $\sum x_n$ 的成就集，因此可得 $\{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(C)$ [14, 命题 3。1]。近期论文 [4] 研究了中心康托集何时具有极小距离中心，也就是说，何时

$$\{0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{C}(C),$$

Banakiewicz 在 [3,定理 2] 中完成了这项工作：

定理16。设 $\sum x_n$ 是一个快速收敛级数。那么，中心康托集 $E(x_n)$ 的距离中心不是极小的，当且仅当以下三个条件中至少有一个成立

[4]感兴趣的读者 如有此问题，欢迎联系 Jacek Marchwicki，邮箱地址：jacek.marchwicki@uwm.edu.pl。

(B1) $\exists\, n \in \mathbb{N} \quad x_{n-2} = 4x_n, \quad x_{n-1} = 2x_n$; (B2)
$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad x_{n-3} = 9x_n, \quad x_{n-2} = 5x_n, \quad x_{n-1} = 2x_n$; (B3)
$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad x_{n-3} = 10x_n, \quad x_{n-2} = 6x_n, \quad x_{n-1} = 2x_n.$

这里介绍的最后一个问题涉及伴随康托尔瓦，由 Kula 在 2023 年第五届后现代实分析研讨会上提出：

问题 36. 是否存在快速收敛序列(x_n)，使得伴随康托尔区间集 $E(x_n)$是可实现的？

我们猜想答案是否定的，因为对于快速收敛几何序列，情况确实如此，正如文献 [6] 所示。

参考文献

[1] T. Banakh、A. Bartoszewicz、M. Filipczak、E. Szymonik，某些自相似集的拓扑与测度性质，《拓扑方法与非线性分析》，46 2 2015 1013 1028 ( ) ( )，– M. Banakiewicz，某个 -康托尔瓦的勒贝格测度，《数学分析及其应用杂志》M 471 2019 170 179 2023 ( ) - M. Banakiewicz，中心康托尔集的距离中心，《数学成果》( ) 78:234 https://doi.org/ 10 1007 00025 023 02012 3 . /s - - - M. Banakiewicz、A. Bartoszewicz、M. Filipczak、F. Prus-Wiśniowski，距离中心与中心康托尔集，《数学成果》(2022 77 196 10 1007 00025 022 01725 1)： https://doi.org/ 。 /s - - - M. Banakiewicz、F. Prus-Wiśniowski，Ferens 型 M-康托尔瓦，《斯洛伐克数学》，67 4 2017 1 12 ( )( )，- A. Bartoszewicz、M. Filipczak、S. Głab、F. Prus-Wiśniowski、J. Swaczyna，关于生成与几何康托尔集相关的正则康托尔瓦，《混沌、孤子与分形》114 2018 468 473 ( ) – A. Bartoszewicz、M. Filipczak、G. Horbaczewska、S. Lindner、F. Prus-Wiśniowski，关于实数轴闭子集空间之间的距离中心算子，《拓扑方法与非线性分析》63(2) (2024) 413–427 DOI: 10 12775 2023 023 . /TMNA. . A. Bartoszewicz、M. Filipczak、F. Prus-Wiśniowski，级数子和的拓扑与代数方面，《实分析》的传统与当代主题，345–366，数学与计算机科学学院。罗兹大学，罗兹，2013。[9] A. Bartoszewicz、M. Filipczak、F. Prus-Wiśniowski，中心康托尔集的半快速收敛序列与 k-和，《欧洲数学杂志》6 2020 1523 1536 ( )，- A. Bartoszewicz、M. Filipczak、E. Szymonik，多几何序列与康托尔瓦，《中欧数学杂志》12(7) (2014)，1000–1007。[11] A. Bartoszewicz、S. Głab，平面上的成就集——几何级数与多几何级数的扰动。《混沌、孤子与分形》77 (2015)，84–93。[12] A. Bartoszewicz、S. Głab、J. Marchwicki，从值域恢复纯原子有限测度，《数学分析及其应用杂志》467 (2018) 825-841。[13] A. Bartoszewicz、S. Głab、J. Marchwicki。条件收敛级数的成就集。《数学讨论》152 (2018)，235–254。[14] W. Bielas、S. Plewik、M. Walczyńska，关于距离中心，《欧洲数学杂志》4 (2018)，第2期，687–698。[15] Bielas、W. Kula、M. Plewik、Sz.，关于实数的紧子集，《拓扑学及其应用》346 108854，10 2024( )，论文编号 pp. [16] M. Cörnyei、T. Jordan、M. Pollicott、D. Preiss、B. Solomyak，无内点的正测度自相似集，《遍历理论与动力系统》26:3 (2006)，755–758。[17] P. Erdös、R.L. Graham，《组合数论中的新旧问题与结果》，《数学教育专著》第28卷，Mono-graphies de L'Enseignement Math´ematique。Universit´e de Gen'ève，L'Enseignement Math´ematique，日内瓦，1980。[18] C. Ferens，关于纯原子概率测度的值域，《数学研究》77(3) (1984)，261–263。[19] T. Filipczak、P. Nowakowski，中心康托尔集差集成为康托瓦尔的条件，《数学成果》78, 166 2023 10 1007 00025 023 01940 4 ( )。2508 19454 https://doi.org/ 。 /s - - - S. Głab、M. Kula，Kenyon 定理再探，arXiv: 。 v 1 [ ] 26 2025 math.GN Aug S. Głab、J. Marchwicki，实平面上 Levy-Steinitz 定理与条件收敛级数的成就集，《数学分析及其应用杂志》，459 1 2018 476 489 10 1016 2017 10 034 ( ) ( ) – doi: . /j.jmaa. . . S. Głab、J. Marchwicki，纯原子测度的基数函数，《数学成果》75 (4)，第141号文章（2020），26页。[23] S. Głab、J. Marchwicki，康托尔瓦的唯一性集，《数学成果》78(9) (2023) DOI:10.1007/s00025- 022-01777-3

[24] S. Głab、J. Marchwicki，关于康托尔集的算术和： P-和与成就集，已被《帕尔马大学数学杂志》录用[25] J.A. Guthrie、J.E. Nymann，无限级数子和集的拓扑结构，《数学讨论》55:2 (1988)，323–327。
[26] 49 1941 316 320 Hornich, H.，
[27] 118 6 2011 508 521
关于绝对收敛级数的任意部分和，《数学与物理月刊》( ) - R. Jones，序列的成就集，《美国数学月刊》：( )，–。[28] S. Kakeya，关于无限级数的部分和，《东北大学科学报告》3 (1914)，159–164。[29] S. Kakeya，关于无限级数的部分和集，《东京数学—物理学会会刊》，第2辑，7(1914)， 250 251， 10 11429 1907 7 14_250 - https://doi.org/ 。 /ptmps . . D.
[30]
Karvatskyi、A. Murillo、A. Viruel，广义多几何序列的成就集，《数学成果》
79, 132 2024 10 1007 00025 024 02158 8 ( )。https://doi.org/ 。 /s - - - Kovač, V. ( )，关于由调和子级
[31] 2025
数表示的点集，《美国数学月刊》，1–17。https://doi.org/ 10 1080 00029890 2025 2540753 . / . . V. Kovač、T.
[32]
Tao，关于 Ahmes 级数的若干无理性问题，《匈牙利数学学报》175(2) (2025)，572-608。https://doi.org/
10 1007 10474 025 01528 0 . /s - - - R. Kraft，厚康托集的交，《美国数学学会回忆录》，第97(468)卷，普罗维
[33] 1992
登斯，罗德岛州，[34] M. Kula，距离中心与伯恩斯坦集，《实分析交流》50(1) (2025) 207-212，DOI: 10.14321/re-
alanalexch.1739330962[35] M. Kula、P. Nowakowski，$\mathbb{R}^2$中的级数成就集，《数学成果》(2024) 79:221 https://doi.org/
10 1007 00025 024 02239 8 . /s - - - Laltanpuia、A. I. Singh，定义域缩短下向量测度值域的保持，《凸分析杂
[36]
志》15(2)(2008)，313–324。[37] S. Lu，某些康托尔集的豪斯多夫维数与测度，《实分析交流》25(2) (1999/2000) 799-808[38] M. Moroz，关于涉及中间级数成就集的 Karvatskyi-Pratsiowytyi 猜想的一个反例，arXiv:
2412 00042 1 [ ] 22 2024 . v mathGM Nov J. Marchwicki、J. Miska，关于成就集的角
[39]
谷条件，《数学成果》(2021) 76:181；//doi.org./ 10 1007 00025 021 01479 2 . /s - - - J. Marchwicki、P.
[40]
Nowakowski、F. Prus-Wiśniowski，涉及康托尔瓦的成就集的代数和，arXiv: 2309 01589 1 [ ] . v math.CA J.
[41]
Marchwicki、B. Żmija，基数函数的有界值域，arXiv:
2508 13016 [ ] . math.CA P. Mendes、F.
[42]
Oliveira，两个康托尔集的算术和的拓扑结构，《非线性》7 (1994 329 343)，– Miska, P.、Prus-Wiśniowski, F. & Ptak, J.,
[43]
更多关于成就集角谷条件的研究，《数学成果》78，113 2023 10 1007 00025 023 01890 ( )。https://doi.org/ 。 /s - - -x
[44] 36 2 1989 334 348， 10 1112 0025579300013176 M. Morán，分形级数，《
[45]
Mathematika》，( ) ( ) – doi: . /S M. Morán，与级数相关的分形集的维数函数，《美国数学学会会刊》120(3) (1994)
749 754， 10 2307 2160466 – doi: . / C. Moreira、J. Yoccoz，具有大豪斯多夫维数的康托尔集的稳定交，《数学年刊》
[46]
154 2001 45 96 ( )，- S. Newhouse，微分同胚的野双曲集与非光滑稳定集的丰富性，《高等科学研究院科学出版物：数学》
[47]
50 1979 101 105 ( )，- Z. Nitecki，零序列的子和集，arXiv:
[48]
1106 3779 1 [ ] 19 2011 . v math.HO Jun Z. Nitecki，子和集：
[49] 1106 3779 2 [
区间、康托尔集与康托瓦尔，arXiv: 。 v math.HO
] 8 2013 Jul Z. Nitecki，零序
[50] 122 2015 862 870
列的康托瓦尔与子和集，《美国数学月刊》( )，–。[51] P. Nowakowski，两个中心康托尔集的代数差为区间吗？《芬兰数学年刊》
48 2023 163 185 ( )，- P. Nowakowski，特殊仿射康托尔集代数差的刻画，《拓扑方法与非线性分析》
[52]
64 1 2024 295 316 10 12775 2023 057 ( ) ( ) - https://doi.org/ 。 /TMNA. . P.
[53]
Nowakowski，关于中心康托尔集差集成为康托瓦尔的条件。第二部分，《印度数学》 36 2025 1223 1244 ( ) – P.
[54]
Nowakowski、F. Prus-Wiśniowski，多几何康托尔瓦边界的勒贝格测度，arXiv: 2510 21878 1 [ ] 23 2025 . v
[55]
mathDS Oct P. Nowakowski、F. Prus-Wiśniowski、F. Turoboś，紧集超空间中的谱算子、成就集与 P-和集，arXiv:
2512 11803 [ ] 2 2025 . math.GN Nov J.E. Nymann、R.A. Sáenz，关于
[56]
Guthrie 和 Nymann 一篇有关无限级数子和的论文，《数学讨论》83(2000) 1-4

[57] 29 2009 201 22 Y. Peres, P. Shmerkin,
[58] 康托集之间的共振, 《遍历理论与动力系统》 ( ), - M. Pourbarat, 中间康托集的算术差, 《离散与连续动力系统》38(9) (2018), 4259-4278[59] M. Pratsiovytyi, D. Karvatskyi, 与三角函数相关的级数的子和集——康托尔值集, 《国际几何中心论文集》第 16, 3 4 2023 262 271 卷第 - 期 ( ) 页 – M. Pratsiovytyi, D. Karvatskyi,
[60] *Guthrie-Nymann* 集及其推广的分形分析, DOI: 10 48550 2405 16576 . /arXiv. . M. Pratsiovytyi, S. Ratushniak, 扰动二进制级数的性质.《布科维纳数学杂志》13(1) (2025), 109-117. [61] [62] F. Prus-Wiśniowski, J. Ptak,几乎不满足反向 *Kakeya* 条件的可实现康托瓦尔, arXiv: 2412 08768 1 [ ] 11 2024 . v math.CA Dec F. Prus-Wiśniowski, F. Tulone, 中心康托集的算术分解, 《数学分析及其应用杂志》 467 2018 26 31 [63] ( ) - D. Waterman, -有界变差：近期成果与未解决问题, 《实分析交流》 [64] Λ 4 1978 79 69 75 (-) - D. [65] 5 1979 80 Waterman, 广义有界变差：近期成果与开放问题, 《实分析交流》 (-) 148-150[66] A.D. Weinstein, B.E. Shapiro, 关于一组 α-可表示数的结构, 《高等院校数学学报》24 (1980), 8–11. [67] Vinishin Y., Markitan V., Pratsiovytyi M., Savchenko I., 子和集为康托尔值集的正项级数, 国际几何中心论文集. 2019, 12 (2), 26-42.（乌克兰语）； https://doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1455

* Szymon Głąb 数学研究所 罗兹工业大学 Wólczańska街215号 波兰 PL-93-005 罗兹 波兰 ORCID 0000-0001-9026-8235 电子邮箱地址：szymon.glab@p.lodz.pl

*Franciszek Prus-Wiśniowski 数学研究所 什切青大学 大波兰街15号 波兰 PL-70-453 什切青 波兰 ORCID 0000-0002-0275-6122电子邮箱地址：franciszek.prus-wisniowski@usz.edu.pl