多元伯恩斯坦–杜尔迈耶算子复合的积分核表示

Ulrich Abel中黑森应用技术大学
MND 系 威廉·洛伊施纳街 *13* 号，*61169* 弗里德贝格，德国Ulrich.Abel@mnd.thm.de

Ana MariaAcu锡比乌卢西安·布拉加大学 数学与信息学系 罗马尼亚 伊翁·拉齐乌博士街 *5-7* 号，*550012* 锡比乌，罗马尼亚anamaria.acu@ulbsibiu.ro

Margareta Heilmann伍珀塔尔大学 数学与自然科学学院 高斯街 *20* 号，*42119* 伍珀塔尔，德国
heilmann@math.uni-wuppertal.de

Ioan Raşa克卢日-纳波卡技术大学自动化与计算机科学学院数学系，备忘录街*28*号，*400114*，克卢日-纳波卡，罗马尼亚
ioan.rasa@math.utcluj.ro

arXiv:2512.17297v1 [math.CA] 19 Dec 2025

摘要

本文给出了定义在 $\mathbb{R}^d$中的标准单纯形上的函数的多元伯恩斯坦–杜尔迈耶算子复合的核的一种表示。

数学主题分类（*2020*）：41A36

关键词：正算子逼近，正线性算子的复合，多元伯恩斯坦–杜尔迈耶算子的核。

1 引言

在他们最近发表的论文中 [1] ，作者研究了伯恩斯坦–杜尔迈耶算子的复合 M_n：$L_1[0,1] \longrightarrow \Pi_n$ 定义如下

$$\begin{aligned}(M_n f)(x) &= \int_0^1 f(y)K_n(x,y)dy,\ x\in[0,1],\\ K_n(x,y) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,k}(y),\ p_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\end{aligned}$$

重点研究相关核函数的结构和性质。他们为两个及三个算子复合所产生的核建立了新的恒等式。对于两个经典伯恩斯坦–杜尔迈耶算子的复合，有如下公式[1,定理 1]:

定理 1 对于 m、$n \geq 0$，经典伯恩斯坦–杜尔迈耶算子的复合算子 $M_m \circ M_n$ 的核具有如下表示形式

$$K_{m,n}(x,y) = \frac{(m+1)!\,(n+1)!}{(m+n+1)!}\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{k} p_{k,\ell}(x)\,p_{k,\ell}(y).$$

与众所周知的用勒让德多项式表示的形式类似，它可以写成

$$\begin{aligned}K_{m,n}(x,y) &= \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}}\frac{m^{\underline{k}}}{(m+k+1)^{\underline{k}}}\frac{n^{\underline{k}}}{(n+k+1)^{\underline{k}}}(2k+1)\\ &\quad\times\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}p_{k,i}(x)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}p_{k,j}(y)\end{aligned}$$

（见 [1]），定理1 自然地表明了这些算子的可交换性。上述勒让德表示包含伯恩斯坦基多项式的所有可能乘积 $p_{k,\,i}(x)\,p_{k,\,j}(y)$，$0 \le i,\ j \le k \le n$，而新的表示具有一个优美的性质：它只包含乘积 $p_{k,\,\ell}(x)p_{k,\,\ell}(y)$，$0 \le \ell \le k \le n$，其中 n 是所涉及的伯恩斯坦–杜尔迈尔多项式的最小次数。这一事实立即表明，该复合算子可以写成这些算子的线性组合。

对于 3 个经典伯恩斯坦–杜尔迈耶算子的复合，作者给出了以下公式 [1, 定理 2]:

定理 2 *3* 个伯恩斯坦–杜尔迈耶算子复合的核 $M_{n_3}\circ M_{n_2}\circ M_{n_1}$ 可表示为

$$K_{n_3,n_2,n_1}(x,y) = \frac{(n_3+1)!\,(n_2+1)!\,(n_1+1)!\,(n_3+n_2+n_1+1)!}{(n_3+n_2+1)!\,(n_3+n_1+1)!\,(n_2+n_1+1)!} \times \sum_{k=0}^{\min\{n_1,n_2,n_3\}} \frac{\binom{n_3}{k}\binom{n_2}{k}\binom{n_1}{k}}{\binom{n_3+n_2+n_1+1}{k}} \sum_{\ell=0}^{k} p_{k,\ell}(x)\,p_{k,\ell}(y)\,.$$

本文证明了定理 1 在多元情形下的推广。在一篇即将发表的论文中，将给出定理 2 相应的推广。此外，作者还将推导多元伯恩斯坦–杜尔迈耶算子的 r 次迭代 M_n 作为多元算子 M_k的线性组合的表示，其中 k =0、1、.....、 n。

2 记号

我们先介绍记号。设 d为正整数。 $\mathbb{R}^d$ 中的标准单纯形定义为

$$\mathbb{S}^d := \left\{x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d:\ 0\le x_1,\dots,x_d\le 1,\ x_1+\cdots+x_d\le 1\right\}.$$

我们还将使用重心坐标

$$\mathbf{x} = (x_0,x_1,\dots,x_d)\,,\qquad x_0 := 1-x_1-\cdots-x_d.$$

全文中，我们将使用标准的多重指标记号。例如，对于 x =$(x_1,\dots,x_d)$ $\in\mathbb{R}^d$和 β =$(\beta_1,\dots,\beta_d)$ $\in\mathbb{Z}^d$，我们记作

$$x^\beta := x_1^{\beta_1}\cdots x_d^{\beta_d},\qquad |\beta| := \beta_1+\cdots+\beta_d,\qquad \beta! := \beta_1!\cdots\beta_d!.$$

多项式系数定义为 $\binom{|\beta|}{\beta} := {}^{|\beta|!}{}_{\beta!}$，当 β =$(\beta_1,$ ..., $\beta_d)$ $\in\mathbb{N}_0^d$；若（至少）有一个分量 β_ν为负数，则定义为 $\binom{|\beta|}{\beta} := 0$。我们还将使用二项式系数 $\binom{s}{m}$，其中 $s\in\mathbb{R}$和 $m\in\mathbb{N}_0$，其定义为 $\binom{s}{m} := {}^{s}{}_{(s-1)\cdots(s-m+1)\,m!}$，当 $m\in\mathbb{N}$；并且 $\binom{s}{0} := 1$。

对于给定的 α =$(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ $\in\mathbb{N}^{d\ 1\ +0}$， d元伯恩斯坦基多项式为

$$B_\alpha(x) := \binom{|\alpha|}{\alpha}\mathbf{x}^\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha_0!\alpha_1!\cdots\alpha_d!}\,x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}.$$

我们使用内积

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{S}^d} f(x)\ g(x)\ dx.$$

对于定义在 $\mathbb{S}^d$ 上的函数 f，次数为 $n \in \mathbb{N}$ 的伯恩斯坦-杜尔梅耶算子定义为

$$(M_n f)(x) := \sum_{|\alpha|=n} \frac{\langle f, B_\alpha\rangle}{\langle \mathbf{1}, B_\alpha\rangle} B_\alpha(x).$$

这里，$\mathbf{1}$ 表示等于 1 的常值函数。伯恩斯坦-杜尔梅耶算子通常定义在域 $L^p\left(\mathbb{S}^d\right)$, $1 \le p < \infty$ 上，该域是由 $\mathbb{S}^d$ 上所有满足下式的可测函数组成的带权 L^p 空间：

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^p\ dx\right)^{1/p}$$

其值是有限的。对于 $p = \infty$，则考虑连续函数空间 $C\left(\mathbb{S}^d\right)$。注意，空间 $L^p\left(\mathbb{S}^d\right)$, $1 < p < \infty$ 和 $C\left(\mathbb{S}^d\right)$ 都是 $L^1\left(\mathbb{S}^d\right)$ 的子空间。

3 主要结果及其证明

对于 $x,\ y \in \mathbb{S}^d$，定义 e 多元核 $K_{m,\ n}(x,\ y)$，其定义如下：
w

$$\begin{aligned} & ((M_m \circ M_n) f)(x) \\ = & \int_{\mathbb{S}^d} f(y) \sum_{|\beta|=m} \sum_{|\alpha|=n} B_\alpha(y) B_\beta(x) \frac{1}{\langle \mathbf{1}, B_\alpha\rangle \langle \mathbf{1}, B_\beta\rangle} \left(\int_{\mathbb{S}^d} B_\alpha(t) B_\beta(t)\, dt\right) dy \\ =: & \int_{\mathbb{S}^d} f(y) K_{m,n}(x, y)\, dy, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1} = (1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1) \in \mathbb{N}^{d+1}$。以下定理是本文的主要结果 .

定理 3 对于正整数 m、n 和 x、$y \in \mathbb{R}^d$，核 $K_{m,\ n}(x$、$y)$ 有如下表示

$$K_{m,n}(x, y) = \frac{(m+d)!\,(n+d)!}{(m+n+d)!} \sum_{\ell \ge 0} \binom{m}{|\ell|} \binom{n}{|\ell|} B_\ell(\mathbf{x}) B_\ell(\mathbf{y}).$$

证明。对于正整数 m，n 和 x，$y \in \mathbb{R}^d$，有

$$K_{m,n}(x, y) = \sum_{|\beta|=m} \sum_{|\alpha|=n} B_\alpha(y) B_\beta(x) \frac{1}{\langle \mathbf{1}, B_\alpha\rangle \langle \mathbf{1}, B_\beta\rangle} \int_{\mathbb{S}^d} B_\alpha(t) B_\beta(t)\, dt.$$

注意到 $\langle \mathbf{1},\ B_\alpha\rangle = |\alpha|!\ /\ (|\alpha| + d)\ !$（例如，参见 [2, 第 147页）。由于

$$\int_{S^d} B_\alpha(t) B_\beta(t)\, dt = \frac{\binom{|\alpha|}{\alpha}\binom{|\beta|}{\beta}}{\binom{|\alpha+\beta|}{\alpha+\beta}} \langle \mathbf{1}, B_{\alpha+\beta}\rangle$$

我们得到

$$\begin{aligned} K_{m,n}(x,y) &= \frac{(m+d)!\,(n+d)!\,(m+n)!}{m!n!\,(m+n+d)!}\sum_{|\beta|=m}\sum_{|\alpha|=n}B_\alpha(y)\,B_\beta(x)\,\frac{\binom{|\alpha|}{\alpha}\binom{|\beta|}{\beta}}{\binom{|\alpha+\beta|}{\alpha+\beta}} \\ &= \frac{(m+d)!\,(n+d)!}{(m+n+d)!}\sum_{|\beta|=m}\frac{1}{\beta!}B_\beta(x)\sum_{|\alpha|=n}B_\alpha(y)\,\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!}. \end{aligned}$$

采用记号 $\mathbf{t}=(t_0,\ t_1,\ \ldots\ldots,\ t_d)$ 和 $\mathbf{D}^\beta=\prod_{\nu=0}^{d}\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)^{\beta_\nu}$，内层求和等于

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=n}B_\alpha(y)\,\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!} &= \sum_{|\alpha|=n}B_\alpha(y)\left(\mathbf{D}^\beta\mathbf{t}^{\alpha+\beta}\right)_{|\mathbf{t}=\mathbf{1}}=\mathbf{D}^\beta\left(\mathbf{t}^\beta\sum_{|\alpha|=n}B_\alpha(y)\,\mathbf{t}^\alpha\right)_{|\mathbf{t}=\mathbf{1}} \\ &= \left(\prod_{\nu=0}^{d}\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)^{\beta_\nu}\left(t_0^{\beta_0}t_1^{\beta_1}\cdots t_d^{\beta_d}\left(y_0t_0+y_1t_1+\cdots+y_dt_d\right)^n\right)\right)_{|\mathbf{t}=\mathbf{1}} \\ &= \sum_{\ell\leq\beta}n^{\underline{|\ell|}}\prod_{\nu=0}^{d}\left(\binom{\beta_\nu}{\ell_\nu}\frac{\beta_\nu!}{\ell_\nu!}y_\nu^{\ell_\nu}\right) \\ &= \sum_{\ell\leq\beta}n^{\underline{|\ell|}}\frac{1}{|\ell|!}B_\ell(y)\,\beta!\prod_{\nu=0}^{d}\binom{\beta_\nu}{\ell_\nu}. \end{aligned}$$

这里，$\ell\leq\beta$ 表示对满足 $\ell_\nu\leq\beta_\nu$ 的所有非负整数 ℓ_ν 求和，其中$\nu=0$，……，d。因此，

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(m+d)!\,(n+d)!}{(m+n+d)!}\right)^{-1}K_{m,n}(x,y) \\ =&\sum_{|\beta|=m}B_\beta(x)\sum_{\ell\leq\beta}\binom{n}{|\ell|}B_\ell(y)\prod_{\nu=0}^{d}\binom{\beta_\nu}{\ell_\nu} \\ =&\sum_{\ell\geq0}\binom{n}{|\ell|}B_\ell(y)\sum_{|\beta|=m}B_\beta(x)\prod_{\nu=0}^{d}\binom{\beta_\nu}{\ell_\nu} \\ =&\sum_{\ell\geq0}\binom{n}{|\ell|}B_\ell(y)\sum_{|\beta|=m}\binom{|\beta|}{\beta}\mathbf{x}^\beta\prod_{\nu=0}^{d}\frac{(\beta_\nu)^{\underline{\ell_\nu}}}{\ell_\nu!} \\ =&\sum_{\ell\geq0}\binom{n}{|\ell|}B_\ell(y)\,m^{\underline{|\ell|}}\left(\prod_{\nu=0}^{d}\frac{1}{\ell_\nu!}\right)\sum_{\substack{|\beta|=m\\ \beta\geq\ell}}\binom{m-|\ell|}{\beta-\ell}\mathbf{x}^\beta, \end{aligned}$$

其中，$\ell\geq0$ 表示对所有非负整数 ℓ_ν（$\nu=0$、……、d）求和。注意到

$$\sum_{\substack{|\beta|=m\\ \beta\geq\ell}}\binom{m-|\ell|}{\beta-\ell}\mathbf{x}^\beta=\sum_{|\beta|=m-|\ell|}\binom{m-|\ell|}{\beta}\mathbf{x}^{\beta+\ell}=\mathbf{x}^\ell\sum_{|\beta|=m-|\ell|}\binom{m-|\ell|}{\beta}B_\beta(x)=\mathbf{x}^\ell$$

并利用$\prod_{\nu=0}^{d} \frac{1}{\ell_\nu!} = \frac{1}{|\ell|!}\binom{|\ell|}{\ell}$，可得

$$\left(\frac{(m+d)!\,(n+d)!}{(m+n+d)!}\right)^{-1} K_{m,n}(x,y) = \sum_{\ell\geq 0}\binom{m}{|\ell|}\binom{n}{|\ell|} B_\ell(y)\binom{|\ell|}{\ell}\mathbf{x}^\ell.$$

由于 $\binom{|\ell|}{\ell}\mathbf{x}^\ell = B_\ell(x)$，证明完成。 ■

参考文献

[1] U. Abel, A.M. Acu, M.Heilmann, and I.Raşa，正线性算子的复合之核，J. Math. Anal. Appl. 555 (2026), no. 2, Paper No. 130052, 12 pp. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.130052

[2] H. Berens, H.J. Schmidt, andY. Xu，单纯形上的伯恩斯坦–杜尔迈耶多项式，J. Approx. Theory 68, no. 3, 247–261, 1992. https://doi.org/10.1016/0021-9045(92)90104-V