arXiv:2512.17378v1 [cs.LO] 19 Dec 2025

当对称性导致 NP-困难性：S5框架上的仿射ML-SAT

Andreas Krebs[1] 和 Arne Meier[2]

[1] 蒂宾根大学，德国，mail@krebs-net.de[2] 莱布尼茨汉诺威大学，德国，meier@thi.uni-hannover.de

摘要。 Hemaspaandra 等人 [JCSS 2010] 猜想，对于框架类 T、S4 和 S5 上仅限于异或和 1 这两个联结词的多模态逻辑，其可满足性问题可在多项式时间内求解。我们通过证明该问题是 NP 困难的，推翻了这一关于 S5框架的猜想。

关键词： 模态逻辑 · 可满足性 · 复杂性 · 异或 · 传递性 · 自反性 · 对称性

1 引言

模态逻辑是一种成熟的形式概念，其根源可追溯至 C. I. Lewis [22] 于 20 世纪 20 年代末的研究。它在 20 世纪 60 年代受到广泛关注，尤其得益于 Kripke 和 Hughes [20, 21]的贡献。此后，这一领域的研究持续蓬勃发展 [7, 17]。模态逻辑催生了许多扩展，例如时态逻辑 [11,15,27,29,31,34], 、混合逻辑 [1, 2, 32], 和描述逻辑 [3, 8, 9]。此外，模态逻辑已广泛应用于信息与知识系统 [4, 10, 14, 16, 18, 23, 25]。

模态逻辑的核心概念，是通过引入两种模态来扩展经典命题逻辑：$\Box$（方框）和 $\Diamond$（菱形）。这些模态便于对必然性（所有可达世界）和可能性（某些可达世界）进行推理。克里普克语义随后在框架上解释公式——框架由带标签的状态及其转移关系构成——从而能够针对一组可能世界而非单个赋值进行推理，这有别于命题逻辑。

这一扩展导致计算复杂性增加，其可满足性问题是 PSPACE完全的。认识到其中固有的难度，Hemaspaandra 等人 [19] 于 2010 年从 Post 格 [28], 的角度考察了模态逻辑的可满足性问题。简而言之，他们着重研究如何限制所有可能的布尔函数集合，并结合模态的可能子集 $\{\Box, \Diamond\}$，然后根据源自著名模态逻辑系统的不同框架类，对模态可满足性问题的这些片段进行分类：**K** （所有框架）、**KD** （全预序框架）、**K4** （传递框架）、**S4** （自反且传递的框架）、**S5**（等价关系框架，即自反、传递且对称的框架），以及**T** （自反框架）。

为简化记号，我们使用逻辑系统的名称来指代其对应的框架类。随后，Hemaspaandra 等人 [19]对几乎所有片段的计算复杂性进行了分类，唯独未涵盖限制为布尔联结词 $\oplus$, $\top$——异或与真常量的组合——的情形，且框架类为**T**、**S4**和**S5**。他们猜想，这些情形可能可在多项式时间内求解，与他们针对**K**和**KD**所得的结果类似。

有趣的是，先前的研究表明，涉及仿射函数 $\oplus$ 的问题颇具挑战性。尽管有人尝试利用 Post 格对布尔命题逻辑扩展的相关问题进行分类，但这些片段往往难以得到完整分类（即匹配的复杂度上界和下界） [5, 6, 12, 13, 24, 30, 33]。因此，进一步考察 $\oplus$ 对此类问题可处理性的影响似乎是审慎之举。

因此，我们的主要动机之一是探讨异或函数违反直觉的特性，以及它引发的普遍困惑。本文的主要结果表明，在 S5框架上，含异或的仿射多模态逻辑的可满足性问题是 NP 困难的。这一结果推翻了 Hemaspaandra 等人关于 S5 框架的猜想 [19]。

本文的组织结构如下。首先，我们介绍多模态逻辑、Kripke 结构和框架类的概念。第 3 节给出框架类 **S5** 的 NP 下界证明，随后作结。

2 预备知识

复杂性。 本文使用复杂度类 P 和 NP。所用的归约是多项式时间多对一归约，可由一台在多项式时间内运行的确定性图灵机计算。更多背景信息可参见 Papadimitriou 的标准教材 [26]。

模态逻辑。 我们简要介绍模态逻辑；更全面的论述请参见 Blackburn 等人 [7]。设 ϕ为一个命题公式，A 为一个变量集。当且仅当赋值 $\theta(a) = 1$对所有满足 ϕ 时，我们记作 $A \models \phi$ $a \in A$ 。

本文考虑定义在可数无限命题集 PROP 上的 k-多模态公式，其中包含联结词 $\oplus$，以及用于 $i \in \{1, \ldots, k\}$的一元算子 $\Diamond_i$。形式上，所有仿射 k-多模态公式 $\oplus\mathcal{ML}^k$的集合由以下文法定义：

$$\varphi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \varphi \oplus \varphi \mid \Diamond_i \varphi,$$

其中 $p \in$ PROP。与通常一样， $\Box$ 算子可通过否定和 $\Diamond$定义如下： $\Box_i\varphi \equiv (\Diamond_i(\varphi \oplus \top)) \oplus \top$，其中 $\varphi \oplus \top \equiv \neg\varphi$得以实现。我们进一步用 $\oplus\mathcal{ML}^k_M$表示由 $M \subseteq \{\Box, \Diamond\}$中的模态构成的仿射 k多模态公式集合。

从语义视角出发，我们使用 Kripke 结构来定义满足关系 $\models$。

框架类	描述
T	自反框架的集合
S4	自反 , 传递框架
S5	自反、传递、对称框架的集合

框架性质	一阶定义
自反框架	$\forall w \in W : wRw$
传递框架	$\forall u,\ v,\ w \in W :\ (uRv \wedge vRw) \rightarrow uRw$
对称框架	$\forall u,\ v \in W :\ uRv \rightarrow vRu$

图 1. 框架类及框架性质的一阶定义。

定义 1. 设 $M = (W, \mathbf{R}\ \xi)$ 为一个 *Kripke* 结构，即 W 为一组可能世界，$\mathbf{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ 为一组转移关系 $R_i : W \rightarrow W$ 对于 $i \in [n]$，且 $\xi : \mathrm{PROP} \rightarrow 2^W$ 为一个标记函数。此外，设 $\varphi, \psi \in \oplus\mathcal{ML}^k_{\{\Box,\Diamond\}}$。于是，我们定义 $w \in W$ 为

M总是，$w \models \top$ M从不，$w \models \bot$ M当且仅当 $w \in \xi$（p）</style}，当且仅当 或，当且仅当存在一个 使得 （wR_iw' 且 $M\,w' \models \varphi$）*</style}*。

对于 $\oplus\mathcal{ML}^1_{\{\Box,\Diamond\}}$中的公式，我们简写为 $M =$ （W、R、ξ），并省略粗体字母 $\mathbf{R}$，以表示我们只考虑单一的转换关系。我们称公式 φ 是可满足的，当且仅当存在一个 *Kripke* 结构$M =$（W、$\mathbf{R}$ ξ）以及一个世界 $w \in W$，使得 $M\,w \models \varphi$ 为真。此外，我们将（W、$\mathbf{R}$）——即没有标记函数 ξ的模型——称为框架。

本文研究满足特定性质的框架，例如传递性或自反性。具体而言，我们研究图 1 所示的框架类。如果给定的 Kripke 结构 M 或框架 (W，$\mathbf{R}$) 满足某个框架类 **F** 的性质，那么我们称 M 是一个 **F**-结构，或者称 (W，$\mathbf{R}$) 是一个 **F**-框架。

我们关注的判定问题是仿射 k-多模态逻辑的可满足性问题。该问题的一般定义如下。

问题： **F**-$\oplus$MSAT$^k_{\{M\}}$**输入：** 一个公式 $\varphi \in \oplus\mathcal{ML}^k_M$。**问题：** 是否存在一个 **F**-结构 $M = (W, \mathbf{R}\ \xi)$ 以及一个世界$w \in W$，使得 $M,\ w \models \varphi$?

在我们研究的情形中，有 $M = \{\Box, \Diamond\}$。给定一个 Kripke 结构 $M =$(W, $\mathbf{R}$ ξ)，我们将形如 $S =$的 子结构 $S \subseteq M$ 定义为

$(W', \mathbf{R}|_{W'}, \xi|_{W'})$，其中 $W' \subseteq W$，$\mathbf{R}|_{W'}$ 是每个关系 $R \in \mathbf{R}$ 在 $R \cap (W' \times W')$ 上的限制，而 $\xi|_{W'}$ 是 ξ 在 W' 中的可能世界上的限制。

3 仿射ML-SAT在S5框架上是 NP 困难

本节将证明我们的问题相对于**S5**框架类的 NP-困难性。

考虑一个 3CNF公式 $f = \bigwedge_{i=1}^{l} C_i$，其中 C_i 是含有 3 个文字的子句，即 $C_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$。这些文字对于变量 $a \in A$而言，要么是 a，要么是 $\neg a$，而 A是变量集。

注*2*。 我们假设插入括号的方式使得联结词$\wedge$ 仅作为二元联结词出现，且公式的深度关于子句数呈对数级。因此， f 的每个子公式要么形如 $(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$，要么是一个合取 $(g \wedge h)$，其中 g 和 h 是 f的子公式。这一点将在证明过程中起到关键作用。

现在我们来定义独立子公式这一性质，稍后在定理5的证明中会用到。

定义3。 设 g, h 是 f 的子公式。若存在 g 中的一个子句，其中包含的变量都未出现在 h 中，则称 g 与 h 独立。若 g 与 h 独立，且 h 与 g 独立，则称 g 与 h 强独立。

例*4*。 设 $f = (a \vee b \vee c) \wedge (d \vee f \vee e) \wedge (e \vee f \vee g)$，且子公式为 $g = (a \vee b \vee c)$、 $h = (d \vee f \vee e) \wedge (e \vee f \vee g)$。那么 g 和 h 强独立，但 $g' = g \vee (d \vee f \vee e)$ 与 h 并非强独立。

这一性质将确保在接下来的构造中，我们绝不会遇到形如 $(g \wedge h)$ 且 $g \equiv h$ 的子公式。

定理5. **S5**-$\oplus\mathrm{MSAT}^2_{\{\Box,\Diamond\}}$ 是NP困难的。

定理*5*的证明。 主要思路是将3SAT归约到**S5**-$\oplus\mathrm{MSAT}^2_{\{\Box,\Diamond\}}$。给定一个3CNF公式，我们将其转换为另一个3CNF公式，使得对于每个子公式 $g \wedge h$、 g 和 h 彼此独立，同时保持原公式的可满足性。

引理6. 设 A 和 B 是两个不相交变量集。给定一个关于变量 A 的公式$f = \bigwedge_{i=1}^{l} C_i$，则关于变量 $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$ 的公式 $f' = \bigwedge_{i=1}^{l} (C_i \wedge (b_i \vee b_i \vee b_i))$可满足，当且仅当 f 可满足。此外，对于 f'的任意子公式$(g \wedge h)$，我们有 g和 h 是强独立的。

引理 6 的证明。 </style}显然， f 可满足当且仅当 f' 可满足，因为当 B 中的所有变量都赋值为真时， f 和 f' 在语法上是相同的公式。

此外，对于任意子公式 $(g \wedge h)$ 属于 f'，要么 $h = (b_i \vee b_i \vee b_i)$ 对于某个i，要么 g 和 h 都包含一个由 B中的不同变量构成的子句。(引理 6)□

利用前述引理，我们从现在起假设，对于 f 中的每个子公式 $g \wedge h$， g 和 h 都是独立的。

现在我们可以定义从命题3CNF公式到 $\oplus\mathcal{ML}^2_{\{\Box,\Diamond\}}$ 中的公式的归纳翻译 $\phi_{(\cdot)}$，如下所示：

$$\begin{aligned}
\phi_a &= (\Box_1 a) \oplus (\Box_2\Box_1 a) && \text{, if } a \text{ is a positive literal}\\
\phi_{\neg a} &= (\Box_1 \neg a) \oplus (\Box_2\Box_1 \neg a) && \text{, if } \neg a \text{ is a negative literal,}\\
\phi_C &= \Diamond_1(\phi_{l_1} \oplus \phi_{l_2} \oplus \phi_{l_3}) && \text{, if } C = l_1 \vee l_2 \vee l_3 \text{ is a clause,}
\end{aligned}$$

给定子公式（$g \wedge h$），我们定义

$$\begin{aligned}
\psi_g = \phi_g \oplus \Box_2\phi_g, \quad \text{and} \quad \psi_h = \phi_h \oplus \Box_2\phi_h,\\
\phi_{g\wedge h} = (\Diamond_1(\psi_g \oplus \psi_h)) \oplus (\Diamond_1\psi_g) \oplus (\Diamond_1\psi_h).
\end{aligned}$$

对 f 进行适当的括号化（见注2）后，公式 ϕ_f 的大小将关于 f的大小呈多项式增长。请注意， ψ_g 和 ψ_h 在任意模型的子部分中均可满足，而 $\psi_{g\wedge h}$ 在完整模型中则非真即假。

现在我们断言， f 可满足，当且仅当 ϕ_f 可满足。我们将通过两个独立的陈述证明这一断言。首先，考虑较容易的方向“⇒”。

命题 7. 如果 ϕ_f 可满足，那么 f 可满足。

命题 7 的证明。假设 ϕ_f 可满足，即存在 M， w，使得M， $w \models \phi_f$。考虑集合 $A = \{\, a_i \mid M, w \models a_i \,\}$。我们通过对 f的结构进行归纳，证明 $A \models f$。令 $W = \{\, w' \mid w \sim_1 w' \,\}$。我们的归纳假设是：若存在状态 $w' \in W$，使得 W， $w' \models \phi_f$，则 $A \models f$。

f'是 f 的任意一个子公式。

情形 $f' = a$**：** 设 $w' \in W$ 满足 $w' \models \phi_a$。那么 M， $w' \models (\Box_1 a)$（根据 ϕ_a 的定义），这意味着 M， $w' \models (\Box_1 a)$（根据 M 的自反性），因此对于每个 $w'' \in W$，我们都有 M， $w'' \models a$（因为 W 中的所有世界都可以通过 $\sim_1$ 到达），所以 $a \in A$。

通过对称论证， M， $w'' \models \phi_{\neg a}$ 意味着对于每个 $w''' \in W$，我们都有 M， $w''' \models \neg a$。因此，若存在 $w' \in W$ 使得 $w' \models \phi_{\neg a}$，那么 $a \notin A$。

情形 $f' = l_1 \vee l_2 \vee l_3$**：** 首先，注意若存在一个 $w' \in W$ 使得M， $w' \models \phi_{l_1\vee l_2\vee l_3}$，那么存在 $w'' \in W$ 使得 M， $w'' \models \phi_{l_i}$，其中某个$i = 1, 2, 3$ 成立。然后，根据归纳假设，我们知道 $A \models l_i$。因此，我们有 $A \models l_1 \vee l_2 \vee l_3$。

情形 $f' = g \wedge h$**：** 我们证明，若存在一个 $w' \in W$，使得 $M, w' \models \phi_{g\wedge h}$，那么就存在 $w'', w''' \in W$，使得 $M, w'' \models \phi_g$，并且 $M, w''' \models \phi_h$。不失一般性，假设对所有 w''， $M, w'' \not\models \phi_g$。因此，对所有 w''，都有$M, w'' \not\models \psi_g$，从而 $M, w'' \not\models \phi_{g\wedge h}$。

因此，我们假设存在 w''， $w''' \in M$，使得 M， $w'' \models \phi_g$且M， $w''' \models \phi_h$。根据归纳假设，这意味着 $A \models g$ 且 $A \models h$。因此，我们有 $A \models g \wedge h$。

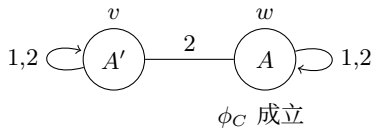


图 2. 引理 9 的满足赋值良好模型。

因此，我们有 $A \models f$，命题得证。 (命题 7)□

现在来证明较为困难的部分，即方向“⇐”。

命题 8. 若 f 可满足，则 ϕ_f 可满足。

命题 *8* 的证明. 固定一个公式 f以及一个满足赋值 A。对于一个模型M和一个赋值 A，我们将 M 的 A-核心 定义为一个非空集合 $S \subseteq M$，它满足以下性质：

– S 是关于 $\sim_1$ 的一个等价类，并且– 对于所有 $w \in S$，我们都有 $M, w \models a_i$ 当且仅当 $A \models a_i$。

设 g 是 f 的一个子公式。若模型 M 对 g 而言是一个良好模型，则称之为良好模型；当 M 具有一个非空核心 S，且其中所有可能世界都满足 g 时，便是如此。回顾命题 7 的证明可以发现，我们实际上证明了：对于 ϕ_f 的每个满足模型，事实上都是 f 的良好模型。对于这个方向，我们将通过对公式的结构进行归纳来构造良好模型，从单个子句开始，并为 $(g \wedge h)$ 提供一种构造方法。

引理 9。对于每个子句 C，公式 ϕ_C 都有一个良好模型。

引理 *9* 的证明。设 $C = l_1 \vee l_2 \vee l_3$ 是某个子句，且 A 是 f 的一个有效赋值。因此，我们知道 $A \models C$，也就是说，其中一个文字（设为 l_j）对于一个$j \in [3]$ 被 A 满足。考虑一个赋值 A'，使得对于所有$j' \neq j$ 都有 $A' \models l_{j'}$，并且 $A' \not\models l_j$。当然，这样的赋值是存在的。

现在定义图2所示的良好模型。对于 ϕ_C，模型 M 由状态 w 和 v组成，其中 w 中的命题为 A，而v 中的命题为 A'。这些状态之间的关系如下：($w \sim_{\{1,2\}} w$)，($v \sim_{\{1,2\}} v$)，($w \sim_2 v$)。

那么显然，$M, w \models \phi_{l_{j'}}$，并且对于所有 $j' \neq j$，都有 $M, w \not\models l_j$。因此，我们有 $M, w \models \phi_{C_i}$。

注意，这个模型的核心仅由单个状态构成 w。另请注意，良好模型所需的所有性质均得到满足。(引理9)□

对于接下来的构造，我们需要在给定 g 和 h的模型后，为$(g \wedge h)$找到一个模型。以下结果表明，模型的良好性质在任意扩展下均得以保持。

引理10. 设 g 是一个公式，M 是 g 的一个良好模型，其核心为 S。设 M' 是一个任意模型，其核心为 S'（可能为空）。那么存在一个良好模型 $\hat{} M$，满足 g。

引理*10*的证明. 考虑新模型 $\hat{M} = M \cup M'$，其中 $S \cup S'$ 两两通过 $\sim_1$相连。则 M 是一个核心为 $S \cup S'$的良好模型。特别地，对于所有 $m \in S \cup S'$，我们有

$$\hat{M}, m \models \phi_g.$$

由于 ϕ_g以 $\Diamond_1$ 算子开头，这一性质显然成立。(引理10)□

下一个引理展示了独立公式的一个有趣性质（见定义3）。回想一下，我们假设对于 f的任意子公式（$g \wedge h$），公式 g 和 h 相互独立。

引理11。设 g、h 是 f的独立子公式，且 M是模型，$m \in M$是世界，并且 M、$m \models \phi_g \wedge \phi_h$。那么存在一个模型 N和一个世界$n \in N$，使得 N、$n \models \phi_g \wedge \neg\phi_h$。

引理*11*的证明。这直接由独立性的定义得出：由于我们可以在 h 中找到一个子句，其变量没有出现在 g中，因此可以使该子句为假，从而使 h为假，而 g 的可满足性不受影响。(Lem. 11)□

我们现在声称，对于任意公式 $\phi_{h \wedge g}$，其中 h 和 g 相互独立且都是子句的合取，我们都可以构造一个良好模型。

引理12。设 g 和 h 是 f 的独立子公式，分别对应子句集合。若 ϕ_h 和 ϕ_g 都有良好模型，则 $\phi_{h \wedge g}$ 存在一个良好模型。

引理 *12* 的证明。设 M_g，M_h 分别是 ϕ_g，ϕ_h 的良好模型，其核心分别为 S_g，S_h。此外，设 w_g，w_h 是另外两个带有命题 A 的世界（回想一下，A 是 f 的满足赋值）。我们通过 $\sim_1$ 将 $S = \{w_g, w_h\} \cup S_g \cup S_h$ 中的所有世界两两相连，得到集合 S。

对 M_g 和 M_h 的副本应用引理11，进而构造模型 $\bar{M}_g$、$\bar{M}_h$，以及世界 v_g 和 v_h，使得 $\bar{M}_g$，$v_g \models \phi_g \wedge \neg\phi_h$ 和 $\bar{M}_h$，$v_h \models \phi_h \wedge \neg\phi_g$。现在，我们在 w_g 和 v_h 之间添加一条 $\sim_2$边，并在 w_h 和 v_g之间添加一条 $\sim_2$边，如图3所示。

现在我们声称，所得模型 M 是一个核心为 S的良好模型。

根据引理10，以下结论成立：对于所有 $w \in S$，都有 M，$w \models \phi_g$；对于所有 $w \in S$，都有 M，$w \models \phi_h$。

根据在 w_g，w_h 处增加的 $\sim_2$-边（这些状态处唯一的（！）$\sim_2$-边），我们有 M，$w_g \models \psi_g$以及 M，$w_h \models \psi_h$。于是还有 M，$w_h \models \neg\psi_g$和M，$w_g \models \neg\psi_h$；正如在 v_g 和 w_h 中一样，公式 ϕ_g 为真。

最后一个事实立即给出以下结论。对于所有 $w \in S$，都有M，$w \models \Diamond_1\psi_g$。对于所有 $w \in S$，都有 M，$w \models \Diamond_1\psi_h$。对于所有 $w \in S$，都有 M，$w \models \Diamond_1(\psi_g \oplus \psi_h)$，这是由于 w_g（分别为 w_h）。

因此，对于所有 $w \in S$，我们有 M，$w \models \phi_{g \wedge h}$。(引理 12) □

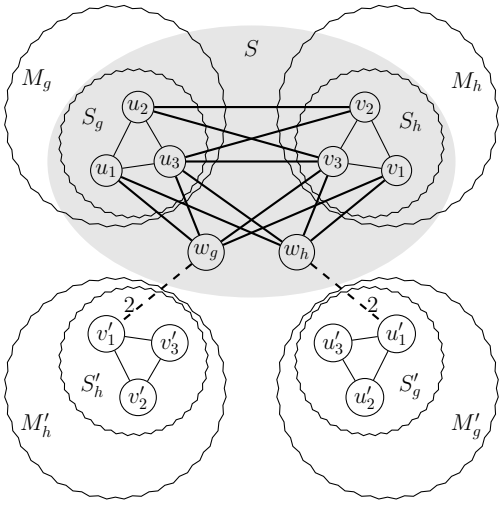


图3. 引理12证明中用于合取的一个良好模型。粗实线表示$\sim_1$ 转移，而粗虚线表示 $\sim_2$ 转移。

最后，我们可以完成命题 8 的证明，证明如果 f 可满足，那么 ϕ_f 可满足。

假设 f 可满足。现在，我们通过对公式的深度进行归纳，证明存在一个模型 M_f和一个状态 m_f，使得 M_f，$m_f \models \phi_f$。

基础情形由引理 9 给出。现在，每个子句 C_i 都是一个合取，其中包含 B_i 命题子句。子句 C_i 和 B_i 满足独立子公式的条件，因此我们可以应用引理12，得到一个满足 $\phi_{C_i \wedge b_i}$的良好模型。我们可以继续应用引理12，因为组合的子公式中总会有一个不同的文字。(命题8)□

由于命题7和命题8已得到证明，且该归约可在多项式时间内计算，因此定理得证。(定理5)□

关于两个尚未解决情形的一些见解

正如引言中所述，Hemaspaandra 等人提出的两个情形 [19]仍未解决：**S4**-$\oplus$MSAT$^1_{\{\Box,\Diamond\}}$ 和**T**-$\oplus$MSAT$^2_{\{\Box\}}$。

我们仍在研究这些情形，但希望在此分享一些初步见解。上文的 NP-困难性证明关键依赖于框架对称性来构造良好模型，而**S4** 和**T**并不具备这一性质。因此，无法像之前那样重复使用核心，这使得此类构造不再适用。

现在考虑 $\phi \oplus \psi$ 其中 ϕ 和 ψ 具有不相等的模态深度。对于可满足性而言，具有足够深度的模型可以在评估较浅公式的子模型之外，使较深公式为假。这一观察或许有助于将

Hemaspaandra 等人的多项式时间算法 [19]推广到这些情形，从而支持他们的猜想。然而，我们尚未将这一直觉完全形式化为完整且严谨的证明。

4 结论

本文解决了 Hemaspaan- dra 等人 [19] 指出的一个未决问题。具体而言，我们的结果表明，对于框架类 **S5**，在广泛接受的复杂性假设 $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ 下，他们的猜想并不成立。特别是，我们证明了这一情形下可满足性问题的 NP-困难性。

关于对称性在 **S5** 中所起作用的一个有趣观察是，它似乎是实现这种 NP-困难性的关键因素。在自反且传递的框架中，模态只能让我们沿着模型向前移动，无法回到先前的状态。因此，不同状态链之间似乎不可能发生相互作用。然而，对称性的存在改变了这一局面，因为它允许返回较早的状态。这种能力会在模型中先前访问过的区域引发矛盾，从而促成困难性构造。

作为未来工作，我们计划处理 [19], 中剩余的两个未决问题，即关于框架类 **S4** 和 **T** 的问题。此外，后续研究可以通过考察纯粹自反且对称的框架上的模态可满足性问题的复杂性，探究对称性的独立影响。引言中提到的其他逻辑的未决问题也为进一步研究提供了有前景的方向。

致谢。 第二作者感谢德国研究基金会（DFG）通过 ME 4279/3-1 项目提供资助。

利益披露。 作者声明，他们没有与本文内容相关的利益冲突。

参考文献

1. Areces, C., Blackburn, P., Marx, M.：混合逻辑是一阶逻辑的有界片段。载于：WOLLIC-99会议论文集，第35–50页（1999） 2. Areces, C., Blackburn, P., Marx, M.：混合逻辑复杂性路线图。载于：CSL-99会议论文集。《计算机科学讲义》，第1683卷，第307–321页（1999） 3. Baader, F., Calvanese, D., McGuinness, D.L., Nardi, D., Patel-Schneider, P.F.（编）：《描述逻辑手册：理论、实现与应用》，第1卷。剑桥大学出版社，第2版（2003） 4. Baader, F., Laux, A.：带模态算子的术语逻辑。载于：第14届国际人工智能联合会议（IJCAI 1995）论文集，第808–814页。加拿大蒙特利尔（1995），https://www.ijcai.org/Proceedings/ 95-1/Papers/104.pdf

5. Bauland, M., Mundhenk, M., Schneider, T., Schnoor, H., Schnoor, I., Vollmer, H.：线性时序逻辑（LTL）模型检验的可处理性：优良、糟糕与棘手的片段。ACM计算逻辑汇刊（TOCL）**12**(2), 13:1–13:28（2011年1月） 6. Bauland, M., Schneider, T., Schnoor, H., Schnoor, I., Vollmer, H.：线性时序逻辑广义可满足性的复杂性。逻辑方法计算机科学 **5**(1), 1–21（2009） 7. Blackburn, P., van Bentham, J., Wolter, F.：《模态逻辑手册》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹（2006） 8. Brachman, R.J., Levesque, H.J.：基于框架的描述语言中包含关系的可处理性。载于：美国人工智能协会，第34–37页（1984） 9. Brachman, R.J., Schmolze, J.G.：KL-ONE知识表示系统概述。《认知科学》**9**(2), 171–216（1985）。https://doi.org/10.1207/ s15516709cog0902_1，http://dx.doi.org/10.1207/s15516709cog0902_110. Brewka, G., Dix, J., Konolige, K.：《非单调推理：概述》，第73卷。CSLI出版社，斯坦福（1997） 11. Clarke, E., Emerson, E.A., Sistla, A.：使用时序逻辑规约自动验证有限状态并发系统。ACM程序设计语言与系统汇刊**8**(2), 244–263（1986） 12. Creignou, N., Schmidt, J., Thomas, M.：受限布尔函数集合的命题溯因复杂性。载于：第12届知识表示与推理原理国际会议论文集，第8–16页。美国人工智能协会出版社（2010） 13. Creignou, N., Schmidt, J., Thomas, M., Woltran, S.：使论证更容易的布尔联结词集合。载于：第12届欧洲人工智能逻辑会议论文集。《计算机科学讲义》，第6341卷，第117–129页。施普林格（2010） 14. Egenhofer, M.J., Golledge, R.G.（编）：《地理信息系统中的空间与时间推理》。牛津大学出版社（1998） 15. Emerson, E.A., Jutla, C.S.：树自动机与程序逻辑的复杂性。《SIAM计算杂志》**29**(1), 132–158（2000年2月） 16. Engelfriet, J., Venema, Y.：信息变化模态逻辑。载于：TARK，第125–131页。摩根·考夫曼出版社（1998） 17. Goldblatt, R.：数学模态逻辑：其演进概述。载于：Gabbay, D., Woods, J.（编），《二十世纪的逻辑与模态》，《逻辑史手册》第7卷，第1–98页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹（2006） 18. Guarino, N.：《信息系统中的形式本体论：第一届国际会议（FOIS'98）论文集》，6月6日至8日，意大利特伦托。《人工智能与应用前沿》，IOS出版社（1998），https://books.google.de/books? id=Wf5p3_fUxacC 19. Hemaspaandra, E., Schnoor, H., Schnoor, I.：广义模态可满足性。《计算机与系统科学杂志》**76**(7), 561–578（2010） 20. Hughes, G., Cresswell, M.：《模态逻辑导论》。麦修恩出版社，英国伦敦（1968） 21. Kripke, S.：模态逻辑的语义考量。载于：《Acta Philosophica Fennica》，第16卷，第84–94页（1963） 22. Lewis, C.I.：《符号逻辑概论》。加利福尼亚大学出版社，伯克利（1918） 23. Longley, P.A., Goodchild, M.F., Maguire, D.J., Rhind, D.W.：《地理信息科学与系统》。威利父子有限公司，奇切斯特，第4版（2015）

24. Meier, A., Mundhenk, M., Schneider, T., Thomas, M., Weber, V., Weiss, F.：《混合逻辑片段可满足性的复杂性——第一部分》。载于：MFCS 会议论文集。《计算机科学讲义》，第 5734 卷，第 587–599 页（2009）25. Misiuna, K.：信息模态逻辑。Logic and Logical Philosophy **21**(1), 33 003 26 51 2012 10 12775 2012 – ( )。https://doi.org/ . /LLP. . . Papadimitriou, C.H.：《计算复杂性》。Addison-Wesley（1994）27. Pnueli, A.：程序时序逻辑。载于：第 18 届计算机科学基础研讨会论文集。第 46–57 页。IEEE计算机学会出版社（1977）28. Post, E.：数理逻辑的二值迭代系统。数学研究年刊**5**，第 1–122 页（1941）29. Prior, A.N.：《过去、现在与未来》。克拉伦登出版社，牛津（1967）30. Reith, S.：《广义可满足性问题》。博士论文，维尔茨堡大学数学与计算机科学系（2001）31. Schnoebelen, P.：时序逻辑模型检测的复杂性。载于：模态逻辑进展。第 4 卷，第 393–436 页（2002）32. Schwentick, T., Weber, V.：混合逻辑的有界变量片段。载于：第 24 届 STACS 会议论文集。《计算机科学讲义》，第 4393 卷，第 561–572 页。施普林格（2007）33. Thomas, M.：Post 格中环限推理的复杂性。载于：第 10 届逻辑编程与非单调推理国际会议论文集。《计算机科学讲义》，第 5753 卷，第 209–302 页。施普林格（2009）34. Vardi, M.Y., Stockmeyer, L.：程序模态逻辑更紧的上下界：初步报告。载于：STOC ’85：第十七届 ACM 计算理论年度研讨会论文集。第 240–251 页。《计算机科学讲义》（1985）