arXiv:2512.17458v2 [math.RT] 3 Feb 2026

BMW代数的中心与一种类似 Okounkov-Vershik 的方法。

Christoforos Milionis

摘要。我们利用 Birman-Murakami-Wenzl代数 $B_n(q,\ t)$ 的 Jucys-Murphy元，证明对于几乎所有使其成为半单代数的参数，其在复数域上的中心由 Wheel Laurent多项式给出；Wheel Laurent多项式是 JM元中的对称劳朗多项式的一个子代数。作为应用，我们给出一种类似 Okounkov-Vershik 的方法来研究其有限维表示。在与 B型李代数相关的非半单情形中，Wheel Laurent多项式的中心子代数足以区分 BMW代数的块。

1. 引言

动机。 令 $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ 为具有通常三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ 的 A_{n-1} 型单李代数的包络代数，令 $V = L(\square)$ 为其向量表示，即对应于第一个基本权的简单模。

由于 $U(\mathfrak{g})$ 是一个 Hopf代数， r 次张量积 $V^{\otimes r}$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 上的一个模。对于足够大的 r ， $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的所有多项式表示都会作为直和项出现在 $V^{\otimes r}$ 中。
因此，理解 $\mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(V^{\otimes r})$ 的重要性显而易见。 $\mathbb{C}S_r$ 通过置换张量因子，在 $V^{\otimes r}$ 上有一个自然的右作用。于是我们处于以下情形:

$$U(\mathfrak{g}) \curvearrowright V^{\otimes r} \curvearrowleft \mathbb{C}S_r.$$

经典 Schur-Weyl对偶 [Wey39] 表明，这两个作用的像互为中心化子。此外，将 $V^{\otimes r}$ 分解为一个 $(U(\mathfrak{g})\ \mathbb{C}S_r)$-双模，可以将 S_r 的不可约表示表示为 $V^{\otimes r}$ 中 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的相应不可约表示的重数空间。由于对任意 $r \in \mathbb{N}$ 都可以这样做，因此代数链的表示之间存在相互作用

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}S_2 \subset \ldots \subset \mathbb{C}S_{r-1} \subset \mathbb{C}S_r \subset \ldots$$

以及李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的表示。

既然 $\mathbb{C}S_r$ 的表示可以通过 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$-理论来理解，我们能否为 S_r 的有限维表示构建一种类似于李代数最高权理论方法的途径?

Okounkov 和 Vershik 在 [OV96], 中实现了这一方法：作者同时研究了上述自然链的表示理论，并通过考察将 S_n 视为 S_{n-1} 表示时的分解方式，构造出其不可约表示。他们的方法利用了

一族与该链相容、且彼此交换的显著元素，称为 Jucys-Murphy元。这些元素递归定义为 $x_1 = 0$ ，并且

$$x_{k+1} = s_k x_k s_k + s_k \in \mathbb{C}S_{k+1}$$

对于任意 $k \geq 1$，其中 $s_k = (k\ k+1)$ 表示 S_{k+1} 的简单对换。需要注意的是， x_k 不是中心的，但它与 $\mathbb{C}S_{k-1} \subseteq \mathbb{C}S_k$ 交换，并且它们生成的代数 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k] \subseteq \mathbb{C}S_k$ 是一个极大交换子代数，类似于李理论中的 Cartan子代数。他们的方法中一个重要因素是，这条链是无重数的，也就是说，将 S_n 视为 S_{n-1} 表示时，任意不可约表示都能分解为不可约 S_{n-1} 表示，且分解中出现的每个表示的重数均为一。随后，人们将这些所谓的分支规则记录在一个称为分支图的图中。根据该图，可以为每个不可约 S_n 表示构造一个由分支图中的路径标记的唯一（相差标量）基。这个基称为 Gelfand-Zetlin基，或 GZ基。

Jucys 在 [Juc74] 中使用 JM元，将群代数 $Z(\mathbb{C}S_k)$ 的中心描述为 JM元的对称多项式构成的代数。也就是说，

$$Z(\mathbb{C}S_k) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]^{S_k}$$

类似结果已推广到其他类型。

将 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 替换为 $\mathfrak{so}(2n+1)$ $\mathfrak{sp}(2n)$ $\mathfrak{so}(2n)$ 后，中心化子代数相应地替换为一参数代数族，称为 Brauer代数，记作 $\mathrm{Br}_r(\delta)$，其中 $\delta \in \mathbb{Z}$ 取决于李代数 $\mathfrak{g}$，见 [Bra37]。可以看出，定义 $\mathrm{Br}_r(\delta)$ 的关系关于 δ 是多项式关系，因此这些代数可以对 $\delta \in \mathbb{C}$ 定义。这些代数也自然地组成一条无重数链。JM元的类似物最早由 Nazarov 在 [Naz96]，中引入，其中对这些元的性质进行了深入研究。Nazarov 还确定，在半单情形下，中心等于满足加法消去条件的对称多项式子代数在 JM元处的取值。确切地说，他证明了当 $\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为奇数或足够大的偶数时，

$$Z(\mathrm{Br}_n(\delta)) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} : f(x_1, -x_1, \ldots, x_n) = f(0, 0, x_3, \ldots, x_n)\}.$$

对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$，若将 $V^{\otimes r}$ 替换为 $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$，其中 V^* 是V的对偶表示，那么中心化子代数就被替换为Brauer代数的一个子代数，称为墙化Brauer代数 $B_{r,\ s}(\delta)$，其中 $\delta = n$，例如参见 [BCH+94]。尽管这些代数无法纳入一条自然的无重数链中，Jung和Kim在 [JK20] 中采用了一条特定的无重数链，并为 $B_{r,\ s}(\delta)$定义了JM元的类似物，从而能够用JM元描述中心。具体而言，他们证明，中心等于JM元 $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$上的超对称多项式代数。也就是说，

$$Z(B_{r,s}(\delta)) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s]^{\mathrm{SSym}}.$$

特别值得关注的是分割代数 $P_{2n}(t)$这一情形，它最早由 Martin 在 [Mar94]中定义。这些代数也存在 [HR05]中定义的 JM元。最近，Creedon 在 [Cre21] 证明

在半单情形下，分割代数的中心可由 JM元的超对称多项式代数描述,

$$Z(P_{2n}(t)) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]^{\mathrm{SSym}}.$$

量子群也可以探讨同样的问题。对于 $U_q(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ 和 $V = L(\omega_1)$，量子化自然表示中， $V^{\otimes r}$ 的中心化子代数可由 S_n 的群代数的一参数变形来描述，即 Hecke 代数 $H_n(q)$；而对于混合张量，中心化子则由所谓的量子化墙Brauer代数 $\mathrm{B}_{r,s}(q, \delta)$ 描述。

BMW代数。现在，若 $\mathfrak{g} \in \{\mathfrak{so}(2n+1)\ \mathfrak{sp}(2n)\ \mathfrak{so}(2n)\}$ 且 V 是量子化向量表示，那么 $r-$重张量积的中心化子代数可由 Birman-Murakami-Wenzl 代数（简称 BMW） $B_n(q,t)$ 描述。该代数最初由 [BW89], 提出，另见[Wen90], [Mur87],[LZ15]。这些代数是 Brauer代数的双参数变形。这些代数的表示论已得到广泛研究，例如参见[Xi00],[RS09],[RS11],[RS15]。这些代数具有图示解释，并且也自然地构成一条链

$$\mathbb{C} = B_1(q,t) \subset B_2(q,t) \subset \ldots \subset B_n(q,t) \subset \ldots$$

它们还配备了一族与上述链相容的JM元 x_1，.....， x_n，由递归关系定义。因此，它们符合前面所有情形中所描述的框架。

在本文中，我们给出了描述 $B_n(q,\ t)$中心的一个结果，这与前面的情形相当。本文的主要结果之一是定理1.1，其中我们描述了所有这样的情形：当 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根时，该中心由描述Brauer代数 $\mathrm{Br}_n(\delta)$中心的代数的乘法类比来描述。也就是说，令

$$C = \{f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]^{S_n} :\ f(X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n) = f(1, 1, \ldots, X_n)\}$$

并称其为Wheel Laurent多项式代数。我们的主要动机来自 [DRV14]，其中作者计算出仿射BMW代数 $aB_n(q,\ t)$的中心等于由仿射生成元 C x_1，.....， x_n生成的代数。我们注意到，他们的证明完全是代数性的且初等，只使用了 $aB_n(q,\ t)$的一个基定理。

主要结果。我们陈述本文的主要结果。设 $q, t \in \mathbb{C}$ 满足 q 不是单位根，且 $WL[x_1, \ldots, x_n]$ 是 $B_n(q,t)$ 的子代数，由 $B_n(q,t)$ 的 JM元中的 Wheel Laurent多项式组成。第一个定理给出了中心的刻画。

定理1.1。当 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根时，以下结论成立：

$$Z(B_n(q,t)) = WL[x_1, \ldots, x_n],$$

当且仅当属于以下情形之一：

- $t \neq \pm q^a$，当 $a \in \mathbb{Z}$ 时，
- $t = \pm q^{2a}$ 或者 $t = \pm q^{2a-1}$，当 $|a| \geq n$ 时，
- $t = \pm q^{2a}$，其中 $|a| < n$ 满足 $B_n(q,t)$ 是半单的。

特别地，当 $t = \pm q^{2a-1}$ 满足 $|a| < n$ 时，有

$$\dim_{\mathbb{C}} WL[x_1, \ldots, x_n] < \dim_{\mathbb{C}} Z(B_n(q,t)),$$

但 $n = 3$、 $t = q$、 q^{-1}、 $-q$ 例外。

证明的主要思路如下。首先，需要证明

$$WL[x_1, \ldots, x_n] \leq Z(B_n(q,t)).$$

在我们的情形下，这一点很容易，因为我们可以利用以下观察。仿射 BMW 代数$aB_n(q,\ t)$本质上是通过将 JM 元作为仿射生成元释放出来，对 $B_n(q,\ t)$进行扩张。这意味着存在一个满射代数同态

$$aB_n(q,t) \twoheadrightarrow B_n(q,t)$$

该同态将仿射生成元映为 $B_n(q,\ t)$的 JM 元。此同态限制后给出中心之间的代数同态。由于 $aB_n(q,\ t)$的中心已在 [DRV14]中计算为 C，且该代数投影到 $WL[x_1, \ldots, x_n]$，第一步便告完成。

由于我们讨论的是 $B_n(q,\ t)$为半单的情形，Artin-Wedderburn 定理表明， $Z(B_n(q,\ t))$的维数等于简单 $B_n(q,\ t)$-模的数量。此外，根据 Schur 引理，每个中心元在简单模上的作用都是一个标量。因此，我们需要证明代数 $WL[x_1, \ldots, x_n]$ 给出了数量足够的线性无关元：它们在不同简单模上的作用由不同标量给出。对于（超）对称多项式，通常采用以下策略。其生成集由初等（超）对称多项式构成；这是一族由生成函数定义的多项式。该生成函数简洁地包含了整个生成元族的信息。利用生成函数区分单模，再通过点分离论证得出所需代数具有正确的维数。

对于 Wheel Laurent多项式，我们定义了初等（超）对称多项式族的一个类似物（见定义4.9），并使用上述技巧证明

$$\dim_{\mathbb{C}} WL[x_1, \ldots, x_n] \geq \dim_{\mathbb{C}} Z(B_n(q,t))$$

由此我们可以得出结论。

我们注意到，当.....时，有趣的组合学开始显现

$$t = q^{2a} \quad \text{with} \quad a \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \ldots, n-1\},$$

见第6.2节。

代数 $B_n(q,t)$ 是胞腔代数，参见 [GL96], [Xi00]。在 [Eny04], Enyang 中，Enyang 证明了 $B_n(q,\ t)$ 的每个胞腔模都有 Murphy 基。当 $B_n(q,t)$ 是半单代数时，我们利用这一结果证明，每个 $B_n(q,\ t)$ 单模都存在一个关于 JM元 $x_1, \ldots, x_n$ 作用的共同特征向量基。我们也将此基称为 Murphy 基。一个自然的问题是，这个基是否与 GZ 基相同。将 $B_n(q,t)$ 的 Gelfand-Zetlin 代数记为 $GZ(n)$（见定义 3.16）。

定理1.2。有如下结论

$$GZ(n) = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}],$$

当且仅当 $q, t \in \mathbb{C}$ 如定理*1.1*所述。

在这些情况下，对于B_n（q,t）的每个简单模，*Murphy* 基（相差一个标量）等于 *GZ*基。

现在假设 $t = q^{2a}$，使得 $B_n(q, t)$ 不是半单的。证明 $WL[x_1, \dots, x_n] \leq Z(B_n(q, t))$ 与 $B_n(q, t)$ 的半单性无关，因此对任意 $q, t \in \mathbb{C}$ 都成立。我们可以证明，代数 $WL[x_1, \dots, x_n]$ 仍然足够大，能够识别 $B_n(q, t)$ 的块结构。 $B_n(q, t)$ 的块已在 [RS11], 中得到研究，作者给出了组合条件，描述对应于两个分拆 (λ, f)，(μ, l) 的简单模何时属于同一个块（见定义 8.4）。我们的下一个结果给出了块的一个等价刻画。

定理1.3. 设 $t = q^{2a}$ 对于 $a \in \mathbb{Z}$。两个单 $B_n(q,t)$-模 $L(\lambda, f)$ $L(\mu, l)$ 位于同一块中，当且仅当

$$W(\lambda, t) = W(\mu, t).$$

2. Birman-Murakami-Wenzl代数

在本节中，我们回顾BMW代数的定义，以及关于其表示论的一些熟知事实。BMW代数是Brauer代数的 q-模拟。详情参见例如 [Mor10]。

Denote by $A = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}, (q - q^{-1})^{-1}]$ and $R = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, (q - q^{-1}), \delta]/\langle t - t^{-1} = (q - q^{-1})(\delta - 1)\rangle$.

定义2.1. [BW89] 对于 $n \in \mathbb{N}$，Birman-Murakami-Wenzl代数 $B_n(q, t)$是由可逆元 $s_1, \dots, s_{n-1}$ 生成的自由 A-代数关于由下列关系生成的理想的商代数：

$$\begin{aligned}
&\text{(Spectrum) } (s_i - q)(s_i + q^{-1})(s_i - t^{-1}) = 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n-1,\\
&\text{(Braid relation) } s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \text{ for } 1 \leq i \leq n-2,\\
&\text{(Locality) } s_i s_j = s_j s_i, \text{ for } |i - j| > 1,\\
&\text{(Delooping 1) } e_i s_j^{\pm} e_i = t^{\pm 1} e_i, \text{ for } 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } j = i \pm 1,\\
&\text{(Delooping 2) } e_i s_i = s_i e_i = t^{-1} e_i, \text{ for } 1 \leq i \leq n-1,\\
&\text{(Snake) } e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i, \text{ for } 1 \leq i \leq n-1,
\end{aligned}$$

其中

$$\text{(Kauffman-Skein) } e_i = 1 - (q - q^{-1})^{-1}(s_i - s_i^{-1}), \text{ for } 1 \leq i \leq n-1.$$

注2.2。事实上，关于 A的蛇形关系可以由其他关系证明。我们将其纳入表示中，因为这是一个常用的关系，并且具有范畴论解释。另请注意，如果我们在 R上定义 $B_n(q,t)$，就必须将 e_i作为额外的生成元加入。由上述关系可知，对于所有 $1 \leq i \leq n-1$，都有 $e_i^2 = \delta e_i$，其中 $\delta = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}} + 1$。

Morton和Wassermann在 [Mor10] 中证明，BMW代数在 A （或 R）上是自由的，其基由Brauer图的提升构成。因此，$\mathrm{rank}_A(B_n(q,t)) = \mathrm{rank}_R(B_n(q,t)) = (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdots(2n-1)$。他们实际上证明了BMW代数与Kauffman切络代数同构。因此，研究 $B_n(q,t)$时，可以运用Kauffman切络代数的图形演算。利用这一点，他们证明了以下结果。

定理2.3。 [Mor10] 设 $\sigma\colon A\to\mathbb{Z}[\delta]$ 是通过扩张 $\sigma(q-q^{-1})=0$, $\sigma(t)=1$, $\sigma(\delta)=x$ 以及 $B_{n,\mathbb{Z}[x]}(q,t) = B_n(q,t)\otimes_R \mathbb{Z}[x]$ 而定义的代数同态。那么，作为 $\mathbb{Z}[x]$- 代数，

$$B_{n,\mathbb{Z}[x]}(q,t)\cong \mathrm{Br}_n(x).$$

其中 $\mathrm{Br}_n(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$上的*Brauer*代数。

由于我们最终将通过特化 q,t ，在 $\mathbb{C}$ 上研究 $B_n(q,t)$，并将其与Brauer代数的情形进行比较，因此先作一些有用的说明。对于 $n\in\mathbb{Z}$，记

$$[n]_q=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}=q^{n-1}+q^{n-3}+\ldots+q^{-(n-3)}+q^{-(n-1)}$$

为与 n对应的量子整数。对于满足 $q-q^{-1}\in\mathbb{C}^*$ 且 $t=\pm q^N$的 $q\in\mathbb{C}$，若存在某个整数 N，则有 $\delta=[\pm N]_q+1$。进一步特化 $q\to 1$，得到 $\delta=\pm N+1$。因此， $B_n(q,\pm q^N)$的经典极限是$\mathrm{Br}_n(\pm N+1)$，这带来了奇偶偏移：当 t是 q的偶数（奇数）次幂时，对应于参数为奇数（偶数）的Brauer代数情形。

利用这种图形演算和 [Mor10], 中的基定理，现在很容易证明，由 s_1、.....、 s_{n-2}生成的 $B_n(q,\ t)$子代数同构于 $B_{n-1}(q,\ t)$。这意味着我们有一个 A(分别为 R)-代数塔，

$$B_1(q,t)\hookrightarrow B_2(q,t)\hookrightarrow\ldots\hookrightarrow B_{n-1}(q,t)\hookrightarrow B_n(q,t)\hookrightarrow\ldots$$

3. 胞腔结构与表示论

本节回顾 $B_n(q,\ t)$的胞腔结构及其表示论方面的一些著名结果。

Xi在 [Xi00], 中证明了，按照Graham和Lehrer [GL96]的定义， $B_n(q,\ t)$是一个定义在 A 上的胞腔代数。随后，Enyang在 [Eny04] 中为 $B_n(q,\ t)$在 A上的每个胞腔模构造了一个Murphy 基 $\{m_T\mid T\in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)\}$ 。为准确说明这一点，我们需要引入 $B_n(q,\ t)$中一族重要的两两可交换元素，称为Jucys-Murphy元。

对于任意代数同态 $\mathrm{ev}_{\mathbb{C}}: A\to\mathbb{C}$，定义 $\mathbb{C}$ 上的 Birman-Murakami-Wenzl代数为$B_{n,\ \mathbb{C}}(q,\ t) = B_n(q,\ t)\otimes_A \mathbb{C}$，这里我们滥用记号，将 $q,\ t$经 $\mathrm{ev}_{\mathbb{C}}$映射后的像记为$q,\ t\in\mathbb{C}^*$，其中 $q^2\neq 1$。在上下文明确时，我们将$B_{n,\ \mathbb{C}}(q,\ t)$记为 $B_n(q,\ t)$。

定义 3.1. 与对称群 S_n 相关联的 Hecke 代数 $H_n(q)$是定义在 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 上的结合代数，由可逆元 $s_1, \ldots, s_{n-1}$ 生成，并对由以下关系生成的理想取商:

$$(s_i - q)(s_i + q^{-1}) = 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n-1,$$
$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \text{ for } 1 \leq i \leq n-2$$
$$s_i s_j = s_j s_i, \text{ for } |i-j| > 1.$$

众所周知， $B_n(q,t)/(e_1) \cong H_n(q)$作为 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-代数同构，其中(e_1)是由准幂等元 e_1生成的理想。相应的同构将 s_i +(e_1)映射为 $H_n(q)$中同名的生成元。然而， $H_n(q)$并不是 $B_n(q,t)$的子代数。

现在我们回顾一些用于陈述 Enyang 结果的组合学知识。

n 的分拆是一个非负整数构成的弱递减序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$，满足$\infty \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$，其中 $|\lambda|$: $= \sum \lambda_i = n$。当 λ是 n的分拆时，我们使用记号 $\lambda \vdash n$。令$i=1$P(n)为 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$的所有分拆构成的集合。这是一个以支配序 $\trianglerighteq$ 为序的偏序集。对于两个分拆 $\lambda, \mu \in$ P(n)，当且仅当对所有 j都有 $\sum \lambda_i \geq \sum \mu_i$时，我们称 $\lambda \trianglerighteq \mu$。若 $\lambda \trianglerighteq \mu i=1$ $i=1$且 $\lambda \neq \mu$，则记作 $\lambda \triangleright \mu$。

分拆将用杨图表示。分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots)$ 的杨图由若干方格组成，这些方格排列成左对齐的行，第 i 行有 λ_i 个方格。我们将一个分拆与其对应的杨图视为同一对象。形状为 $\lambda \vdash n$ 的标准杨表，是将数字 1，……，n 填入 λ 的方格中得到的，要求这些数字沿着 λ 的行和列均严格递增。

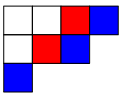
例 3.2. 以下是形状为 (3，2) 的标准杨表 $\vdash 5$

1	2	3
4	5	

1	3	5
2	4	

位置 (i, j) 处的方格称为 $\lambda \vdash n$ 的可移除方格（分别称为可添加方格），如果移除该方格后得到的仍是一个分拆 $\mu \vdash n-1$ （添加该方格后得到一个 $n+1$ 的分拆）。它们分别对应于 λ 的右内角和外角方格。将 λ 的可移除方格集合记为 $R(\lambda)$（相应地，将可添加方格集合记为 $A(\lambda)$）。

例 3.3. 分拆 $\lambda = (3,2) \vdash 5$ 的可移除方格位于位置 $(1,3),(2,2)$，而可添加方格位于位置 $(1,4)$, $(2,3)$,$(3,1)$。可移除方格以红色标出，可添加方格以蓝色标出。



用 $T^{\text{std}}(\lambda)$ 表示所有 λ标准杨表的集合。对于分拆 $\lambda \vdash n$ 和方格 $p = (i, j)$，称数值 $j - i$ 为该方格的内容，并记作 $c(p) = j - i$。内容将 λ 的杨图分隔成对角线。若用 $h(\lambda)$（分别用 $W(\lambda, t)$）表示高度（分别表示

宽度），即行数减 1（分别为列数减 1），那么 $\lambda \vdash n$ 中出现的内容就是集合 $\{-h(\lambda)\dots, w(\lambda)\}$ 中的数。

令 $D(\lambda) = \{-h(\lambda)\dots, w(\lambda)\}$ 为 λ 的内容集合；对于 $i \in D(\lambda)$，令 $m_\lambda(i)$ 为内容为 i 的对角线长度。容易看出，内容及其对角线长度完全确定了分拆的形状。也就是说，如果 $\lambda, \mu \vdash n$ 满足：对于所有 $i \in D(\lambda)$，$D(\lambda) = D(\mu)$ 且 $m_\lambda(i) = m_\mu(i)$，那么 $\lambda = \mu$。

按照对应杨图的包含关系对分拆排序，可得到一个偏序集，称为杨偏序集。这是一个分层图，其第 n 层的顶点集为 $\mathrm{P}(n)$；若 μ 可通过向 λ 添加一个方格得到（等价地，若 λ 可通过从 μ 移除一个方格得到），则 $\lambda \vdash n$ 与 $\mu \vdash n+1$ 之间以一条边相连，并记作 $\lambda \to \mu$。

图中通往 $\lambda \vdash n$ 的路径是一个 $n+1$ 元组 $T = (T_i)_{i=0}^n$，满足 $T_0 = \emptyset \vdash 0$，$T_n = \lambda$，$T_i \vdash i$ 对所有 $i = 1$，……，n 都有 $T_i \to T_{i+1}$。众所周知，对于任意分拆，通往 λ 的路径集合与形状为 λ 的标准杨表构成一一对应。

例 3.4。形状为 (3，2) 的标准杨表 $\vdash 5$

1	3	5
2	4	

对应于下面这条通往 (3，2) 的路径

$$\emptyset \to \square \to \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline \\ \hline \end{array}\!\!\square \to \begin{array}{|c|c|}\hline \\ \hline \end{array}\!\!\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline \\ \hline \end{array}\!\!\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}\!\!\square$$

将 $T^{\mathrm{can}}(\lambda)$ 记作通往 λ 的典范路径，即在继续向下一行添加方格之前，优先完成λ 的各行的路径。

例 3.5。通往 (3，2) 的典范路径 $\vdash 5$ 是与例 3.2 中的第一个标准杨表相对应的路径。

注意，我们可以通过规定 $T \le S$ if $T_i \trianglelefteq S_i$，对 λ 中的路径集合赋予偏序集结构，对于所有的 $i = 0, \dots, n$。于是，路径 $T^{\mathrm{can}}(\lambda)$ 在到达 λ 的路径中是极大的。

3.1. BMW代数与 Jucys-Murphy元的组合学。现在令 $\Lambda_n = \{(\lambda, f) \mid \lambda \in \mathrm{P}(n-2f) \quad f = 0, \ \dots, \ [\frac{n}{2}]\}$。这是一个定义了 $\trianglerighteq$ 的偏序集。具体地，对于 (λ, f)、$(\mu, l) \in \Lambda_n$，当 $f > l$ 或 $f = l$ 且 $\lambda \trianglerighteq \mu$ 处于支配序 $\trianglerighteq$ 中时，$(\lambda, f) \trianglerighteq (\mu, l)$ 有效。若 $(\lambda, f) \trianglerighteq (\mu, l)$ 且 $(\lambda, f) \neq (\mu, l)$，则记 $(\lambda, f) \rhd (\mu, l)$。

给定 $(\lambda, \ f) \in \Lambda_n$，一个上下降 λ-杨表是一个分拆序列 $T = (T_i)_{i=0}^n$，满足 $T_0 = \emptyset$，$T_n = \lambda$，且在杨图中，$T_i \to T_{i-1}$ 或 $T_{i-1} \to T_i$。这意味着每个分拆都是通过添加或移除一个方格从前一个分拆得到的。

例 3.6. 考虑 $(1,(2,2)) \in \Lambda_6$。以下是一个 updown $(2, 2)$-杨表

$$\emptyset \to \square \to \emptyset \to \square \to \square\square \to \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}\!\!\square \to \begin{array}{|c|c|}\hline \\ \hline \end{array}\!\!\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}$$

将 updown λ-杨表的集合记为 $T_{\mathrm{ud}n}(\lambda)$。注意，当 $\lambda \vdash n$ 时， $T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)$ 可与所有 λ-标准杨表的集合等同。Rui 和 Si 在 $T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)$ 上定义了一个偏序 $\succeq$，如下所示。对于 $S,T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)$，若 $S_k \rhd T_k$ 且对所有 $k+1 \le j \le n$ 均有 $S_j = T_j$，则记作 $S \overset{k}{\succ} T$。若存在$1 \le k \le n-1$ 使得 $S \overset{k}{\succ} T$，则记作 $S \succ T$。

定义 3.7. 设 $x_1 = t$和 $x_{i+1} = s_i x_i s_i$，其中 $i = 1, \dots, n-1$。称元素 $x_1, \dots, x_n \in B_n(q,t)$ 为 BMW 代数的 Jucys-Murphy 元。

注意，在嵌入 $B_i(q,t) \hookrightarrow B_n(q,t)$ 下，对于所有 $i = 1, \dots, n$，有 $x_i \in B_i(q,t)$。此外，容易看出

$$x_i \in C(B_i(q,t), B_{i-1}(q,t)) = \{f \in B_i(q,t) \mid fx = xf, \quad \forall x \in B_{i-1}(q,t)\},$$

也就是说， x_i 中心化子代数 $B_{i-1}(q,t)$。这证明由 $x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm}$生成的子代数是交换的。此外，$x_1 \dots x_n$在 A上的 $B_n(q,t)$ 中是中心的。

定义 3.8. 对于任意满足 $(\lambda, f) \in \Lambda_n$ 的 $T \in T_{\mathrm{ud}n}(\lambda)$，定义 T_k 的 (q,t)-内容为由下式给出的 $c_T(k) \in A$

$$c_T(k) = \begin{cases} tq^{2i}, & \text{if } T_k = T_{k-1} \cup \{p\} \\ t^{-1}q^{-2i}, & \text{if } T_{k-1} = T_k \cup \{p\}, \end{cases}$$

其中 $c(p) = i \in D(\lambda)$。

例 3.9. 设 $T = \Big(\emptyset \to \square \to \square\square \to \square\square \to \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\Big)$。那么 $c_T(1) = t$， $c_T(2) = tq^2$， $c_T(3) = t^{-1}q^{-2}$， $c_T(4) = tq^{-2}$。

注 3.10. 定义 3.8 可以简化如下。对于一个上下 λ-杨表的每一步，如果该步在第 i 条对角线上添加了一个方格，我们就记录数字 tq^{2i}；如果该步移除了一个内容为 i 的方格，我们就记录数字 $t^{-1}q^{-2i}$。这是一种跟踪路径中上下步的方式，其原理与内容记录标准杨表的方式相同。

3.2. **半单性与分支图**。 本小节回顾一些关于 $\mathbb{C}$ 上 $B_n(q,\ t)$ 的表示论结果。

定理3.11。 [Wen90] 对于 $q, t \in \mathbb{C}$，代数 $B_n(q,t)$ 是半单的，除非 q 是单位根，或者对于某个 $a \in \mathbb{Z}$，$t = \pm q^a$。

在本节中，我们始终假设 $q, t \in \mathbb{C}$ 满足： q 不是单位根，且对于 $a \in \mathbb{Z}$， $t \neq \pm q^a$。那么代数 $B_n(q,t)$ 是半单的。当 $q, t \in \mathbb{C}$ 如上所述时，我们称它们为 BMW代数的一般参数。直观地说，这意味着我们先在 $\mathbb{C}(q,t)$ 上定义 $B_n(q,t)$，然后再特化到 $\mathbb{C}$。

定理 3.12。 $B_n(q,t)$ 的简单模由集合 Λ_n 索引。

从现在起，当 $\lambda \vdash n-2f$ 显而易见时，用 $L(\lambda)$ 表示 $B_n(q,t)$ 中与 $(\lambda, f) \in \Lambda_n$ 对应的简单模。由于我们已经证明 $B_{n-1}(q,t)$ 是 $B_n(q,t)$ 的子代数，因此可以将 $B_n(q,t)$ 的简单模限制到 $B_{n-1}(q,t)$，并考察其分解规则。

定理3.13。 [Wen90]设 $L(\lambda, f)$ 是 $B_n(q,t)$ 的简单模，对应于 $(\lambda, f) \in \Lambda_n$。那么

$$\mathrm{Res}^{B_n(q,t)}_{B_{n-1}(q,t)} L(\lambda) = \bigoplus_{\Lambda_{n-1} \ni \mu = \lambda \pm \square} L(\mu),$$

换言之，限制可分解为对应于从 λ中移去或添加一个方格的不可约 $B_{n-1}(q,t)$ 表示。特别地，上述分解是无重数的。

例3.14。 设 $n=5, (1,(2,1)) \in \Lambda_5$。那么作为 $B_4(q,t)$ 表示，它分解为

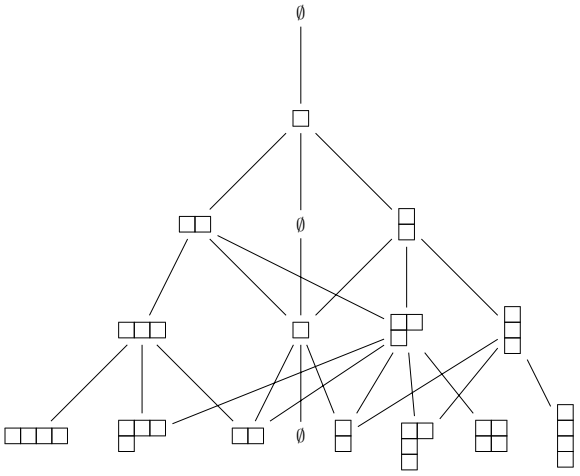
$$\mathrm{Res}^{B_5(q,t)}_{B_4(q,t)} L((2,1)) = L((2,2)) \oplus L((3,1)) \oplus L((2,1,1)) \oplus L((1,1)) \oplus L((2)).$$

根据定理3.11和定理3.13，我们得到一列半单 $\mathbb{C}$-代数

$$B_1(q,t) \subseteq B_2(q,t) \subseteq \ldots \subseteq B_{n-1}(q,t) \subseteq B_n(q,t) \subseteq \ldots$$

其分支图定义如下。这是一个分层图，在第n层的顶点集合为 Λ_n；当且仅当$\mu = \lambda \pm \square$时，两个顶点 $(\mu, l) \in \Lambda_{n-1}$，$(\lambda, f) \in \Lambda_n$之间有一条边。到 $(\lambda, f) \in \Lambda_n$的路径由 $T_{\mathrm{ud}n}(\lambda)$ 给出。对于每个不可约 $B_n(q,t)$ 模，都有一个典范基，可通过将该模反复限制到 $B_1(q,t) \cong \mathbb{C}$而得到；此时所有不可约模都是一维的。对于 $\lambda \vdash n-2f$，该基由路径 $T \in T_{\mathrm{ud}n}(\lambda)$ 标记。将其记为 $\{v_T \mid T \in T^{\mathrm{ud}}_n(\lambda)\}$，并称之为 $L(\lambda)$ 的 Gelfand-Zeitlin基。

例3.15. 上述分支图的前4层如下所示。



D定义3.16. 重数自由代数塔的 Gelfand-Zeitlin 代数

$$B_1(q,t) \subseteq B_2(q,t) \subseteq \ldots \subseteq B_{n-1}(q,t) \subseteq B_n(q,t) \subseteq \ldots$$

是代数

$$GZ(n) = \langle Z(1), \ldots, Z(n) \rangle$$

其中 $Z(i) = Z(B_i(q,t))$ 是 $B_i(q,t)$ 的中心。

我们对 $GZ(n)$ 作一些观察。它是 $B_n(q,t)$ 的一个交换子代数；由于这条塔无重数，它是一个极大交换子代数。此外，利用 Artin-Wedderburn 定理，可以得到如下等价刻画。

命题 3.17. *Gelfand-Zeitlin* 代数可刻画如下

$$GZ(n) = \{f \in B_n(q,t) \ : fv_T \in \mathbb{C}v_T,\ T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda),\ (\lambda, f) \in \Lambda_n\}.$$

也就是说，它由满足以下条件的所有元素构成：在每个简单模中，*GZ* 基都是共同特征向量基。此外，*GZ* 基元素由相应的特征值唯一确定（相差一个标量因子）。

代数 $GZ(i)$也构成一个代数塔。现在我们证明， $B_n(q,\ t)$的 Jucys-Murphy 元及其在定义 3.7 中定义的逆元属于 $GZ(n)$。这将由下面的一般性观察得到。

引理 3.18。

$$C(B_n(q,t), B_{n-1}(q,t)) \subseteq GZ(n)$$

对所有 n均成立。

证明。 我们使用命题 3.17 中给出的 GZ代数的等价刻画。令$L(\lambda)$为与 $\lambda \vdash n-2f$对应的单模，并令 $x \in B_n(q,\ t)$满足 $xf = fx$，其中任意$f \in B_{n-1}(q,\ t)$。因此，我们得到

$$x \in \mathrm{End}_{B_{n-1}(q,t)}(\mathrm{Res}^{B_n(q,t)}_{B_{n-1}(q,t)}(L(\lambda))).$$

利用定理3.13和 Schur 引理，我们得到

$$x \in \bigoplus_{\mu=\lambda\pm\square} \mathrm{End}_{B_{n-1}(q,t)}(L(\mu)) \cong \bigoplus_{\mu=\lambda\pm\square} \mathbb{C}_\mu.$$

对于 $T = (T_i)_{i=0}^n \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)$，我们有 $v_T \in L(T_{n-1})$。由于 x在 $L(\lambda)$的分解中出现的任意单模 $B_{n-1}(q,\ t)$上都以标量的形式作用，因此我们得到 $xv_T \in \mathbb{C}v_T$，这证明了 x 在 GZ基下是对角的。因此， $x \in GZ(n)$。□

我们已经观察到，Jucys-Murphy 元满足

$$x_i \in C(B_i(q,t), B_{i-1}(q,t)),$$

对所有 $i = 1, \ldots, n$。

推论3.19。 由 *Jucys-Murphy*元及其逆元生成的代数是 *Gelfand-Zeitlin* 代数的一个子代数

$$\langle x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1} \rangle \subseteq GZ(n).$$

注记3.20. 推论3.19还有一个更简洁的证明，依据如下简单观察即可。对于任意 $k \leq n$，元素 $x_1 \cdots x_k \in Z(k)$ 和 $(x_1 \cdots x_{k-1})^{-1} \in Z(k-1)$，因此它们的乘积$x_k \in GZ(n) = \langle Z(1) \dots, Z(n) \rangle$。对 JM 元的乘法族或加法族，总可以使用这个技巧。

这意味着，对每个简单的 $B_n(q, t)$-模 $L(\lambda)$，都存在一个共同特征向量基$\{v_T \mid T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)\}$，其对应于 $x_1, \dots, x_n$。我们的目标是证明，在这个基下， $x_1, \dots, x_n$ 的特征值能够唯一确定 $L(\lambda)$。首先，我们必须确定 x_i 在 $L(\lambda)$ 中可能的特征值。为此，我们使用 cell 理论。

3.3. Jucys-Murphy元的谱。Enyang 在 [Eny04] 为 $B_n(q,t)$ 的每个胞腔模 $\Delta(\lambda, f) = L(\lambda)$ 构造了 Murphy 基 $\{m_T \mid T \in T\mathrm{ud}_n(\lambda)\}$。在此基下， x_i的作用由一个对角元为 $\{c_T(i) \mid T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)\}$ 的上三角矩阵给出，其中 $c_T(i)$ 的定义见定义 3.8。这意味着， x_i的特征值恰好是所有 $c_T(i)$，其中 $T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)$。由于族 $x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$同时可对角化，因此存在 $\Delta(\lambda, f) = L(\lambda)$ 的共同特征向量基 $\{f_T \mid T \in T\mathrm{ud}_n(\lambda)\}$，使得

$$x_i f_T = c_T(i) f_T,$$

对每个 $i = 1, \dots, n$ 以及 $T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)$ 均成立。我们也称基 $\{f_T \mid T \in T\mathrm{ud}_n(\lambda)\}$ 为 $L(\lambda)$ 的 Murphy 基。

引理 3.21。 在上述描述的基 $\{f_T \mid T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)\}$ 中，*Jucys-Murphy*元的作用为

$$x_i f_T = c_T(i) f_T, \quad i = 1, \dots, n.$$

备注 3.22。 值得注意的是，我们目前尚不清楚基 $\{f_T \mid T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)\}$ 是否是 $L(\lambda)$ 的 GZ基。这是因为，尽管相对于该基，由 Jucys-Murphy元及其逆元生成的代数可以被同时对角化，但这并不意味着 $GZ(n)$ 中的所有元素都能相对于 $\{f_T \mid T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)\}$ 被同时对角化。

4. The Affine Birman-Murakami-Wenzl algebras.

尽管 Jucys-Murphy元包含了关于 $B_n(q, t)$ 结构的重要信息，但该代数并未自然地将它们视为其中的特殊元素。也就是说，它们并不自然地属于 $B_n(q, t)$ 的某个基，或者说， $B_n(q, t)$ 的图示并未将它们作为特殊图示纳入其中。

假设 $q, t \in \mathbb{C}$ 是一般的。在 [DRV14], 中，作者研究了 $B_n(q,t)$的仿射版本，这是一种可以视为 $B_n(q, t)$扩张的代数，其图示自然地将Jucys-Murphy元作为新的仿射生成元纳入其中。关于该代数的范畴论和图示直观的更多信息，请参见 [MS21]。

定义 4.1。 [DRV14] 第 n个仿射BMW代数 $aB_n(q,t)$是由可逆元 $s_1,\ldots,s_{n-1}$（对应正交叉）生成，并模去BMW关系得到的代数，此外还包含一个仿射生成元 x，使得若 $x_1 = tx$ 和 $x_{i+1} = s_i x_i s_i$，对于 $i = 1,\ldots,n-1$，则以下关系成立：

$$\begin{aligned}
&x_1 x_2 = x_2 x_1,\\
&[x, s_i] = 0 \quad \forall i \geq 2,\\
&x_i x_{i+1} s_i = s_i x_i x_{i+1},\ \forall i \in \{1,\ldots,n-1\},\\
&x_i x_{i+1} e_i = e_i x_i x_{i+1},\ \forall i \in \{1,\ldots,n-1\},\\
&e_1 x_1^l e_1 = Z_0^{(l)} e_1,
\end{aligned}$$

其中 $l \in \mathbb{Z}$, $Z_0^{(l)} \in \mathbb{C}$。

备注 4.2. 上述某些关系可能是冗余的，例如与 s_i的交换关系；但我们仍将该关系纳入其中，以尽可能贴近 [MS21]的图示直观。

备注 4.3. </style}应当将(, t)视为通过将 $aB_n(q,t)$的仿射生成元取值为 $B_n(q,t)$的 Jucys-Murphy 元而得到的代数。虽然当我们将范围限制到 $aB_n(q,t)$的子代数时，这一点并非自动成立，但自然会引出一个问题：对于中心，这一点是否确实成立?

利用 $aB_n(q,t)$的基定理（该定理由 [GH06], 中证明）， [DRV14] 的作者以代数方法计算了其中心。请注意，我们给出的是他们在 $\mathbb{C}$上的结果，但他们的结果更一般地适用于满足某些可容许条件的任意交换环。

T定理 4.4. [DRV14] 对于 $q, t \in \mathbb{C}$ 一般的， $aB_n(q,t)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的中心等于

$$C := Z(aB_n(q,t)) = \{p \in \mathbb{C}[x_1^{\pm},\ldots,x_n^{\pm}]^{S_n} : p(x_1, x_1^{-1},\ldots,x_n) = p(1,1,\ldots,x_n)\}.$$

我们将满足上述条件的对称Laurent多项式称为轮多项式。与（超）对称多项式的研究类似，也有一族类似于幂和多项式的多项式，定义如下：

$$p_k^- = \sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^{-k}), \quad \text{for any } k \in \mathbb{N}.$$

上述元素属于 C，也就是说，它们是满足“轮条件”的对称Laurent多项式

$$p_k^-(x_1, x_1^{-1},\ldots,x_n) = p(1,1,\ldots,x_n).$$

也很容易看出，最后一个初等对称多项式及其逆也属于 C，即

$$e_n = x_1 \cdots x_n, \quad e_n^{-1} = x_1^{-1} \cdots x_n^{-1} \in C.$$

4.1. **对称轮Laurent多项式**。 本节将建立一套关于轮对称劳朗多项式的理论，与（超）对称多项式的理论相似。

对于对称多项式和超对称多项式，我们有两组标准生成元。一组由幂和多项式构成，另一组则是称为初等（超）对称多项式的一组多项式。下面给出它们的定义，并指出后者通常定义为有理生成函数的形式幂级数展开的系数。

定义4.5。 在 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$（分别在$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{2n-1},x_{2n}]^{S_n}$）中的初等（超）对称多项式，记为 (l_k) e_k，其中 $k\in\mathbb{N}$，定义为下列生成函数的形式幂级数展开中 T^k 的系数：

$$\text{Classical case: } F_n(t;x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}(1-x_iT)=\sum_{i=0}^{\infty}e_kT^k,$$
$$\text{Super case: } F_n(t;x_1,\dots,x_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+x_{2i-1}T)}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_{2i}T)}=\sum_{i=0}^{\infty}l_kT^k.$$

注4.6。 我们所采用的初等对称多项式定义并非标准定义。

上述有理函数有形式幂级数展开，因为它们的常数项非零且等于1。我们还注意到，初等对称多项式构成的集合是有限的，而相应的初等超对称多项式集合则是无限的。

注4.7。 上述多项式在（超）对称多项式理论中极为重要，原因有二。

(1) 它们由一个关于 T 的有理函数生成函数定义，因此易于进行代数运算。整个族的信息都包含在一个简单的有理函数中。(2) 它们生成（超）对称多项式。

定理4.8。 [Ste85] （超）对称多项式集合既由幂和（超）对称多项式集合生成，也由初等（超）对称多项式生成。

让我们把注意力转回定理4.4中的轮对称Laurent多项式代数 C 。注意， C 恰好是对称多项式子代数 $f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$ 的乘法类比，它满足条件 $f(x_1,\ -x_1,\ \dots\dots,\ x_n)=f(0,\ 0,\ \dots\dots,\ x_n)$；Nazarov 在 [Naz96] 中证明，对于足够大的 $\delta\in\mathbb{Z}$，该子代数是 Brauer代数 $\mathrm{Br}_n(\delta)$ 的中心，且其参数也包括符合 $\mathrm{Br}_n(\delta)$ 半单性参数的 B型参数。

定义4.9。 将 C 中的初等对称轮Laurent多项式（初等轮多项式）集合定义为族 $\{w_k\mid k\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{C}[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}]$，其中 w_n 由下式给出

co以下生成函数的形式幂级数展开中 T^n 的系数 n

$$W(T)=\sum_{i=0}^{\infty}w_iT^i=\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^{-1}T)}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_iT)}.$$

由于定义这些多项式的有理函数关于 x_1、.....、x_n 对称，显然$w_k\in\mathbb{C}[x_1^{\pm1},\dots,x_n]^{S_n}$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$ 都成立。此外，容易通过在生成函数中代入 $x_2=x_1^{-1}$，证明它们满足轮条件。这意味着 $\{w_k\mid k\in\mathbb{N}\}\subseteq C$。

例4.10。 让我们仔细考察 $n=2$ 时的这些多项式。

$$\frac{(1-x_1^{-1}T)(1-x_2^{-1}T)}{(1-x_1T)(1-x_2T)}=(1-x_1^{-1}T)(1-x_2^{-1}T)\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{a+b=k}x_1^ax_2^b)T^k=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left((\sum_{a+b=n}x_1^ax_2^b)-(x_1^{-1}+x_2^{-1})(\sum_{a+b=n-1}x_1^ax_2^b)+x_1^{-1}x_2^{-1}(\sum_{a+b=n-2}x_1^ax_2^b)\right)T^n.$$

由此得到 w_k 的一个具体表达式。特别要注意,

$$w_1=x_1-x_1^{-1}+x_2-x_2^{-1}=p_1^-$$

and

$$w_2=x_1^2+x_2^2+x_1x_2-2+x_1^{-1}x_2^{-1}-x_1^{-1}x_2-x_1x_2^{-1}.$$

可以计算得出

$$w_2=\frac{1}{2}w_1^2+\frac{1}{2}p_2^-,$$

因此 $p_2^-=2w_2-w_1^2$。

从上述例子来看，由 w_k 和 p_k^- 生成的代数很可能相同。为此，我们希望将它们对应的生成函数联系起来。

我们计算 p_k^- 的生成函数。考虑形式幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k^-T^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}(x_iT)^k-\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}(x_i^{-1}T)^k=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{1-x_iT}-\frac{x_i^{-1}}{1-x_i^{-1}T}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dT}(-\log(1-x_iT)+\log(1-x_i^{-1}T)=$$

$$=\frac{d}{dT}\log\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^{-1}T)}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_iT)}\right).$$

引理4.11。 幂和多项式 $\{p_k^-\mid k\in\mathbb{N}\}$ 由定义初等轮多项式 $\{w_k\mid k\in\mathbb{N}\}$的形式幂级数的对数导数的形式幂级数展开中 T^k 的系数给出。

我们来尝试显式地找出用 w_k表示 p_k^- 的公式。为此，注意到$\frac{d}{dT}\log(W(T)) = {W'}_{(T)}{W(T)}$。因此，我们需要求出 $W(T)$的形式逆。令 ${W}^{1}{}_{(T)} = \sum_{i=0} v_i T^i$为$\infty$ ∞，使得 $(\sum v_i T^i)(\sum w_j T^j) = 1$。

于是得到卷积递推公式$i=0$ $j=0$

$$\sum_{i=0}^{k} w_i v_{k-i} = \delta_{k,0} \quad \text{for all } \ k \geq 0.$$

由于 $w_0 = 1$，我们可以归纳证明

引理 4.12。

$$v_k \in \mathbb{Z}[w_1, \ldots, w_k]$$

对所有 $k \geq 1$。

利用这一点，我们最终可以证明，幂和轮多项式与初等轮多项式生成相同的代数。注意， $p_0^- = 0$。于是，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^- T^{k-1} = \frac{W'(T)}{W(T)} = (\sum_{i=1}^{\infty} i w_i T^{i-1})(\sum_{j=0}^{\infty} v_j T^j) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} k w_j v_{k-j} \right) T^{k-1}.$$

这最终意味着

$$p_k^- = \sum_{j=1}^{k} j w_j v_{k-j}, \quad \text{for all } \ k \geq 0.$$

由此我们证明了以下结论。

命题 4.13. 幂和轮多项式可以用初等轮多项式表示。也就是说，在 C 中，它们生成相同的代数。用公式表示，

$$\mathbb{C}[e_n^{\pm 1}][p_1^-, p_2^-, \ldots] = \mathbb{C}[e_n^{\pm 1}][w_1, w_2, \ldots].$$

5. 一般 Birman-Murakami-Wenzl 代数的中心

本节中，我们确定 $B_n(q,\ t)$ 在 $q,\ t \in \mathbb{C}$ 为一般情形时的中心。我们首先建立仿射 BMW 代数与具体代数之间的联系。特别地，我们定义从 $aB_n(q,\ t)$ 到 $B_n(q,\ t)$ 的自然满射，并说明此映射如何为我们提供 $B_n(q,\ t)$ 中的一大族中心元。回顾定义 4.1 中 $aB_n(q,\ t)$ 的定义。根据 $aB_n(q,\ t)$ 和 $B_n(q,\ t)$ 的定义，很容易推出以下引理。

引理 5.1. 存在一个自然的满射 $\mathbb{C}$-代数同态

$$\pi_n : aB_n(q,t) \to B_n(q,t)$$

将 s_i 映射到 $B_n(q,t)$ 中同名的生成元，仿射生成元 x 映射到 1，而对于 $l \in \mathbb{Z}$，标量 $z_0^{(l)}$ 映射到 $t^l(\frac{t-t^{-1}}{q-q^{-1}} + 1)$。此映射的核等于 $(x-1)$，——

由元素 $x-1$生成的 $aB_n(q,t)$ 的理想。此外，这将限制为中心之间的代数同态

$$\pi_n|_{Z(aB_n(q,t))} : C \to Z(B_n(q,t)).$$

证明。显然，该映射是良定义且满射的。该映射经过商代数 $\tilde{\pi}_n$： $aB_n(q,\ t)/(x-1) \to B_n(q,\ t)$。反方向还有一个映射， i_n:$B_n(q,\ t) \to aB_n(q,\ t)$，它是单射，并且满足

$$(\pi_n \circ i_n) \circ \tilde{\pi}_n = id_{aB_n(q,t)/(x-1)}$$
$$\tilde{\pi}_n \circ (\pi_n \circ i_n) = id_{B_n(q,t)},$$

这证明了 $\tilde{\pi}_n$ 是同构，因此 π_n 的核等于由$x-1$生成的理想。□

这意味着我们可以将仿射版本的中心元投影到具体版本中。令$WL[x_1,\ldots,x_n]$ 表示 $B_n(q,\ t)$的子代数，其中的元素是 $B_n(q,\ t)$的 Jucys-Murphy 元的轮多项式，即 $x_1 = t,\ \ x_2 = s_1^2$、.....、$x_n = s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_1^2 s_2 \cdots s_{n-2}s_{n-1}$。于是显然， π_n下 C的像等于 $WL[x_1,\ldots,x_n]$。

推论 5.2。

$$WL[x_1,\ldots,x_n] \subseteq Z(B_n(q,t)).$$

现在我们可以陈述本文的一项主要结果，并概述证明中将采用的技巧。

定理 5.3。 对于 $q,t \in \mathbb{C}$ 一般的情形，有

$$Z(B_n(q,t)) = WL[x_1,\ldots,x_n].$$

此外，对于所有 $\lambda \in \Lambda_n$，都存在一个初等轮多项式 $^{w_{n(\lambda)}}$，使得它们在 *Jucys-Murphy* 元中的取值构成 $Z(B_n(q,t))$ 的一组基。

由于 $q,\ t \in \mathbb{C}$ 是一般的，根据定理3.11，代数 $B_n(q,\ t)$ 是半单的。利用 Artin-Wedderburn 定理，我们得到其中心在 $\mathbb{C}$ 上的维数等于 $B_n(q,\ t)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的不等价简单模的数量。已知这些模与 $n-2f$ 的分拆数量一一对应，其中 $f = 0$，.....，$[\frac{n}{2}]$，由此可推出以下结论。

引理 5.4。 对于一般的 q、$t \in \mathbb{C}$，有

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(B_n(q,t)) = |\Lambda_n|.$$

现在，证明定理 5.3 的技巧已经明了。如果我们能证明代数 $WL[x_1,\ldots,x_n]$ 至少产生 $\dim_{\mathbb{C}} Z(B_n(q,\ t))$ 个线性无关元，那么就大功告成了。为此，我们将证明族 $(w_n)_{n\geq 0}$ 能够区分 $B_n(q,\ t)$ 的简单模。也就是说，我们将证明，对于任意两个简单模 $L(\lambda)$ 和 $L(\mu)$，都存在轮多项式 $f,\ g \in C$，使得它们在 $WL[x_1,\ldots,x_n]$ 中的像分别在 $L(\lambda)$ 和 $L(\mu)$ 上作用为不同的标量。随后，点分离论证将说明，根据上述结果，我们可以为每个简单模 $L(\lambda)$ 产生至少一个 $WL[x_1,\ldots,x_n]$ 的线性无关元，从而完成证明。

由于 $WL[x_1,\dots,x_n]$ 是中心子代数，根据 Schur 引理，每个元素 $p \in WL[x_1,\dots,x_n]$ 在简单模 $L(\lambda)$ 上的作用都是某个标量。我们首先证明，这个标量只取决于分拆 $\lambda \vdash n-2f$，而不取决于对应于某条路径 $T \in T_n^{\mathrm{ud}}(\lambda)$ 的 Murphy 基元素。请记住，在这些 Murphy 基 f_T 中，Jucys-Murphy元的作用由引理 3.21 给出。

引理 5.5. 设 $\lambda \vdash n-2f$满足某个 $f = 0,\dots,[\frac{n}{2}]$。若 $f_T, f_S \in L(\lambda)$ 是 $L(\lambda)$的 ***Murphy*** 基中的两个元素，且 $T,S \in T^{\mathrm{ud}n}(\lambda)$ 以及 $p \in WL[x_1,\dots,x_n]$，则

$$p(c_T(1),\dots,c_T(n)) = p(c_S(1),\dots,c_S(n)).$$

证明。 由引理 3.21，得

$$pf_T = p(c_T(1),\dots,c_T(n))f_T$$

and

$$pf_S = p(c_S(1),\dots,c_S(n))f_S.$$

由于 p 是中心的，根据 Schur 引理，它在 $L(\lambda)$ 的任意元素上都以相同常数作用。 □

利用引理 5.5，对于任意 $\lambda \vdash n-2f$，我们现在可以选择一条通往 λ 的方便路径，并计算所需的一切，以确定 $WL[x_1,\dots,x_n]$ 在对应于该路径的基元素上的作用。

定义 5.6. 设 $(\lambda, f) \in \Lambda_n$。记 $T^{\mathrm{d}}(\lambda) = (T_0 \to T_1 \to \dots \to T_n = \lambda)$ 为通往 λ的如下路径。

$$(\emptyset \to \square)^f \to T^{\mathrm{can}}(\lambda),$$

其中，$(\emptyset \to \square)^f$ 表示将路径 $\emptyset \to \square$， f 重复若干次，而 $T^{\mathrm{can}}(\lambda)$ 是通往 λ 的典范路径，如例 3.4 后所定义。将 $T^d(\lambda)$ 称为通往 λ 的醉汉路径，并将 f 称为醉酒程度。

例 5.7。 设 $n=10$ 和 $\lambda = (2,2) \vdash 10-2\cdot 3$。将醉酒程度 $f=3$ 视为已确定，我们有通往 $(3,(2,2)) \in \Lambda_{10}$ 的醉汉路径为

$$T^d(\lambda) = \Big((\emptyset \to \square)^4 \to \ydiagram{2} \to \ydiagram{2,1} \to \ydiagram{2,2}\Big)$$

考虑上述路径，我们希望理解关于醉汉路径 $T^d(\lambda)$ 的 (q,t) 内容的多重集。从现在起，对所有 i，记 $c_{T^d}(\lambda)(i)$ 为 $c_\lambda(i)$。首先固定一些记号。

定义 5.8。 对于一个分拆 $\lambda \vdash n$，令

- λ 的高度记为 $h(\lambda)$，其值为 λ -1 的行数。
- 类似地， $\lambda(\lambda)$的宽度是 λ 的列数减 1。

- λ 的对角数据定义为有序对（$D(\lambda)$ m_λ），其中

$$D(\lambda) = \{-h(\lambda), -h(\lambda)+1, \ldots, w(\lambda)\}$$

且 m_λ： $D(\lambda) \to \mathbb{N}$ 由 $m_\lambda(i) = |\{\square \in \lambda : \mathrm{ct}(\square) = i\}|$给出，其中 $\mathrm{ct}(\square) = j - i$ 表示位置（i, j）方格的内容。换言之， $m_\lambda(i)$ 是内容为 i 的方格所构成对角线的长度。

命题 5.9。 对于 $\lambda \vdash n - 2f$，其中 $f = 0$、.....、 $[\frac{n}{2}]$,– 我们有

$$\{c_\lambda(i) \mid 1 \le i \le n\} = \{t^{(f+m_\lambda(0))}, (t^{-1})^{(f)}, (tq^{2i})^{(m_\lambda(i))} \mid i \in D(\lambda) \setminus \{0\}\},$$

其中，指数中的括号表示相应数字的重数。

证明。 记住， $T_{\mathrm{std}}(\lambda) = (\emptyset \to \square)^{f+1} \to T(\lambda)$。这意味着，对于 $0 \le i \le f$，我们有$T_{2i} = \emptyset$，且 $T_{2i+1} = \square$，因此

$$\{c_\lambda(i) \mid 1 \le i \le 2f+1 = n - |\lambda| + 1\} = \{t, t^{-1}, t, t^{-1}, \ldots\} = \{t^{(f+1)}, (t^{-1})^{(f)}\}. \tag{1}$$

现在对于 $2f+2 \le i \le n$，剩余路径为 $T^{\mathrm{can}}(\lambda)$。在路径的每一步中，这都会添加一个方格，并优先选择尽可能靠上的行。因此

$$\{c_\lambda(i) \mid 2f+2 \le i \le n\} = \{(tq^{2i})^{(m_\lambda(i))} \mid i \in D(\lambda) \setminus \{0\}\} \cup \{(t)^{(m_\lambda(0)-1)}\}, \tag{2}$$

这里我们将内容为零的方格单独处理，因为上一步中我们在位置 (1，1) 添加了方格。现在结合 (1)、(2)，得到

$$\{c_\lambda(i) \mid 1 \le i \le n\} = \{(t)^{(m_\lambda(0)-1+f+1)}, (t^{-1})^{(f)}, (tq^{2i})^{(m_\lambda(i))} \mid i \in D(\lambda) \setminus \{0\}\}.$$

这就完成了证明。 □

下一步是理解初等轮多项式 w_k 对每个简单模 $L(\lambda)$ 的作用，这里相对于与通往 λ 的醉汉路径对应的 Murphy 基元素 $f_{T^d(\lambda)}$ 来考察。令

$$W(\lambda, t) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - (c_\lambda(i))^{-1}T)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - c_\lambda(i)T)}. \tag{3}$$

这一作用将每个 w_k 的作用编码为有理函数 $W(\lambda, t)$ 关于 T 的形式幂级数中 T^k 的系数。我们将此函数化为最简形式。

命题 5.10。 对于一般的 q、 $t \in \mathbb{C}$，有

$$W(\lambda, t) = \frac{\prod_{i \in D(\lambda)}(1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\lambda(i)}}{\prod_{i \in D(\lambda)}(1 - tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}},$$

其中右侧有理函数的表达式已化简。

证明。 利用命题 5.9，我们得到

$$W(\lambda,t)=\frac{(1-t^{-1}T)^{m_\lambda(0)+f}(1-tT)^f\prod_{i\in D(\lambda)\setminus\{0\}}(1-t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\lambda(i)}}{(1-tT)^{m_\lambda(0)+f}(1-t^{-1}T)^f\prod_{i\in D(\lambda)\setminus\{0\}}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}}=$$
$$=\frac{(1-t^{-1}T)^{m_\lambda(0)}\prod_{i\in D(\lambda)\setminus\{0\}}(1-t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\lambda(i)}}{(1-tT)^{m_\lambda(0)}\prod_{i\in D(\lambda)\setminus\{0\}}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}}=$$
$$=\frac{\prod_{i\in D(\lambda)}(1-t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\lambda(i)}}{\prod_{i\in D(\lambda)}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}}.$$

该表达式已化简，因为 $t\neq\pm q^a$ 对于 $a\in\mathbb{Z}$，就像我们假设存在某个 $i,j\in D(\lambda)$，使得 $tq^{2i}=t^{-1}q^{2j}$，这将推出 $t=\pm q^a$，对于 $a\in\mathbb{Z}$。此外，由于 q 不是单位根，对于任意 $i\neq j$，我们有 $tq^{2i}\neq tq^{2j}$。□

现在我们已经了解初等轮多项式的作用，可以开始证明的主要部分了。对于 $p\in WL[x_1,\dots,x_n]$，我们将记号 $p(c_\lambda(1)\dots,c_\lambda(n))$ 简化为 $p(\lambda)$。

命题 5.11。 设 (λ,f)、$(\mu,f')\in\Lambda_n$ 满足 $\lambda\neq\mu$。存在 $p\in WL[x_1,\dots,x_n]$，使得 $p(\lambda)\neq p(\mu)$。

证明。 我们证明逆否命题。也就是说，假设对于所有 $p\in WL[x_1,\dots,x_n]$，都有$p(\lambda)=p(\mu)$，我们证明 $\lambda=\mu$。由于这对所有此类多项式都成立，特别地，对所有初等轮多项式 w_k 也成立，因此有 $W(\lambda,t)=W(\mu,t)$。利用命题 5.10 中得到的约化表达式，我们得到

$$\frac{\prod_{i\in D(\lambda)}(1-t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\lambda(i)}}{\prod_{i\in D(\lambda)}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}}==\frac{\prod_{i\in D(\mu)}(1-t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\mu(i)}}{\prod_{i\in D(\mu)}(1-tq^{2i}T)^{m_\mu(i)}}$$

其中两个有理函数都是约化的。这意味着我们可以令分子和分母分别相等。令分母相等可得

$$\prod_{i\in D(\lambda)}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}=\prod_{i\in D(\mu)}(1-tq^{2i}T)^{m_\mu(i)}$$

其中两个多项式都已分解为不可约因子。我们先证明 $D(\lambda)=D(\mu)$。不失一般性，假设存在 $x\in D(\lambda)\setminus D(\mu)$。这将意味着

$$(1-tq^{2x}T)\mid\prod_{i\in D(\lambda)}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)},$$

而

$$(1-tq^{2x}T)\nmid\prod_{i\in D(\mu)}(1-tq^{2i}T)^{m_\mu(i)}$$

从而得到矛盾。因此 $D(\lambda)=D(\mu)$。于是显然，对于所有 $i\in D(\lambda)=D(\mu)$，都有

$$(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}=(1-tq^{2i}T)^{m_\mu(i)},$$

进而意味着，对于所有 $i\in D(\lambda)=D(\mu)$，$m_\lambda(i)=m_\mu(i)$。这意味着分拆λ，μ 具有相同的对角线，且对应于 $i\in D(\lambda)=D(\mu)$ 的对角线具有相同的

长度。由于对角线及其长度足以完全确定分拆形状，这意味着 $\lambda = \mu$，因此 $f = f'$ 也成立。□

剩下唯一要做的就是证明一个点分离论证。注意，以下内容是对 [JK20] 中所用点分离引理的直接推广。事实上，他们的证明无需任何修改即可适用。

引理 5.12。设 A 是 $\mathbb{C}$ 的一个子代数。进一步，假设我们有 $m \in \mathbb{N}$ 元组

$$(c_{1,1}, \dots c_{1,n}), \dots, (c_{m,1}, \dots, c_{m,n}) \in (\mathbb{C}^\times)^n.$$

若对每个 $1 \leq i \neq j \leq m$，都存在 $p \in A$ 使得 $p(i) \neq p(j)$，其中 $p(i) = p(c_{i,1}, \dots, c_{i,n})$，则存在一个族 $p_1, \dots, p_m \in A$ 使得

$$\det \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(2) & \dots & p_1(m) \\ p_2(1) & p_2(2) & \dots & p_2(m) \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ p_m(1) & p_m(2) & \dots & p_m(m) \end{bmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

证明。我们对 m 使用归纳法证明。令 $(c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$。任意非零常数多项式 $p \in A$ 都满足 $p(c_1, \dots, c_n) \neq 0$。（非零常数多项式属于 A，因为它是一个 $\mathbb{C}$ 子代数。）对于归纳步骤，假设 $m > 1$，且我们的假设对 $1 \leq i \leq m-1$ 成立。考虑前几个 $m-1$ 元组。根据我们的假设，对任意 $1 \leq i \neq j \leq m-1$，都存在 $p \in A$ 使得 $p(i) \neq p(j)$。根据归纳假设，存在一个族 $p_1, \dots, p_{m-1} \in A$，使得

$$\det \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(2) & \dots & p_1(m-1) \\ p_2(1) & p_2(2) & \dots & p_2(m-1) \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ p_{m-1}(1) & p_{m-1}(2) & \dots & p_{m-1}(m-1) \end{bmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

通过初等行变换，我们可以将上述矩阵化为上三角幺幂形式，因此可以进一步假设

$$\begin{aligned} p_i(j) &= 0, \quad 1 \leq j < i \leq m-1 \\ p_i(i) &= 1, \quad 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

特别地，我们可以假设上述矩阵的行列式等于 1。

假设对于每个 $p \in A$，

$$d(p) := \det \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(2) & \dots & p_1(m) \\ p_2(1) & p_2(2) & \dots & p_2(m) \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ p(1) & p(2) & \dots & p(m) \end{bmatrix} \neq 0$$

按子式展开，并考虑到 (5)，得到

$$p(n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i p(i) \tag{6}$$

对于某个 $a_i \in \mathbb{C}$，它与 p 无关。由于 A 是一个子代数，我们有 $p_{n-1}p \in A$，因此

$$p_{n-1}p(n) = a_1 p_{n-1}p(1) + \ldots + a_{n-1}p_{n-1}p(n-1) = a_{n-1}p(n-1),$$

因为对于所有 $i < n-1$，都有 $p_{n-1}(i) = 0$，且 $p_{n-1}(n-1) = 1$。现在假设 $p_{n-1}(n) \neq 0$。于是我们可以求解 $p(n)$，得到

$$p(n) = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}(n)} p(n-1), \quad \forall p \in A.$$

选取一个非零常数多项式 $p \in A$，可得 $\frac{a_{n-1}}{p_{n-1}(n)}() = 1$，从而对每个 $p \in A$，都有 $p(n) = p(n-1)$。这与 $i = n-1$，$j = n$ 的分离假设矛盾。因此 $p_{n-1}(n) = 0$，从而对每个 $p \in A$，都有 $a_{n-1}p(n-1) = 0$。再次选取 p 非零常数，得到 $a_{n-1} = 0$。用 p_{n-1} 替换 p_j，重复上述论证，可得对每个 $j = 1$，……，$n-1$，都有 $a_j = 0$。利用（6），得到

$$p(n) = 0, \quad \forall p \in A,$$

这显然矛盾。这意味着存在 $p \in A$，使得 $d(p) \neq 0$。 □

我们现在可以完成定理 5.3 的证明。

定理 *5.3* 的证明。对以下内容应用分离引理5.12

$$A = \{p \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]^{S_n} \ : \ p(x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n) = p(1, 1, \ldots, x_n)\}$$

and

$$(c_{i,1}, \ldots, c_{i,n}) = (c_\lambda(1), \ldots, c_\lambda(n))$$

对于 $m = |\Lambda_n| = \sum_{f=0}^{[\frac{n}{2}]} p(n-2f)$。这意味着存在一个多项式族

$$\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_n\} \subseteq A$$

使得矩阵

$$\big(p_\lambda(\mu)\big)_{\lambda,\mu \in \Lambda_n}$$

可逆，或者等价地说，该矩阵的行/列线性无关。假设

$$P = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} a_\lambda p_\lambda = 0,$$

其中 $a_\lambda \in \mathbb{C}$。那么，在每个简单模 $L(\mu)$ 上，p_λ 的作用为 $p_\lambda(\mu)$，而 P 的作用为零。因此

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda p_\lambda(\mu) = 0.$$

但矩阵 $\big(p_\lambda(\mu)\big)_{\lambda,\ \mu \in \Lambda_n}$ 的列线性无关，从而对所有$\lambda \in \Lambda_n$都有 $a_\lambda = 0$。因此，集合 $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_n\} \subseteq WL[x_1, \ldots, x_n]$ 线性无关，这证明了

$$\dim_{\mathbb{C}} WL[x_1, \ldots, x_n] \geq \dim_{\mathbb{C}} Z(B_n(q,t)).$$

因此，我们必有 $Z(B_n(q,\ t)) = WL[x_1, \ldots, x_n]$，证明至此完成。 □

我们给出定理 5.3 的一些直接推论。

推论 5.13。 设 q、 $t \in \mathbb{C}$ 为一般的。由所有中心 $Z(i) = Z(B_i(q,t))$ 生成的 ***Gelfand-Zeitlin*** 代数 $GZ(n) = \langle Z(1) \ldots, Z(n) \rangle$是由 ***Jucys-Murphy*** 元及其逆元 $x_1 = t$、 $x_{i+1} = s_i x_i s_i$生成的 $B_n(q,t)$ 的极大交换子代数，其中 $i = 1, \ldots, n-1$。用公式表示，

$$GZ(n) = \langle x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1} \rangle.$$

证明。 $GZ(n)$由形如 $f_1 \cdots f_n$的元素生成，其中 $f_i \in Z(i)$。由于这些元素可表示为 JM 元的劳朗多项式，结论即得。□

特别地， 现在，我们可以将每个 $B_n(q,t)$的单模 $L(\lambda)$的 Murphy 基识别为 GZ 基。

推论 5.14. 对于任意 $(\lambda, f) \in \Lambda_n$， $L(\lambda)$ 的 ***Murphy*** 基（相差一个标量）与 $L(\lambda)$的 ***GZ*** 基相同。

注记 5.15. 由推论 5.14 可知，我们得到了一个类似 Okounkov-Vershik 的方法来研究 $B_n(q,t)$ 的表示，参见 [OV96]。由于盖尔范德-蔡特林基元素由相应的特征值唯一确定（相差一个标量），我们可以通过 $B_{n-1}(q,t)$ 的简单模，以及最后一个 JM 元素在基元素上的作用，构造 $B_n(q,t)$ 的任意简单模。

我们注意到，类似的方法早已用于有限维表示[IO11]„ 但作者未对一些主要结论给出证明。

为明确说明注记 5.15，由于 $x_n \in C(B_n(q,t)\ B_{n-1}(q,t))$，对于任意简单模 $L(\lambda)$，最后一个 JM 元素在其到 $B_{n-1}(q,t)$ 的限制上仍然作用为，因为

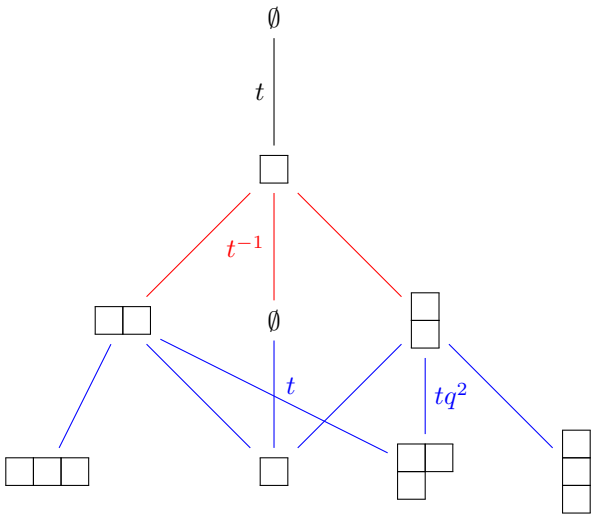
$$x_n \in \mathrm{End}_{B_{n-1}(q,t)} \left(\mathrm{Res}^{B_n(q,t)}_{B_{n-1}(q,t)} L(\lambda) \right).$$

特别地，将 $L(\lambda)$ 视为 $B_{n-1}(\{v6,\ t)$ 模时，其分解中的直和项 $L(\lambda \pm \square)$ 是 x_n 的特征空间，对应于从 λ 到 $\lambda \pm \square$ 时添加或移除的方格的 $(q,\ t)$-内容。

为清晰起见，我们根据这些信息更新分支图的前三层。例如，作为单模 $B_3(\{v4,\ t)$ 的 $L(\square)$ 的基元素，对应于路径

$$T = \left(\emptyset \to \square \to \begin{array}{cc} \square & \\ \square & \end{array} \to \square \right)$$

完全由向量（$t,\ tq^{-2},\ t^{-1}q^2$）确定。



推论5.16。 对于 q、 $t \in \mathbb{C}$ 一般的情形，结论成立

$$WL[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}[e_n^{\pm 1}][w_1, w_2, \ldots] = \mathbb{C}[e_n^{\pm 1}][p_1^-, p_2^-, \ldots].$$

6. 非一般参数。

本节讨论参数 $q, t \in \mathbb{C}$ 选取为非一般参数的情形。特别地，我们明确计算出对于哪些半单性参数，BMW代数的中心恰好是 JM元中的 Wheel Laurent多项式代数。我们回顾 Rui 和 Si 的一个定理，该定理给出了 $B_n(q,t)$ 在 $\mathbb{C}$ 上半单的充要条件。他们的结果适用于任意域 $\Bbbk$，其方法是计算 $B_n(q,t)$ 的 Gram行列式。

定理6。 **1.** [RS09] 设 $B_n(q,t)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的 *Birman-Murakami-Wenzl*代数，其中 $q, t \in \mathbb{C}$ 任取。

(1) 假设 $t \notin \{q^{-1}, -q\}$。*(a)* 若 $n \geq 3$，则 $B_n(q,t)$ 半单当且仅当 $o(q^2) > n$ ($o(q^2)$ 是 q^2 的阶) 且 $t \notin \cup_{k=3}^{n} \{\pm q^{\mp(2k-3)}, \pm q^{3-k}, \pm q^{k-3}\}$。*(b)* $B_2(q,t)$ 半单当且仅当 $o(q^2) > 2$。*(c)* $B_1(q,t)$ 总是半单的。

(2) 假设 $t \in \{q^{-1}, -q\}$。

(a) $B_n(q,t)$ 不是半单的，只要 n 为偶数或奇数且满足 $n \geq 7$。*(b)* $B_1(q,t)$ 总是半单的。*(c)* $B_3(q,t)$ 是半单的，当且仅当 $o(q^2) > 3$ 且 $q^4 + 1 \neq 0$。*(d)* $B_5(q,t)$ 是半单的，当且仅当 $o(q^2) > 5$、 $q^6 + 1 \neq 0$和 $q^8 + 1 \neq 0$。

就本文而言， $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根，因为下一个例子表明，当$q \in \mathbb{C}$是单位根时，中心可能严格大于 $WL[x_1, \ldots, x_n]$。
我们需要区分以下两种情况。

(1) $t = \pm q^{2a}$ 对于 $a \in \mathbb{Z}$。。
(2) $t = \pm q^{2a+1}$ 对于 $a \in \mathbb{Z}$。。

我们还将进一步区分以下情况： t 是 q 的足够高次幂，以及它足够小但仍属于定理 6.1 的半单性参数范围。我们给出一个例子，其中中心不是 $WL[x_1, \ldots, x_n]$，即使 $B_n(q,\ t)$是半单的。也就是说，对于BMW代数，存在这样的参数：即使在半单范围内，Jucys-Murphy元也未能提供关于 $B_n(q,\ t)$ 的表示论的全部信息。

本节的主要定理如下

定理 6.2。 对于 $q \in \mathbb{C}$ 一般且 $t \in \mathbb{C}$ 一般的情形，或者 $t = \pm q^{2a}$且 $a \in \mathbb{Z}$，或者 $t = \pm q^{2a-1}$，对于满足 $B_n(q,t)$ 为半单的$|a| \geq n$，有

$$Z(B_n(q,t)) = WL[x_1, \ldots, x_n]$$

以及

$$GZ(n) = \langle x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1} \rangle.$$

例 6.3。考虑 $n = 2$ 和 $t = -q^{-1}$，其中 $q \in \mathbb{C}$ 不是单位根。类似的情形是 t 如上所述，且 $o(q^2) = 3 > 2$。此时 $B_2(q,t)$ 是交换的，根据定理 6.1，它也是半单的。它有 3 个由分拆 (2) $\emptyset$、 (1, 1) 标记的一维简单模，其中唯一的生成元 s 分别通过标量 q、$t^{-1} = -q$、$-q^{-1}$ 作用（在 $o(q^2) = 3$ 的情形下，我们有 $q^3 = -1$，因此这些标量为 q、 $t^{-1} = -q$、 $-q^{-1} = -q^{-3}q^2 = q^2$）。于是我们看到， $x_2 = ts_1^2$ 分别通过标量 $tq^2 = -q$、$tt^{-2} = t^{-1} = -q$、$tq^{-2} = -q^{-3}$（分别为 $-q$、$-q$、-1）作用，因此 Jucys-Murphy 元 $x_1 = t$、 $x_2 = ts_1^2$ 的作用无法区分简单模 $L((2))$ 和 $L(\emptyset)$。这又意味着中心子代数 $WL[x_1, x_2]$ 在这两个模上的作用相同，而这两个简单模并不同构。特别地，对于这两个模，我们有 $W((2)) = W(\emptyset) = 1$ 和 $e_2^{\pm 1}((2)) = e_2^{\pm 1}(\emptyset) = 1$，其中 $W(\lambda, t)$ 在 (3) 中定义，而 $e_2^{\pm 1} = (x_1 x_2)^{\pm 1}$ 是在 Jucys-Murphy 元处取值的第二个初等对称多项式，它作用在简单模 $L((2))$ 和 $L(\emptyset)$ 上。特别地，命题 5.11 的证明失效。在这种情况下，$\dim_{\mathbb{C}} WL[x_1, x_2] = 2 < 3 = \dim_{\mathbb{C}} B_2(q,t) = \dim_{\mathbb{C}} Z(B_2(q,t))$。

可以计算得出，在这种情况下， $e \notin WL[x_1, x_2]$，而这正是区分单模的若干可能的“缺失”中心元之一。原因在于，单模 $L((2))$ 和 $L((1,\ 1))$ 是 $H_2(q)$ 的简单模的拉回，因此 e 在它们上的作用为零，而我们很容易看出，它在 $L((\emptyset))$ 上的作用是非零标量 2。

6.1. **高次幂情形**。 本节讨论足够高次幂的情形。令 $t = \pm q^{2a}$ 或 $t = \pm q^{2a-1}$ 为 q 的偶次幂，且不属于定理 6.1 中描述的非半单参数。此时代数 $B_n(q,t)$ 是半单的，其简单模仍由 Λ_n 标记，特别地，引理 3.21 仍然成立。我们要证明

定理 5.3 的证明无需任何修改，依然成立。对于一个分拆 $\lambda \vdash n-2f$，考虑有理函数 $W(\lambda,t)$。我们证明，命题 5.10 中给出的表达式仍然是 $W(\lambda,t)$ 的一个约化表达式。

引理 6.4. 对于 $t=\pm q^{2a}$，或 $t=\pm q^{2a-1}$，其中 $|a|\geq n$，且 $q\in\mathbb{C}$ 不是单位根，有

$$W(\lambda,t)=\frac{\prod_{i\in D(\lambda)}(1-t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\lambda(i)}}{\prod_{i\in D(\lambda)}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}},$$

其中右侧有理函数的表达式已约简。

证明。我们只需证明分子中的所有因子互不相同，且它们均不与分母中的任何因子相同。首先，假设存在 $i,j\in D(\lambda)=\{-h(\lambda)+1,\ldots,w(\lambda)-1\}$，使得

$$tq^{2i}=tq^{2j}.$$

由于 t 非零，这将意味着 $q^{2(i-j)}=1$。由于 q 不是单位根，我们有 $i=j$。因此，$W(\lambda,t)$的分子和分母均已约简。接下来只需证明分子中的因子均不与分母中的任何因子相同。假设 $t=\pm q^{2a}$，并且存在 $i,j\in D(\lambda)$，使得

$$tq^{2i}=t^{-1}q^{-2j}.$$

等价地，由于 q 不是单位根，我们得到 $2a=-i-j$。对于分拆 $\lambda\vdash n-2f$ 的任意两个内容 i、j，我们有 $-i-j$ 的最大值等于 $2n-2$；对于分拆$\lambda=(1^n)\vdash n$，因此 $2a\leq 2n-2$ 或 $a\leq n-1$，这与假设 $a\geq n$矛盾。对于情形 $a\leq -n$，以类似方式处理：取两个内容的最小值，使其等于 $2-2n$，于是 $a\geq 1-n$，这与 $a\leq -n$矛盾。总而言之，若 $|a|\geq n$，则 $W(\lambda、t)$的表达式是约化的。现在假设 $t=\pm q^{2a-1}$。则 $2a-1=-i-j$。这意味着i、j 的奇偶性不同。同样，通过考察 $-i-j$的最大值和最小值，我们发现 $2a-1=-i-j\leq n-1+n-2=2n-3$，或者等价地 $a\leq n-1$，这构成矛盾；或者$2a-1=-i-j\geq -(2n-3)$，或者等价地 $a\geq 2-n$，这与 $a\leq -n$矛盾。由此得证。□

注 6.5. 对于奇数次幂 $t=\pm q^{2a-1}$，上述证明对 $a=1-n$也同样成立，无需任何改动；但为了使陈述具有对称性，我们选择了限制 $|a|\geq n$。

由引理 6.4 可知，命题 5.11、引理 5.12 和定理 5.3 的证明均无需修改即可成立。因此，我们可以陈述

The理 6.6. 如果 $q\in\mathbb{C}$ 不是单位根，且 $t=\pm q^{2a}$ 或 $t=\pm q^{2a-1}$ 对于 $|a|\geq n$，则 n

$$Z(B_n(q,t))=WL[x_1,\ldots,x_n].$$

推论 6.7。 对于定理 *6.6* 中的 q、$t\in\mathbb{C}$，有

$$GZ(n)=\langle x_1^{\pm 1},\ldots,x_n^{\pm 1}\rangle.$$

例6.8。设 $n=2$ 和 $t=1=q^0$。那么 $B_2(q,1)$ 仍然是半单的，并且有 3 个一维简单模。我们仍然要说明，即使表达式 $W(\lambda,t)$ 不是约化的，它们仍能完全确定分拆。在这种情况下， $t=t^{-1}$，因此

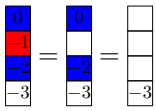
$$W(\emptyset)=1,\quad W((2))=\frac{1-q^{-2}T}{1-q^2T},\quad W((1,1))=\frac{1-q^2T}{1-q^{-2}T}.$$

例6.9。为说明上述例子并无特殊之处，取 $n=4$ 和 $t=q^2$。由定理 6.1，我们有 $B_4(q,q^2)$是半单的。注意，在这种情况下，为了简化 $W(\lambda,t)$，其中 $\lambda\vdash 4$、2、0，我们需要找到(q,t)-内容的配对，使它们相乘等于1，等价地，$q^2q^{2i}=q^{-2}q^{-2j}$。对于 i、$j\in\{-3,\dots,3\}$，这些配对出现在 $i=0$、$j=-2$，以及$i=j=-1$、 $i=-3$、 $j=1$、 $i=1$、 $j=-3$的情形中。特别地，我们注意到，一个分拆若要出现配对，就必须在 -1 对角线上有一个方格。若没有，则不会出现配对，因此 $W(\lambda,t)$的表达式仍为约化形式。对于那些出现对角线 -1的分拆，它们在 -1 对角线上至多有一个方格；这个方格与自身配对，因此项$\frac{1-t^{-1}q^2T}{1-tq^{-2}T}$从 $W(\lambda,t)$中删去。显然，大小小于或等于4的分拆不会出现配对$(-3,1)$。

总而言之，对于在 -1 对角线上没有方格的分拆， $W(\lambda,t)$仍然是约化的；而对于能够看到 -1 对角线的方格，我们有 $m_\lambda(-1)=1$ ，并且需要删除 $W(\lambda,t)$中对应于 tq^{-2} 的项，以及由 λ看到的配对（$-2,0$）或（$-3,-1$）。为了将其转化为关于杨图的组合计算，我们给内容之积为 1 的对角线涂上相同的颜色，然后将它们从表达式中删除。剩下的、没有任何可能配对的形状给出了 $W(\lambda,t)$的约化表达式。下面我们给出每个 $\lambda\vdash 4$,2,0对应的 $W(\lambda,t)$的约化形式，并说明如何从 $\lambda=(1^4)$的杨图计算中得到约化形式。

$$\begin{aligned}
&W((\emptyset))=1\\
&W((2))=\frac{(1-q^{-2}T)(1-q^{-4}T)}{(1-q^2T)(1-q^4T)},\quad W((1,1))=\frac{(1-q^{-2}T)}{(1-q^2T)},\\
&W((4))=\frac{\prod_{i=0}^{3}(1-q^{-2(i+1)}T)}{\prod_{i=0}^{3}(1-q^{2(i+1)}T)},\quad W((1^4))=\frac{(1-q^4T)}{(1-q^{-4}T)},\\
&W((2,1,1))=\frac{(1-q^{-4}T)}{(1-q^4T)},\quad W((2,2))=\frac{(1-q^{-2}T)^2(1-q^{-4}T)}{(1-q^2T)^2(1-q4T)},\\
&W((3,1))=\frac{(1-q^{-2}T)(1-q^{-4}T)(1-q^{-6}T)}{(1-q^2T)(1-q^4T)(1-q^6T)},
\end{aligned}$$

对于 $W((1^4))$ 的图示计算



这意味着，在 $W((1^4))$ 中唯一保留下来的项是对应于 tq^{-6} 的项，其重数为 $m_{(1^4)}(-3) = 1$。显然，这些表达式能够区分简单模，因此

$$Z(B_4(q,q^2)) = WL[x_1,x_2,x_3,x_4].$$

为了完成 $B_4(q,\ t)$ 的情形，我们建议读者采用例6.9中描述的方法来证明

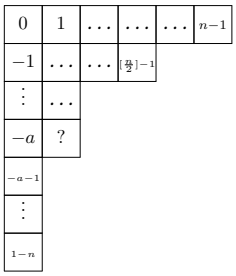
$$Z(B_4(q,q^4)) = WL[x_1,x_2,x_3,x_4].$$

6.2. 的小偶次幂 q。本小节讨论 $t = \pm q^{2a}$ 的情形，其中 $a \in \{1-n,\dots,n-1\}$。注意，这是分拆 $\lambda \vdash n-2f$ 的所有可能内容组成的集合，对于$f = 0,$ ……，$[\frac{n}{2}]$。

为此，我们实际上将解决 $a \in \{0,\dots,n-1\}$ 的情形，因为负幂的证明只是本节所用组合学的反映。也就是说，可以将 λ 替换为其共轭分拆 λ^t，从而得到负幂的结果。因此，假设 $0 \le a \le n$ 且 $n \ge 3$，因为我们已在上一节处理过 $n = 2$ 的情形。在这种情况下，为了使 $B_n(q,\ q^{2a})$ 半单，我们需要 $2a > n-3$，或者等价地，$2a \ge n-2$。因此，我们需要处理这些情形 $a \in \{[\frac{n}{2}]-1,\dots,n-1\}$。

定义6.10. 对于分拆 $\lambda \vdash n-2f$ 和 $i,j \in D(\lambda)$，如果对角线 i,j 是（q,t）配对的，则称之为此。等价地，这意味着 $tq^{2i} = (tq^{2j})^{-1}$。

对于任意 $f = 0,\dots,[\frac{n}{2}]$ 和 $\lambda \vdash n-2f$，其杨图包含在下方所示分拆（$n,[\frac{n}{2}],[\frac{n}{3}],\dots,[\frac{n}{n}]$）的杨图内。



由于 $a \ge [\frac{n}{2}]-1$，我们知道 $-a$ 对角线将在上述图示的 $[_{[\frac{n}{2}]-1}^{\ n}] = 2$ 部分或更低处相交。问号表示，如果 $a = [\frac{n}{2}]-1$，那么在分拆中恰好有一个方格可以放在它旁边的 $\lambda \vdash n-2f$ 处，但在其后的每条对角线上我们都只有 1 个方格。

特别地，我们注意到以下事实。方格内容为 $-a$ 的方格在每个分拆 $\lambda \vdash n-2f$中至多出现一次。此外，对于选定的 a，我们看到，成（$q,\ t$）配对的对角线为（$-a,\ -a$），以及所有形如（$-a-i,\ -a+i$）的配对，其中 $i = 1,$ ……，$n-a-1$。注意，尽管这个较大的分拆能看到出现在第一列之外的配对，分拆 $\lambda \vdash n-2f$ 只能看到第一列中的配对。这是因为，如果一个分拆能够看到 $-a$ 对角线，那么为了使其看到配对（$-2a-1,\ 1$），它至少需要是 $2a+3 \ge n+1$的分拆，这是荒谬的。

因此，对于分拆 $\lambda \vdash n-2f$，如果 $-a \notin D(\lambda)$，那么 λ中不存在配对。对于 $-a \in D(\lambda)$， λ所看到的配对为 $(-a-i,\ -a+i)$，其中 $i=1,\ \ldots\ldots,\ \min\{h(\lambda)-a-1,\ a\}$。此外，注意如果 λ 能够看到配对 $(-a-i,\ -a+i)$，那么 $m_\lambda(-a-i)=1=m_\lambda(-a+i)$。这是因为，如果你能够看到 $-a-i$ 超过一次，就意味着你至少是2$(a+i+1)+2=2a+4+2i \geq n+2(i+1)$ 的分拆；同样地，如果你能够同时看到 $-a+i$ 和$-a-i$，这意味着你至少是2$(a-i+1)+2+(a+i)-(a-i)=2a+4 \geq n+1$的分拆。

定义 6.11. 对于 $\lambda \vdash n-2f$，我们将 $P(\lambda)$ 记为包含所有满足 (q,t)-配对的 $i \in D(\lambda)$ 的集合。

例 6.12. 对于 $n=10,\quad a=4$ 和 $\lambda=(2,1^8)$，我们有

$$P(\lambda)=\{-4,-5,-3,-6,-2,-7,-1\}.$$

为了说明配对，我们绘出分拆的杨图，并将配对的对角线涂成相同的颜色。未着色的对角线没有 (q,t)-配对；如果某种颜色只出现一次，这意味着该对角线与自身 (q,t)-配对。



由上述讨论可知

引理 6.13. 对于 $a \geq n-2$和 $\lambda \vdash n-2f$，$W(\lambda,t)$ 的约化表达式为

$$W(\lambda,t)=\prod_{i \notin P(\lambda)} \frac{(1-t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\lambda(i)}}{(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}}.$$

例 6.14. 对于例 6.12，通过删除杨图中的所有带颜色配对，我们得 t

$$W((2,1^8))=\frac{(1-t^{-1}T)(1-t^{-1}q^{-2}T)}{(1-tT)(1-tq^2T)}.$$

现在我们可以证明

引理 6.15. 对于 $\lambda,\mu \in \Lambda_n$，有

$$W(\lambda,t)=W(\mu,t) \iff \lambda=\mu.$$

证明. 设 $W(\lambda,t)=W(\mu,t)$。如果 $-a\notin D(\lambda)$ 或 $-a\notin D(\mu)$，那么 $W(\lambda,t)$ 或 $W(\mu,t)$ 的表达式便完全确定了该分拆，因此无需证明。于是，设 $-a\in D(\lambda)\cap D(\mu)$。由于引理 6.13 中的表达式是约化的，我们得到

$$\prod_{i\notin P(\lambda)}(1-tq^{2i}T)^{m_\lambda(i)}=\prod_{i\notin P(\mu)}(1-tq^{2i}T)^{m_\mu(i)}$$

其中二者均为约化的。不失一般性，设 $(-a-i,-a+i)$ 是一个被 λ 看见、但未被 μ 看见的 (q,t)-对。那么，$(1-tq^{-a+i}T)$ 是右侧的一个因子，却不是左侧的因子，矛盾。这说明 $P(D(\lambda))=P(D(\mu))$。此外，根据第6.2节，对于所有这样的 i，我们得到 $D(\lambda)\setminus P(D(\lambda))=D(\mu)\setminus P(D(\lambda))$，且 $m_\lambda(i)=m_\mu(i)$。但于是，对于所有 $i\notin P(D(\lambda))=P(D(\mu))$，都有 $D(\lambda)=D(\mu)$ 和 $m_\lambda(i)=m_\mu(i)$；而对于 $i\in P(D(\lambda))=P(D(\mu))$，则有 $m_\lambda(i)=1=m_\mu(i)$。证明完毕。□

推论6.16。对于 $q\in\mathbb{C}$ 不是单位根且 $t=\pm q^{2a}$ 满足 $a\in\mathbb{Z}$ 使得 $B_n(q,t)$ 为半单的情形，则

$$Z(B_n(q,t))=WL[x_1,\dots,x_n].$$

此外，

$$GZ(n)=\langle x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}\rangle.$$

注6.17。对于 $t=-q^{2a}$，上述所有论证均可原样进行。当 $t=q^{2a}$ 且满足$a<3-n$时，将 λ 替换为 λ^t，上述所有论证仍然成立。

7. Small odd powers.

本节将证明，除 $B_3(q,q^{\pm1})$ 和 $B_3(q,-q)$ 外，其中 $q\in\mathbb{C}$ 满足 $o(q)=\infty$，当 $t=q^{2a-1}$ 且 $1\le a\le n-1$ 时，代数 $WL[x_1,\dots,x_n]$ 不能区分 $B_n(q,t)$ 的所有简单模。因此，对于小奇次幂，我们证明 $\dim_{\mathbb{C}}WL[x_1,\dots,x_n]<\dim_{\mathbb{C}}Z(B_n(q,t))$，其中 $t=q^{2a-1}$ 且 $1\le a\le n-1$。

容易计算可得，对于 $n=3$ 和 $t=q,-q,q^{-1}$，并且可见 $WL[x_1,x_2,x_3]$ 与之前一样能够区分简单模。类似地，对于 $n=2$ 和 $a=1$，可计算得 $W((1^2))=W(\emptyset)$，因此 $B_2(q,q)$ 的中心不等于 $WL[x_1,x_2]$。

现在假设 $t=q^{2a-1}$，其中 $1\le a\le n-1$ 和 $n\ge3$。

引理 7.1。对于 $t=q^{2a-1}$，其中 $1\le a\le n-1$ 和 $n\ge3$，以下结论成立。

(1) 若 $(n,a)=(3,1)$，则 $Z(B_3(q,q))=WL[x_1,x_2,x_3]$。*(2)* 若 $(n,a)\neq(3,1)$，则存在分拆 λ、μ，使得 $\lambda\neq\mu$ 且 $W(\lambda,t)=W(\mu,t)$。换言之，$\dim_{\mathbb{C}}WL[x_1,\dots,x_n]<\dim_{\mathbb{C}}Z(B_n(q,q^{2a-1}))$。

证明。令 $n=3,a=2$。那么很容易看出 $W((1^3))=W((1))$。现在假设 $n\ge4$ 且$a=1$。那么

$$W((n-2,2))=W((n-2)).$$

如果 $a \geq 2$，则可以观察到

$$W((n-a,1^a)) = W((n-a,1^{a-2})).$$

□

还可以计算并发现，对于 $t = q^{-1}, -q$，有 $Z(B_3(q,t)) = WL[x_1,x_2,x_3]$，但对于 $B_5(q,t)$ 则不成立。

注 7.2. 因此，我们已经涵盖了所有满足以下条件的情形：当 q 不是单位根时，中心等于将轮形Laurent多项式在Jucys-Murphy元素处取值所得的代数。

8. An equivalent condition for blocks in even case

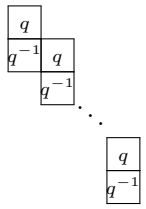
本节将探讨在非半单情形下，中心子代数 $WL[x_1,\dots,x_n]$是否足以区分 $B_n(q,t)$ 的各个块。特别地，我们将证明，当 $a \in \mathbb{Z}$ 和 q 为一般参数时，$t = \pm q^{2a}$满足这一点。

8.1. Birman-Murakami-Wenzl代数的块。

Rui 和 Si 在 [RS11] 中找到了组合条件，用以描述对于 $\lambda, \mu \in \Lambda_n$，胞腔模 $\Delta(\lambda)$ 和 $\Delta(\mu)$ 何时属于同一个块。我们回顾陈述他们结果所需的组合概念。

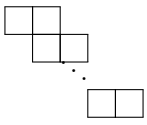
定义 8.1 节。 [RS11] 设 $\lambda \vdash n$ 和 $\mu \vdash n-2f$。称 λ 在 $\mathbb{C}$上是（f，μ）-可容许的，if

(1) $\mu \subset \lambda$。(2) λ/μ中的所有对角线都存在配对。特别地，对于每个 $i \in D(\lambda/\mu)$，都存在 $j \in D(\lambda/\mu)$，使得对于任意这样的配对，$c_{\lambda/\mu}(i)c_{\lambda/\mu}(j) = 1$ 且 $m_{\lambda/\mu}(i) = m_{\lambda/\mu}(j)$。(3) 如果 $i \in D(\lambda/\mu)$ 满足 $c_{\lambda/\mu}(i) = q$，并且对角线 $(i,\ i-1)$ 在 λ/μ 中是（q，t）-配对的，那么$m_{\lambda/\mu}(i) = m_{\lambda/\mu}(i-1)$ 是偶数。在杨图中，每当我们遇到



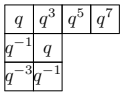
在 λ/μ 中，列数为偶数。

(4) 如果 $i \in D(\lambda/\mu)$ 满足 $c_{\lambda/\mu}(i) = -q^{-1}$，且对角线 $(i, i+1)$ 在 λ/μ 中是 (q,t)-配对的，那么 $m_{\lambda/\mu}(i) = m_{\lambda/\mu}(i+1)$ 为偶数。类似地，在杨图中，如果我们遇到



在 λ/μ 中，若左上方方格的 (q,t)-内容为 $-q^{-1}$，则此配置中的行数为偶数。

例 8.2。 设 $t=q,\ n=8$ 和 $\lambda=(4,2,2)\ \ \mu=(4,1,1)$。显然，条件 (1) 得到满足。现在考察条件 (2)，我们绘出 λ 的杨图，并在每条对角线上标出其 (q,t)-内容，以便看出在条件 (3) 的情形下，λ/μ 中有两条对角线，因为对角线 0 的 (q,t)-内容等于 q，并且与 -1 配对。



那么 λ/μ 的形状为



为了使 λ 成为 $(1,\mu)$-可容许的，我们需要 $m_{\lambda/\mu}(0)=m_{\lambda/\mu}(-1)$ 为偶数，但事实并非如此，这证明 $(4,2,2)$ 不是 $(1,(4,1,1))$-可容许的。

例 8.3。 我们再举一个可容许分拆对的例子。令 $t=q^2,\ n=8$ 和 $\lambda=(4,2,2)\ \ \mu=(4)$。同样，$\mu\subset\lambda$ 与斜形 λ/μ 满足对角线 $(-1,-1)$ 和 $(-2,0)$ 成对。



因此，条件 (2) 得到满足。此外，由于没有对角线的 (q,t)-内容等于 q 或 $-q^{-1}$，条件 (3)、(4) 无需检查。因此，λ 是 $(2,\mu)$-可容许的。

定义 8.4。 [RS11] 对于 $(\lambda,f),(\mu,l)\in\Lambda_n$，如果 λ 是 $(l_1,\lambda\cap\mu)$-可容许的，且 μ 是 $(l_2,\lambda\cap\mu)$-可容许的，其中 $2l_1=|\lambda|-|\lambda\cap\mu|,\ 2l_2=|\mu|-|\lambda\cap\mu|$，而 $\lambda\cap\mu$ 是由两个杨图的交集得到的分拆，则称 (λ,f) 与 (μ,l) 块等价，并记作 $(\lambda,f)\overset{b}{\sim}(\mu,l)$。用公式表示，$(\lambda\cap\mu)_i=\min\{\lambda_i,\mu_i\}$。

我们陈述 Rui 和 Si 关于复数域 $\mathbb{C}$ 上 Birman-Murakami-Wenzl代数的块的结果。关于胞腔代数的块的细节，参见 [GL96]。注意，他们的结果更一般地适用于任意特征不等于 2 的域$\mathbb{k}$。

定理 8.5. [RS11] 假设 $q,t\in\mathbb{C}$ 和 $o(q^2)>n$。那么，两个胞腔模 $\Delta(\lambda,f)\ \Delta(\mu,l)$ </style}属于同一个块，当且仅当 $(\lambda,f)\overset{b}{\sim}(\mu,l)$。

8.2. **块的分离**。 根据定理 8.5，与 (λ,f) 对应的 BMW代数 $B_n(q,t)$ 的块 $\in\Lambda_n$ 由满足定义 8.4 所述可容许条件的分拆 (μ,l) 组成。本节将说明，可以通过考察交换子代数 $WL[x_1,\dots,x_n]$ 在 $B_n(q,t)$ 上的作用，对这些块作出另一种描述。

$B_n(q,\ t)$ 的块将简单模同构类的集合 Λ_n 划分为若干子集。现在，对于中心元 $c\in Z(B_n(q,\ t))$，利用 Schur 引理可知，c 在任意简单模上都以一个标量作用。将此标量记为 $\chi_\lambda(c)$。这可提升为一个代数同态，称为对应于 λ 的中心特征，

$$\chi_\lambda:Z(B_n(q,t))\to\mathbb{C}.$$

众所周知，中心特征可以区分块，即对于分拆 λ，μ，当且仅当 $\lambda \overset{b}{\sim} \mu$ 时，$\chi_\lambda = \chi_\mu$ 成立。

尽管在非半单情形下，由于 Artin-Wedderburn 定理在非半单情形下并不适用，我们无法使用先前的方法证明中心等于 $WL[x_1, \dots, x_n]$，但我们将证明，这个中心子代数足够大，能够区分各块。与分划代数等其他情形相比，[Cre21], 我们提出以下猜想。

猜想 8.6. 对于一般的 $q \in \mathbb{C}$，且当 $t = q^{2a}$ 满足 $B_n(q,t)$ 非半单时，有

$$Z(B_n(q, q^{2a}) = WL[x_1, \dots, x_n].$$

注 8.7. 请注意，在计算非半单情形下的中心方面已有进展。具体而言，非半单墙壁布劳尔代数$B_{r,1}(\delta)$ 的中心已在[CDVP+24]中计算。

定理 8.8. 设 $q \in \mathbb{C}$ 为一般的，且 $t = \pm q^{2a}$，对于 $a \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2\}$，使得 $B_n(q,t)$ 不是半单的。那么对于两个胞腔模 $\Delta(\lambda, f)$ $\Delta(\mu, l)$，我们有 $(\lambda, f) \overset{b}{\sim} (\mu, l)$，当且仅当$W(\lambda, t) = W(\mu, t)$。

注 8.9. 当 $t = \pm q^{2a}$ 时，BMW代数的块的描述比 q 的奇数次幂的情形更简单，因为前一种情形中条件 (c)、(d) 永远不会出现。还请注意，在 $t = \pm q^{2a+1}$ 的情形下，定理 8.8 不成立。

例 8.10. 设 $n = 2$, $t = q^{-1}$。则 $B_2(q,t)$ 不是半单的。特别地，对于分拆 (2)，(0,1) 之间存在配对，因为它们对应的 (q,t)-内容为 q^{-1}, q。容易验证 $\emptyset \overset{b}{\sim} (2)$，因为满足定义 8.1 的条件 (d)，但 $W(\emptyset) = W((2)) = 1$。

我们首先必须证明，即使在非半单情形下，中心子代数 $WL[x_1, \dots, x_n]$ 在胞腔模的简单头上也以相同的常数作用。

在 [Xi00], Xi 对任意 $t \in \mathbb{C}$ 对 $B_n(q,t)$ 的简单模进行了分类。特别地，若 $t \notin \{-q, q^{-1}\}$，或者 $t \in \{-q, q^{-1}\}$ 且 n 为奇数，则简单模由 Λ_n 编号。若 $t \in \{-q, q^{-1}\}$ 且 n 为偶数，则简单模由 $\Lambda_n \setminus \{(\frac{n}{2}, \emptyset)\}$ 编号。也就是说，

$$L((\frac{n}{2}, \emptyset)) = \Delta((\frac{n}{2}, \emptyset))/\operatorname{rad}(\Delta((\frac{n}{2}, \emptyset)) = \{0\}.$$

由于本节中始终有 $t = q^{2a}$ 且 $o(q^2) > n$，简单模从不被平凡化。

对于 $\lambda \vdash n - 2f$，路径 $T^d(\lambda)$ 关于 Enyang 在 [Eny04] 中定义的 $T_{\mathrm{ud}}(\lambda)$ 上的偏序，以及 Rui 和 Si 在 [RS11] 中定义的偏序，都是极大的。结合胞腔模 $\Delta(\lambda)$的 Murphy 基定义可知，基元素 m_T 是 $x_1, \dots, x_n$ 的同时特征向量，且其特征值与之前相同。由于 $L(\lambda) = \Delta(\lambda)/\operatorname{rad}(\Delta(\lambda))$，我们得到

推论 8.11。 对于单模 $L(\lambda, f)$ 以及对应于路径 $T^d(\lambda)$的 $\Delta(\lambda, f)$ 的 *Murphy* 基元素 m_T，有

$$x_i(m_T + \mathrm{rad}(\Delta(\lambda, f))) = c_T(i)(m_T + \mathrm{rad}(\Delta(\lambda, f)))$$

对于所有 $i = 1, \ldots, n$。

这意味着， $WL[x_1, \ldots, x_n]$ 在任意简单模 $L(\lambda)$ 上的作用，都与半单情形中的标量相同。我们首先证明，$W(\lambda, t)$与嵌入 $\mu \subset \lambda$ 相容。

定义 8.12。对于 $\mu \subseteq \lambda$，我们令

$$W(\lambda/\mu, t) = \frac{\prod\limits_{i \in D(\lambda/\mu)} (1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}}{\prod\limits_{i \in D(\lambda/\mu)} (1 - tq^{2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}}$$

引理 8.13。 对于 $\mu \subseteq \lambda$，有

$$W(\lambda, t) = W(\mu, t)W(\lambda/\mu, t).$$

证明。 对于任意 $i \in D(\lambda)$，我们有 $m_\lambda(i) = m_\mu(i) + m_{\lambda/\mu}(i)$。现在计算

$$W(\lambda, t) = \prod_{i \in D(\lambda)} \frac{(1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\mu(i)}(1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}}{(1 - tq^{2i}T)^{m_\mu(i)}(1 - tq^{2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}} =$$

$$= \prod_{i \in D(\mu)} \frac{(1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_\mu(i)}}{(1 - tq^{2i}T)^{m_\mu(i)}} \prod_{i \in D(\lambda/\mu)} \frac{(1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}}{(1 - tq^{2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}} = W(\mu, t)W(\lambda/\mu, t),$$

其中，第一个乘积（分别地，第二个乘积）遍历 $i \in D(\mu)$（遍历 $D(\lambda/\mu)$），因为若 $i \notin D(\mu)$（$i \notin D(\lambda/\mu)$），则 $m_\mu(i) = 0$（分别地，$m_{\lambda/\mu}(i) = 0$）。□

引理 8.14。 对于 $\mu \subseteq \lambda$，我们有

$$W(\lambda, t) = W(\mu, t),$$

当且仅当所有 $i \in D(\lambda/\mu)$ 都是 (q, t)-配对。此外，对于所有此类配对 $i, j \in D(\lambda/\mu)$，我们有$m_{\lambda/\mu}(i) = m_{\lambda/\mu}(j)$。

证明。 我们有 $W(\lambda, t) = W(\mu, t)$ 当且仅当 $W(\lambda/\mu, t) = 1$。后者成立当且仅当

$$\frac{\prod\limits_{i \in D(\lambda/\mu)} (1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}}{\prod\limits_{i \in D(\lambda/\mu)} (1 - tq^{2i}T)^{m_{\lambda/\mu}(i)}} = 1. \tag{7}$$

由于当 q 不是单位根时，分子和分母均不可约，因此式（7）成立，当且仅当对所有 $i \in D(\lambda/\mu)$，存在 $j \in D(\lambda/\mu)$，使得 i, j 是(q, t)-配对的，并且$m_{\lambda/\mu}(i) = m_{\lambda/\mu}(j)$。□

引理8.15。对于(μ, l)，$(\lambda, f) \in \Lambda_n$

$$W(\lambda, t) = W(\mu, t)$$

当且仅当所有 $i \in D(\lambda/\lambda \cap \mu)$ 和 $i \in D(\mu/\lambda \cap \mu)$ 均为 (q, t)配对。

证明 .如果所有这类元素都是 (q, t)-配对的，那么 $W(\lambda/\lambda \cap \mu, t) = 1 = W(\mu/\lambda \cap \mu, t)$，因此 at

$$W(\lambda, t) = W(\lambda \cap \mu, t) = W(\mu, t).$$

反之，假设 $W(\lambda, t) = W(\mu, t)$。然后根据引理 8.13进行分解，我们有 $W(\lambda/\lambda \cap \mu, t) = W(\mu/\lambda \cap \mu, t)$。我们需要证明二者都等于 1。为此，假设 $W(\lambda/\lambda \cap \mu, t) \neq 1$。这意味着存在 $i \in D(\lambda/\lambda \cap \mu)$，使得 $m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(i) \neq 0$。通过将配对项与未配对项分开，化简 $W(\lambda/\lambda \cap \mu, t)$ 以得到一个约化表达式，我们得到 $W(\lambda/\lambda \cap \mu, t)$ 的约化表达式等于

$$W(\lambda/\lambda \cap \mu, t) = A \cdot B,$$

其中

$$A = \prod_{i \notin P(\lambda/\lambda \cap \mu)} \frac{(1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(i)}}{(1 - tq^{2i}T)^{m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(i)}}$$

and

$$B = \prod_{\substack{(i,j) \in D(\lambda/\lambda \cap \mu), \\ c_{\lambda/\lambda \cap \mu}(i) c_{\lambda/\lambda \cap \mu}(j) = 1, \\ m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(j) < m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(i)}} \frac{(1 - t^{-1}q^{-2i}T)^{m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(i) - m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(j)}}{(1 - tq^{2i}T)^{m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(i) - m_{\lambda/\lambda \cap \mu}(j)}}.$$

利用 $W(\lambda/\lambda \cap \mu, t) = W(\mu/\lambda \cap \mu, t)$，且这两个表达式均已约简并且不等于 1，我们可以令分母相等。由于已知存在 $i \in D(\lambda/\lambda \cap \mu)$，因此 $1 - tq^{2i}T$ 整除 $W(\mu/\lambda \cap \mu, t)$ 的分母，从而应当等于其中出现的某个不可约因子。但由于 q 不是单位根，这意味着 $i \in D(\mu/\lambda \cap \mu)$。这是不可能的，因为

$$D(\lambda/\lambda \cap \mu) \cap D(\mu/\lambda \cap \mu) = \emptyset.$$

因此，$W(\lambda/\lambda \cap \mu, t) = 1 = W(\mu/\lambda \cap \mu, t)$，这意味着

$$W(\lambda, t) = W(\lambda \cap \mu, t) = W(\mu, t).$$

由于 $\lambda \cap \mu \subset \mu, \lambda$，引理 8.14 即完成证明。 □

以下结果可由前面的引理直接得出。

定理 8.16. 对于一般的 $q \in \mathbb{C}$，若 $t = q^{2a}$ 满足 a，使得 $B_n(q, t)$ 不是半单的，且(λ, f)、$(\mu, l) \in \Lambda_n$成立$(\lambda, f) \overset{b}{\sim} (\mu, l)$，当且仅当 $W(\lambda, t) = W(\mu, t)$。

9. 本原幂等元的描述

本节将用 JM元和分支图来描述 $B_n(q,\ t)$ 中的本原幂等元，其中 $q,\ t \in \mathbb{C}$ 为一般的。

设 $L(\lambda)$ 是与分拆 $\lambda \in \Lambda_n$ 对应的单模。根据 Artin-Wedderburn 定理，有

$$B_n(q,t) \overset{\varphi}{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_n} \mathrm{End}(L(\lambda))$$

作为 $\mathbb{C}$ 上的代数。将 $B_n(q,t)$ 视为其自身在左正则作用下的模，并将 $\mathrm{End}(L(\lambda))$ 视为 $B_n(q,t)$ 上的模，作用由 $(a.f)(x) = a.(f(x))$ 给出，则 φ 是表示的一个同构。

由于 $L(\lambda)$ 有一个 GZ基 $\{v_T \mid T \in T^{ud}(\lambda)\}$，它完全由作用于此基的族 $x_1, \ldots, x_n$ 的相应特征值确定，我们很容易得到

$$\prod_{T \in T^{ud}(\lambda)} \prod_{i=1}^{n} (x_i - c_T(i)) = 0$$

作为作用于 $L(\lambda)$ 上的算子。也就是说，沿分支图追踪直至 λ 的全部信息，就能将 $L(\lambda)$ 完全从 $B_n(q,t)$ 的 Artin-Wedderburn 分解中消去。

这意味着，如果想要提取特定 $L(\mu)$ for $\mu \in \Lambda_n$ 的信息，可以考虑元素

$$a_\mu = \prod_{\mu \neq \lambda \in \Lambda_n} \prod_{T \in T^{ud}(\lambda)} \prod_{i=1}^{n} (x_i - c_T(i))$$

并立即看到，对于任意 $\lambda \neq \mu$，a_μ 在 $L(\lambda)$ 上的作用为零，因此

$$B_n(q,t)a_\mu \hookrightarrow \mathrm{End}(L(\mu)).$$

上述公式效率很低，而且仍未在 $\mathrm{End}(L(\mu))$ 作为 $B_n(q,t)$-模的分解中区分出一个直和项，$\mathrm{End}(L(\mu)) = L(\mu)^{\oplus \text{维数 } L(\mu)}$。因此，分支图中通往 μ 的每条路径都能够产生一个本原幂等元，分别对应于 $\mathrm{End}(L(\mu))$ 的每个直和项。

9.1. 本原幂等元。可以采用归纳法，并调整上一小节中所述的方法，从而得到与单模 $L(\lambda)$ 对应的本原幂等元 e_λ 的公式，如下所示。

取 $\lambda \in \Lambda_n$，并令 $T^d(\lambda) = (\lambda_1 = \emptyset \to \lambda_2 \to \ldots \to \lambda_n = \lambda)$ 为通往 λ 和 $\mu = \lambda_{n-1}$ 的醉汉路径。假设 $e_{\mu,n-1}$ 是相对于通往 μ 的醉汉路径、对应于 $e_{\mu,n-1}$ 的本原幂等元。注意，将最后一步截去后，通往 μ 的醉汉路径等于 $T^d(\lambda)$。现在，$e_{\mu,n-1}$ 包含了截至 μ 的分支图的全部信息，因此我们唯一需要的信息就是 x_n 在 GZ基上的作用。由于我们想区分一个直和项，于是我们向 $e_{\mu,n-1}$ 「添加」与所有 $\lambda \neq \nu \in \Lambda_n$ 及其所有路径对应的 x_n 信息，以及

除醉汉路径 $T^d(\lambda)$ 外，所有通往 λ 的路径的信息。换句话说，我们考虑元素

$$A = e_{\mu,n-1} \cdot \left(\prod_{\lambda \neq \nu \in \Lambda_n} \prod_{T \in T^{ud}(\nu)} \left(\frac{x_n - c_T(n)}{c_{T^d(\lambda)}(n) - c_T(n)} \right) \right) \prod_{\substack{S \in T^{ud}(\lambda), \\ S \neq T^d(\lambda)}} \left(\frac{x_n - c_S(n)}{c_{T^d(\lambda)}(n) - c_S(n)} \right).$$

对简单模 $L(\nu)$ 的任意 GZ 基元素施加 A，结果均为零，对任意 $\nu \neq \lambda$ 都成立，因为若 v_T是对应于 $T \in T^{ud}(\nu)$的基元素，则 A 含有因子 $x_n - c_T(n)$，因此

$$A.v_T = 0.$$

现在考虑对 $L(\lambda)$ 的作用。以任意方式排列 $T^{ud}(\lambda)$ 中的路径，使得对于任意$T \neq T^d(\lambda)$， $T^d(\lambda) < T$，从而得到 $L(\lambda)$ 的一个有序基。若 $T \neq T^d(\lambda)$，则 A同样含有因子

$$x_n - c_T(n),$$

因此 $A.v_T = 0$。唯一需要考虑的作用是对 $v_{T^d(\lambda)}$ 的作用，其中 A的因子作用如下。由于 $e_{\mu,\ n-1}$ 是对应于 μ 的本原幂等元，而通往μ 的醉汉路径是对应于 $T^d(\lambda)$ 中最后一步截断的路径，因此我们有

$$e_{\mu,n-1} v_{T^d(\lambda)} = v_{T^d(\lambda)}.$$

由于其他所有项显然都取值为 1，因此我们有

$$A.v_{T^d(\lambda)} = v_{T^d(\lambda)}.$$

这意味着， A 在阿廷–韦德伯恩同构下的像等于一个分块矩阵，其中对应于直和项 $\mathrm{End}(L(\lambda))$ 的块等于初等矩阵 E_{11}。由于 E_{11} 是 $\mathrm{End}(L(\lambda))$ 的本原幂等元，且投影到 $L(\lambda)$，我们得到

$$B_n(q,t)A \cong L(\lambda)$$

作为 $B_n(q,\ t)$ 表示，其中 $B_n(q,\ t)A$ 是由 A 生成的左理想。因此，我们可以表述为

定理9.1。设 $\lambda \in \Lambda_n$，$T^d(\lambda)$ 为通往 λ 的醉汉路径， μ 为路径 $T^d(\lambda)$ 中对应于第 $n-1$ 步的分拆。若 $e_{\mu,\ n-1}$ 是相对于 $T^d(\mu)$ 对应于 $L(\mu)$ 的本原幂等元，则

$$e_{\lambda,n} = e_{\mu,n-1} \cdot \left(\prod_{\lambda \neq \nu \in \Lambda_n} \prod_{T \in T^{ud}(\nu)} \left(\frac{x_n - c_T(n)}{c_{T^d(\lambda)}(n) - c_T(n)} \right) \right) \prod_{\substack{S \in T^{ud}(\lambda), \\ S \neq T^d(\lambda)}} \left(\frac{x_n - c_S(n)}{c_{T^d(\lambda)}(n) - c_S(n)} \right)$$

是相对于 $T^d(\lambda)$ 对应于单模 $L(\lambda)$ 的本原幂等元。

令 $e_{\emptyset,0} = 1$，上述陈述便给出了在一般情形下，以 $B_n(q,t)$ 中的 JM元为工具，对一组完备本原幂等元系的描述。

致谢。 我谨向我的导师 Thorsten Heidersdorf 博士致以谢意，感谢他与我进行宝贵的讨论，并为这篇稿件校对。他的反馈和建议对于使这一版本得以面世至关重要。

参考文献

[BB01] A. Beliakova 和 C. Blanchet, 《Birman-Murakami-Wenzl代数中幂等元的 skein 构造》, Math. Ann. **321** 2001 2, 347 373 1866492 ( ), 第 – 期。MR BCH G. Benkart、M. Chakrabarti、[+94] T. Halverson、R. Leduc、C. Lee 和 J. Stroomer, 《一般线性群的张量积表示及其与 Brauer代数的联系》, 《代数学杂志》166 (1994), 第 3 期, 529–567。[Bra37] R. Brauer, 《论与半单连续群相关的代数》, Ann. of Math. (2) 38 (1937), 第 4 期, 857–872。[BW89] J. S. Birman 和 H. Wenzl, 《辫子、纽结多项式与一种新代数》, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), 第 1 期, 249–273。[CDVP+24] E. Chavli、M. De Visscher、A. Parker、S. Salmon 和 U. Wilson, 《墙化 Brauer代数 B_r,1(δ) 的中心》, 2024。arXiv:2412.14716 [math.RT]。[Cre21] S. Creedon, 《分划代数的中心》, 《代数学杂志》570 (2021), 215–266。[DRV14] Z. Daugherty、A. Ram 和 R. Virk, 《仿射与退化仿射BMW代数：中心》, Osaka J. Math. 51 (2014), 第 1 期, 257–283。[EG17] J. Enyang 和 F. M. Goodman, 《具有 Jones基本构造的代数的胞腔基》, Algebr. Represent. Theory 20 (2017), 第 1 期, 71–121。[Eny04] J. Enyang, 《Brauer代数和 Birman–Murakami–Wenzl 代数的胞腔基》, 《代数学杂志》281 (2004), 第 2 期, 413–449。[GH06] F. M. Goodman 和 H. Hauschild, 《仿射 Birman–Wenzl–Murakami 代数及实心环面中的缠结》, Fund. Math. 190 (2006), 77–137。[GL96] J. J. Graham 和 G. I. Lehrer, 《胞腔代数》, 《数学发明》123 (1996), 第 1 期, 1–34。[HR05] T. Halverson 和 A. Ram, 《分划代数》, European J. Combin. 26 (2005), 第 6 期, 869–921。[Hu11] J. Hu, 《BMW代数、量子化坐标代数与类型 C Schur–Weyl 对偶》, Represent. Theory 15 (2011), 1–62。[IO11] A. P. Isaev 和 O. V. Ogievetsky, 《Birman–Murakami–Wenzl代数的 Jucys–Murphy元》, Phys. Part. Nucl. Lett. 8 (2011), 第 3 期, 234–243。[JK20] J. H. Jung 和 M. Kim, 《超对称多项式与墙化Brauer代数的中心》, Algebr. Represent. Theory 23 (2020), 第 5 期, 1945–1975。[Juc74] A.-A. A. Jucys, 《对称多项式与对称群环的中心》, Rep. Math. Phys. 5 (1974), 第 1 期, 107–112。[LZ15] G. I. Lehrer 和 R. B. Zhang, 《Brauer范畴与不变量理论》, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 17 (2015), 第 9 期, 2311–2351。[Mar94] P. Martin, 《非平面统计力学中的 Temperley–Lieb代数——分划代数构造》, J. Knot Theory Ramifications 3 (1994), 第 1 期, 51–82。[Mor10] H. R. Morton, 《Birman–Wenzl 代数的一个基》, 2010。arXiv:1012.3116 [math.QA]。[MS21] Y. Mousaaid 和 A. Savage, 《幺半范畴的仿射化》, J. Éc. polytech. Math. 8 (2021), 791–829。[Mur87] J. Murakami, 《纽结的 Kauffman多项式与表示论》, Osaka J. Math. 24 (1987), 第 4 期, 745–758。[Naz96] M. Nazarov, 《Brauer中心化子代数的 Young正交形式》, 《代数学杂志》182 3, 664 1996 693 ( ), 第 – 期。[OV96] A. Okounkov 和 A. Vershik, 《对称群表示论的新方法》, Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), 第 4 期, 581–605。[RS09] H. Rui 和 M. Si, 《Birman–Wenzl 代数的 Gram行列式与半单性判据》, J. Reine Angew. Math. 631 (2009), 153–179。[RS11] , 《Birman–Murakami–Wenzl 代数的块》, Int. Math. Res. Not. IMRN 2 (2011), 452–486。

[RS15] H. Rui 和 L. Song，*Birman–Murakami–Wenzl* 代数的分解矩阵，《代数学杂志》**444** (2015)，246–271。[RT91] N. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，通过纽结多项式与量子群构造3维流形的不变量，《数学发明》**103** (1991)，第 3 期，547–597。[Ste85] J. R. Stembridge，超对称多项式的一个刻画，《代数学杂志》**95** (1985)，第 2 期，439–444。[Tur90] V. G. Turaev，缠结的算子不变量，以及 R矩阵，《苏联数学消息》**35** (1990)，第 2 期，411–?。[Wen90] H. Wenzl，量子群与

B C D **133** 1990 2，型子因

383 432

子， ，以及 ，《数学物理通讯》( )，第 – 期。[Wey39] H. Weyl，《经典群：其不变量与表示》，普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，1939。[Xi00] C. Xi，关于 *Birman–Wenzl* 代数的拟遗传性，《数学进展》**154**(2000)，第 2 期，280–298。

C.A.M.：纽卡斯尔大学数学、统计与物理学院电子邮件地址：C.A.Milionis2@ncl.ac.uk