arXiv:2512.17542v1 [cs.IT] 19 Dec 2025

无距离广义权重方法

Andrea Di Giusto[1], Elisa Gorla[2], Alberto Ravagnani[1]

[1]埃因霍温理工大学, [2]纳沙泰尔大学

摘要

我们提出了一种统一理论，用于研究赋有任意距离的线性码的广义权重。我们不再依赖支集或反码，而是通过码与选定空间族的交来定义码的权重，并将该空间族称为测试族。测试族的选择决定了相应广义权重的性质，以及这些权重所刻画的码的特征。在这一一般框架下，我们证明广义权重弱递增，且某些子序列严格递增。我们还证明了一个与 Wei对偶定理 相似的对偶性结果。通过选取最优反码作为测试族，我们的一般结果可推出广义汉明权重和秩度量权重的相应性质。对于和秩度量码，我们提出了一种测试族，由此得到的广义权重与通常的广义权重密切相关，但并非总是相同。这一选择使我们能够将已知的广义和秩权重对偶性结果推广到某些具有非零汉明分量的和秩度量码。最后，我们探讨了一族广义权重，它们由底层码与 MDS码或 MRD码相交而得。

引言

广义汉明（GH）权重是码在汉明度量下的不变量。V. Wei 首次将其与窃听信道II安全模型中的陪集编码方案的密码学性能联系起来后，GH 权重便广受关注 [35]。此后，GH 权重已被证明是描述码结构的有效手段，其性质也得到了广泛研究。 [10] 中发现了 GH 权重与线性分组码的距离/长度剖面及格复杂度之间的联系，而格复杂度是衡量译码复杂度的一项基本参数。

线性码的广义权重也已针对其他度量定义并进行了研究，例如秩度量 [22, 27, 24] 和和秩度量 [6]。在更一般的环上的码框架下，广义权重的性质已在伽罗瓦环 [2], 、有限链环 [18], 和 Frobenius 环 [23]上得到探讨。对于卷积码，人们提出了不同的广义权重概念，这些概念同时与自由距离和列距离相关，参见例如 [29, 8, 14, 15]。另一方面，关于广义权重与码所对应的单项式理想的分次Betti数之间的关系，对于赋予汉明度量的线性分组码，相关讨论见 [20] ； 对于赋予良好支集函数的环上的码，相关讨论见 [13]。

这些不同的广义权重概念具有一些共同特征：它们通常是自然数的递增序列，用于度量给定维数的子码的最小权，其中权重函数会随所使用的度量而变化。一个显著的相似之处在于，无论采用何种度量，通常都可以证明关于广义权重的对偶性结论。这类结论使得人们能够根据码的权重 $\mathcal{C}$ 确定其对偶码的广义权重 $\mathcal{C}$。除数学意义之外，对偶性结果在广义权重的安全应用中也发挥着核心作用，因为码的性能通常由其对偶码的权重决定。

在 [10], D. Forney 认为，广义权重“与长度和维数的关系比与距离的关系更大”。这一观察可以作为本文所采用的广义权重研究方法的出发点；我们提出了一种不涉及距离的广义权重定义。

我们的贡献。 我们通过考察线性码 $\mathcal{C}$ 与给定码族 T中各码的交集来定义其广义权重。我们所考虑的码族满足定理 2.1 中列出的若干假设，并称为测试族。其元素称为测试码。权重 $\tau_{T,r}$ 定义为测试码 $\mathcal{T}$的最小维数，其中该测试码与 $\mathcal{C}$ 的交集至少具有给定的维数。用公式表示：

$$\tau_{T,r}(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in T, \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{C}) \geq r\}, \tag{1}$$

其中 $1 \leq r \leq \dim(\mathcal{C})$。这一方法受到 [27] 中针对汉明度量和秩度量提出的广义权定义重述的启发。

在任意度量下，选择测试族便能将一列权重与线性码相关联。这些权重继承了用于定义它们的测试族的性质。我们的主要结果是，按公式（1）定义的广义权重满足对偶定理。许多已知码族都是测试族：作为贯穿全文的示例，我们将构造应用于汉明度量下的标准最优反码族。秩度量和和秩度量下的标准最优反码也提供了自然的测试族示例。

秩度量码的广义权重主要有两种定义：一种总是产生不变量 [27], ，另一种则与安全性和网络编码的联系更为紧密 [22, 24]。然而，这两种概念都满足对偶性结论。借助测试族的概念及相关的对偶性结果，我们可以更深入地理解这两种对偶性成立的原因。同时，我们对秩度量下广义权重的不同定义进行了统一处理。

既然已有一种无距离构造与汉明度量和秩度量中的已知结果相一致，自然可以将其应用于和秩度量码。在此背景下，我们提出一种广义权重的定义：对于汉明分量平凡的码，该定义与 [6]的定义一致；但在一般情况下则略有不同。这使我们能够重新得到 [6]的对偶性结果，并为一些具有非平凡汉明部分的码建立一个新的对偶性结果。

最后，我们考察由与 MDS 码和 MRD 码的交集导出的广义权重。尽管这些码族非常自然，值得纳入考量，但一般而言，它们并不是测试族。这与相应权重不满足对偶性这一事实相符。我们给出明确的反例，表明在此情形下，一个

码的权重无法确定其对偶码的权重。这为我们构造中的假设是最小的提供了一种启发式解释：MDS 码族和 MRD 码族缺乏测试族所具有的规则包含结构，而这会直接影响相应权重的对偶性。不存在一般性的对偶性陈述，并不意味着对偶性在特殊情形下也不成立。例如，我们证明，在域大小 q 足够大的假设下，由 MDS 码导出的权重满足一条对偶性结论。利用文献中的结果，我们证明，当 q足够大时，MDS 码族确实是一个测试族。此外，事实证明，在同一参数范围内，我们的权重等价于码距离；码距离是一族近期在 [7]中引入的不变量。

本文结构。 第1节回顾一些预备知识，并确定本文后续部分所用的记号。第2节给出适用于任意向量空间的广义权重定义及相应的对偶性结果，并以 GH 权重作为贯穿全文的示例。第 3 节展示如何具体构造秩度量中的两种不同广义权重概念，并着重讨论它们的对偶性质。第4节转而研究和秩度量码，展示如何将已有的广义权重对偶性结果推广到一些具有非平凡汉明部分的码。第5节讨论由 MDS/MRD 码导出的权重。在大小足够大的域上 q，我们建立由 MDS 码得到的广义权重与码距离之间的联系。

1 预备知识与记号

固定整数 $0 \le m \le n$，并令 $[m,n] = \{m, m+1, \dots, n\}$、 $[n] = [1,n]$ 和 $[n]_m = \{i \in [n] : i = 0 \bmod m\}$。令 q 为素数幂，$\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的有限域。记 V 为一个维数为 $\dim(V) = \nu$ 的有限维向量空间，其底域为 $\mathbb{F}_q$。线性子空间的包含关系记作 $\le$。

定义 1.1。 V中的一个 k维线性码是一个向量子空间 $\mathcal{C} \le V$。

本文中的所有码都是线性的。码的特征和性能通过参数进行度量和比较。码 $\mathcal{C}$ 的参数示例包括其维数 $\dim(\mathcal{C}) = k$，以及环境空间的维数 $\dim(V) = \nu$，后者通常称为码的长度。

如果空间 V 配备了非退化双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}_q$，那么就可以定义对偶码。读者应熟悉$V = \mathbb{F}_q^n$ 中的标准内积，它用于定义汉明度量下的对偶码，参见定理 1.3。

定义 1.2。 如果两个向量 $x, y \in V$ 满足 $\langle x, y \rangle = 0$，则称它们正交。码 $\mathcal{C}$ 的对偶是与 $\mathcal{C}$的所有元素都正交的向量所组成的集合，即

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{ y \in V \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \text{ for all } x \in \mathcal{C} \}.$$

编码理论的自然框架是一个度量 $\mathbb{F}_q$-向量空间（V，d），其中距离 d 可实现纠错。我们尤其关注三个例子：编码理论中无处不在的汉明度量空间和秩度量空间，以及和秩

度量空间，它概括了前两者，并且例如在多时隙网络编码 [25]和空时编码 [33]中具有重要意义。

例 1.3 （汉明度量空间）。 设 $(V, \mathrm{d}) = (\mathbf{F}_q^n, \mathrm{d}_{\mathrm{H}})$，其中 d_{H} 是汉明距离，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是标准内积。对于 $x, y \in V$, $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots\ldots, y_n)$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{H}}(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}| \quad \text{and} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

该书 [19] 是汉明度量中关于码的标准参考书。

例 1.4 （秩度量空间）。 设 $(V, \mathrm{d}) = (\mathbf{F}_q^{n \times m}, \mathrm{d}_{\mathrm{rk}})$，其中 d_{rk} 是秩距离，且双线性形式是迹积：

$$\mathrm{d}_{\mathrm{rk}}(X, Y) = \mathrm{rk}(X - Y) \quad \text{and} \quad \langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(XY^t)$$

对于 $X, Y \in V$。这里，$\mathrm{rk}(\cdot)$ 和 $\mathrm{Tr}(\cdot)$ 分别表示秩函数和迹函数，而 Y^t表示 Y的转置。参见 [11]，了解秩度量码的介绍。

例 1.5 （和秩度量空间）。 设 $V = \mathbf{F}_q^{n_1 \times m_1} \times \ldots \times \mathbf{F}_q^{n_t \times m_t}$，其中 $1 \leq n_i \leq m_i$对所有 $i = 1, \ldots\ldots, t$均成立，且 $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_t$。两个矩阵 t元组 $X = (X_1, \ldots\ldots, X_t)$、$Y = (Y_1, \ldots\ldots, Y_t)$ 之间的和秩距离 $\in V$为

$$\mathrm{d}_{\mathrm{srk}}(X, Y) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{d}_{\mathrm{rk}}(X_i, Y_i) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{rk}(X_i - Y_i).$$

V 上的双线性形式是和迹积

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{Tr}(X_i Y_i^t).$$

和秩度量是秩度量和汉明度量的推广。事实上，若 $t = 1$，则 $V = \mathbf{F}_q^{n_1 \times m_1}$且$\mathrm{d}_{\mathrm{srk}} = \mathrm{d}_{\mathrm{rk}}$。此外，若 $m_1 = 1$ 对所有i均成立，则 $m_i = n_i = 1$，于是 $V = \mathbf{F}_q^t$，且 V上的和秩度量$\mathrm{d}_{\mathrm{srk}}$ 与汉明度量d_{H} 一致。

令 $u = \max\{i \in [t] : \ m_i > 1\}$。由于对于任意 $i > u$，$\mathbf{F}_q^{n_i \times m_i} = \mathbf{F}_q$，因此

$$V = \mathbb{F}_q^{n_1 \times m_1} \times \ldots \times \mathbb{F}_q^{n_u \times m_u} \times \underbrace{\mathbb{F}_q \times \ldots \mathbb{F}_q}_{t-u} = \mathbb{F}_q^{n_1 \times m_1} \times \ldots \times \mathbb{F}_q^{n_u \times m_u} \times \mathbb{F}_q^{t-u}$$

并且对于 $X = (X_1, \ldots, X_t)$ $Y = (Y_1, \ldots, Y_t) \in V$，我们有

$$\mathrm{d}_{\mathrm{srk}}(X, Y) = \sum_{i=1}^{u} \mathrm{d}_{\mathrm{rk}}(X_i, Y_i) + \mathrm{d}_{\mathrm{H}}((X_{u+1}, \ldots, X_t), (Y_{u+1}, \ldots, Y_t))$$

此外

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{u} \mathrm{Tr}(X_i Y_i^t) + \langle (X_{u+1}, \ldots, X_t), (Y_{u+1}, \ldots, Y_t) \rangle,$$

其中，$\langle (X_{u+1}, \ldots, X_t), (Y_{u+1}, \ldots, Y_t) \rangle$ 表示 $\mathbf{F}_q^{t-u}$ 中 $(X_{u+1}, \ldots, X_t)$ 和 $(Y_{u+1}, \ldots, Y_t)$ 的标准内积。

定义 1.6。 设 $(V,\ \mathrm{d})$ 是一个度量向量空间，且设 $x \in V$。 x 的权 定义为 $\mathrm{w}(x) = \mathrm{d}(x,\ 0)$，其中 0 是 V 中的零元。

在具体实例中，我们会让权的记号与距离的记号相对应。例如，与汉明度量 $\mathrm{d_H}$ 相关的权记作 $\mathrm{w_H}$。

等距变换的概念使我们能够将编码理论意义下等价的码视为相同。

定义 1.7. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ 是度量向量空间 (V,d) 中的码。若存在一个线性映射 $\phi : V \to V$，使得 $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$，并且对所有 $x, y \in V$，都有 $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(\phi(x)\ \phi(y))$，则称 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}'$ 等距同构或等价（记作 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$）。等距变换在所有码的集合上诱导出一个等价关系，也称为码等价。码 $\mathcal{C}$ 的一个不变量 是指在 $\mathcal{C}$的每个等价类中的元素上都保持不变的任意参数。

例如，码的维数是不变量，因为等距变换是双射。编码理论中的另一个重要不变量是码的最小距离。

定义 1.8. 设 $\mathcal{C}$ 是 (V,d) 中的一个线性码， $\mathcal{C} \neq 0$。其最小距离 为

$$d(\mathcal{C}) = \min\{\mathrm{d}(c, c') \mid c, c' \in \mathcal{C}, c \neq c'\}.$$

最小距离与码的纠错性能直接相关，并且是一个不变量，因为等距变换会保持距离。

本文聚焦于广义权重这一类码参数。我们用“广义权重”指代其中任意一种量，并通过添加其他形容词将其具体化为特定构造。例如，广义汉明（GH）权重是汉明度量空间中的广义权重，其研究始于 [35]。GH 权重的原始定义使用了汉明空间中码的汉明支集。

定义 1.9. 向量 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{F}_q^n$ 的汉明支集 是子集 $\mathrm{supp}(x) = \{i \in [n] :\ x_i \neq 0\} \subseteq [n]$。码 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$ 的支撑是其码字支撑的并集，即

$$\mathrm{supp}(\mathcal{C}) = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} \mathrm{supp}(c).$$

注意，1 维码的支撑与其任一生成元的支撑相同，因此可以用记号 $\mathrm{supp}(\cdot)$ 同时表示向量和码的支撑。以下是 [35] 中给出的 GH 权重的原始定义。

定义 1.10. 设 $0 \neq \mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$ 是一个 k 维线性码。对于每个 $r = 1, \ldots, k$，其广义汉明权定义为

$$d_r(\mathcal{C}) = \min\{|\mathrm{supp}(\mathcal{D})| : \mathcal{D} \leq \mathcal{C}, \dim(\mathcal{D}) = r\}.$$

GH 权重是线性码的不变量，能够刻画许多非平凡性质，包括陪集编码方案在 II 型窃听信道模型中的信息泄露。对于秩度量，已有两种具有不同特征的广义权重定义。 [24, 定义 10] 并不总能产生一组

不变量，而 [27, 定义 23]则可以。不过，第一种定义衡量的是窃听网络上的普适安全性。这两类广义权重都满足一个对偶性结论。本文提出一种广义权重的一般构造方法，以帮助我们理解这些权重的共同特征，尤其是它们的对偶理论。

对于空间 V 中所有码定义的一组参数，若 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的参数由 $\mathcal{C}$ 的参数决定，我们就称这些参数满足对偶性陈述。例如，以下是关于 GH 权重的著名对偶性陈述。

定理 1.11 ([35, 定理 3]). 设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$ 是一个 k 维码。则

$$\{d_s(\mathcal{C}^{\perp}) \mid 1 \leq s \leq n-k\} = [n] \setminus \{n+1-d_r(\mathcal{C}) \mid 1 \leq r \leq k\}.$$

1.1 码参数的界

确定给定码的码参数可能是一项艰巨的任务。在这种情况下，界很有用，因为它们根据其他参数的值限制某个参数可能取值的范围。Singleton界是汉明度量中的一个基本界，它将码的长度、维数和最小距离联系起来。

定理 1.12 (Singleton界, [34, 定理 1]). 设 $\mathcal{C} \leq (\mathrm{F}_q^n, \mathrm{d_H})$ 是一个 k 维码，其最小距离为 $d(\mathcal{C}) = d$。则 $d + k \leq n + 1$。

定义 1.13。 码 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$ 是最大距离可分（MDS）码，当且仅当 $\mathcal{C} = 0$ 或其参数达到 Singleton界。对于任意 n, q，我们用 $M_{n,q}^{\mathrm{H}}$ 表示 $(\mathrm{F}_q^n, \mathrm{d_H})$ 中 MDS 码的族。

在维数给定的码中，MDS 码具有尽可能大的最小距离，因此从纠错能力的角度来看，它们被认为是最优的。此外，对于每个 n 和 q，根据 [19, 定理 2.4.3]，族 $M_{n,q}^{\mathrm{H}}$ 在对偶性下封闭。有些码显然是 MDS 码：对于每个满足 $\mathrm{w_H}(v) \in \{0, n\}$ 的向量 $v \in \mathrm{F}_q^n$，由 v 生成的码都是 MDS 码。这些是维数为 0 和 1 的所有 MDS 码，而它们的对偶都是维数为 $n-1$ 和 n 的 MDS 码。这类码称为平凡最大距离可分码。

使用 MDS 码的一项限制来自域大小 q与其长度 n之间的关系，这一关系满足以下猜想。

猜想 1.14 ([31, 问题 $I_{r,\ q}$]). 当 q为奇数时，族 $M_{\mathrm{H}n,\ q}$包含非平凡码，当且仅当 $n \leq q+1$。当 q为偶数时，族 $M_{n,\ q}^{\mathrm{H}}$包含非平凡码，当且仅当 $n \leq q+2$。此外，对于 $n = q+2$，唯一的非平凡码的维数为$k = 3,\ q-1$。

启发这一猜想的一个早期结果见于 [30]。关于该猜想在若干情形下的证明（包括 q 为素数的情形）见于 [3]。

下一个 结果是 Singleton界在秩度量码中的对应形式 .

定理1.15 ([9, 定理 5.4]). 设 $n \leq m$ 且令 $\mathcal{C} \leq (\mathrm{F}_q^{n\times m},\ \mathrm{d_{rk}})$， $\mathcal{C} \neq 0$为一个维数为 k、最小距离为 $d(\mathcal{C}) = d$的码。则 $k \leq m(n-d+1)$。

定义1.16。 参数达到前述界的码 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^{n\times m}$称为最大秩距离（*MRD*）码。对于任意 n, m, q，$\mathrm{F}_q^{n\times m}$中的 MRD 码族记为 $M_{n\times m,q}^{\mathrm{rk}}$。

与 MDS 码类似，族 $M^{\mathrm{rk}}_{n\times m,q}$ 根据 [9, 定理 5.5]在对偶性下封闭。MDS 码与 MRD 码的一个显著区别是，对于任意 n,m,q，对于每个可能的维数 $k \le nm$，$\mathrm{F}_q^{n\times m}$中都存在维数为 k 的 MRD 码，如 [9] 所示。

另一类有趣的界是反码界，它们描述了码的维数与最大重量之间的关系。以下给出汉明度量、秩度量和和秩度量下的反码界。

定理1.17 ([27, 命题 6])。设 $\mathcal{C} \le (\mathrm{F}_q^n, \mathrm{d_H})$ 是一个维数为 $\dim(\mathcal{C}) = k$ 的码。那么$k \le \max\{\mathrm{w_H}(c) \mid c \in \mathcal{C}\}$。

定理1.18 ([28, 命题 47])。设 $1 \le n \le m$ 且设 $\mathcal{C} \le (\mathrm{F}_q^{n\times m}, \mathrm{d_{rk}})$ 是一个维数为 $\dim(\mathcal{C}) = k$ 的码。那么 $k \le m\max\{\mathrm{w_{rk}}(c) \mid c \in \mathcal{C}\}$。

定理1.19 ([6, 定理 3.1])。设 $\mathcal{C} \le (\mathrm{F}_q^{n_1\times m_1} \times \ldots \times \mathrm{F}_q^{n_t\times m_t}, \mathrm{d_{srk}})$ 是一个维数为 $\dim(\mathcal{C}) = k$ 的码。那么 $k \le \max\{\sum_{i=1}^{t} m_i \mathrm{rk}(c_i) \mid c = (c_1, \ldots, c_t) \in \mathcal{C}\}$。特别地，若 $m_1 = \ldots = m_t = m$，那么 $k \le m \max\{\mathrm{w_{srk}}(c) \mid c \in \mathcal{C}\}$。

最优反码，即达到反码界的码，在广义权重的研究中发挥着重要作用 [27, 6]。

定义1.20. 达到定理1.17中的反码界且取等号的码 $\mathcal{C} \le \mathrm{F}_q^n$，称为汉明度量下的最优反码（*OA*）。在秩度量和和秩度量下，也可以利用相应的反码界定义类似的概念。

给定一个具有坐标的向量空间 V，V 的标准基是由这样的向量构成的集合：除一个分量为 1 外，其余分量均为 0。

定义1.21. 设 (V, d) 是一个具有反码界的度量向量空间，则标准最优反码（SOA）是一个与由标准基向量生成的码等距同构的 OA。

例 1.22. 对于 $q \ne 2$，汉明空间 $(\mathrm{F}_q^n, \mathrm{d}_H)$ 中的每个 OA 都是 SOA。关于这一事实的证明可见于 [27, 命题 9]，，其中 SOA 被称为自由码。最小的非 SOA 二元最优反码是 $\mathcal{A} = \langle (1,0,1), (0,1,1)\rangle$，即长度为 3 的单奇偶校验码。汉明空间中的 SOA 也可以描述为支撑空间：对于 $i \in [n]$，设 e_i 为标准基向量，并设 $I \subseteq [n]$。那么

$$\mathcal{A}_I = \{x \in \mathbb{F}_q^n : \mathrm{supp}(x) \subseteq I\} = \langle e_i : i \in I\rangle \tag{2}$$

是一个 SOA，且所有 SOA 都具有这种形式。在第2.2节中，我们将证明，对于 $q = 2$，任意最优反码要么是标准最优反码，要么是奇数长度的单奇偶校验码，要么是由这两类码各一个或多个取直和得到的码。

例 1.23。令 $0 \le t \le n \le m$，并考虑

$$\mathcal{A}_t = \{X \in \mathbb{F}_q^{n\times m} : \text{the last } n-t \text{ rows of } X \text{ are zero}\} = \langle E_{ij} \mid 1 \le i \le t, 1 \le j \le m\rangle, \tag{3}$$

其中 E_{ij} 表示一个矩阵，其所有元素均为 0，只有位置 $(i,\ j)$ 上的元素为 1。可以证明，每个最大秩为 t 的 $\mathrm{F}_q^{n\times m}$上的正交阵都与 $\mathcal{A}_t$等距同构。特别地，秩度量下的所有正交阵都是 SOA，参见例如 [11, 定理 11.3.15]。

例 1.24。 设 $V = \mathrm{F}_q^{n_1\times m_1}\times\ldots\times\mathrm{F}_q^{n_u\times m_u}\times\mathrm{F}_q^{t-u}$，其中 $1 \le n_i \le m_i$ 对所有 $i = 1$，……，u均成立，且 $m_1 \ge m_2 \ge \ldots \ge m_u \ge 2$。由 $[6,$ 定理 III.11$]$ 可知，每个 $\mathcal{A}$ 中的正交阵 V都具有形式 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \ldots \mathcal{A}_u \times \mathcal{A}'$，其中 $\mathcal{A}_i$ 是 $\mathrm{F}_q^{n_i\times m_i}$上的一个正交阵（ $1 \le i \le u$），而 $\mathcal{A}'$ 是 F_q^{t-u}上的一个正交阵。根据 SOA 的定义， $\mathcal{A}$ 是 SOA，当且仅当它的每个直和项都是 SOA。由例 1.22 和例 1.23 中的讨论可知，对于每个 $q \ne 2$，和秩度量下的每个正交阵都是 SOA。对于 $q = 2$ 以及任意满足 $t - u \ge 3$的 t， u，取秩度量下的 SOA 与 F_2^{t-u}中一个不是 SOA 的正交阵的乘积，即可轻易构造出一个不是 SOA 的正交阵。

2 广义权重与测试族

本节中，我们通过与选定的码族取交，在任意向量空间 V中定义广义权重。一般而言，码族只是 V 的子码集合。测试族是满足某些额外条件的码族；我们将证明，这些条件足以保证权重的对偶性陈述。下面的定义列出了这些条件。从示例中可以看出，文献中研究过的许多码族都满足这些条件。我们概述了一种利用码链构造测试族的简单而有效的方法。作为贯穿全文的示例，我们在汉明度量空间中实例化这些构造，并以 SOA 作为测试族来恢复广义汉明权重。文献 $[27]$ 已证明，对于 $q \ne 2$，SOA 与汉明度量下的 OA 相同；而对于 $q = 2$，OA 类则严格更大。此前尚未给出二元 OA 的分类。我们将在本节末对二元 OA 进行分类。

定义 2.1。 设 $\ell \ge 1$ 是一个能整除 $\nu = \dim(V)$ 的整数。 V 中的非空码族 T 称为测试族，其步长为 ℓ，如果它满足以下条件：

1. 对每个 $\mathcal{T} \in T$， $\ell|\dim(\mathcal{T})$；2. 若 $\mathcal{T} \in T$，则 $\mathcal{T}^\perp \in T$；3. 维数为 $a\ell > 0$ 的每个 $\mathcal{T} \in T$都包含一个码 $\mathcal{T}' \in T$，使得 $\dim(\mathcal{T}') = (a-1)\ell$；4. 维数为 $a\ell < \nu$ 的每个 $\mathcal{T} \in T$都包含于一个码 $\mathcal{T}' \in T$，使得 $\dim(\mathcal{T}') =(a+1)\ell$。

T 中的元素称为测试码。可以验证，对于任意 T，零码和全空间 V 都是测试码。对任意向量空间，都很容易找到测试族。我们先从一个平凡的例子开始。

例2.2。 对于任意维数为 V 的向量空间 V 和 $\ell \mid \nu =$，所有维数能被 ℓ 整除的 V 子空间构成一个测试族。

例2.3。 设 $V =\mathrm{F}_q^n$ 为汉明度量空间。 V 中的正交阵族和 SOA 族都是步长为 $\ell = 1$ 的测试族。

给定码 $\mathcal{C}$ 和测试族 T，我们按照 $[27]$的思路，定义 $\mathcal{C}$ 相对于测试族 T的广义权重。

定义 2.4. 设 $\mathcal{C} \leq V$ 是一个 k维码， T 是步长为 ℓ的测试族。对于 $r = 1, \ldots, k$， $\mathcal{C}$的 r^{th}广义 T-权 为以下量

$$\tau_{T,r}(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in T, \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{C}) \geq r\}.$$

只要上下文清楚，我们就省略记号 T ，并将这些参数简称为广义权重。所有权重组成的序列

$$\tau(\mathcal{C}) = (\tau_1(\mathcal{C}), \ldots, \tau_k(\mathcal{C})) = (\tau_r(\mathcal{C}) \mid r = 1, \ldots, k)$$

称为-权重层级。对于固定的 $0 \leq h < \ell$，将指标 r与 h 模 ℓ 同余的权重子序列记作 $\tau^h(\mathcal{C})$，即，

$$\tau^h(\mathcal{C}) = (\tau_r(\mathcal{C}) \mid r = 1, \ldots, k \text{ and } r = h \mod \ell).$$

请注意，如果 ℓ 是测试族的步长，那么 $[\nu]_\ell$ 就是权重可能取值的集合。

注 2.5. 定理 2.4 可以扩展到包含不满足测试族要求的码族 T 。我们在第 5 节探讨这一思路，研究如何利用 MDS 码和 MRD 码族定义汉明度量和秩度量下的权重，以及由此得到的权重。

定义 2.6. 设 $\mathcal{C} \leq V$ 为一个码。若 $\dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{C}) \geq r$ 且 $\dim(\mathcal{T}) = \tau_r(\mathcal{C})$，则称 $\mathcal{T} \in T$ 实现权重 $\tau_r(\mathcal{C})$。

测试族的定义和广义权重的定义都不依赖于距离函数的选择。从这个意义上说，我们的方法与距离无关。此外， T-权重不一定是码不变量。然而，如果测试族在等距变换下封闭，则情况确实如此。

定义 2.7。 设 (V,d) 是一个度量向量空间。若测试族 T 在等距变换下封闭，则称其为度量 测试族。换言之，对于所有测试码 $\mathcal{T} \in T$ 和所有 $\mathcal{T}' \simeq \mathcal{T}$，若有 $\mathcal{T}' \in T$，则称 T 为度量测试族。

在汉明度量、秩度量和和秩度量下，OA 和 SOA 是度量测试族的例子。对于这些码，广义权重的经典定义通常与 SOA 测试族的广义 T-权重定义相一致。由于 SOA 的维数与其支撑的权重相一致（可能相差一个常数），因此在这种情况下，广义T-权重与距离有关。此外，它们最终被证明是码不变量。事实上，度量测试族总能产生不变量。

引理 2.8. </style}广义 T-权重是 V的子码的不变量，当且仅当测试族 T 是度量的。

证明。 设 T 是度量，且 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}' \leq V$ 是码，使得 $\mathcal{C}' \simeq \mathcal{C}$ 可通过等距变换 ϕ得到。令 $1 \leq r \leq k = \dim(\mathcal{C})$，并设 $\mathcal{T} \in T$ 是实现 $\tau_r(\mathcal{C})$ 的码。取 $\mathcal{T}' = \phi(\mathcal{T})$，则由于 T 是度量，我们有 $\mathcal{T}' \in T$。此外，$\dim(\mathcal{T}' \cap \mathcal{C}') = \dim(\phi(\mathcal{T} \cap \mathcal{C})) \geq r$，这意味着 $\tau_r(\mathcal{C}') \leq \tau_r(\mathcal{C})$。反向采用相同的推理，可得 $\tau_r(\mathcal{C}) \leq \tau_r(\mathcal{C}')$，即 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 的广义 T-权重相同。对于逆向命题，假设 T 不是度量。则存在两个维数为 k的等距同构码，其中只有一个属于T。根据定义，这两个码的 k^{th} T-权重不可能相同。 □

测试族可以合并形成更大的族，其含义由下面的引理精确定义。证明很直接。

引理 2.9。 测试族的并集是测试族。度量测试族的并集是度量测试族。

下一个引理的证明也很直接，只需假设 $V_1 \times V_2$ 上的双线性形式由 V_1 和 V_2上的双线性形式诱导而来。该引理将有助于研究和秩度量中的广义权重。

引理 2.10。 设 V_1 和 V_2 为向量空间，且设 T_1 和 T_2 分别为 V_1 和 V_2中的步长为 ℓ的测试族。则

$$T_1 \times T_2 = \{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \mid \mathcal{T}_1 \in T_1, \mathcal{T}_2 \in T_2\}$$

是 $V_1 \times V_2$中的步长为 ℓ 的测试族。

最后，测试族的某些子族也属于测试族。

引理 2.11。 设 (V, d) 为度量向量空间，且设 T为 V中步长为 ℓ 的测试族。设 m 满足 $\ell \mid m$ 且 $m \mid \nu = \dim(V)$。则族 $\{\mathcal{T} \in T\colon\ m \mid \dim(\mathcal{T})\}$ 是 V中步长为 m 的测试族。此外，当 T 为度量测试族时，它也是度量测试族。

构造度量测试族的一种简单方法是利用码链。

定义 2.12。 V中的码链 是码序列 $C = (C_0, \ldots, C_m)$，满足$C_i \subseteq C_{i+1}$ 对所有 $i = 0, \ldots, m-1$均成立。固定步长码链 是满足 $\nu = m\ell$ 且对所有 $i = 0, \ldots, m$都有 $\dim(C_i) = i\ell$ 的码链 C。量 ℓ称为该码链的步长 。 C的对偶码链 是码链 $C^\perp = (C_m^\perp, \ldots, C_0^\perp)$。

注意，对偶码链中的包含关系方向相反，而且固定步长码链的对偶码链仍然是固定步长码链。

定义 2.13。 设 $m, \ell \geq 1$ 为正整数， $\nu = m\ell$，并考虑步长为 ℓ 的码的固定步长链 $C = (C_0, \ldots, C_m)$。与 C 相关联的测试族是码族 $T(C)$，其中的码等价于 C 或 $C^\perp$ 中的某个码，即

$$T(C) = \{\mathcal{T} \subseteq V : \mathcal{T} \simeq C_i \text{ or } \mathcal{T} \simeq C_i^\perp \text{ for some } i\}.$$

容易验证，给定一个步长为 ℓ 的固定步长链 C，族 $T(C)$ 是一个步长为 ℓ 的度量测试族。我们从这个角度重新审视定理 2.3。

例 2.14. 设 $V = \mathrm{F}_q^n$，其中 $i = 0, \ldots, n$ 设 $\mathcal{A}_i = \{x \in \mathrm{F}_q^n\colon \mathrm{supp}(x) \subseteq [i]\}$。链 $A = (\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n)$ 导出测试族 $T(A)$，它就是定理 2.3 中描述的 SOA 族。请注意，在这种情况下，对偶码链是冗余的，因为 $\mathcal{A}_i^\perp \simeq \mathcal{A}_{n-i}$。

链是构造度量测试族的一种优雅方式。然而，与码相关的某些量虽然不是不变量，却与应用相关，并具有有趣的代数性质。一个相关的例子是 [24] 中定义的广义矩阵权。通过使用（非度量）码的测试族来定义和研究这些量，我们能够以统一的方式处理它们，并突出其共同的代数特征。

2.1 性质与对偶性

在本节中，我们固定一个步长为 ℓ 的测试族 T，其中 V，并研究广义 T 权重的代数性质。主要结果是一条一般性的对偶性陈述，它将 $\mathcal{C}$ 的 T 权重与 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的 T 权重联系起来。该结果统一了 GH 权重 [35], 、GD 权重 [27], 和 GM 权重 [24] 的对偶理论。此外，它还提供了关键见解，使我们能够扩展 [6] 中确立的和秩度量码的对偶性。我们首先证明一些基本性质。

引理 2.15. 设 $\mathcal{C}$ 是 V 中一个 k 维码。T 权构成一个弱递增序列，而对于每个$h = 0, \ldots,$ $\ell - 1$，每个序列 $\tau^h(\mathcal{C})$ 中的权都构成一个严格递增序列。此外，

$$\left\lceil \frac{r}{\ell} \right\rceil \ell \leq \tau_r(\mathcal{C}) \leq \left\lceil \frac{\nu - k + r}{\ell} \right\rceil \ell$$

对每个 $1 \leq r \leq k$，都有。

证明。 $\tau(\mathcal{C})$ 中的权构成一个弱递增序列，因为计算交集所依据的码集合构成一个弱递增链。令 $0 \leq h < \ell$，并考虑序列 $\tau^h(\mathcal{C})$。设 $\mathcal{T} \in T(S)$ 是一个码，它在某个 $r = h$ 模 ℓ 下实现了 $\tau_r(\mathcal{C})$。由定理 2.4，码 $\mathcal{T}$ 包含一个余维数为 ℓ 的子码 $\mathcal{T}'$，使得 $\dim(\mathcal{T}' \cap \mathcal{C}) \geq \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{C}) - \ell \geq r - \ell$。由此可得

$$\tau_{r-\ell}(\mathcal{C}) \leq \dim(\mathcal{T}') = \dim(\mathcal{T}) - \ell < \dim(\mathcal{T}) = \tau_r(\mathcal{C}).$$

这证明了 $\tau^h(\mathcal{C})$ 是一个严格递增序列。

最后，设 $1 \leq r \leq k$。$\tau_r(\mathcal{C})$ 的下界可直接由定义得出。为证明上界，注意到若 $\mathcal{T} \in T(S)$ 的维数为 $\dim(\mathcal{T}) \geq \nu - k + r$，则有 $\dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{T}) \geq r$。

□

这一结果在各自的语境中发挥着与 [35, 定理 1] 和 [27, 定理 30] 相同的作用。

注 2.16。 定理 2.15 的特殊情形已在若干不同语境中出现。若选择 SOA 族作为测试族，定理 2.15 可得出关于 GH 权重的已知不等式（隐含于 [35]）、关于 GD 权重的不等式（[27, 定理 30]），以及关于向量秩度量码广义权重的不等式（[22, 推论 15]）。若选择秩支撑空间族作为测试族，则可得出关于 GM 权重的不等式（[24, 第 VII.A 节]）。最后，若选择维数为 m 的倍数的 SOA 族作为测试族，则可得出和秩度量码不等式的一个特殊情形（[6, 引理 V.5 和命题 V.6]）。

为了证明 T-权重满足对偶性陈述，我们将使用以下引理。

引理 2.17. 设 $\mathcal{C} \subseteq V$ 是一个 k 维码，且 $k^{\perp} = \dim(\mathcal{C}^{\perp}) = \nu - k$。那么

$$\begin{aligned} &\tau_{k^{\perp}+r-\tau_r(\mathcal{C})}(\mathcal{C}^{\perp}) \leq \nu - \tau_r(\mathcal{C}) \quad \text{for every } r \in [k], \\ &\tau_{k+s-\tau_s(\mathcal{C}^{\perp})}(\mathcal{C}) \leq \nu - \tau_s(\mathcal{C}^{\perp}) \quad \text{for every } s \in [k^{\perp}]. \end{aligned}$$

证明. 我们只证明第一个不等式，因为第二个不等式可由对偶码应用第一个不等式得到。设 $\mathcal{T}$ 是一个达到 $\tau_r(\mathcal{C})$ 的码。那么

$$\dim(\mathcal{C}^\perp \cap \mathcal{T}^\perp) = k^\perp - \dim(\mathcal{T}) + \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{C}) \geq k^\perp - \tau_r(\mathcal{C}) + r.$$

由此可知， $\mathcal{T}^\perp$ 是确定$\tau_{k^\perp - \tau_r(\mathcal{C})+r}(\mathcal{C}^\perp)$时需要考虑的码之一。因此

$$\tau_{k^\perp-(\tau_r(\mathcal{C})-r)}(\mathcal{C}^\perp) \leq \dim(\mathcal{T}^\perp) = \nu - \tau_r(\mathcal{C}).$$

□

以下是本文的主要结果。它描述了一个码的 T权重如何决定其对偶的 T权重。

定理 2.18. 设 T 是 V中的一个测试族，步长为 ℓ。对于任意 $0 \leq h \leq \ell-1$，序列$\tau^h(\mathcal{C}^\perp)$和 $\tau^{h+k}(\mathcal{C})$ 可以相互确定。更确切地说，我们有

$$\{\tau_s(\mathcal{C}^\perp) \,:\, s = h \mod \ell\} = [\nu]_\ell \setminus \{\nu + \ell - \tau_r(\mathcal{C}) \,:\, r = k + h \mod \ell\}.$$

证明. 固定 $0 \leq h \leq \ell - 1$，并取满足 $r = h + k$ 模 ℓ 且 $s = h$ 模 ℓ的 $r \in [k]$、 $s \in [k^\perp]$。我们断言

$$\tau_s(\mathcal{C}^\perp) \neq \nu + \ell - \tau_r(\mathcal{C}). \tag{4}$$

事实上，反设对于某个如上所述的 r, s，等式成立。根据前一个引理，我们有 $\tau_s(\mathcal{C}^\perp)$ $\leq \nu - \tau_{k+s-\tau_s(\mathcal{C}^\perp)}(\mathcal{C})$。因此，必有 $r > k + s - \tau_s(\mathcal{C}^\perp)$。由于 $r = k + s$ 模 ℓ 且 $\ell \mid \tau_s(\mathcal{C}^\perp)$，于是

$$r \geq k + s + \ell - \tau_s(\mathcal{C}^\perp). \tag{5}$$

另一方面，根据前述引理 $\tau_s(\mathcal{C}^\perp) > \tau_s(\mathcal{C}^\perp) - \ell = \nu - \tau_r(\mathcal{C}) \geq \tau_{k^\perp + r - \tau_r(\mathcal{C})}(\mathcal{C}^\perp)$，因此

$$s > k^\perp + r - \tau_r(\mathcal{C}). \tag{6}$$

结合 (5) 和 (6)，可得

$$r > k + k^\perp + \ell + r - \tau_r(\mathcal{C}) - \tau_s(\mathcal{C}^\perp) = r,$$

这就产生了矛盾。因此，这些集合

$$\{\tau_s(\mathcal{C}^\perp) \,:\, s = h \mod \ell\} \text{ and } \{\nu - \tau_r(\mathcal{C}) + \ell \,:\, r = h + k \mod \ell\}$$

的交集为空。由于根据定理 2.15，它们的基数之和为 ν/ℓ，因此它们互为补集，且均为 $[\nu]_\ell$ 的子集。 □

例 2.19. 相对于 SOA 族定义广义 T-权重，可得到 GH 权重，这已在 [27, 定理 10] 中证明。由于定义中使用的是 SOA 而非正交阵，因而可以解除限制 $q \geq 3$。由于 $\ell = 1$，只有一个序列 $\tau^h(\mathcal{C})$，也就是说，对于每个 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$，都有 $\tau(\mathcal{C}) = \tau^0(\mathcal{C})$。因此我们得到

$$\{\tau_s(\mathcal{C}^\perp) \mid 1 \leq s \leq n - k\} = \{n + 1 - \tau_r(\mathcal{C}) \mid 1 \leq r \leq k\}$$

这就得到了定理 1.11。

2.2 二元最优反码的分类

本节将对汉明度量下的二元最优反码进行等距分类。

定理 2.20. 设 $\mathcal{A} \leq \mathrm{F}_2^n$ 是维数为 k的正交阵。则 $\mathcal{A}$ 要么是 SOA，要么存在非负整数 t, f以及奇数 n_1, ..., n_t，使得 $n = n_1 + \ldots + n_t + f$且

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_t \times \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$$

其中 $\mathcal{A}_{\mathrm{H}} \leq \mathrm{F}_2^f$ 是 SOA，而对所有$i = 1$, ..., t, $\mathcal{A}_i \leq \mathrm{F}_2^{n_i}$都是 $[n_i, n_i - 1]_2$ 单奇偶校验码。

证明。相差一个等价变换后，不妨设 $\mathcal{A}$ 有系统生成矩阵$G = (I_k \mid A) \in \mathrm{F}_2^{k \times n}$，其中 $I_k \in \mathrm{F}_2^{k \times k}$ 是单位矩阵，且 $A \in \mathrm{F}_2^{n-k \times k}$。我们断言， A 的每一列的权都是偶数，且 A的每一行的权都是零或一。事实上，$(1, \ldots, 1)G = (1, \ldots, 1 \mid (1, \ldots, 1)A) \in \mathcal{A}$的权为 $k + \mathrm{w_H}(1, \ldots, 1)A$。由于 $\mathcal{A}$的最大重量为 k，故 $(1, \ldots, 1)A = (0 \ldots 0)$，即 $\mathcal{A}$的每一列的权都是偶数。设 $1 \leq i \leq k$，并令 $v_i \in \mathrm{F}_2^k$ 为一个向量，其各项均为 1，但第 i 个位置为 0。则 $\mathrm{w_H}(v_i G) = k - 1 + \mathrm{w_H}(a_i)$，其中 a_i 表示 A的第 i^{th} 行。由于 $\mathcal{A}$ 中元素的最大重量为 k， $\mathcal{A}$ 的第 i^{th} 行的权至多为一。

对 G 的行进行置换后，不妨设 A 的最后 f 行均为零元，且其余每一行唯一的非零元素所在的列，与前一行相同或位于其右侧。对 G 的列进行置换后， G 具有如下形式

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & G_t & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & G_{\mathrm{H}} \end{pmatrix}$$

其中 G_{H} 是一个 $f \times f$ 单位矩阵，且 $G_i = (I_{n_i - 1} \mid \mathbf{1}) \in \mathrm{F}^{(n_i - 1)_2 \quad \times n_i}$；其中 $I_{n_i - 1}$ 是一个 $(n_i - 1) \times (n_i - 1)$ 单位矩阵，而 $\mathbf{1}$ 是全 1 列。对于 $1 \leq i \leq t$，令 $\mathcal{A}_i \subseteq \mathrm{F}_2^{n_i}$ 为生成矩阵为 G_i 的码，并令 $\mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ 为生成矩阵为 G_{H} 的码。于是 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_t \times \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ 且 $n = n_1 + \cdots + n_t + f$。由于码的维数和最大重量在直积下均可加，因此 $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_t, \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ 均为 OA。因此， $\mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ 是 SOA，且 $n_1, \ldots, n_t$ 均为奇数。 □

3 秩度量码的广义权重

在本节中，我们将第2节中建立的一般框架与适当的测试族相结合，从而得到秩度量中广义权重的两种定义：广义 Delsarte 权重 [27] 和广义矩阵权重 [24]。这两个概念各自的特点，可以通过所用测试族得到清晰的阐释；定理 2.18 则为相应的对偶定理给出了简洁的证明。文中未附证明的所有秩度量码结果均可见于 [11]。

本节最后，我们讨论向量秩度量码（即 F_{q^m}-线性秩度量码）的广义权重。在此背景下，我们还将展示如何根据我们的普遍结果恢复广义权重的对偶性。

3.1 广义 Delsarte 权重

设 $n \leq m$ ，并赋予 $V = \mathrm{F}_q^{n\times m}$秩度量。广义德尔萨特权重是秩度量码的不变量，其定义见 [27, 定义 23] ，并使用最优反码。众所周知，每个最优秩度量反码都是标准最优反码。

定义 3.1 ([27, 定义 23])。设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^{n\times m}$ 是一个 k 维码。对于 $1 \leq r \leq k$，广义 *Delsarte*（*GD*）权重为

$$a_r(\mathcal{C}) = \frac{1}{m}\min\{\dim(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ is an optimal anticode}, \dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{C}) \geq r\}.$$

要将 GD 权重视为 T-权的一个例子，注意到 OA 族是测试族 $T(A)$，它由定理 2.13 中以固定步长链 $A = (\mathcal{A}_0 = 0,\ \mathcal{A}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{A}_n = V)$ 为起点得到。这里， $\mathcal{A}_t$ 是由最后 $n-t$ 行为零的矩阵组成的 SOA。由于 $T(A)$ 是一个度量测试族，定理 2.4 给出秩度量码的一族不变量。此外，这些不变量与 GD 权重相差常数因子 m，因为

$$\tau_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in T(A), \dim(\mathcal{T}\cap\mathcal{C}) \geq r\} = ma_r(\mathcal{C}) \tag{7}$$

对所有 r 均成立。因此， [27, 第 6] 节中的结果可由定理 2.18 得出。特别地，我们重新得到 GD 权重的对偶性陈述。

定理 3.2。 设 T 是秩度量空间 $\mathrm{F}_q^{n\times m}$中的 OA 族，且 $\mathcal{C}$ 是一个k维码。序列 $\tau^h(\mathcal{C})$ 和 $\tau^{h+k}(\mathcal{C}^\perp)$ 通过下式相互确定：

$$\tau^h(\mathcal{C}) = [nm]_m \setminus \{m(n+1) - x : x \in \tau^{h+k}(\mathcal{C}^\perp)\}$$

对每个 $0 \leq h < m$均成立。特别地， $\tau(\mathcal{C})$ 确定 $\tau(\mathcal{C}^\perp)$。

3.2 广义矩阵权重

再次考虑秩度量空间 $\mathrm{F}_q^{n\times m}$。广义矩阵（GM）权重在 [24] 中被定义，用于度量秩度量码作为窃听网络中的陪集码使用时的信息泄漏。它们是秩度量码的一族广义权重，不同于 GD 权重。关于这两族权重的性质及其相互关系的讨论，请参阅 [11, 第 11 节。5] 特别地，对于 $n < m$，GM 权重与 GD 权重一致，参见 [24, VIII.C], ；而对于 $n = m$，二者通常并不一致，参见 [12, 例 2。10]对于 $n > m$， $\mathcal{C}$ 的 GM 权重与转置码 $\mathcal{C}^t \subseteq \mathrm{F}_q^{m\times n}$的 GD 权重一致，参见 [11, 定理 XXX] 此外，当 $n = m$时，GM 权重不是不变量。 [24, 命题 65] 表明，GM 权重满足对偶性陈述。将 GD 权重和 GM 权重解释为广义 T权后，它们之间的这些差异与相似之处便清晰可见。GM 权重定义的出发点是秩支撑空间族。

定义 3.3. 与 $\mathcal{L} \leq \mathrm{F}_q^n$ 相关联的秩支撑空间为

$$\mathcal{V}_\mathcal{L} = \{X \in \mathbb{F}_q^{n\times m} : \mathrm{colsp}(X) \leq \mathcal{L}\},$$

其中，$\mathrm{colsp}(X)$ 表示矩阵 X 的列空间。

GM 权重的定义如下。

定义 3.4 ([24, 定义 10])。设 $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}_q^{n\times m}$ 是一个 k 维码。对于 $1 \leq r \leq k$，其广义矩阵（*GM*）权为

$$d_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \leq \mathbb{F}_q^n, \dim(\mathcal{V}_\mathcal{L} \cap \mathcal{C}) \geq r\}.$$

用我们的术语来说，GM 权重是针对秩支撑空间族的广义 T-权重。

引理 3.5. 秩支撑空间族 $T = \{\mathcal{V}_\mathcal{L} : \mathcal{L} \leq \mathbb{F}_q^n\}$ 是步长为 m 的测试族。若 $m = n$，则 T 不是度量族。

证明。很容易验证，对于任意 n, m， T 都是一个测试族。若 $m = n$，令 $1 \leq r < n$，并令

$$\mathcal{A}_r = \{X \in \mathbb{F}_q^{n\times m} : \text{the last } n - r \text{ rows of } X \text{ are zero}\}.$$

那么 $\mathcal{A}_r = V_{\langle e_1,\ldots,e_r\rangle} \in T$, $\mathcal{A}_r \simeq \mathcal{A}_r^t$，但 $\mathcal{A}_r^t \notin T$，因此 T 不是度量。 □

考虑秩支撑空间族的广义 T-权重。由于 $\dim(\mathcal{V}_\mathcal{L}) = m\dim(\mathcal{L})$，可得对于所有 $1 \leq r \leq k$， $\tau_r(\mathcal{C}) = md_r(\mathcal{C})$。因此，定理 2.18 推出命题 65]。此时广义 T-权重的对偶性陈述如下。

定理 3.6. 设 T 是 $\mathbb{F}_q^{n\times m}$ 中秩支撑空间的族，且 $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}_q^{n\times m}$ 是一个 k 维码。对于每个 $0 \leq h < m$，序列 $\tau^h(\mathcal{C})$ 和 $\tau^{h+k}(\mathcal{C}^\perp)$ 可通过以下关系相互确定：

$$\tau^h(\mathcal{C}) = [nm]_m \setminus \{m(n+1) - x : x \in \tau^{h+k}(\mathcal{C}^\perp)\}.$$

特别地， $\tau(\mathcal{C})$ 可以确定 $\tau(\mathcal{C}^\perp)$。

3.3 $\mathbb{F}_{q^m}$-线性码的广义权重

设 $n \leq m$，并设 $V = \mathbb{F}_{q^m}^n$ 配备秩度量。 V 中的 $\mathbb{F}_{q^m}$-线性子空间称为向量秩度量码。回顾一下，$\mathbb{F}_{q^m}^n$ 上的秩度量定义为

$$\mathrm{d_{rk}}(u, v) = \dim(\langle u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n\rangle_{\mathbb{F}_q})$$

对于任意 $u = (u_1, \ldots, u_n)$ $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}_{q^m}^n$。关于 $\mathbb{F}_{q^m}^n$ 上向量秩度量码的定义和基本性质，以及它们与 $\mathbb{F}_q^{n\times m}$ 上 $\mathbb{F}_{q^m}$-线性码之间关系的讨论，请参阅 [11]。

关于向量秩度量码的广义权重，人们提出了许多等价的定义。定义列表及其等价性的讨论，请参阅 [11, 第 11 节。5] 这里，我们给出一种最便于实现本文目的的定义形式。

定义3.7. 设 $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}_{q^m}^n$ 是一个 k 维码。对于 $1 \leq r \leq k$，其 r^{th} 广义秩权为

$$w_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim_{\mathbb{F}_{q^m}}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ is an optimal anticode}, \dim_{\mathbb{F}_{q^m}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \geq r\}.$$

为将这些权重识别为 T-权的一个例子，注意到 OA 族是步长为 $\ell = 1$ 的测试族，并且根据 [11, 定理 11.3.16]，它与 SOA 族一致。因此，定理 2.4 给出了向量秩度量码的一族不变量。这些不变量与广义秩权重一致

$$\tau_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in T(A), \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{C}) \geq r\} = w_r(\mathcal{C}) \tag{8}$$

对所有 r 均成立。特别地，定理 2.18 给出了向量秩度量码的广义秩权对偶性陈述。

定理 3.8。设 T 是秩度量空间 $\mathrm{F}_{q^m}^n$ 中 OA 的族，且 $\mathcal{C}$ 是一个 k 维码。序列 $\tau(\mathcal{C})$ 和 $\tau(\mathcal{C}^\perp)$ 可通过以下关系相互确定：

$$\tau(\mathcal{C}) = [n] \setminus \{n + 1 - x : x \in \tau(\mathcal{C}^\perp)\}.$$

4 和秩度量中的广义权重

本节中，我们关注和秩空间

$$V = \mathbb{F}_q^{n_1 \times m_1} \times \ldots \times \mathbb{F}_q^{n_t \times m_t} = \mathbb{F}_q^{n_1 \times m_1} \times \ldots \times \mathbb{F}_q^{n_u \times m_u} \times \mathbb{F}_q^{t-u}$$

定理 1.5 的。我们不失一般性地假设，对于所有 i， $1 \leq n_i \leq m_i$，且$m_1 \geq \ldots \geq m_t$。令 $u = \max\{i \mid m_i \geq 2\}$。若 $m_1 = \ldots = m_t = 1$，则令 $u = 0$。

根据 [6, 定理 IV.11]，我们知道， V 中的一个 OA 是 $\mathrm{F}_q^{n_i \times m_i}$ 中每个 $1 \leq i \leq u$ 对应的 OA 与 F_q^{t-u} 中一个 OA 的乘积。令 S 为 V 中标准最优反码的族。由于秩度量空间中的每个 OA 都是 SOA，因此我们有

$$S = \{\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_t \mid \mathcal{A}_i \leq \mathbb{F}_q^{n_i \times m_i} \text{ is an OA for every } i \in [t]\}.$$

若 $t - u \geq 3$ 且 $q = 2$，则可以轻易构造出不包含于 S 的 OA 示例，另见 [6, 注 5.2]。和秩度量码的广义权重在 [6] 中利用族 S 定义。注意， S 一般不是测试族，见注 4.2。

定义 4.1 （[6, 定义 VI.1]）。设 $\mathcal{C} \leq V$ 是一个 k 维码。对于 $r = 1 \ldots,$ k其 r^{th} 广义和秩（*GSR*）权为

$$d_r(\mathcal{C}) = \min\left\{\sum_{i=1}^{t} \frac{\dim(\mathcal{A}_i)}{m_i} : \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_t \in S, \dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{A}) \geq r\right\}.$$

注 4.2。 </style}和秩度量中 SOA 的族 一般不是测试族。事实上，对于每个 , . . . , $r_t \geq 0$ 的取值，该族都包含维数为 $\sum_{i=1}^t r_i m_i$ 的码，因此，步长 ℓ 的唯一可能取值是 gcd $\{m_1, \ldots, m_t\}$ 的因子。然而，若 $\ell < m_1$，令 $\mathcal{A} = 0 \times \mathrm{F}_q^{n_2 \times m_2} \times \ldots \times \mathrm{F}_q^{n_t \times m_t} \in T$。任何包含 $\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{A}' \in S$，对于某个正整数 h，都有 $\dim(\mathcal{A}') = \dim(\mathcal{A}) + hm_1$。因此， S 不满足测试族的性质 4。我们得出结论，只有当 $\ell = m_1 = \ldots = m_t$ 时， S 才可能是测试族。

GSR 权重是码不变量 [6, 注 V.3], ，但它们并不满足类似于汉明度量或秩度量中的 Wei 对偶的对偶性陈述，见 [6,例 V.10]。然而，在 $m_1 = m_2 = \ldots = m_t = m$的情形下，对偶性成立，如 [6, 定理 V.9]所示。注意，若 $m = 1$，则 $V = \mathrm{F}_q^t$ 是汉明空间，且 GSR 权重与 GH 权重一致。若 $m > 1$，则 V 是秩度量空间的乘积，而 S包含所有最优反码。

GSR 权重作为 T-权。 本节中，我们将找出一个测试族 $T \subseteq S$，借此可以恢复并推广 [6, 定理 V.9]中的对偶性陈述。

定义 4.3。 若码 $\mathcal{A} \leq V$是 m-标准最优反码（m-*SOA*），则称其为 m-标准最优反码，且其维数能被 m整除。我们用 T 表示 V中所有 m-SOA 构成的族。

根据 [6, 定理 IV.11], , 每个 m-SOA 都具有如下形式

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_t \times \mathcal{A}_H \tag{9}$$

其中 $\mathcal{A}_i \subseteq \mathrm{F}_q^{n_i \times m}$是对所有 $i = 1, \ldots, t$而言的最优秩度量反码，且 $\mathcal{A}_H \subseteq \mathrm{F}_q^{\alpha}$是一个满足 $m|\dim(\mathcal{A}_H)$的 SOA。

引理 4.4。 假设 $m \mid t - u$。则 V中所有 m-SOA 构成的族 T是一个步长为 m的度量测试族。

证明。 $\mathrm{F}_q^{n_i \times m}$中的 SOA 族与 OA 族相同，并且如第 3.1 节所述，它是一个度量测试族。因此，根据引理 2.11，$\mathrm{F}_q^{n_i \times m}$中的 m-SOA 族是一个度量测试族。结合（9）和引理 2.10，可知 T 是一个测试族。利用 [6, 定理 IV.2], 中和秩度量下等距变换的结构，可以容易地验证 T 是一个度量族。 □

引理 4.4 意味着第2节中的所有陈述对于相应的T-权均成立。特别地，对偶性陈述如下。

定理 4.5. 设 $V = \mathrm{F}_q^{n_1 \times m} \times \ldots \times \mathrm{F}_q^{n_u \times m} \times \mathrm{F}_q^{t-u}$，其中 $m \geq 2, 0 \leq u \leq t, 1 \leq n_i \leq m$对所有 i均成立，且 $m \mid t - u$。设 T为 V 中 m-SOA 的族。设 $\mathcal{C} \leq V$为一个码。对于任意$0 \leq h \leq m-1$，序列 $\tau^h(\mathcal{C}^{\perp})$ 和 $\tau^{h+k}(\mathcal{C})$ 可相互确定。更准确地说，

$$\{\tau_s(\mathcal{C}^{\perp}) \,:\, s = h \mod m\} = [\nu]_m \setminus \{\nu + m - \tau_r(\mathcal{C}), r = k + h \mod m\}$$

其中 $\nu = \dim(V) = m(n_1 + \ldots + n_u) + t - u$。

注意，若 $u = t$，则 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^{n_1 \times m} \times \ldots \times \mathrm{F}_q^{n_u \times m}$，并且 T-权是 GSR 权重的重新缩放：

$$\tau_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in T, \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{C}) \geq r\} = m d_r(\mathcal{C})$$

对于 $1 \leq r \leq \dim(\mathcal{C})$。由此可知，定理 4.5 推广了 [6, 定理 5.9]。此外，注意到，若 $u < t$且 $m \mid t - u$，则码 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^{n_1 \times m} \times \ldots \times \mathrm{F}_q^{n_u \times m} \times \mathrm{F}_q^{t-u}$的 T-权重无法确定其 GSR 权重，而其 GSR 权重也无法确定其 T-权重。

例4.6. 设 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \leq V = \mathrm{F}_2^{2\times 2} \times \mathrm{F}_2^2$由下式给出

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (c, c) \right) \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\}, \quad \mathcal{C}_2 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (c, 0) \right) \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (c, 0) \right) \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\}.$$

若 T是 V 中 2正交阵的族，则 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 的广义 T-权为

$$\tau(\mathcal{C}_1) = \tau(\mathcal{C}_2) = (2, 2, 4) \text{ and } \tau(\mathcal{C}_3) = (2, 2, 6),$$

而其 GSR 权重为

$$d(\mathcal{C}_1) = d(\mathcal{C}_3) = (1, 1, 3) \text{ and } d(\mathcal{C}_2) = (1, 1, 2).$$

我们以一个简单示例结束本节，展示对偶性陈述的应用 .

例 4.7。 由下式给出的码 $\mathcal{C} \leq V = \mathrm{F}_2^{2\times 2} \times \mathrm{F}_2^4$

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (c, c, c, c) \right) \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\},$$

维数为 $k = 3$，且 $\nu = \dim(V) = 8$。令 T为 V 中 2正交阵的族。可以验证， $\mathcal{C}$ 的广义 T-权重为 $\tau(\mathcal{C}) = (2, 2, 6)$。由定理 2.18

$$\{\tau_2(\mathcal{C}^\perp), \tau_4(\mathcal{C}^\perp)\} = \{\tau_r(\mathcal{C}^\perp) \mid r =_2 0\} = [\nu]_2 \setminus \{\nu + 2 - \tau_r(\mathcal{C}) \mid r =_2 3\} = \{2, 6\}$$
$$\{\tau_1(\mathcal{C}^\perp), \tau_3(\mathcal{C}^\perp), \tau_5(\mathcal{C}^\perp)\} = \{\tau_r(\mathcal{C}^\perp) \mid r =_2 1\} = [\nu]_2 \setminus \{\nu + 2 - \tau_r(\mathcal{C}) \mid r =_2 4\} = \{2, 4, 6\}.$$

因此，对偶码的权重层级为 $\tau(\mathcal{C}^\perp) = (2, 2, 4, 6, 6)$。也可以直接计算 $\mathcal{C}^\perp$ 的权重来验证这一点。

5 广义 MDS 和 MRD 权重

本节中，我们检验定义 T-权重时所作假设的适用范围。我们研究两类权重：一类定义在汉明空间中，另一类定义在秩度量空间中；它们使用 MDS 码和 MRD码来定义，而非定理 2.4 中的测试族。我们证明这些权重是码不变量，但不满足对偶性陈述。由于 MDS 码是 $q \gg 0$ 的测试族，因此在这种情况下，相应的广义权重序列满足对偶性陈述。此外，当 $q \gg 0$ 时，这些广义权重等价于码距离，后者是另一种在 [7] 中定义的码不变量。

5.1 广义 MDS 权重

本节中，设 $V = \mathrm{F}_q^n$ 为汉明度量空间， $n \leq q + 1$。令$M = M_{n,q}^{\mathrm{H}}$为 F_q^n 中 MDS 码构成的族。众所周知， M非空，且在对偶和码等价下封闭。假设 $n \leq q + 1$ 可保证M 对所有 $0 \leq k \leq n$均包含一个维数为 k 的码。注意，对于满足定理 1.14 的 q 取值，当 $n \geq q+2$ 时，不存在 MDS 码；或者，维数为k 的 MDS 码仅在 k的少数取值下存在，因此下一个定义会变得平凡或不那么有趣。

与定理 2.4 类似，我们可以通过将一个码与 MDS 码相交，为该码关联一列广义权重。

定义 5.1。 设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$ 是一个 k维码。对于每个 $1 \leq r \leq k$，其广义 *MDS*（*GMDS*）权重为

$$\mu_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in M, \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{C}) \geq r\}.$$

令 $\mu(\mathcal{C})$ 表示广义 MDS 权重序列。

下一个引理概述了这些权重的主要性质。

引理 5.2. 设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$ 是一个 k 维码，$k^\perp = n - k$。则：

1. GMDS 权重是 $\mathcal{C}$ 的不变量；2. $r \leq \mu_r(\mathcal{C})$ $\leq n - k + r$ 对所有 $r = 1, \ldots, k$ 均成立；3. μ_1 $(\mathcal{C}) \leq \mu_2(\mathcal{C}) \leq \ldots \leq \mu_k(\mathcal{C})$；4. $\mu_{k^\perp + r - \mu_r(\mathcal{C})}(\mathcal{C}^\perp)$ $\leq n - \mu_r(\mathcal{C})$ 对所有 $r = 1, \ldots, k$ 均成立。

证明. 1. 这些权重是不变量，因为族 M 在等距变换下封闭，因此定理 2.8 的论证适用。

2. 这些不等式由以下两个事实得出：若 $\dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{M}) \geq r$，则 $\dim(\mathcal{M}) \geq r$。若 $\dim(\mathcal{M})$ $= n - k + r$，则 $\dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{M}) \geq r$。
3. 由于 $\dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{M}) \geq r$ 蕴含 $\dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{M}) \geq r - 1$，因此 $\mu_{r-1}(\mathcal{C}) \leq \mu_r(\mathcal{C})$。
4. 设 $\mathcal{M} \in M$ 是一个达到 $\mu_r(\mathcal{C})$ 的码，则定理 2.17 证明中的相同推理表明 $\dim(\mathcal{C}^\perp \cap \mathcal{M}^\perp)$ $\geq k^\perp + r - \mu_r(\mathcal{C})$。所需不等式由此得出。 □

下一个例子表明，与广义汉明权重不同，GMDS 权重并不构成严格递增序列。

例 5.3. 设 $q = 7$, $n = 6$，并考虑由生成矩阵指定的 MDS 码 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{F}_7^6$

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

与 G 的列相对应的射影点在 2 维射影空间 PG(2,7) 中构成一条完备弧（见 [17]），这意味着对偶码 $\mathcal{C}^\perp$ 不能嵌入 MDS 超码（见 [36]）。由此可知，$\mathcal{C}$ 是一个 $[6, 3, 4]_7$ MDS 码，且确实包含一个维数为 2 的 MDS 子码。因此，我们有 $\mu_2(\mathcal{C}) > 2$ 和 $\mu_2(\mathcal{C}) \leq \mu_3(\mathcal{C}) = 3$，这意味着 $\mu_2(\mathcal{C}) = \mu_3(\mathcal{C}) = 3$。

这个例子还表明，M 不是一个测试族。下一个命题根据码的对偶码的 GMDS 权重，对该码的 GMDS 权重给出一个限制。不过，这并不是一个对偶性陈述。下一个例子将表明，GMDS 权重不满足对偶性陈述。

命题 5.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $[n, k]_q$ 码，则对所有 $t = 1, \ldots, k$

$$\mu_t(\mathcal{C}) \in [n] \setminus \{n + 1 - \mu_r(\mathcal{C}^\perp) : r = 1, \ldots n - k\}.$$

证明。设 $k^\perp = n - k$ 并反设存在 $t \in [k]$ 和 $r \in [k^\perp]$，使得 $\mu_t(\mathcal{C}) + \mu_r(\mathcal{C}^\perp) = n + 1$。由定理 5.2.4

$$\mu_t(\mathcal{C}) + \mu_{k^\perp + t - \mu_t(\mathcal{C})}(\mathcal{C}^\perp) \leq n,$$

因此，由定理 5.2.3 可得 $r \geq k^\perp + t + 1 - \mu_t(\mathcal{C})$。由定理 5.2.4 还可得

$$\mu_r(\mathcal{C}^\perp) + \mu_{k + r - \mu_r(\mathcal{C}^\perp)}(\mathcal{C}) \leq n,$$

根据定理 5.2.3，这意味着 $t \geq k + r + 1 - \mu_r(\mathcal{C}^\perp)$。将这两个不等式相加可得 $t + r \geq n + t + r + 2 - \mu_t(\mathcal{C}) - \mu_r(\mathcal{C}^\perp)$，即 $\mu_t(\mathcal{C}) + \mu_r(\mathcal{C}^\perp) \geq n + 2$，矛盾。 □

例 5.5。 考虑分别由以下内容生成的 $[8,4,3]_7$ 码和 $[8,4,4]_7$ 码

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

我们断言，存在 MDS 码 $\mathcal{M}_i^j$，使得 $\dim(\mathcal{M}_i^j) = j$，且 $\mathcal{M}_i^j \leq \mathcal{C}_i$，其中 $j = 1$、2、3 和 $i = 1$、2。事实上，对于 $j = 1$、2，可以令 $\mathcal{M}_i^j$ 为生成矩阵为 M_i^j 的码，其中

$$M_1^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_2^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

此外，可以验证 $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ 是一个维数为 3 的 MDS 码。这就证明了该断言，并表明对于 $i = 1$、2，$j = 1$、2、3，有 $\mu_j(\mathcal{C}_i) = j$。由于 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 都不是 MDS 码，根据定理 5.2，对于 $i = 1$、2，我们还有 $\mu_4(\mathcal{C}_i^\perp) = 5$。综上，我们有

$$\mu(\mathcal{C}_1) = \mu(\mathcal{C}_2) = (1, 2, 3, 6).$$

考虑对偶码。每个 $\mathcal{C}_i^\perp$ 都包含维数为 $j = 1$、2 的 MDS 子码 $\mathcal{N}_i^j$，其生成矩阵为 N_i^j

$$N_1^1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad N_2^1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$
$$N_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 6 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad N_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

由此可得 $\mu_j(\mathcal{C}_i^\perp) = j$ for $j = 1,\ 2, i = 1,\ 2$。我们通过穷举搜索计算了 $\mu_3(\mathcal{C}_i^\perp),\ i = 1,\ 2$ 的值。

令 $L_3(\mathcal{C}_1^\perp) = \{D \leq \mathcal{C}_1^\perp \mid \dim(D) = 3\}$，则可验证

$$\max\{d(D) \mid D \in L_3(\mathcal{C}_1^\perp\} = 5$$

因此 $\mu_3(\mathcal{C}_1^\perp) \neq 3$。根据定理 5.4，$\mu_4(\mathcal{C}_1) = 6$。对 $\mathcal{C}_2$ 应用相同的策略可得 $\max\{d(D)\ D \in L_3(\mathcal{C}_2^\perp\} = 5$ 以及 $\mu_4(\mathcal{C}_2) = 6$。由于 $\mu_4(\mathcal{C}_i^\perp) = 5$，根据定理 5.2，我们有$\mu_3(\mathcal{C}_i^\perp) \in \{4, 5\}$。生成矩阵为

$$N_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

是一个里德–所罗门码，因此是 MDS。直接计算可验证，它与 $\mathcal{C}_2^\perp$ 的交维数为 3。这意味着 $\mu_3(\mathcal{C}_2^\perp) = 4$，因此

$$\mu(\mathcal{C}_2^\perp) = (1, 2, 4, 5).$$

我们断言 $\mu_3(\mathcal{C}_1^{\perp}) \neq 4$。事实上，反设 $\mu_3(\mathcal{C}_1^{\perp}) = 4$。那么存在一个维数为 4 的 MDS 码 $\mathcal{M}$，使得 $\dim(\mathcal{C}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}) \geq 3$。由于 $\mathcal{C}_1^{\perp}$不是 MDS 码，因此 $\dim(\mathcal{C}_1^{\perp} \cap \mathcal{M}) = 3$，所以 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{M}$ 有一个维数为 3–的子码。由于我们在素域上工作，根据 [3, Corollary 9.2]，$\mathcal{M}$ 等价于一个扩展 Reed-Solomon 码。因此，$\mu_3(\mathcal{C}_1^{\perp}) = 4$ 当且仅当列表 $L_3(\mathcal{C}_1^{\perp})$ 和 $L_3(\mathcal{M}) = \{D \leq \mathcal{M} \mid \text{维数为 } \dim(D) = 3\}$ 的码中含有等价码。然而，可以验证，$L_3(\mathcal{C}_1^{\perp})$ 中的所有码的覆盖半径均为 4，而根据超码引理 [19, Lemma 11.1.5]，$L_3(\mathcal{M})$ 中的所有码的覆盖半径均为 5。因此，$\mu_3(\mathcal{C}_1^{\perp}) \neq 4$，从而 $\mu(\mathcal{C}_1^{\perp}) = (1, 2, 5, 5)$。特别地，$\mu(\mathcal{C}_1^{\perp}) \neq \mu(\mathcal{C}_2^{\perp})$。

5.1.1 恢复 GMDS 权重的对偶性：$q \to \infty$

正如上一节所述，GMDS 权重缺乏对偶性，与 $M_{n,q}^{\mathrm{H}}$ 中的码之间缺乏相互包含关系有关。例如，定理 5.5 的构造严重依赖于这一特征，定理 5.3 也强调了这一点。正如我们在上一节中所观察到的，这通常会阻止 MDS 码族成为测试族。然而，这并不排除在某些参数范围内，MDS 码族是测试族的可能性。当域大小 q 相对于长度足够大时，情况正是如此，定理 5.7 说明了这一点。我们所述结果的证明依赖于 Pellikaan 的一个结果的如下变体。

命题 5.6 ([26, 命题 5.1])。设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$，且 $\mathrm{d_H}(\mathcal{C}^{\perp}) > t$，以及 $q > \max\{\binom{n}{i} \mid 1 \leq i \leq t\}$。则存在一个 $\mathcal{M}_0 \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{M}_t$ MDS 码序列，包含于$\mathcal{C}$中。

证明。按照 [26] 中的论证，可以用归纳法证明该结论。与 [26] 相比，唯一的区别是，我们假设域 F_q 足够大，能够满足通过在 [26] 中取适当扩域所满足的要求。 □

命题 5.7。设 $q \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$，则每个 MDS 码 $\mathcal{M} \leq \mathrm{F}_q^n$ 都包含在一个步长为 $\ell = 1$ 的 MDS 码固定步长链中。

证明。设 $\mathcal{M}$ 是 F_q^n 的一个 k 维 MDS 子码。由于 $\mathrm{d_H}(\mathcal{M}) = n-k+1 > \dim(\mathcal{M}^{\perp})$，由定理 5.6 可得一个 MDS 码链

$$0 = \mathcal{M}_0 \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{M}_{k-1} \subsetneq \mathcal{M}_k = \mathcal{M}.$$

对 $\mathcal{M}^{\perp}$ 应用同一结论，可得一条链

$$\mathcal{N}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{N}_{n-k} \subsetneq \mathcal{N}_{n-k+1} = \mathcal{M}^{\perp}.$$

对偶化并合并这两条链，便得到所需的维数连续的 MDS 码链

$$0 = \mathcal{M}_0 \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{M}_{k-1} \subsetneq \mathcal{M}_k = \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}_{k+1} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{M}_{n-1} \subsetneq \mathcal{M}_n = \mathbb{F}_q^n,$$

其中 $\mathcal{M}_i = \mathcal{N}_{n-i}^{\perp}$ 对 $0 \leq i \leq n-k$ 成立。注意，定理 5.6 适用于任意维数的 MDS 码，因为我们假设 $q \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq \max\{\binom{n}{i} \mid 1 \leq i \leq t\}$。 □

定理 5.7 表明，当 q 足够大时，$M_{n,q}^{\mathrm{H}}$ 是一个度量测试族。因此，在此参数范围内，GMDS 权重是不变量，并满足定理 2.18 给出的对偶性陈述。

定理 5.8. 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{F}_q^n$ 是一个 $[n,k]_q$ 码。若 $q \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$，则序列 $\tau(\mathcal{C}^\perp)$ 和$\tau(\mathcal{C})$ 可通过以下方式相互确定

$$\{\tau_s(\mathcal{C}^\perp) \,:\, 1 \leq s \leq n-k\} = [n] \setminus \{n+1-\tau_r(\mathcal{C}),\, 1 \leq r \leq k\}.$$

5.1.2 与子码距离的关系

子码距离是度量向量空间中线性码的不变量，其定义见 [7]。我们回顾一下（F_q^n，$\mathrm{d_H}$）中的定义。

定义 5.9。 设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$ 是一个 k 维码。对于 $1 \leq i \leq k$，子码距离为

$$\alpha_i(\mathcal{C}) = \max\{\mathrm{d_H}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \leq \mathcal{C}, \dim(\mathcal{D}) = i\}.$$

子码距离是 $\mathcal{C}$的不变量，但不是 $\mathcal{C}$ 的拟阵的不变量，如 [7] 所示。此外，它们可自然地用作区分不等价 MDS 码的码区分器。事实证明，当域大小 q 足够大时，子码距离与 GMDS 权重是等价的不变量。这是因为，对于足够大的 q，每个码都可以嵌入一个具有相同最小距离的更大的 MDS 码中。这一结果已在 [26, 推论 5.2] 中得到证明，其中所用的域扩张 F_{q^N} 是 F_q 的扩张，且扩张次数 N 足够大。现在我们给出这一结果的另一种证明。

引理 5.10。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $[n,k,d]_q$码。若 $q \gg 0$，则存在一个包含 $\mathcal{C}$ 的 $[n, n-d+1, d]_q$码$\mathcal{M}$ 。

证明。 若 $\mathcal{C}$ 是 MDS，则该结论显然成立。因此，我们假设 $k < n-d+1$。考虑码集合

$$F = \{\mathcal{D} \geqslant \mathcal{C} \,:\, \dim(\mathcal{D}) = n-d+1\} \supseteq F' = \{\mathcal{D} \in F \,:\, d(\mathcal{D}) < d\}.$$

如果 $|F| - |F'| > 0$，则存在如陈述中所述的码 $\mathcal{M}$。众所周知，$|F| = \binom{n-k}{d-1}_q$，因此当 $1 - \frac{|F'|}{|F|} > 0$ 时我们的结论得证。由 [5, 定理 5.1] 可知

$$\frac{|F'|}{|F|} \leq \frac{(q^{n-d+1} - q^k)|B_{d-1}^*|}{(q-1)(q^n - q^k)},$$

其中 $B_{d-1}^* = \{x \in \mathrm{F}_q^n \colon \ x \neq 0,\ \mathrm{w_H}(x) \leq d-1\}$。那么，只要满足以下条件， $\mathcal{M}$ 就存在

$$\sum_{i=1}^{d-1} \binom{n}{i} (q-1)^i = |B_{d-1}^*| < \frac{(q-1)(q^n - q^k)}{q^{n-d+1} - q^k},$$

对于任意 $q \gg 0$，情况都是如此，因为不等式右侧为 $\geq C_1 q^d$，而 $|B_{d-1}^*| \leq C_2 q^{d-1}$，其中 C_1 和 C_2 为正数常量。 □

下一个结果建立了子码距离与 GMDS 权重之间的关系。

命题 5.11. 假设 $q \gg 0$，并令 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^n$为一个 k 维码。则

$$\mu_r(\mathcal{C}) = n + 1 - \alpha_r(\mathcal{C})$$

对于 $1 \leq r \leq k$。

证明。 GMDS 权重的定义可以改写为

$$\mu_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{M}) \ : \ \mathcal{M} \supseteq \mathcal{D}, \mathcal{D} \leq \mathcal{C}, \dim(\mathcal{D}) = r\}.$$

假设 q 足够大，使得定理 5.10 成立，并设 $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}$ 是一个最小距离为 d的子码。根据定理 5.10， $\mathcal{D}$ 包含于一个最小距离为 d、维数为 $n-d+1$的 MDS 码 $\mathcal{M}$ 中。将这一推理应用于 $\mathcal{C}$的所有子码，可得

$$\begin{aligned}\mu_r(\mathcal{C}) &= \min\{\dim(\mathcal{M}) \ : \ \mathcal{M} \supseteq \mathcal{D}, \mathcal{D} \leq \mathcal{C}, \dim(\mathcal{D}) = r\} \\ &= \min\{n+1-\mathrm{d_H}(\mathcal{D}) \ : \ \mathcal{D} \leq \mathcal{C}, \dim(\mathcal{D}) = r\} \\ &= n+1-\max\{\mathrm{d_H}(\mathcal{D}) \ : \ \mathcal{D} \leq \mathcal{C}, \dim(\mathcal{D}) = r\}\end{aligned}$$

对于 $1 \leq r \leq k$。 □

5.2 广义最大秩距离权重

本节讨论广义最大秩距离权重，它们是秩度量空间 $\mathrm{F}_q^{n\times m}$中 GMDS 权重的类比。

定义 5.12。 设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^{n\times m}$是一个 k维码。对于 $r = 1, \ldots, k$， $\mathcal{C}$ 的广义最大秩距离（*GMRD*）权重为

$$\mu_r(\mathcal{C}) = \min\{\dim(\mathcal{M}) \ : \ \mathcal{M} \text{ is an MRD code, } \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{C}) \geq r\}.$$

GMRD 权重序列记为 $\mu(\mathcal{C})$。

T以下引理总结了 GMRD 权重的一些直接性质 .

引理 5.13. 设 $\mathcal{C} \leq \mathrm{F}_q^{n\times m}$是一个 k 维码， $k^\perp = nm - k$。那么 :

1. GMRD 权重是 $\mathcal{C}$的不变量，2. $\lceil \frac{r}{m} \rceil m \leq \mu_r(\mathcal{C})$ $\leq \lceil \frac{nm-k+r}{m} \rceil m$对 $r = 1, \ldots, k$成立，3. $\mu_1(\mathcal{C}) \leq \mu_2(\mathcal{C}) \leq \ldots \leq \mu_k(\mathcal{C})$，4. $\mu_{k^\perp+r-\mu_r(\mathcal{C})}(\mathcal{C}^\perp) \leq nm - \mu_r(\mathcal{C})$对 $r = 1, \ldots, k$成立。

证明. 1.、3. 和 4. 的论证与定理 5.2 中相同，只需将 MDS 码替换为 MRD码。2. 的证明与定理 2.15 中关于 T-权的界所采用的步骤相同。

□

与第 3 节一样，我们根据相应测试族中的元素可嵌套这一性质，推导出指标相差 m 的权之间的严格不等式。MRD 码不一定可嵌套，也就是说，存在一些 MRD 码不包含在维数大 m 的 MRD 码中。对偶地，我们可以找到不包含余维数为 m 的 MRD 子码的 MRD 码。域 F_2 上的这类码的一个例子见 [4, Example 38]。这与对码的覆盖半径和极大度的研究有关。

下一个结果是定理 5.4 在秩度量中的对应结论，证明方法也类似。

命题 5.14。 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^{n\times m}$是一个 k–维码， $n \le m$。我们有

$$\mu_t(\mathcal{C}) \in [nm]_m \setminus \{(n+1)m - \mu_r(\mathcal{C}^\perp) \ : \ r =_m t-k\}$$

对每个 $t = 1$、.....、 k。

证明。 令 $k^\perp = nm - k$ ，并反设存在 $t \in [k]$ 和 $r \in [k^\perp]$，使得 $\mu_t(\mathcal{C}) + \mu_r(\mathcal{C}^\perp) = (n+1)m$。根据定理 5.13.4

$$\mu_t(\mathcal{C}) + \mu_{k^\perp+t-\mu_t(\mathcal{C})}(\mathcal{C}^\perp) \le nm,$$

因此，根据定理 5.13.3，有 $r > k^\perp + t - \mu_t(\mathcal{C})$。由于 $m \mid r - t + k$，这等价于 $r \ge k^\perp + t + m - \mu_t(\mathcal{C})$。根据定理 5.13.4，还可得

$$\mu_r(\mathcal{C}^\perp) + \mu_{k+r-\mu_r(\mathcal{C}^\perp)}(\mathcal{C}) \le nm,$$

根据定理 5.13.3，这意味着 $t > k+r-\mu_r(\mathcal{C}^\perp)$。由于 $m \mid r-t+k$，这等价于 $t \ge k + r + m - \mu_r(\mathcal{C}^\perp)$。将两个不等式相加，得到 $t + r \ge nm + t + r + 2m - \mu_t(\mathcal{C}) - \mu_r(\mathcal{C}^\perp)$，即 $\mu_t(\mathcal{C}) + \mu_r(\mathcal{C}^\perp) \ge (n+2)m$，矛盾。 □

推论 5.15。对于所有 $1 \le r \le m$ 集合

$$\mu^r(\mathcal{C}) = \{\mu_t(\mathcal{C}) \ : \ t = r \mod m\} \quad \text{and} \quad \mu^{r-k}(\mathcal{C}^\perp) = \{\mu_t(\mathcal{C}^\perp) \ : \ t = r-k \mod m\}$$

是 $[nm]_m$的互不相交子集。

与 GMDS 权重的情形类似，定理 5.14 与对偶性陈述之间的区别在于，我们考虑的权重子序列通常并非 $[nm]_m$ 的互补子集。下面的例子表明，存在具有相同 GMRD 权重的码，而它们的对偶码具有不同的 GMDR 权重。

例 5.16。 对于 $q = 2$, $n = m = 4$， [32] 中给出了 MRD 码在等价意义下的分类。最小距离为 4 的码有 3 个等价类（根据 [21, 1]中的半域分类），而最小距离为 3 的码有一个等价类（即 Gabidulin 码类）。取对偶后，我们得到一个最小距离为 2 的等价类和三个最小距离为 1 的等价类。在维数为 4 的三个等价类中，两个的覆盖半径为 3，一个的覆盖半径为 2。特别地，覆盖半径为 3 的两个等价类中，有一个包含 Gabidulin 码 $\mathcal{C}_1$。令 $\mathcal{C}_2$ 为覆盖半径为 2 的等价类的一个代表元。由于 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 都是维数为 1 的 MRD 码，因此$\mu(\mathcal{C}_1) = \mu(\mathcal{C}_2) = (1, 1, 1, 1)$。然而，虽然 $\mathcal{C}_1$ 包含于一个维数为 8 的 Gabidulin 码中， $\mathcal{C}_2$ 却不包含于任何维数为 8 的 MRD 码中，否则将与超码引理 [19, 引理 11.1.5]矛盾。由此可得， $\mathcal{C}_1^\perp$ 包含一个维数为 8 的 MRD 子码，而 $\mathcal{C}_2^\perp$不包含任何此维数的 MRD 子码。因此， $\mu_8(\mathcal{C}_1^\perp) = 2$ 且$\mu_8(\mathcal{C}_2^\perp) > 2$。由于 $\mathcal{C}_2^\perp$是 MRD 码，因此它有 $\mu_{12}(\mathcal{C}_2^\perp) = 3$，从而 $\mu_8(\mathcal{C}_2^\perp) = 3$。这表明

$$\{\mu_t(\mathcal{C}_1^\perp) \mid t =_4 0\} \ne \{\mu_t(\mathcal{C}_2^\perp) \mid t =_4 0\},$$

这表明不存在类似于定理 2.18 的对偶性陈述。

自然会想知道，GMRS权重是否与秩度量中的子码距离有关。秩度量空间 $(\mathbb{F}_q^{n\times m}, \mathrm{d}_{\mathrm{rk}})$ 中子码距离的定义 [7] 与定理 5.9 类似。

定义 5.17. 设 $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}_q^{n\times m}$是一个 k 维码。对于 $1 \leq i \leq k$， i^{th} 子码距离 为

$$\alpha_i(\mathcal{C}) = \max\{\mathrm{d}_{\mathrm{rk}}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \leq \mathcal{C}, \dim(\mathcal{D}) = i\}.$$

容易证明，第一个子码距离就是该码的最大重量，并且与第一个 GMRD权重的关系如下。

引理5.18. 对于每个码 $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}_q^{n\times m}$, $n \leq m$，都有

$$\mu_1(\mathcal{C}) = n + 1 - \mathrm{maxrk}(\mathcal{C}).$$

证明. 设 $c \in \mathcal{C}$ 是一个秩最大的元素。存在一个最小距离等于 $\mathrm{rk}(c)$ 的 MRD码 $\mathcal{M}$ ，以及两个线性变换 $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$、 $M \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$，使得对于某个 $x \in \mathcal{M}$，有 $c = NxM$ 。例如，只需令 $\mathcal{M}$ 为由 c 及其前 $n - \mathrm{rk}(c)$ 个 Frobenius幂生成的 Gabidulin 码。由此可得，$N\mathcal{M}M$ 是一个维数为 $m(n + 1 - \mathrm{rk}(c))$ 且 $\dim(\mathcal{C} \cap N\mathcal{M}M) \geq 1$ 的 MRD码。由于这是包含一个 $\mathcal{C}$ 元素的 MRD码可能具有的最小维数，结论得证。 □

第 5.1.2 节中用于建立 GMDS 权重与子码距离之间渐近联系的关键论证是：当 q 足够大时，每个最小距离为 d 的码都包含于一个具有相同最小距离的 MDS码中。该证明与文献 [5] 中给出的、用于确立相同维数的码中 MDS码的稠密性的证明密切相关。研究 MRD 码的稠密性是一个更为复杂的问题。事实上，与 MDS 码不同，已知 MRD码在具有给定维数的码中是稀疏的，只有极少数例外 [16]。特别是，第 5.1.2 节所采用的证明技术无法自然地从汉明度量推广到秩度量。

然而，如果考虑向量秩度量空间 $(\mathbb{F}_{q^m}^n, \mathrm{d}_{\mathrm{rk}})$ 中的子码距离，那么便可以建立 GMRD权重与子码距离之间的关系，其形式类似于第 5.1.2 节中的关系。事实上，在这一背景下，MRD码的稠密性已得到充分理解，因此可以采用类似于第 5.1.2 节中的论证。

参考文献

[1] Kelly Aman。《半域计数》。离散数学电子札记，40：15–19，2013。[2] Alexei Ashikhmin。关于伽罗瓦环线性码的广义汉明权重。*Designs,Codes and Cryptography*, 14(2)：107–126，1998。[3] Simeon Ball。关于有限向量空间中这样一类向量集：其中每个基数大小的子集都是一个基。欧洲数学会杂志（*EMS Publishing*），14(3)，2012。[4] Eimear Byrne 和 Alberto Ravagnani。赋予秩度量的矩阵码的覆盖半径。*SIAM*离散数学杂志，31(2)：927–944，2017。

[5] Eimear Byrne 和 Alberto Ravagnani。划分平衡码族与编码理论中的渐近计数。组合理论杂志 *A*辑，171：105169，2020。[6] Eduardo Camps-Moreno、Elisa Gorla、Cristina Landolina、Elisa Lorenzo Garc´ía、Umberto Mart´ínez-Pe˜ñas 和 Flavio Salizzoni。和秩度量下的最优反码、MSRD码与广义权重。*IEEE* 信息论汇刊，68(6)：3806–3822，2022。[7] Eduardo Camps-Moreno、Elisa Gorla 和 Hiram H L´ópez。码距离：线性码的一类新不变量。*arXiv*预印本 *arXiv:2509.16424*，2025。[8] Sara D. Cardell、Marcelo Firer 和 Diego Napp。卷积码的广义列距离。*IEEE* 信息论汇刊，66(11)：6863–6871，2020。[9] Philippe Delsarte。有限域上的双线性形式及其在编码理论中的应用。组合理论杂志 *A*辑，25(3)：226–241，1978。[10] G. David Forney。线性分组码的维数/长度剖面与格复杂度。*IEEE* 信息论汇刊，40(6)：1741–1752，1994。[11] Elisa Gorla。秩度量码。载于《编码理论简明百科全书》，第227–250页。Chapman and Hall/CRC，2021。[12] Elisa Gorla、Relinde Jurrius、Hiram H. L´ópez 和 Alberto Ravagnani。秩度量码与 q-拟阵。代数组合学杂志，52：1–19，2020。[13] Elisa Gorla 和 Alberto Ravagnani。环上码的广义权重与单项式理想不变量。*arXiv*预印本 *arXiv:2201.05813*，2022。[14] Elisa Gorla 和 Flavio Salizzoni。卷积码的广义权重。*IEEE* 信息论汇刊，69(8)：4927–4943，2023。[15] Elisa Gorla 和 Flavio Salizzoni。卷积码的广义列权与等价性。*Journal of Algebra and its Applications*，23(7)：2550072，2024。[16] Anina Gruica 和 Alberto Ravagnani。线性子空间的公共补空间与MRD码的稀疏性。*SIAM*应用代数与几何杂志，6(2)：79–110，2022。[17] James Hirschfeld 和 Peter William。有限域上的射影几何。牛津大学出版社，1998。[18] Hiroshi Horimoto 和 Keisuke Shiromoto。有限链环上码的广义汉明权重。载于 应用代数、代数算法与纠错码：第*14*届国际研讨会，*AAECC-14*，澳大利亚墨尔本，*2001*年*11*月*26–30*日，论文集*14*，第141–150页。施普林格，2001。[19] W. Cary Huffman 和 Vera Pless。纠错码基础。剑桥大学出版社，2010。

[20] Trygve Johnsen 和 Hugues Verdure。与拟阵相关的 Stanley–Reisner 环的汉明权和贝蒂数。*Applicable Algebra in Engineering, Communicationand Computing*，24(1):73–93，2013。[21] Donald Ervin Knuth。有限半域与射影平面。博士论文，加利福尼亚理工学院，1963。[22] Jun Kurihara、Ryutaroh Matsumoto 和 Tomohiko Uyematsu。线性码的相对广义秩权及其在网络编码中的应用。*IEEE* 信息论汇刊，61(7):3912–3936，2015。[23] Dajian Liao 和 Zihui Liu。Frobenius 环上的相对广义汉明重量。*Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*，53(2):340–348，2022。[24] Umberto Mart´ınez-Pe˜nas 和 Ryutaroh Matsumoto。面向窃听网络普适安全性的矩阵码相对广义矩阵权重。*IEEE* 信息论汇刊，64(4):2529–2549，2017。[25] Diego Napp 和 Filipa Santana。多次传输网络编码。载于*Network Coding andSubspace Designs*，第91–104页。施普林格，2018。[26] Ruud Pellikaan。关于纠错对的存在性。*Journal of Statistical Planningand Inference*，51(2):229–242，1996。[27] Alberto Ravagnani。广义权重：一种反码方法。*Journal of Pure andApplied Algebra*，220(5):1946–1962，2016。[28] Alberto Ravagnani。秩度量码及其对偶理论。*Designs, Codes andCryptography*，80(1):197–216，2016。[29] Joachim Rosenthal 和 Eric V. York。关于卷积码的广义汉明权重。*IEEE* 信息论汇刊，43(1):330–335，1997。[30] Beniamino Segre。有限射影平面中的卵形。*Canadian Journal of Mathematics*，7:414–416，1955。[31] Beniamino Segre。有限几何问题。载于*Atti del Congresso Internazionale diMatematica (Amsterdam, 1954)*，第3卷，第187–197页，格罗宁根，1956。Erven P. Noordhoff。[32] John Sheekey。13. MRD码：构造与关联。载于组合学与有限域：差集、多项式、伪随机性及其应用，第23卷，第255–286页。德古意特，2019。[33] Mohannad Shehadeh 和 Frank R Kschischang。由和秩码构造的空时码。*IEEE* 信息论汇刊，68(3):1614–1637，2021。[34] Richard Singleton。最大距离 q 元码。*IEEE* 信息论汇刊，10(2):116–118，1964。[35] Victor K Wei。线性码的广义汉明权重。*IEEE* 信息论汇刊，37(5):1412–1418，1991。

[36] Jun Zhang、Daqing Wan 和 Krishna Kaipa。射影 Reed-Solomon 码的深洞。*IEEE* 信息论汇刊，66(4):2392–2401，2019。