又一种立方类型论，但采用语义方法

Krzysztof Kapulkin
Yufeng Li

arXiv:2512.17548v1 [cs.LO] 19 Dec 2025

我们提出一种新的立方类型论，并（略带自嘲地）称之为朴素立方类型论；我们使用宇宙范畴框架研究其语义。该框架与 Uemura 的具有可表示态射的范畴类似。特别是，我们证明，这种新类型论可以在多种场景中得到解释，包括单纯集合和笛卡尔立方集合。

引言

Voevodsky 于 2009年 左右提出的单价公理，是依赖类型论的一项重大突破，因为它提出了一种基于同伦论、构建数学基础的全新方法。由此产生的系统称为同伦类型论，自此以来便受到数学界和计算机科学界的广泛关注。然而，提出一条公理意味着，不能再想当然地认为由此产生的类型论具有计算内容；事实上，Voevodsky 的同伦规范性猜想大意是断言单价公理“能够计算”，这也成为该领域的核心未解问题。这项研究的首个解决方案及一项重大突破，是引入立方类型论 [CCHM15], 一种具有强计算性质的同伦类型论扩展[CHS22] 其中单价公理只是一条定理。

目前，立方类型论、立方证明助手和立方库层出不穷；例如： [CCHM15；OP16；ABCHHL21；BBCGSV16；AHH18；CH21；CH19；AKGB24；AK18；VMA19；ACHHS18；LOPS18]。当然，这份名单远非完整，我们谨向未列入其贡献者致歉。除少数值得注意的例外外，这些发展主要由语法层面的考量推动，具体而言，是为单价公理提供计算性解释。在语义方面，这些类型论可以在多种基于立方集合的模型中得到解释，其中包括基于德摩根立方集合的原始模型 [CCHM15]，以及基于笛卡尔立方集合的模型 [ABCHHL21]。Orton 和 Pitts [OP16], 随后与 Licata 和 Spitters [LOPS18], 一道，对范畴为德摩根立方集合的立方类型论原始模型中的关键要素进行抽象，从而给出一组公理，要求托普斯满足这些公理，才能容纳立方类型论的解释。

所有这些进展中一个显著的缺漏，是尚未对立方类型论的模型给出抽象定义，而这正是我们在本文中试图弥补的。为此，我们通过宇宙范畴的框架提出又一种立方类型论；它与 Uemura 的具有可表示态射的范畴十分相似，并对其语义进行研究。我们自嘲地称之为朴素立方类型论。从核心上看，朴素立方类型论与 CCHM 立方类型理论十分相似，但有三个显著区别：第一，它包含更多余纤维化；第二，我们对填充运算的处理方式不同；第三，我们要求一种强同伦等价延拓运算。

关于第一点，在我们的方法中，纤维化的所有截面都是余纤维化。这一点可以从语义上得到论证，因为一大类预层模型（例如单纯集合）都满足

这一更强的条件。至于我们对填充的处理方式，它颠倒了如今标准的方法：先定义填充，再将那些允许填充运算的映射称为纤维化。在我们的框架中，先有纤维化，填充则是一种需要随后选定的结构。结合起来，这使我们能够证明路径类型满足定义性计算规则，从而成为恒等类型。这与 [OP16；CCHM15], 中的处理方式不同：在那里，可以用路径类型来构造恒等类型（通过赋予其编码路径为常值的余纤维化数据），但路径类型本身并不是恒等类型。

最后，我们讨论对等价延拓性质的强化。在 [CCHM15]及其他方法中，通常是沿着余纤维化延拓一个弱等价，而我们要求同伦等价（包括所有同伦数据）也以这种方式延拓。这种方法有诸多好处。首先，它使我们能够证明单价公理的一个相应强化，该强化由 [KL25a], 提出，称为带基点单价性；而[CCHM15] 框架只能证明其中称为*book* 单价性的性质。在带基点单价性中，从恒等类型到等价类型的典范映射的逆，会将恒等等价映到自反项。正如 [KL25a], 所解释的，带基点性公理化地刻画了这样一个事实：选取平凡等价的映射属于由纤维化生成的左类。由于纤维化的左类通常刻画模式匹配，这一强化表明，或许可以对等价进行模式匹配，从而使其对用户尤为友好。

我们提出了两种版本的朴素立方类型论：一种版本中，填充运算满足计算规则至定义等价；另一种版本中，该规则仅在命题意义上成立。我们的所有模型都是后一种版本的模型，但我们尚不清楚它们是否也满足更强的前一种条件。尽管如此，填充缺乏定义计算并不影响由此得到的类型论的同伦典范性 [CHS22]。

我们构造模型的方法基于 Quillen模型范畴这一概念 [Qui67；Hov99],我们还提出了一种相当通用的方法，可将优雅Reedy范畴上的预层范畴中的 Cisinski模型结构 [Cis06] 转化为朴素立方类型论的模型 [BR20] 。我们将这种方法应用于一个单纯集合模型和两个立方模型，这些模型建立在 Cisinski 的工作之上：极小立方集合以及带连接的立方集合。所有这些模型都已在经典同伦论中得到深入研究 [GJ99；Kan55；Kan56；Cis06；Cis14；Mal09；DKLS24；CK23]。最后，基于 Awodey 的工作，我们证明笛卡尔立方集合的范畴 [Awo23b] 也具有朴素立方类型论的一个模型。

我们处理语义的方法不同于 Orton 和 Pitts 的开创性工作 [OP16], 及其合作者的工作 [LOPS18], ，尽管我们的许多模型都涵盖在他们的工作之中。首先，尽管[OP16；LOPS18]是在托普斯的内语言中开展工作的，但我们的工作在处理范畴结构时更加明确。其次，我们先从模型的一般定义出发，再将注意力转向托普斯。第三，我们更着重依赖 Quillen 模型范畴，而它们在 [OP16；LOPS18] 中仅作为背景出现。最后，本文在很大程度上得益于 Sattler 关于等价延拓性质的工作 [Sat17] ，我们将在第 6.1 节中介绍这一性质。

对我们而言，考虑这种立方类型论语义方法的一个重要原因，是将 Morita 等价的定义推广到立方类型论。这里先非正式地回顾一下：如果两个依赖类型论的模型范畴作为左半模型范畴是 Quillen 等价的，那么它们就是 Morita 等价的。Morita 等价这一概念已被证明颇有成效

在考察不同类型论的表达能力方面，例如 Hofmann 关于外延类型论相对于带有函数外延性和恒等证明唯一性的内涵类型论的保守性的著名结果，可以加强为：这两种类型论实际上是 Morita 等价的。由此，自然会产生这样的问题：不同的立方类型论是否 Morita 等价；或者，如 [Uem23第 8], 节所提出的那样，它们是否与同伦类型论 Morita 等价。开展这项研究的第一步必然是理解什么是立方类型论的抽象模型，以及所有这类模型组成的范畴具有什么结构；本文明确探讨了前一个问题。

本文结构如下。首先，我们在第 1 节回顾依赖类型论中多项式函子与宇宙模型所需的背景知识。接着，在第 2 节，我们将这一框架扩展为立方类型论的宇宙范畴公理化（计算规则除外），并针对第 3 节讨论的填充运算，给出定义等价或命题等价。然后，我们将关注同伦同构延拓运算（用 [CCHM15] 的术语来说，即粘合运算），并在第 4 节加以探讨。在第 5 节，我们在宇宙范畴的框架下表述朴素立方类型论，并说明它与 [CCHM15 和 OP16] 的工作有何异同。第 6 节简要介绍等价延拓性质，最后在第 7 节讨论预层模型。

目录

摘要 1

目录3 1 背景 4 1.1 多项式函子 4 1.2 内涵类型论的宇宙范畴模型 6 2 立方类型论的宇宙公理 13 2.1 余纤维化结构 14 2.2 区间结构 21 2.3 纤维化结构 24 2.4 填充运算 28 3 填充的计算规则 37 3.1 填充的计算规则 Σ-类型 37 3.2 填充的计算规则 Π-类型 39 3.3 填充路径类型的计算规则 40 4 同伦同构延拓运算 42 4.1 强同伦同构延拓运算 43 4.2 弱同伦同构延拓运算 45 4.3 粘合运算 46

5 朴素立方类型论 535.1 立方类型论的相关公理系统 556 等价延拓性质 566.1 弱等价延拓性质 566.2 同伦等价延拓性质 616.3 相关工作 677 预层模型范畴中的模型 677.1 纤维化与余纤维化的分类 677.2 优雅 Reedy 预层模型 697.3 笛卡尔立方模型 72

1 背景

本文在类型论的宇宙范畴模型框架下展开。特别是，要为立方类型论建立模型，我们需要三个泛映射，分别用于为上下文扩展添加一个类型、一个余纤维化和一个区间变量。在宇宙范畴框架下为依赖类型所对应的上下文扩展建模，已经相当成熟。因此，我们首先回顾依赖类型论的宇宙范畴公理化，以及使用这些公理化所需的一些多项式函子背景知识。

1.1 多项式函子

为了对 以依赖类型为参数的类型构造子建模，我们使用多项式函子 s.

定义 1.1. 范畴 $\mathbb{C}$ 中的映射 $p\colon E \to B$ 若沿 p 的拉回存在，且拉回函子 $p^*\colon \mathbb{C}/_B \to \mathbb{C}/_E$ 有一个右伴随 $p_*\colon \mathbb{C}/_E \to \mathbb{C}/_B$，则称其为可指数化的；我们将该右伴随称为推前。— ♦

利用推前，可以定义与可指数化映射相关联的多项式函子。

定义 1.2. 与局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 中的映射 $p\colon E \to B$ 相关联的多项式函子，其推前记为 p_*，是如下复合函子：

$$\mathbb{P}_p \coloneqq \left(\mathbb{C} \xrightarrow{E\times -} \mathbb{C}/_E \xrightarrow{p_*} \mathbb{C}/_B \xrightarrow{B_!} \mathbb{C}\right)$$

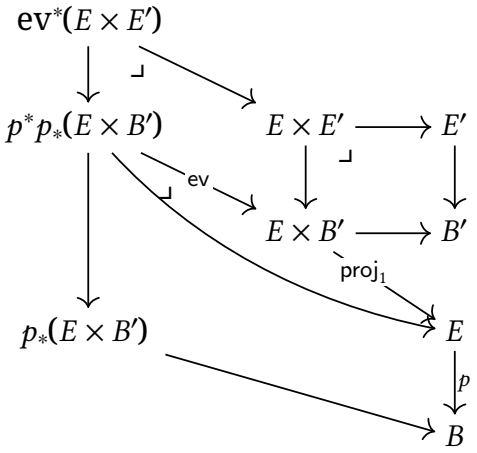
其中，最后一个映射 $\mathbb{C}/_B \xrightarrow{B_!} \mathbb{C}$ 只是忘掉基底。 — ♦

利用与指数映射相关联的多项式函子，可以构造与可指数化映射的泛后复合。

构造 1.3. 设 $p\colon E \to B$ 和 $p'\colon E' \to B'$ 是局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 中的两个映射，且 p_* 是沿 p 的推前。那么，映射

$$\mathsf{GenComp}(p', p)\colon \mathsf{ev}^*(E \times E') \to p^* p_*(E \times B') \to p_*(E \times B')$$

按如下方式构造为分别对应于 $E' \to B'$ 和 $E \to B$ 的两个拉回的复合映射。

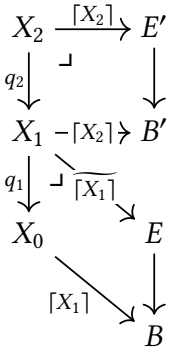


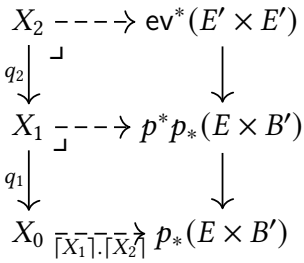
— ♦

基因　　在上述构造中构造的复合映射1.3 名副其实　　.

引理 1.4 ([KL25A，引理 1。4])。设 $p\colon E \to B \in \mathbb{C}$ 是范畴 $\mathbb{C}$中的一个可指数化映射，其中与 E 的所有乘积 $p'\colon E' \to B' \in \mathbb{C}$ 存在。任取

假设有如左图所示的拉回。那么复合映射 $X_2 \to X_1 \to X_0$ 作为右图所示的 $\mathsf{GenComp}(p, p')\colon \mathsf{ev}^*(E \times E') \to p^* p_*(E \times B') \to p_*(E \times B')$ 的一个拉回出现。



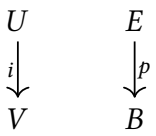


使得 $(X_0 \xrightarrow{\lceil X_1\rceil.\lceil X_2\rceil} p_*(E \times B) \to B) = (X_0 \xrightarrow{\lceil X_1\rceil} B)$ 和 $(X_0 \xrightarrow{\lceil X_1\rceil.\lceil X_2\rceil} p_*(E \times B'))^\dagger = (X_1 \xrightarrow{(\lceil X_1\rceil,\ \lceil X_2\rceil)} E \times B')$。

— ■

最后，我们常常会谈到拉回-Hom，它们是将对角线映射到其所解决的提升问题的映射的内化。我们为此约定一些记号。

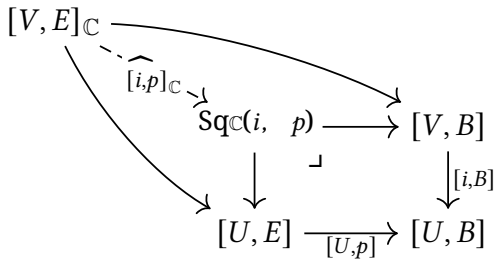
定义 1.5. 设 $\mathbb{C}$ 为一个笛卡尔闭范畴。固定如下映射 i 和 p，它们属于 $\mathbb{C}$。



我们定义映射和对象

$$\mathsf{Diag}_{\mathbb{C}}(i,p) :\equiv [V,E]_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\widehat{[i,p]}_{\mathbb{C}}} \mathsf{Sq}_{\mathbb{C}}(i,p) \in \mathbb{C}$$

为如下所示的虚线拉回 Hom 映射。



若 $\mathbb{C}$ 是局部笛卡尔闭的，且 $C \in \mathbb{C}$，那么对于 $i\colon U \to V \in \mathbb{C}/C$ 以及 $p\colon E \to B \in \mathbb{C}/C$，我们记

$$\mathsf{Diag}_{C}(i,p) :\equiv [V,E]_{C} \xrightarrow{\widehat{[i,p]}_{C}} \mathsf{Sq}_{C}(i,p) \in \mathbb{C}/C$$

将上述定义应用于 $\mathbb{C}/C$。 — ♦

这些内部交换方块和对角线在拉回下保持稳定 .

引理 1.6。设 $\mathbb{C}$ 是一个局部笛卡尔闭范畴。固定一个映射 $f\colon D \to C \in \mathbb{C}$，以及映射$i$: $U \to V \in \mathbb{C}/C$和 $p\colon E \to B \in \mathbb{C}/C$。那么可以得到如下迭代拉回方块。

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Sq}_D(f^*i, f^*p) & \longrightarrow & \mathsf{Diag}_C(i,p) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\mathsf{Sq}_D(f^*i, f^*p) & \longrightarrow & \mathsf{Sq}_C(i,p) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
D & \xrightarrow[f]{} & C
\end{array}$$

— ♦

证明。这是由一条标准事实得出的：拉回保留拉回和内部 Hom。

— ■

1.2 内涵类型论的宇宙范畴模型

宇宙范畴模型 [Voe15b] 是通用的高功率重量比框架，可以将上下文扩展建模为某些拉回稳定的投影映射，从而使依赖类型论的模型成为其特例。如前所述，我们也将用它们为立方类型论公理化；立方类型论将配备三个宇宙。由于立方类型论与内涵类型论共享许多相似的类型构造子，我们首先回顾如何在宇宙范畴中为各种类型构造子公理化。

定义 1.7 ([Voe15b，定义 2。1])。设 $\mathbb{C}$ 是一个局部笛卡尔闭范畴。在映射 $\widetilde{\ }$上给定的一个 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 宇宙结构，是对右伴随的特定选择var： $\mathbb{C}/u \to \mathbb{C}/\widetilde{u}$

$$\mathbb{C}/u \underset{\pi_!}{\overset{\mathsf{var}}{\underset{\top}{\dashrightarrow}}} \mathbb{C}/\widetilde{u}$$

$\pi_!$的： $\mathbb{C}/\widetilde{u} \to \mathbb{C}/u$后复合函子（也就是说，只需选择沿 π 的拉回）。

对于每个 $A\colon\ \Gamma \to \mathrm{U}\ \in \mathbb{C}/u$，我们用 π_A 表示在 A 处的余单位，用 $\Gamma.A$ 表示 π_A 的定义域，从而得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{\mathsf{var}_A} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \pi_A}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow[A]{} & \mathcal{U} \end{array}$$

该映射 π_A 也是由宇宙结构选定的拉回。

~具有此类宇宙结构的映射 $\pi\colon \mathrm{U}\ \to \mathrm{U}$ 称为泛映射。范畴上的~宇宙结构由一个选定的特殊泛映射 $\mathrm{U}\ \to \mathrm{U}$ 及其上的宇宙结构组成。— ♦

~给定一个泛映射$\mathrm{U}\ \to \mathrm{U}$，我们可能希望讨论它的任意拉回，而不是其宇宙结构所选定的特定拉回映射。为此，我们约定一些术语。

定义 1 ~.8. 设 $\pi\colon \mathrm{U}\ \to \mathrm{U}$ 是局部笛卡尔闭范畴中的一个泛映射 $\mathbb{C}$.

~映射 π-名称 和 π-点 是映射 $E \to B$的 $\lceil E\rceil$和 $\lceil E\rceil$，如下所示，并且满足如下的拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\widetilde{\lceil E\rceil}} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \xrightarrow[\lceil E\rceil]{} & \mathcal{U} \end{array}$$

~总之， π-(名称，点)对（$\lceil E\rceil$，$\lceil E\rceil$）构成了 π-纤维化结构 $E \to B$。能够赋予 π-纤维化结构的映射称为 π-纤维化，记作 $E \twoheadrightarrow B$。作为切片 B中的一个对象，我们称 $E \twoheadrightarrow B \in \mathbb{C}/B$ 为 π-纤维对象。

尽管 π-纤维化结构不一定唯一，但给定 $A\colon\ \Gamma \to \mathrm{U}$，所选的拉回 $\Gamma.A \to \Gamma$具有一个典范的 π-纤维化结构（A，var_A）。此外，给定一个带有纤维化结构（$\lceil E\rceil$，$\lceil E\rceil$）的 π-~纤维化 $E \twoheadrightarrow B$，其典范的 π-纤维化替换 是同构映射 $\pi_{\lceil E\rceil}\colon\ B.\lceil E\rceil \cong E \to B$。——♦

现在我们回顾泛映射如何配备各种逻辑结构。

1.2.1 恒等类型结构。恒等类型结构是纤维化路径对象在语法层面的版本，用于纤维化。其公理化描述见 [Voe15a], ，下面我们将对此作回顾。

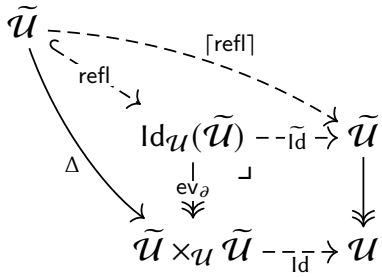
~定义 1.9 ([Voe15a，定义 2。7])。设 $\pi\colon \mathcal{U}\ \to \mathcal{U}$ 是局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$中的一个泛映射。

~一个 预恒等类型结构 (亦称为 J1结构，见 于 [Voe15a，定义 2。7]）定义在 $\mathcal{U}\ \to \mathcal{U}\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$上，由一对虚线映射 (恒等 $\lceil$refl$\rceil$) 组成，如下所示，它们从对角线 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}\times_{\mathcal{U}}\mathcal{U}$映射到 $\mathcal{U}\,\mathcal{U}$。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} & \overset{\lceil\mathsf{refl}\rceil}{\dashrightarrow} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} & \underset{\mathsf{Id}}{\dashrightarrow} & \mathcal{U} \end{array} \qquad \text{(pre-Id-def)}$$

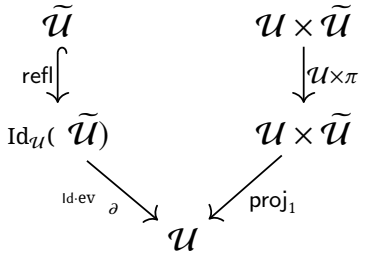
— ♦

~构造1.10 ([Voe15a，方程（7）])。设 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是一个局部笛卡尔闭范畴中的泛映射 $\mathbb{C}$，该范畴配备了一个 pre-Id类型结构 (Id ⌜refl⌝)，如（pre-Id-def）所示。~将 $\mathrm{ev}_\partial\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U}$ 记为由~宇宙结构选取的 π沿 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的拉回，使得存在映射 $\mathrm{refl} : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ 进入该拉回，如下所示。



(Id-def)

~那么，在 U 上，我们有一对映射：$\mathrm{refl}\colon \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U})$ 和重基映射 $\mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times \mathrm{U}$，如下所示。



~然后应用定义 1.5 得到 refl 与 $\mathcal{U} \times \pi$ 在 $\mathcal{U}$ 上的切片中的拉回 Hom 映射，如下所示

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Diag}_{\mathcal{U}}(\mathrm{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \\ \downarrow \\ \mathrm{Sq}_{\mathcal{U}}(\mathrm{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}), \mathcal{U} \times \mathcal{U}]_{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ [\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \times_{[\widetilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}}} [\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}), \mathcal{U} \times \mathcal{U}]_{\mathcal{U}} \end{pmatrix} \tag{J-prob}$$

它编码了通用的 J-消去提升问题。 – ♦

~定义 1.11 ([Voe15a，定义 2。8])。设 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是局部笛卡尔闭范畴中的一个泛映射 $\mathbb{C}$，该范畴带有一个预Id类型结构 (Id ⌜refl⌝)，如（预Id-定义）所示。

一个 J 消去结构 （也称为 J2-结构，见 [Voe15a，定义 2。8]）在预Id-类型结构（J1-结构）上，是（J-问题）中拉回 Hom 映射的一个截面。

$$\begin{array}{c} \mathrm{Diag}_{\mathcal{U}}(\mathrm{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \\ \uparrow\downarrow \\ \mathrm{Sq}_{\mathcal{U}}(\mathrm{refl}, \widetilde{\mathcal{U}} \times \pi) \end{array} \tag{J-def}$$

– ♦

注 1.12。 上述关于J-消去结构的定义，等价地表述为：J 是一个稳定提升结构，其含义见 [KL25b，定义 1.4 和 3。1], 的

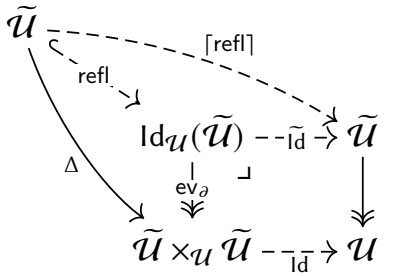
~ ~ ~refl: U ↪ $\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$(U) 对 U ×U →U ×U，在切片 $\mathcal{C}/\mathcal{U}$ 中。

$$\mathsf{J} \in \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{refl}}\downarrow & \swarrow_{\mathcal{U}} \downarrow \\ \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

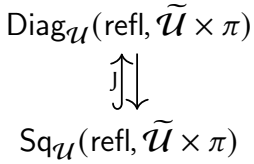
– ♦

~定义 1.13. 设 π: U → U 是局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射。

~一个恒等类型结构（也称为完整的J结构，见 [Voe15a]）定义在$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 上，由一个预恒等类型结构（恒等 ⌜refl⌝）（如（恒等-DEF）中所述）以及一个J消去结构（如（J-DEF）中所述）组成。



(Id-DEF)

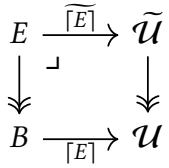


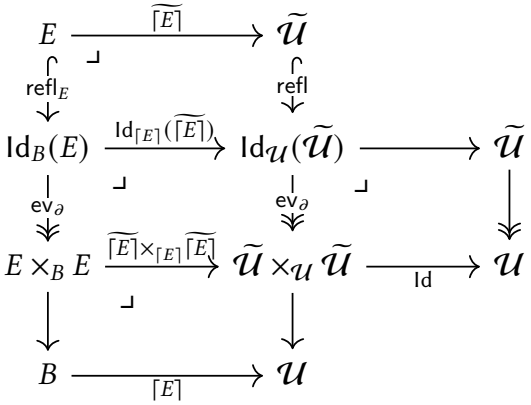
(J-DEF)

– ♦

~注 1.14. 设 π: U → U 是局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个泛映射，并且该范畴配备了（预）恒等类型结构。

~~对于每个带有 π-纤维化结构（⌜E⌝, ⌜E⌝）的 π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$（如左图所示），我们也将右图中相应标记的映射记作~~$\mathrm{Id}_B(E)$、$\mathrm{Id}_{\ulcorner E \urcorner}(\ulcorner E \urcorner)$ 和 refl_E。

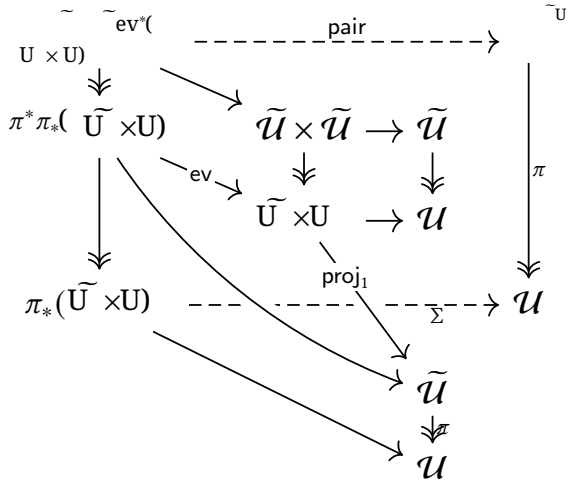




其中，$\mathrm{Id}_B(E) \twoheadrightarrow E \times_B E$ 由宇宙结构选定。 – ♦

1.2.2 Σ-类型结构。 Σ-类型结构相当于在复合下封闭的纤维化。

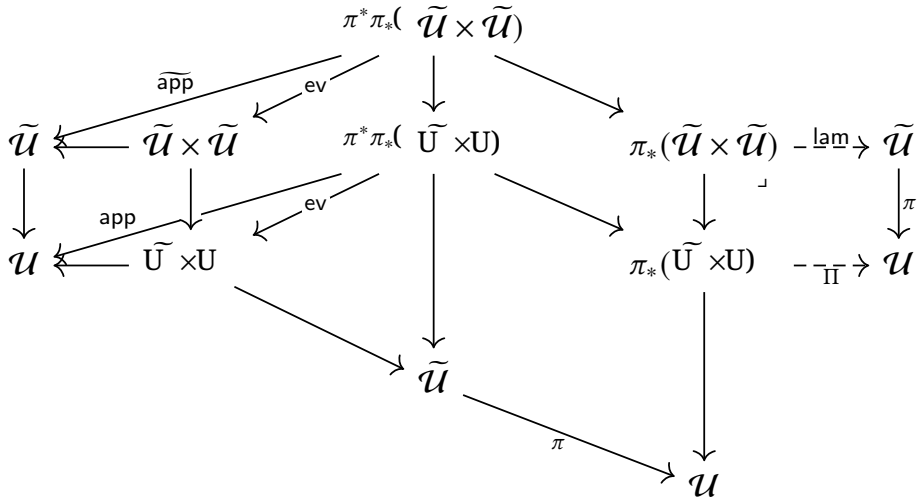
定义 1.15. 局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 中泛映射 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的外延 Σ-类型 结构，是 $\mathrm{GenComp}(\mathrm{U} \to \mathrm{U}, \mathrm{U} \to \mathrm{U})$ 上的 π-纤维化结构（Σ，对）。



— ♦

1.2.3 Π-型结构。 Π-型结构相当于在沿纤维化推前下封闭的纤维化。

定义 1.16（[Voe17，定义 2.2]）。局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 中泛映射 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的外延 Π-型结构，是一对如下所示的虚线映射 $(\mathrm{lam}\ \Pi)$，它们使得沿 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的推前将 $\mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times \mathrm{U} \in \mathbb{C}/\mathcal{U}$ 变为一个 π-纤维化。



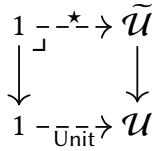
(Π-DEF)

我们也将通过把余单位与第二投影复合而得到的映射 $\mathrm{app}\colon \pi^*\pi_*(\mathrm{U} \times \mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 和 $\mathrm{app}\colon \pi^*\pi_*(\mathrm{U} \times \mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 称为应用映射。— ♦

1.2.4 单位类型结构。单位-类型结构等同于恒等映射上的纤维化结构。

定义 1.17。在局部笛卡尔闭范畴中，泛映射 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的单位-类型 结构，是如下的一对映射（$\star$，单位），它们在恒等映射上给出一个 π-纤维化结构

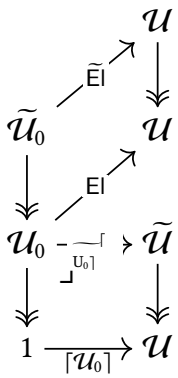
在终对象处。



– ♦

1.2.5 内部宇宙结构。 给定一个具有泛结构的映射，它的所有拉回也都继承其泛结构。有时，我们会关注这样一个带有继承而来的泛结构的拉回映射，例如内部宇宙的情形。

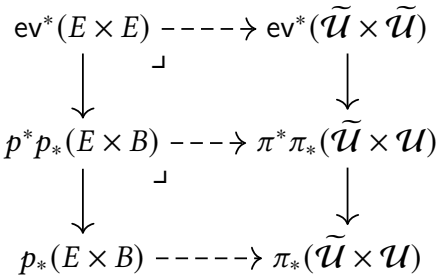
~定义 1.18. 设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ with~中一个泛映射，并选定一个终对象 1。在 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的内部（纤维化）宇宙 结构，是指一个泛映射~ ~map $\pi_0\colon \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$，使得 $\mathrm{U}_0 \twoheadrightarrow \mathrm{U}_0$ 和 $\mathrm{U}_0 \twoheadrightarrow 1$ 可赋予典范 π- 纤维化 ~ 结构 $(\mathrm{El}, \mathrm{El})$ 和 $(\ulcorner \mathrm{U}_0 \urcorner, \ulcorner \mathrm{U}_0 \urcorner)$。~



当 $\mathrm{El} : \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}$ 是单态射时，这种内部宇宙结构是忠实的 . – ♦

内部宇宙 π_0 是 π-纤维化这一事实，根据GenComp 的泛性质，如引理 1.4所示，自动意味着 π_0-纤维化的泛可复合对也是一个可复合的 π-纤维化对。由此可以进行如下构造，这对于定义在各种类型论构造下封闭的内部宇宙很有用。

~构造 1.19。设 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$中的一个泛映射，并且该范畴选定了一个终对象 1。固定一个 π-纤维化 $p\colon E \twoheadrightarrow B$。我们构造如下虚线映射，使得下图由拉回方块组成。



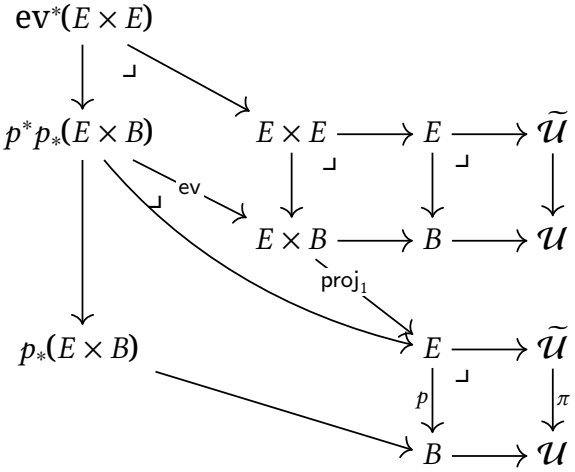
为此，我们注意到，根据构造1.3，这些映射

$$\mathsf{ev}^*(E \times E) \to p^*p_*(E \times B) \qquad\qquad p^*p_*(E \times B) \to p_*(E \times B)$$

都是带有 p-名称的 p-纤维化

$$p^*p_*(E\times B)\xrightarrow{\mathsf{ev}} E\times B\to B \qquad\qquad p_*(E\times B)\to B$$

由于 p 有一个 π-名称 $\ulcorner E\urcorner\colon B\to \mathrm{U}$，因此如下面所示，后复合 $\ulcorner E\urcorner$ 会将上方的 p-名称变为 π-名称。



根据引理 1.4，$\mathsf{GenComp}(p,\ p)$ 是沿唯一映射 $\mathsf{GenComp}(\pi,\ \pi)$ 作拉回得到的

$$p_*(E\times B)\longrightarrow \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})$$

其在 $\pi^*\dashv\pi_*$ 下的转置是映射到 $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$ 的映射，该映射是一个有序对：第一分量是 $p^*p_*(E\times B)$ 的 π-点 $\to p_*(E\times B)$，第二分量是 $\mathsf{ev}^*(E\times E)$ 的 π-名称 $\to p^*p_*(E\times B)$。

特别地，将此构造应用于一个内部宇宙 $\mathrm{U}_0\to\mathrm{U}_0$，，我们得到一个映射

$$(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\mathcal{U}_0)\longrightarrow \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})$$

沿着该映射，$\mathsf{GenComp}(\pi,\pi)$ 拉回为 $\mathsf{GenComp}(\pi_0,\pi_0)$。 −♦

注 1.20。 在上文将构造 1.19 应用于内部宇宙 $\mathcal{U}_0\to\mathcal{U}_0$ 的 $\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ 的情形中，我们看到映射

$$(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\mathcal{U}_0)\longrightarrow \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})$$

作为预层的映射，是由以下函数族构成的

$$\mathbb{C}(\Gamma,(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\mathcal{U}_0))\cong\left\{(A,B)\ \middle|\ \begin{array}{ccc}\Gamma.A & \xrightarrow{B} & \mathcal{U}_0\\ \downarrow & & \\ \Gamma & & \widetilde{\mathcal{U}}_0\\ & \searrow^{A} & \downarrow\\ & & \mathcal{U}_0\end{array}\right\}\to\left\{(A,B)\ \middle|\ \begin{array}{ccc}\Gamma.A & \xrightarrow{B} & \mathcal{U}\\ \downarrow & & \\ \Gamma & & \widetilde{\mathcal{U}}\\ & \searrow^{A} & \downarrow\\ & & \mathcal{U}\end{array}\right\}\cong\mathbb{C}(\Gamma,\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U}))$$

将每个 (A,B) 映射为与 $(\mathrm{El}(A),\mathrm{El}(B))$ 的后复合映射，其中 $\mathrm{El}\colon \mathrm{U}_0\to\mathrm{U}$，如下所示：

$$\begin{array}{ccccc}\Gamma.A & \xrightarrow{B} & \mathcal{U}_0 & \to & \mathcal{U}\\ \downarrow & & & & \\ \Gamma & & \widetilde{\mathcal{U}}_0 & \to & \widetilde{\mathcal{U}}\\ & \searrow^{A} & \downarrow & & \downarrow\\ & & \mathcal{U}_0 & \to & \mathcal{U}\end{array}$$

换句话说，所构造的映射在语法上解码了内类型的代码。 −♦

注 1.21. 如果我们的目标是构造通常的映射

$$(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}_0} \times \mathcal{U}_0) \longrightarrow \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})$$

谈到逻辑结构的封闭性时，我们本可以完全避免讨论GenComp 在构造 1.19中的内容。然而，由于我们的立方类型论表述包含了异质的路径类型，如定义2.30所示，而其定义需要GenComp，要公理化异质路径类型下的封闭性，就确实需要构造 1.19的完整一般性。—— ♦

将定义 1.13 和 1.15 应用于 1.17 ，并分别考察外部环境宇宙和内部宇宙后，我们现在可以定义这两个宇宙中的各种类型论结构何时彼此兼容。

定义 1.22。设 $\mathbb{C}$ 是一个局部笛卡尔闭范畴，并选定一个终对象 1。固定 Σ， Π-类型结构

$$\Sigma, \Pi \colon \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}}) \rightrightarrows \mathcal{U} \qquad \Sigma_0, \Pi_0 \colon (\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}_0} \times \widetilde{\mathcal{U}_0}) \rightrightarrows \mathcal{U}_0$$

$\widetilde{\ }$分别位于泛映射 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 和其上的内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ ，并带有$\widetilde{\ }_\pi$-纤维化结构 $(\mathrm{El}, \mathrm{El})$。当图表按下方左侧所示交换时， Σ-结构与 Π-结构称为兼容。

$$\begin{array}{ccc} (\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}_0} \times \widetilde{\mathcal{U}_0}) & \xrightarrow{\text{Construction 1.19}} & \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}}) \\ {\scriptstyle \Pi_0}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \Sigma_0} & & {\scriptstyle \Pi}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \Sigma} \\ \widetilde{\mathcal{U}_0} & \xrightarrow[\mathrm{El}]{} & \widetilde{\mathcal{U}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}_0} \times_{\mathcal{U}_0} \widetilde{\mathcal{U}_0} & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{El}} \times_{\mathrm{El}} \widetilde{\mathrm{El}}} & \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \widetilde{\mathcal{U}_0} & \xrightarrow[\mathrm{El}]{} & \widetilde{\mathcal{U}} \end{array}$$

同样，拉回与拉回复合，因此如果

$$\mathrm{Id} \colon \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \qquad \mathrm{Id}_0 \colon \widetilde{\mathcal{U}_0} \times_{\mathcal{U}_0} \widetilde{\mathcal{U}_0} \to \mathcal{U}_0$$

$\widetilde{\ }$分别是 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 和 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 上的恒等类型结构，那么当右上方的图表可交换时，它们就是相容的。

最后，如果

$$\mathrm{Unit} \colon 1 \to \mathcal{U} \qquad \mathrm{Unit}_0 \colon 1 \to \mathcal{U}_0$$

$\widetilde{\ }$分别是 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 和 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 上的单位类型结构，那么当复合映射相容

$$\mathrm{El}(\mathrm{Unit}_0) = \mathrm{Unit}$$

同意。 — ♦

2 立方类型论的宇宙公理

在上一节回顾了通常的内涵类型论的宇宙范畴模型的背景之后，我们接下来给出立方类型论的宇宙范畴公理化。

假设2.1. 从现在起，我们在一个局部笛卡尔闭范畴中工作，该范畴具有三个泛映射 $\mathbb{C}$ ，分别对应纤维化宇宙、余纤维化宇宙和区间对象

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} & \partial\mathsf{Cof} & \mathbb{I} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \downarrow{\scriptstyle \iota} & \downarrow{\scriptstyle !} \\ \mathcal{U} & \mathsf{Cof} & 1 \end{array}$$

其中我们进一步要求 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 是一个单态射。 – ♦

我们改写了定义1.8 中讨论余纤维化宇宙的拉回时所使用的部分措辞 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$。

‾定义 2.2。映射 $U \to V$的 ι-名称和 ι-点分别是如下的映射 $\ulcorner U \urcorner$ 和 $\ulcorner U \urcorner$，并满足如下的拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\widetilde{\ulcorner U \urcorner}} & \partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ V & \xrightarrow[\ulcorner U \urcorner]{} & \mathsf{Cof} \end{array}$$

‾总的来说， ι-(名称，点)对（$\ulcorner U \urcorner$, $\ulcorner U \urcorner$）为 $U \to V$构成一个 ι-余纤维结构。能够赋予 ι-余纤维结构的映射称为 ι-余纤维化。作为切片 V中的一个对象，我们称 $U \hookrightarrow V \in \mathbb{C}/_V$为一个 ι-余纤维对象。— ♦

2.1 余纤维化结构

我们要求余纤维化宇宙 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ ‾值的真值格结构。简言之，它需要配备“与”和“或”运算，以及“顶”和“底”元素，只是“或”和“底”的左侧概念是相对于‾ $\mathrm{U} \to$U而言的。

2.1.1 与结构。

定义 2.3。在 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 上的与结构是映射$\partial\mathsf{Cof} \times \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}$ 上的一个 ι-余纤维化结构，其 ι-名称为 $- \wedge -\colon \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof} \to \mathsf{Cof}$。

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathsf{Cof} \times \partial\mathsf{Cof} & \longrightarrow & \partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof} & \xrightarrow[-\wedge-]{} & \mathsf{Cof} \end{array}$$

– ♦

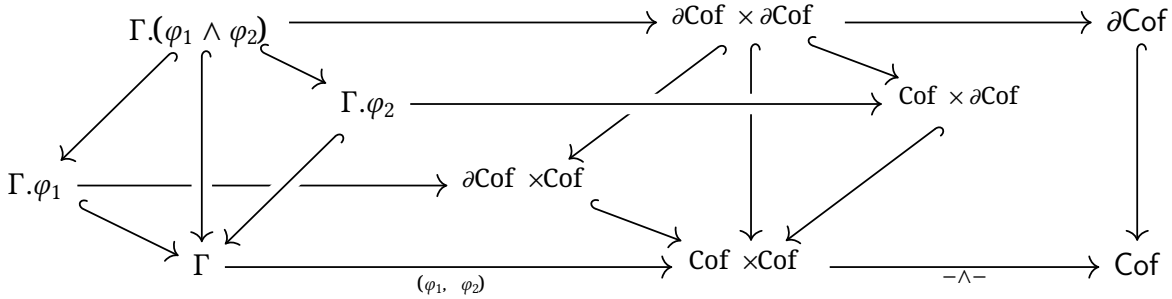
注 2.4. 现在我们展开说明在 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 上具有与结构意味着什么 .

为此，我们首先注意到， $\partial\mathsf{Cof} \times \partial\mathsf{Cof}$ 是 $\partial\mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof} \to \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}$ 与 $\mathsf{Cof} \times \partial\mathsf{Cof} \to \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}$ 在 $\mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}$ 上的切片中的积。并且，对于 $\mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}$ 上的每个对象 $(\varphi_1, \varphi_2)\colon \Gamma \to \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}$，都有拉回

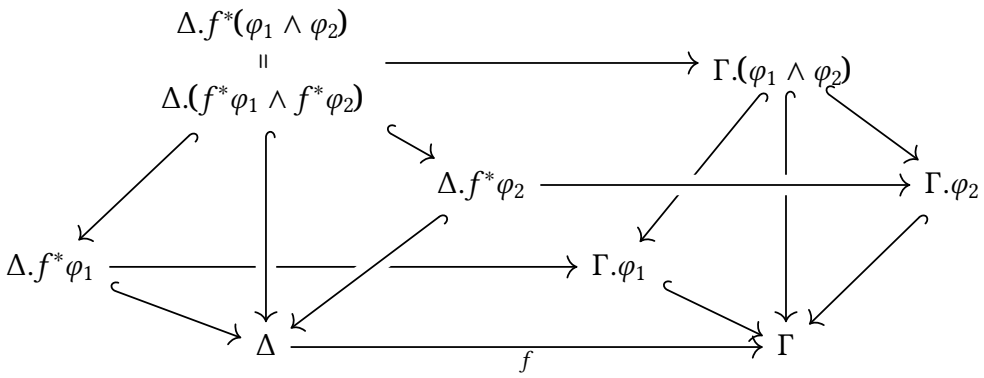
$$(\varphi_1, \varphi_2)^*(\partial\mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}) \cong \varphi_1^*\partial\mathsf{Cof} \cong \Gamma.\varphi_1 \qquad (\varphi_1, \varphi_2)^*(\mathsf{Cof} \times \partial\mathsf{Cof}) \cong \varphi_2^*\partial\mathsf{Cof} \cong \Gamma.\varphi_2$$

如下面前后斜面所示。由于拉回与拉回可交换，对于每个 Γ，可以看出 $\Gamma.(\varphi_1 \wedge \varphi_2) =: (\varphi_1 \wedge \varphi_2)^*\partial\mathsf{Cof}$ 是 $\Gamma.\varphi_1 \times_\Gamma \Gamma.\varphi_2$ 在 Γ 上的纤维积，

如下面左侧面所示。



通过要求对于所有 $f\colon \Delta \to \Gamma$, $\partial\mathsf{Cof} \times \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof}$ 都由 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow$ 的拉回得到，我们进一步看到， $\Gamma.(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 沿着 $f\colon \Delta \to \Gamma$ 拉回到映射 $\Delta.(f^*\varphi_1 \wedge f^*\varphi_2)$，该映射由对拉回分量取纤维积得到 $\Delta.f^*\varphi_1$, $\Delta.f^*\varphi_2 \rightrightarrows \Delta$。



— ♦

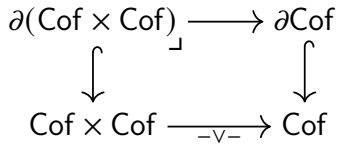
2.1.2 或结构。

定义 2.5。在 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 上的预或结构 由以下部分组成：

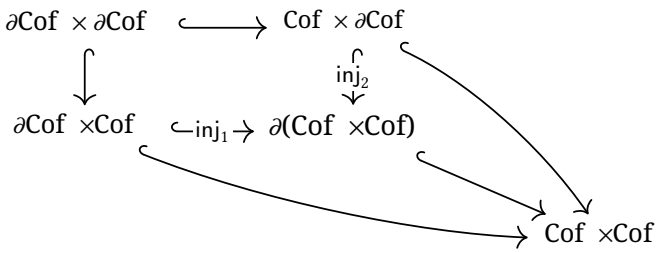
(1) 一个映射 $\partial(\mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}) \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof}$

(2) 两个映射 $\mathsf{inj}_1\colon \partial\mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof} \hookrightarrow \partial(\mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof})$ 和 $\mathsf{inj}_2\colon \mathsf{Cof} \times\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \partial(\mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof})$

(3) $\partial(\mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof}) \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof}$ 上的 ι-余纤维化结构，名称记作 $-\vee-\colon \mathsf{Cof} \times\mathsf{Cof} \to\mathsf{Cof}$。



使得以下图表交换



并且以下图表是一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} [\mathsf{Cof}\times\partial(\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}),\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^3} & \longrightarrow & [\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof},\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^3} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ [\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof},\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^3} & \longrightarrow & [\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof},\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^3} \end{array} \tag{OR-COF}$$

当对每个 $B\in\{X,\ Y\}$，由预合成诱导的交换方块都是拉回时，这种预或结构就是相对于映射 $X\to Y$ 的或结构。

$$\begin{array}{ccc} [\partial(\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}),B\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^2} & \longrightarrow & [\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof},B\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^2} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ [\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof},B\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^2} & \longrightarrow & [\partial\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof},B\times\mathsf{Cof}^2]_{\mathsf{Cof}^2} \end{array} \tag{OR-FIB}$$

— ♦

注 2.6。 使用 [KL25b定义 4 中的术语4],，我们看到，在具有相对于$\widetilde{\ }\mathsf{U}\ \mathcal{U}\ \to$ 的或结构时，在切片$\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}$ 中，映射 $\partial(\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof})\ \hookrightarrow\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}$ 在结构上近似于推出积

$$(\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof}\hookrightarrow\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof})\ \widehat{\times}_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}}\ (\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}\hookrightarrow\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof})$$

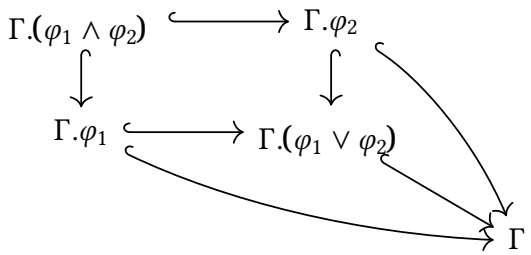
$\widetilde{\ }$相对于 $\mathsf{U}\ \times\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}\ \to\mathsf{U}\ \times\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}$。

同样，$\mathsf{Cof}\ \times\partial(\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof})\ \hookrightarrow\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}^2$ 在结构上近似于推出积

$(\mathsf{Cof}\ \times\partial\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}\ \hookrightarrow\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}^2)\ \widehat{\times}_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}^2}(\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}\ \times\partial\mathsf{Cof}\ \hookrightarrow\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}^2)$ $\widehat{\times}_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}^2}$相对于 $\partial\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}^2\hookrightarrow\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}^2$。 — ♦

注 2.7。现在我们展开说明，在相对于 $\mathsf{U}\ \to\mathsf{U}$ 的 $\backsim\partial\mathsf{Cof}\ \hookrightarrow\mathsf{Cof}$ 上同时具有与结构和或结构意味着什么。

如注 2.4中所述，预或结构对每个 $(\varphi_1、\ \varphi_2)\colon\Gamma\ \to\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof}$给出以下图表



使得对每个 $f\colon\Delta\to\Gamma$，都有 $\Delta.f^*(\varphi_1\vee\varphi_2)\ =\Delta.(f^*\varphi_1\vee f^*\varphi_2)$。

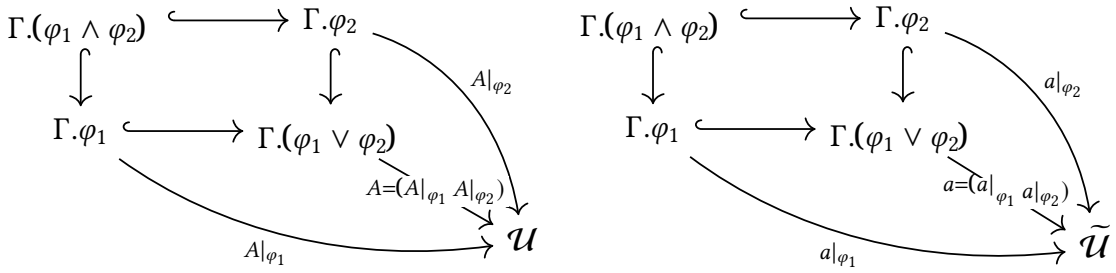
$\widetilde{\ }$当这是相对于 $\mathsf{U}\ \to\mathsf{U}$ 的或结构时，应用可表性可得到一个双射

$$\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}}(\Gamma.(\varphi_1\vee\varphi_2),B\times\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof})$$
$$\cong$$
$$\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}}(\Gamma.\varphi_1,\ \ B\times\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof})\times_{\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}}(\Gamma.(\varphi_1\wedge\varphi_2)\ \ B\times\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof})}\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}}(\Gamma.\varphi_2,\ \ B\times\mathsf{Cof}\ \times\mathsf{Cof})$$

$\widetilde{\ }$对于 $B\in\{\mathsf{U},\ \mathsf{U}\}$。根据拉回与后合成之间的伴随，这等价于

$$\mathbb{C}(\Gamma.(\varphi_1\vee\varphi_2),B)\cong\mathbb{C}(\Gamma.\varphi_1,B)\times_{\mathbb{C}(\Gamma.(\varphi_1\wedge\varphi_2),B)}\mathbb{C}(\Gamma.\varphi_2,B)$$

换句话说，如下方左侧图表所示，对于每一对映射 $(A|_{\varphi_i}\colon \Gamma.\varphi_i \to \mathrm{U})_{i=1,\,2}$，只要它们在 $\Gamma.(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 上的公共限制相同，就能得到一个公共延拓 $(A|_{\varphi_1},\ A|_{\varphi_2})\colon \Gamma.(\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \mathrm{U}$。反过来，对于每个 $A\colon \Gamma.(\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \mathrm{U}$，取它们的限制 $A|_{\varphi_i}\colon \Gamma.\varphi_i \to \mathrm{U}$ 的公共延拓 $(A|_{\varphi_1}, A|_{\varphi_2})$，恰好就是原映射 A。此外，如下方右侧图表所示，同一个双射也适用于一对映射 $\widetilde{(a_i\colon \Gamma.\varphi_i \to \mathrm{U})_{i=1,\,2}}$ 以及映射 $a\colon \Gamma.(\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \mathrm{U}$。



此外，内部 Hom 的函子性意味着限制与 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 交换，即 $\pi(a|_{\varphi_1},\ a|_{\varphi_2}) = (\pi a|_{\varphi_1}, \pi a|_{\varphi_2})\colon \Gamma.(\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \mathrm{U}$。

此外，如预期的那样，上述数据在拉回下保持稳定；也就是说，对于任意 $f\colon \Delta \to \Gamma$，都有

$$(f.(\varphi_1 \vee \varphi_2))^*(A|_{\varphi_1}, A|_{\varphi_2}) = ((f.\varphi_1)^*A|_{\varphi_1}, (f.\varphi_2)^*A|_{\varphi_2})\colon \Delta.(f^*\varphi_1 \vee f^*\varphi_2) \to \mathcal{U}$$

and

$$(f.(\varphi_1 \vee \varphi_2))^*(a|_{\varphi_1}, a|_{\varphi_2}) = ((f.\varphi_1)^*a|_{\varphi_1}, (f.\varphi_2)^*a|_{\varphi_2})\colon \Delta.(f^*\varphi_1 \vee f^*\varphi_2) \to \widetilde{\mathcal{U}}$$

— ♦

将推出积的余极限概念替换为其极限近似后，我们可以看到或结构会传递到内部宇宙中。

引理 2.8. 设 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 配备了相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的或结构。假设有一个 π-纤维化

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

其中 (或纤维) 对 B成立。

(1) 那么，(或纤维) 对 E成立。

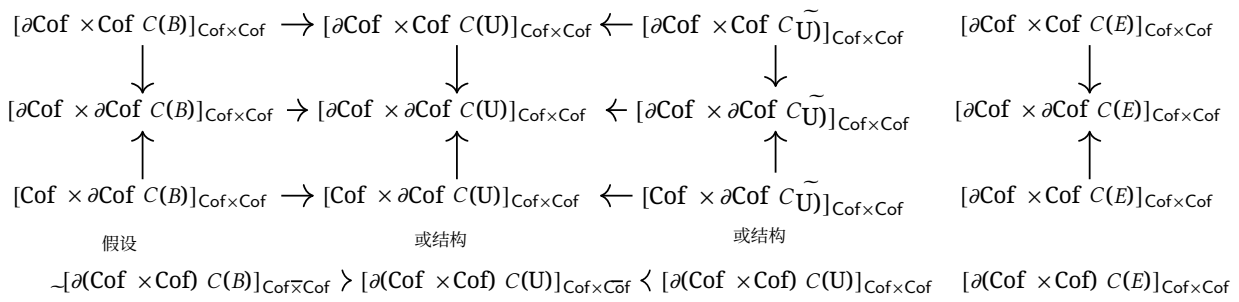
(2) 因此，$\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 也具有相对于 $E \to B$的或结构。

(3) 特别地，如果终对象映射 $B \to 1$ 也是一个 π-纤维化 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$，那么 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 就具有相对于 $E \to B$的或结构。

— ♦

证明。为证明第一部分，令 $C\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/_{\mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof}}$ 表示基变换映射，并使用下文所述的常见 3×3 论证。

在下图中，网格中每一行和每一列的极限分别由最底行和最右列中的对象表示。



但我们注意到，最底下一行的极限是 $[\partial(\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof})\ C(E)]_{\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}}$，因为内部 Hom 关于第二个参数是连续的。因此，$[\partial(\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof})\ C(E)]_{\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}}$是整个图表的极限。极限与极限可交换，所以也可以先分别求每一行的极限，再求所得跨度的极限，从而等价地计算整个图表的极限。因此，观察上方最右侧的列，可以注意到

$$[\partial(\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}),C(E)]_{\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}}\cong[\partial\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof},C(E)]_{\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}}\times_{\bullet}[\mathrm{Cof}\times\partial\mathrm{Cof},C(E)]_{\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}}$$

正如定义 2.5所要求的。

第一部分得证后，第二部分由定义 2.5 得出。对于第三部分，我们注意到，对于终对象 1，(或纤维)成立，因为 $1\times\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}$ 是$\mathbb{C}/_{\mathrm{Cof}\times\mathrm{Cof}}$中的终对象。于是，连续应用两次第二部分即可得出结论。— ■

2.1.3 上下结构。

定义 2.9. 余纤维化宇宙 $\partial\mathrm{Cof}\hookrightarrow\mathrm{Cof}$ 上的一个顶结构 是一个映射 $\ulcorner\top\urcorner\colon 1\to\mathrm{Cof}$，使得沿此映射对 $\partial\mathrm{Cof}\hookrightarrow\mathrm{Cof}$ 进行所选的拉回是一个同构。



余纤维化宇宙 $\partial\mathrm{Cof}\hookrightarrow\mathrm{Cof}$ 上的一个预底结构 是一个映射 $\ulcorner\bot\urcorner\colon 1\to\mathrm{Cof}$，其由泛结构选出的对象 $\bot$ 满足

$$[\bot,\partial\mathrm{Cof}]\cong[\bot,\mathrm{Cof}]\cong 1$$

当由宇宙结构选出的对象 $\bot$ 进一步满足时，该预底结构称为相对于映射 $X\to Y$ 的底结构

$$[\bot,X]\cong[\bot,Y]\cong 1$$

— ♦

~引理 2.10. 若 $\partial\mathrm{Cof}\hookrightarrow\mathrm{Cof}$ 有一个相对于 $\mathrm{U}\to\mathrm{U}$ 的底结构，且 $\varphi\colon\Gamma\to\mathrm{Cof}$ 经由 $\ulcorner\bot\urcorner\colon 1\to\mathrm{Cof}$ 因式分解，则 $[\Gamma.\varphi,\mathrm{U}]\cong[\Gamma.\varphi,\mathrm{U}]\cong 1$ 且 $[\Gamma.\varphi,\mathrm{Cof}]\cong[\Gamma.\varphi,\partial\mathrm{Cof}]\cong 1$. — ♦

证明。在这种情况下，拉回 $\Gamma.\varphi\cong\Gamma\times\bot$，因此 $[\Gamma\times\bot,\mathrm{U}]\cong[\Gamma,[\bot,\mathrm{U}]]\cong[\Gamma,1]\cong 1$，~对 U $\partial\mathrm{Cof}$，Cof 也同样成立。— ■

正如引理 2.8中的或结构一样，底结构可以传递到内部宇宙中。

~引理2.11. 设 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 配备了一个 $\perp$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的底结构。假设存在一个 π-纤维化

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

其中 $[\perp, B] \cong 1$。

(1) 那么相对于 $E \to B$, $\perp$ 也是一个底结构。

(2) 特别地，如果 $B \twoheadrightarrow 1$ 相对于 π 也是纤维化的，那么 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 相对于 $E \twoheadrightarrow B$ 具有一个底结构。

— ♦

~证明。内部 Hom 保持拉回，因此 $[\perp, E] \to [\perp, B]$ 是 $[\perp, \mathrm{U}] \to [\perp, \mathrm{U}]$ 的一个拉回。但根据假设，$[\perp, B] \cong 1 \cong [\perp, \mathrm{U}]$，所以第一部分得证。

第二部分只需两次使用第一部分，并利用内部 Hom 在第二个变量中保持极限这一事实即可得到。— ■

2.1.4 真值结构。

定义 2.12。*Cof Cof* 上的预真值结构是一个由（与、预或、顶、预底）结构组成的元组。当预或结构和预底结构分别是相对于映射 $X \to Y$ 的或结构和底结构时，这种预真值结构就是相对于该映射的真值结构 $X \to Y$ — ♦

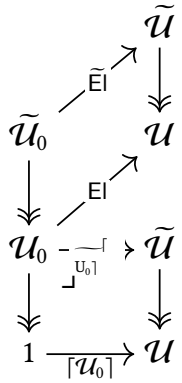
我们以子对象分类器 Ω 为一个具体例子。

引理 2.13。假设 $\mathbb{C}$ 是一个带有真值映射 $1 =: \partial\Omega \hookrightarrow \Omega$的托普斯。那么，对于任意映射 $E \to B$, $\partial\Omega \hookrightarrow \Omega$ 都有一个相对于该映射的真值结构。— ♦

证明。同构都是单态射，因此终对象 1 上的恒等映射可表示为真值映射的一个拉回，从而给出一个顶结构。托普斯是余完备的，因此存在零映射 $0 \hookrightarrow \Omega$；它是单态射，因而是真值映射的一个拉回，从而给出一个底结构。由于 $\partial\Omega \times \partial\Omega \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ 是单态射，与结构显然成立。最后，或结构由托普斯具有粘合性推出：作为 $\Omega \times \Omega$的两个子对象的推出，$\partial\Omega \times \Omega \cup_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \Omega \times \partial\Omega$是 $\Omega \times \Omega$的一个子对象。— ■

由上述结果　关于 or- 和底结构的结果，真值结构转移到内部宇宙中　　s.

~引理 2.14。假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\pi\colon \mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{U}$ 具有一个真值结构，并且存在一个内部宇宙，其数据如下所示



~那么 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}$ 有一个真值结构。 — ♦

证明。 根据引理2.8和2.11。 — ■

2.1.5 余纤维化截面。 为了使随后在定义路径类型中定义的2.26成为恒等类型，正如我们将在定理 2.43中看到的那样，我们要求纤维化的所有截面都配备余纤维化结构。我们定义了实现这一点所需的关于 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 的公理。

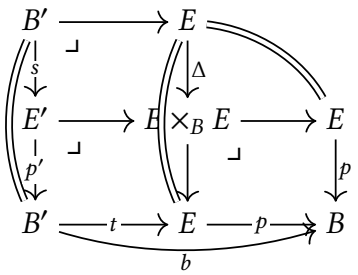
~我们从拉回 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的截面的一个通用分类器开始，这源自以下观察。

引理 2.15。固定一个映射 $p\colon E \to B$ 和一个拉回 $p'\colon E' \to B'$。如果 $s\colon B' \to E'$ 是 p' 的一个截面，如左图所示，那么 s 就如右图所示，是对角线的一个拉回。



— ♦

证明。我们构造一个映射 $t\colon B' \to E$ as $t :\equiv (B' \xrightarrow{s} E' \xrightarrow{e} E)$，使得复合映射 $(B' \xrightarrow{t} E \xrightarrow{p} B) = (B' \xrightarrow{s} E' \xrightarrow{e} E \xrightarrow{p} B) = (B' \xrightarrow{s} E' \xrightarrow{p'} B' \xrightarrow{b} B) = b$。于是，所需的映射 $E' \to E \times_B E$（其中 $s\colon B' \to E'$ 作为拉回出现）是沿投影 $E \times_B E \to E$ 对 $t\colon B' \to E$ 取拉回所得的拉回，我们可以在下图中看到这一点。这是因为 $E \times_B E \to E$ 沿 t 拉回到 $E' \to B'$，而 E 处的恒等映射拉回后是 B' 处的恒等映射，如下所示：



因此，由拉回引理可得该结果。 — ■

因此，下面的定义实现了这样的规范：到 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的拉回的截面是 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 的拉回。

定义 2.16。在 $(\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{U})$-截面上，*(Cof Cof)*-余纤维结构是由一对映射 *(eq,*isEq) 构成，使得下列交换方块是一个拉回。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\mathrm{eq}} & \partial\mathrm{Cof} \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow[\mathrm{isEq}]{} & \mathrm{Cof} \end{array}$$

— ♦

推论 2.17。只要 π-截面上存在 ι-余纤维结构，若 $E \twoheadrightarrow B$ 是一个 π-纤维化，且 $s\colon B \to E$ 是 p 的一个截面，那么 s 就是一个 ι-余纤维化。— ♦

证明。 直接由引理 2.15即可。 — ■

引理 2.18。设 $\pi_0\colon \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 是 $\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的一个内部宇宙。那么， π-截面上的 ι-余纤维结构也限制为 π_0-截面上的 ι-余纤维截面。— ♦

证明。 内部宇宙 $\pi_0\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 是 π-纤维化的，因此对角线 $\mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0 \times_{\mathcal{U}_0} \mathcal{U}_0$ 是一个 π-纤维化的截面。结论现在由引理 2.15得出。— ■

2.2 区间结构

在本节中，我们将定义必要的公理，使 $\mathbb{I} \to 1$ 按照 [KL25b定义 5.10]的意义成为相对区间对象。简而言之，若 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 具有相对于 π 的真值结构，那么 $\mathbb{I}$ 在具有两个余纤维化点时便有预区间结构。当这两个余纤维化点的名称不相交时，该结构便成为区间结构；这里的不相交是指它们经由相对底映射 $\lceil\bot\rceil\colon 1 \to \mathrm{Cof}$进行因子分解。

定义 2.19。在 ι上的余纤维化端点结构，是指在 $\mathbb{I}$ 上选取两个点{0}、{1}：$1 \rightrightarrows \mathbb{I}$，它们属于 $\mathbb{I}$，并配备映射 $\mathrm{is}_\delta\colon \mathbb{I} \rightrightarrows \mathrm{Cof}$，对于 $\delta = \mathbb{0}$，$\mathbb{1}$，使得 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$上的宇宙结构选取拉回

$$\begin{array}{ccc} \{\delta\} & \longrightarrow & \partial\mathrm{Cof} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathrm{is}_\delta]{} & \mathrm{Cof} \end{array}$$

当 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$具有预底结构以及与结构时， $\mathbb{I}$ 上的余纤维化端点结构在 $\mathrm{is}_{\mathbb{0}} \wedge \mathrm{is}_{\mathbb{1}}$ 经由 $\lceil\bot\rceil\colon 1 \to \mathrm{Cof}$ 因子分解时称为不相交，如下所示：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{(\mathrm{is}_{\mathbb{0}},\mathrm{is}_{\mathbb{1}})} & \mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof} & \xrightarrow{-\wedge-} & \mathrm{Cof} \\ & {\scriptstyle !}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle \lceil\bot\rceil} & \\ & & 1 & & \end{array}$$

此外，如果 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 具有预或结构，那么我们将 $\partial\mathbb{I} :\equiv \mathbb{I}.\mathrm{is}_\partial \hookrightarrow \mathbb{I}$ 作为其边界，其中 $\mathrm{is}_\partial :\equiv \mathrm{is}_{\mathbb{0}} \vee \mathrm{is}_{\mathbb{1}}\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof} \to \mathrm{Cof}$。 — ♦

例 2.20。 若 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 是由托普斯中引理 2.13 中的真值结构赋予结构的子对象分类器，那么任意双点对象都有不交余纤维端点结构。— ♦

接下来我们注意到，当 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对真值结构时， $\mathbb{I}$ 上的不相交余纤维端点结构会按照 [KL25b定义 5.10]的意义诱导出一个相对区间结构。

~引理 2.21。设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathsf{U} \to \mathsf{U}$ 的真值结构。令 $0, 1\colon 1 \rightrightarrows \mathbb{I}$ 为 $\mathbb{I}$ 的两个 ι-余纤维端点，它们的 ι-名称为 $\mathsf{is}_{\mathbb{O}}, \mathsf{is}_{\mathbb{1}}\colon \mathbb{I} \rightrightarrows \mathsf{Cof}$。

(1) 那么，可以在 $\mathbb{I}$ 上赋予一个预区间结构，其两个点为 $\{0\}$、$\{1\}$ $\rightrightarrows \mathbb{I}$，边界为 $\partial I = \mathbb{I}.(\mathsf{is}_{\mathbb{O}} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{1}}) \hookrightarrow \mathbb{I}$。 (2) 当 ι-余纤维端点 $\{0\}$、$\{1\}\colon 1 \rightrightarrows \mathbb{I}$ 不相交时，($\{0\}$、$\{1\}$ $\rightrightarrows \mathbb{I}$、$\partial I = \mathbb{I}.(\mathsf{is}_{\mathbb{O}} \vee \widetilde{\mathsf{is}}_{\mathbb{1}}) \hookrightarrow \mathbb{I}$) 实际上是相对于 $\{\mathsf{U}, \mathsf{U}\}$ 的区间结构，其意义见 [KL25b，定义 5。10]。(3) 特别地，对于每个 $X \in \mathbb{C}$，对象 $X \times \mathbb{I} \to X \in \mathbb{C}/X$ 是相对于~$\{X \times \mathsf{U}\ X \times \mathsf{U}\}$的区间结构。

— ♦

证明。 第一部分由注2.4 和2.7得出。

对于第二部分，沿着或纤维拉回 $(\text{是}_{\mathbb{O}}, \text{是}_{\mathbb{1}})\colon \mathbb{I} \to \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}$ 可得

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{I}.(\mathsf{is}_{\mathbb{O}} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{O}}), B \times \mathbb{I}]_{\mathbb{I}} & \longrightarrow & [\{\mathbb{1}\}, B \times \mathbb{I}]_{\mathbb{I}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ [\{\mathbb{0}\}, B \times \mathbb{I}]_{\mathbb{I}} & \longrightarrow & [\mathbb{I}.(\mathsf{is}_{\mathbb{O}} \wedge \mathsf{is}_{\mathbb{O}}), B \times \mathbb{I}]_{\mathbb{I}} \end{array}$$

~在 $\mathbb{C}/\mathbb{I}$ 对于 $B \in \{\mathcal{U}, \mathcal{U}\}$。通过 $\mathbb{I} \to 1$ 推前，并利用 [KL25b，引理 3。3], 可得到拉回方块

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{I}.(\mathsf{is}_{\mathbb{O}} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{O}}), B] & \longrightarrow & [\{\mathbb{1}\}, B] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ [\{\mathbb{0}\}, B] & \longrightarrow & [\mathbb{I}.(\mathsf{is}_{\mathbb{O}} \wedge \mathsf{is}_{\mathbb{O}}), B] \end{array}$$

现在，若 $\text{是}_{\mathbb{O}} \wedge \text{是}_{\mathbb{1}}$ 经由 $\ulcorner\bot\urcorner\colon 1 \to \mathsf{Cof}$ 分解，则由引理 2.10可知， $[\mathbb{I}.(\text{是}_{\mathbb{O}} \wedge \text{是}_{\mathbb{O}})\ B] \cong 1$，从而证明了所需的区间结构，这正是 [KL25b，定义 5。10]所要求的。

关于切片的最后一部分 $\mathbb{C}/X$ 则由 [KL25b，引理 5。12]得出。 — ■

为准备进行填充操作，我们还证明了一个关于余纤维化推出积近似的结果。

引理 2.22。设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于映射 $E \to B$ 具有或结构，且 $\mathbb{I}$ 具有不相交的 ι-余纤维化端点结构。

固定 $\mathbb{I}.\varphi \hookrightarrow \mathbb{I}$ 的一个拉回 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$，其名称为 $\varphi\colon\ \mathbb{I} \to \mathsf{Cof}$。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}.\varphi & \longrightarrow & \partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{I} & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathsf{Cof} \end{array}$$

那么，按如下方式通过迭代拉回构造的映射 $(\mathsf{Cof} \vee \varphi)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I}$，

$$\begin{array}{ccccc} (\mathsf{Cof} \vee \varphi)^*\partial\mathsf{Cof} & \hookrightarrow & \partial(\mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}) & \hookrightarrow & \partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{Cof}\times\varphi]{} & \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof} & \xrightarrow{-\vee-} & \mathsf{Cof} \\ {\scriptstyle\mathsf{proj}}\downarrow & & & & \\ \mathsf{Cof} & & & & \end{array}$$

在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}}$ 中，相对于 $E\times\mathsf{Cof} \to B\times\mathsf{Cof}$，近似推出积 $(\mathsf{Cof}\times\mathbb{I}.\varphi \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathsf{Cof}} (\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof})$。— ♦

证明。这由[KL25b定义 4 中相对近似推出积的定义4] 以及 [KL25b引理 4.5 和 4 中关于推出积近似的基变换性质6]可得。

正如注2.6中所述，或结构意味着 $\partial(\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}) \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}$ 近似推出积

$$(\mathsf{Cof}\times\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}} (\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof})$$

在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}}$ 中，相对于 $E\times\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof} \to B\times\mathsf{Cof}\times\mathsf{Cof}$。

沿着 $\mathsf{Cof}\times\varphi$ 并使用 [KL25b，引理 4。5], 我们看到 $(\mathsf{Cof}\vee\varphi)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I}$逼近推出积

$$(\mathsf{Cof}\times\mathbb{I}.\varphi \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathsf{Cof}\times\mathbb{I}} (\partial\mathsf{Cof}\times\mathbb{I} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I})$$

相对于 $E\times\mathsf{Cof}\times\mathbb{I} \to B\times\mathsf{Cof}\times\mathbb{I}$，在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}\times\mathbb{I}}$ 中。

结果随即由 [KL25b，引理 4。6] 得出，并注意到 $\mathsf{proj}^*(\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}) = (\partial\mathsf{Cof}\times\mathbb{I} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I})$, 同样 $\mathsf{proj}^*(E\times\mathsf{Cof} \to B\times\mathsf{Cof}) = (E\times\mathsf{Cof}\times\mathbb{I} \to B\times\mathsf{Cof}\times\mathbb{I})$ — ■

~推论 2.23。假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathsf{U} \to \mathsf{U}$ 的真值结构，并且 $\mathbb{I}$ 具有不相交的 ι-余纤维化端点结构。那么，

(1) $(\mathsf{Cof} \vee 是_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I}$逼近推出积 $(\mathsf{Cof}\times\{\delta\} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathsf{Cof}}{}^{\sim} (\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof})$，相对于 $\mathsf{Cof}\times\mathsf{U} \to \mathsf{Cof}\times\mathsf{U}$，在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}}$ 中，对 $\delta = \mathbb{0}, \mathbb{1}$。

（2）$(\mathsf{Cof} \vee 是_\partial)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I}$ 近似于相对于 $\mathsf{Cof}\times\mathsf{U} \to \mathsf{Cof}\times\mathsf{U}$ 在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}}$ 中的推出积 $(\mathsf{Cof}\times\partial\mathbb{I} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\times\mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathsf{Cof}}{}^{\sim} (\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof})$。

(3) 如果 $\partial A \hookrightarrow A$ 是沿着 $\varphi\colon A \to \mathsf{Cof}$ 对 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 的拉回，那么，若 $E \twoheadrightarrow B$ 是一个 π-纤维化，且 B 满足（或纤维），则 $(\rho \vee 是_\partial)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow A\times\mathbb{I}$ 是相对于 $A\times E \to A\times B$ 在 $\mathbb{C}/_A$ 中对推出积 $(A\times\partial\mathbb{I} \hookrightarrow A\times\mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_A (\partial A \hookrightarrow A)$ 的近似。

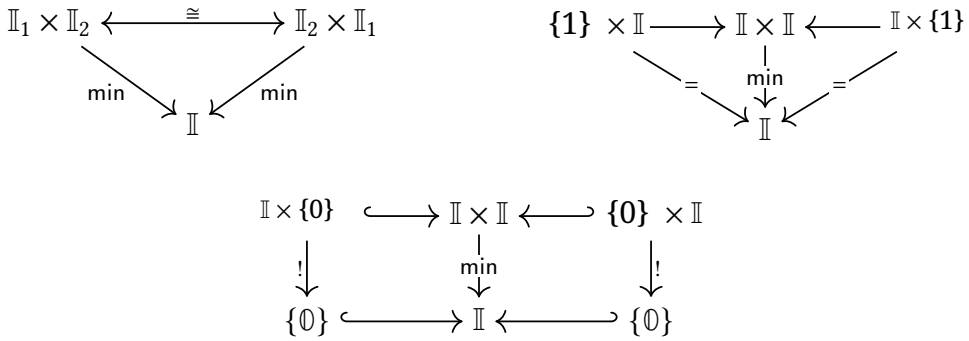
— ♦

证明。 由引理 2.8 和 2.22可立即得出。 — ■

例 2.24. 若 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 是托普斯中的子对象分类器，那么，引理 2.13 中或结构给出的映射 $\partial(\mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof}) \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof}$ 恰好是推出积 $\partial\mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof} \cup \mathrm{Cof} \times \partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof}$；并且 $\mathbb{C}$ 是粘合的，因此，引理 2.22 和推论 2.23 中对推出积的近似实际上就是推出积本身。— ♦

最后，我们为区间引入连接运算。

定义 2.25. 假设 $\mathbb{I}$ 相对于 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 具有 ι-余纤维端点结构。在 $\mathbb{I}$ 上的 最小值 结构是一个内部对称二元运算 min: $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$，其截面为 $\{1\} \times \mathbb{I}, \mathbb{I} \times \{1\} \rightrightarrows \mathbb{I} \times \mathbb{I}$，当任一参数为 0 时，该运算恒为 0。



同样，$\mathbb{I}$ 上的一个最大值结构是指一个内部对称二元运算 max: $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$，其截面为 $\{0\} \times \mathbb{I}$，$\mathbb{I} \times \{0\} \rightrightarrows \mathbb{I} \times \mathbb{I}$，当任一参数为 1 时，该运算恒为 1。— ♦

2.3 纤维化结构

除了内涵类型论中常见的逻辑结构（如第 1.2 节中的逻辑结构）外，立方$\tilde{}$类型论还要求在纤维化宇宙 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$上具备一些额外的逻辑结构。具体而言，这些是路径类型结构，我们将在本部分中定义。特别是，我们将定义路径类型结构的一种推广，并证明在某些条件下，路径类型会导出通常的恒等类型。

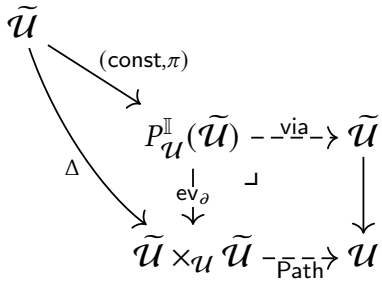
2.3.1 路径类型结构。路径类型结构指出，纤维化$P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\tilde{\mathcal{U}}) \to \partial P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\tilde{\mathcal{U}})$的端点求值映射 $\mathbb{I}$-路径 [KL25b，定义 5。6] 是一个 π-纤维化。

$\tilde{}$定义 2.26。假设 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，并且$\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。

$\tilde{}$U 上的路径类型 结构是由一对虚线映射（通过，Path）给出的边界求值映射

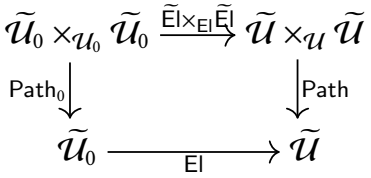
$$P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \cong [\mathbb{I}, \widetilde{\mathcal{U}}] \times_{[\mathbb{I}, \mathcal{U}]} \mathcal{U} \xrightarrow{\mathrm{ev}_\partial} \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \cong \partial P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})$$

引自 [KL25b，定义 5。6] 一个 π-纤维化结构。



(Path-def)

~ ~若 $\pi_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 是 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 的内部宇宙， π 带有名称 El，且还赋有Path-路径类型结构 Path_0，那么当下图交换时，它们便是相容的，这与 Id-类型情形（定义 1.22）相同。

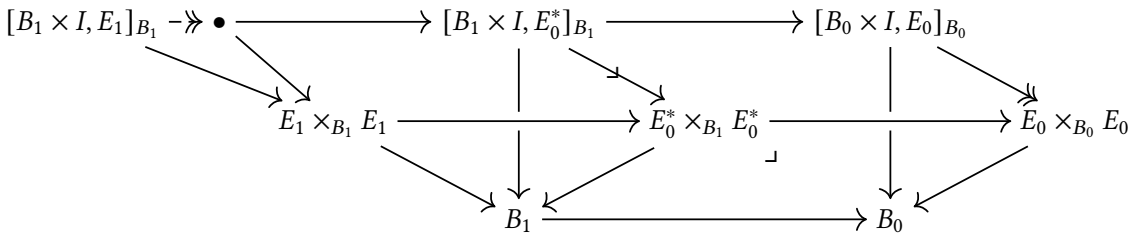


– ♦

2.3.2 异质路径类型结构。 通常路径类型结构有一个令人遗憾的特点：如以下示例所示，它们在乘积上的纤维性在形成逆图时不会保持。

例 2.27。设 $\mathbb{C}$ 是一个双完备局部笛卡尔闭范畴，带有一组拉回稳定纤维化，并设 $I \in \mathbb{C}$ 赋有区间结构 $\partial I := 1 \sqcup 1 \to I$（相对于所有对象）。假设只要 $E \twoheadrightarrow B$ 是纤维化，端点求值映射 $P^I_B(E) \twoheadrightarrow E \times_B E$ 就是纤维化，因此区间对象会导出纤维化路径对象。

现在，考虑箭头范畴 $\mathbb{C}^{1\to 0}$，其中纤维化是 Reedy 纤维化，区间对象选为在 I 上取常值。一般而言， $\mathbb{C}^{1\to 0}$ 可能不具备这样的性质：常值区间对象会产生纤维化路径对象。为说明这一点，固定一个 Reedy 纤维化 $E \to B \in \mathbb{C}^{1\to 0}$，使得局部指数对象 $[E \times I, B]_B \in {}^{\mathbb{C}^{1\to 0}}\!/_{B_1 \to B_0}$ 由 $[B_1 \times I, E_1]_{B_1} \to [B_1 \times I, E_0^*]_{B_1} \to [B_0 \times I, E_0]_{B_0}$ 给出，其图表计算如下。



极限是逐点计算的，因此，要求映射 $[B \times I, B]_B \to E \times_B E$ 是 Reedy 纤维化，按定义就是要求相对匹配映射

$$[B_1 \times I, E_1]_{B_1} \longrightarrow [B_0 \times I, E_0]_{B_0} \times_{(E_0 \times_{B_0} E_0)} (E_1 \times_{B_1} E_1)$$

是纤维化。但可以发现，写作上述图表整个顶面之拉回的余域对象，其实也只是上述左上侧面的拉回。

$$[B_0 \times I, E_0]_{B_0} \times_{(E_0 \times_{B_0} E_0)} (E_1 \times_{B_1} E_1) \cong [B_1 \times I, E_0^*]_{B_1} \times_{(E_0^* \times_{B_1} E_0^*)} (E_1 \times_{B_1} E_1)$$

因此，根据粘合性，相对匹配映射实际上是切片范畴中 B_1 上 $\partial I \times B_1 \to I \times B_1$ 与 $E_1 \twoheadrightarrow E_0^*$ 的拉回 Hom。后一个映射是纤维化，因为 $E \to B$ 是 Reedy 纤维化。

因此，根据 [KL25b，引理 5。7], 看来，为了确保通过逆图上的常值区间对象映射出对象来构造纤维化路径对象，$\mathbb{C}$ 中余纤维化与纤维化构成的对的拉回 Hom 仍是纤维化，$\mathbb{C}$。— ⧫

这种在逆图下不封闭的情况，似乎会妨碍在 [KL18]的模型范畴中复现路径对象构造。受上述例子的启发，以下更一般的路径型结构（按异质意义理解）满足封闭性条件；它刻画了这样一条公理：端点包含余纤维化与纤维化的拉回 Hom 仍是纤维化。

为了陈述 这一表述，我们先构造分类异质路径型映射 .

~构造 2.28。假设 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，且在该结构下 $\mathbb{I}$ 具有不相交的 ι-余纤维化端点结构。

~在下文中，我们分别用 is_∂^* 和 $\mathrm{ev}^*(\mathrm{U} \times \pi \mathrm{U})$ 表示映射 $\partial\mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 在 ~ ~ ~上重新基变换的映射 $\pi_*(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$，以及将映射 $\mathrm{GenComp}(\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{U}, \mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{U})$ 视为 $\pi_*(\mathrm{U} \times \mathrm{U})$ 上的映射。

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) \times \partial\mathbb{I} & & \mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{is}_\partial^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi)} \\ \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) \times \mathbb{I} & & \pi^*\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) \quad \in \mathbb{C}/_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}) & \end{array}$$

~然后，将定义 1.5 应用于上述定义在 $\pi_*(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ 上的映射对，可得左侧的下列映射；可以看出，它与 $P^{\mathbb{I}}_{\pi_*(\widetilde{\ }\mathcal{U} \times \mathcal{U})}(\mathrm{ev}^*(\widetilde{\ }\mathcal{U} \times \pi))$ 由[KL25b定义 5.6] 右侧得到的映射相同。

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Diag}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})}(\mathrm{is}_\partial^*, \mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi)) \\ \downarrow \\ \mathrm{Sq}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})}(\mathrm{is}_\partial^*, \mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{\mathbb{I}}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})}(\mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}})) \\ \downarrow{\scriptstyle \widehat{P}^{\mathbb{I}}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})}(\mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi))} \\ \mathrm{Sq}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})}(\mathrm{is}_\partial^*, \mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi)) \end{pmatrix}$$

— ⧫

我们还给出一种构造，使得可以通过异质路径类型表达内部宇宙的闭包性。

构造 2.29。假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有一种真值结构，在该结构下 $\mathbb{I}$ 具有不相交的ι-余纤维化端点结构。

若 $\pi_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 是 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 的内部宇宙，则根据构造 1.19， $\mathsf{GenComp}(\pi_0, \pi_0)$可表示为 $\mathsf{GenComp}(\pi, \pi)$的拉回，因此引理 1.6 给出如下迭代拉回方块

$$\begin{array}{ccc}
P^{\mathbb{I}}_{(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\mathcal{U}_0)}(\mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \widetilde{\mathcal{U}}_0)) & \longrightarrow & P^{\mathbb{I}}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})}(\mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}})) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\mathsf{Sq}_{(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\mathcal{U}_0)}(\mathsf{is}^*_\partial, \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \pi_0)) & \longrightarrow & \mathsf{Sq}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})}(\mathsf{is}^*_\partial, \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi)) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \mathcal{U}_0) & \longrightarrow & \pi_*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U})
\end{array}$$

– ♦

现在我们可以通过要求相应映射具有纤维化结构，来表述异质路径类型。

定义2.30. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的真值结构，且 $\mathbb{I}$ 具有不相交的 ι-余纤维端点结构。

一个 异质的 路径类型结构 定义在 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 上，是一对虚线映射 (hetvia,hetPath)，它们在拉回 $\mathrm{Hom}^{P^{\mathbb{I}}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})}(\mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi))}$构造上给出一个 π-纤维化结构，类似于构造 2.28。也就是说，它是如下的拉回方块。

$$\begin{array}{ccc}
P^{\mathbb{I}}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})}(\mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{U}})) & \xrightarrow{\mathsf{hetvia}} & \widetilde{\mathcal{U}} \\
\downarrow{\scriptstyle \text{Construction 2.28}} & \lrcorner & \downarrow \\
\mathsf{Sq}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})}(\mathsf{is}^*_\partial, \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi)) & \xrightarrow[\mathsf{hetPath}]{} & \mathcal{U}
\end{array}$$

现在假设 $\pi_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 是 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 的一个内部宇宙，且带有 π-名称 $\mathsf{El} : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$。那么，根据构造 2.29的中间层映射，可得

$$\mathsf{Sq}_{(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\mathcal{U}_0)}(\mathsf{is}^*_\partial, \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \pi_0)) \xrightarrow{\text{Construction 2.29}} \mathsf{Sq}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})}(\mathsf{is}^*_\partial, \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi))$$

如果该内部宇宙还配备了异质路径类型结构 $\mathrm{hetPath}_0$，那么当下图交换时，它便与外部环境宇宙的异质路径类型结构相容 。

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Sq}_{(\pi_0)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\mathcal{U}_0)}(\mathsf{is}^*_\partial, \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \pi_0)) & \xrightarrow{\mathsf{hetPath}_0} & \mathcal{U}_0 \\
\downarrow{\scriptstyle \text{Construction 2.29}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{El}} \\
\mathsf{Sq}_{\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U})}(\mathsf{is}^*_\partial, \mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}} \times \pi)) & \xrightarrow[\mathsf{hetPath}]{} & \mathcal{U}
\end{array}$$

– ♦

异质路径类型确实是在存在单位 类型时对路径类型的推广。这是因为 $\mathsf{ev}^*(\mathrm{U} \times \mathrm{U}) \to \pi^*\pi_*(\mathrm{U} \times \mathrm{U}) \to \pi_*(\mathrm{U} \to \mathrm{U})$ 是映射的泛对象

~通过复合以下两个可复合的拉回而得到$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$和 [KL25b，引理 5。12] 表明，纤维化路径对象的拉回 Hom 在拉回下保持稳定。我们正式记录这一事实。

~命题 2.31。假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，并且 $\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。

~若 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有 Unit 型结构，则~$\mathrm{U} \to \mathrm{U}$上的每个异质路径类型结构都会在 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上诱导出一个路径类型结构。— ♦

证明。由于 $\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构，因此可得

$$P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \times_{\partial P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})} \partial P_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \cong [\mathcal{U} \times \mathbb{I}, \mathcal{U}]_{\mathcal{U}} \times_{[\mathcal{U} \times \partial\mathbb{I}, \mathcal{U}]_{\mathcal{U}}} [\mathcal{U} \times \partial\mathbb{I}, \widetilde{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} \cong \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}$$

根据引理 2.21。因此，$P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\mathrm{U}) \to \widetilde{\mathrm{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{U}}$ 是将拉回 Hom $\widehat{P}^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U})$ 应用于$\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U} \in \mathbb{C}/\mathcal{U}$ 所得到的结果。

因此，根据 [KL25b，引理 5.12],只需将 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U} \xrightarrow{=} \mathrm{U}$ 展示为 $\mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathrm{U}} \times \widetilde{\mathrm{U}}) \to \sim \sim \pi^*\pi_*(\mathrm{U} \times \mathrm{U}) \to \pi_*(\mathrm{U} \to \mathrm{U})$ 的一个拉回即可。但根据单位结构，所有恒等映射都是 π-纤维化，因此~~由引理 1.4 给出的 $\mathsf{GenComp}(\mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{U}, \mathrm{U} \twoheadrightarrow \mathrm{U})$ 的泛性质可得结论。— ■

2.4 填充运算

本节将公理化偏置填充运算及其各种计算规则。我们还将用它推导恒等类型和 J-消去。

~定义 2.32. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，在该结构下，$\mathbb{I}$具有不交余纤维端点结构。

一个 δ-偏置填充结构 在这些数据上，因而是一个提升结构，对于 $\delta = \mathbb{0}, \mathbb{1}$ 属于 $\mathbb{C}/\mathsf{Cof}$，如 [KL25b定义 1.4 和 31], 所定义如下。

$$\mathsf{Fill}_\delta \in \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & & \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \overset{\square}{\underset{\mathsf{Cof}}{}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

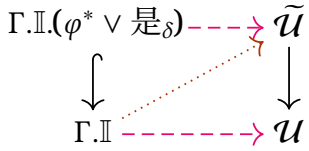
— ♦

~注 2.33. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，在该结构下，$\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。我们将从句法上解释具有δ-偏置填充结构的含义。

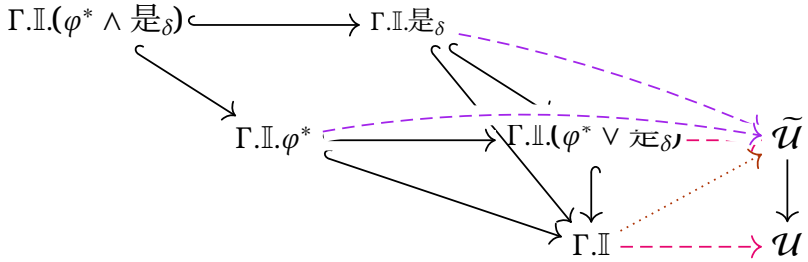
对于对象 $\Gamma \in \mathbb{C}$，我们用 $\Gamma.\mathbb{I}$ 表示 $\Gamma \times \mathbb{I}$。接着，对于映射 $\varphi\colon \Gamma \to \mathsf{Cof}$，我们可以如下构造迭代拉回 $\Gamma.\mathbb{I}.(\varphi^* \vee \mathsf{is}_\delta) \hookrightarrow \Gamma.\mathbb{I}$。

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma.\mathbb{I}.(\varphi^* \vee \mathsf{is}_\delta) & \longrightarrow & (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \longrightarrow & \partial(\mathsf{Cof} \vee \mathsf{Cof}) & \longrightarrow & \partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Gamma.\mathbb{I} & \xrightarrow[\varphi \times \mathbb{I}]{} & \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{Cof} \times \mathsf{is}_\delta]{} & \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof} & \xrightarrow[- \vee -]{} & \mathsf{Cof} \end{array}$$

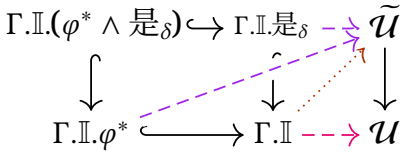
接着，根据 [KL25b，定义 1.4 和 3.1]， δ-biased 填充结构为以下每个提升问题提供一个解。



根据或结构，左侧映射 $\Gamma.\mathbb{I}(\varphi^* \vee 是_\delta) \hookrightarrow \Gamma.\mathbb{I}$，视为 $\Gamma.\mathbb{I}$ 上的一个对象，是一个位于 $\Gamma.\mathbb{I}.\varphi^* \hookleftarrow \Gamma.\mathbb{I}.(\varphi^* \wedge 是_\delta) \hookrightarrow \Gamma.\mathbb{I}.{}_\delta$ 之下的锥$\widetilde{\ }$。此外，$\Gamma.\mathbb{I}.(\varphi^* \vee 是_\delta) \to \mathrm{U}$（如上方顶行所示）完全由其在 $\Gamma.\mathbb{I}.\varphi^*$ 和 $\Gamma.\mathbb{I}.是_\delta$ 上的限制所确定。因此，我们可以等价地$\widetilde{\ }$将提升问题的顶行替换为一对映射 $\Gamma.\mathbb{I}.\varphi^* \to \mathrm{U}$ 和 $\Gamma.\mathbb{I}.是_\delta \to \mathrm{U}$，它们在 $\Gamma.\mathbb{I}.(\varphi^* \wedge 是_\delta)$ 上的公共限制相同，如下所示。



因此，删去映射 $\Gamma.\mathbb{I}.(\varphi^* \vee 是_\delta) \hookrightarrow \Gamma.\mathbb{I}$ 后，这样的填充结构等价于以下一种“扩展提升”或“提升整个方块”的运算。



– ♦

推导恒等类型。在本节中，我们将利用2.43 Id-类型和 J-消去，Path-类型结构，在存在𝕆-偏置填充运算、min-结构 $\mathbb{I}$ 以及纤维化截面上的余纤维结构时，证明定理

根据 (Path-def) 和 (Id-def)，当存在路径类型时，我们希望取 $\mathrm{Id} :\equiv \widetilde{\mathrm{Path}} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$。为此，我们必须证明，如 (J-def) 中所示，平凡路径 $\mathrm{const} : \mathrm{U} \to P^{\mathbb{I}}\mathrm{U}\,(\widetilde{\mathrm{U}})$ 相对于 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 从左侧一致地具有提升，从而得到 J-消去运算。我们的策略是在命题 2.40 中逐步证明，在某些条件下，候选项$\widetilde{\mathrm{const}}$是自反映射，它是一个 0-偏置边界的收缩。然后，根据 0-偏置填充运算的定义，它可相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 提升。

我们首先构造 0-偏置边界，并旨在展示 refl 是其一个收缩。

$\widetilde{\ }$构造 2.34。假设 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，在该结构下 $\mathbb{I}$具有不交余纤维端点结构。令 $\mathrm{isConst} : P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \to \mathrm{Cof}$ 为常值映射 $\mathrm{const} : \iota$-名称，

如下所示：the constant map const : $\widetilde{\mathrm{U}} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}})$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \partial\mathsf{Cof} \\ {\scriptstyle\mathsf{const}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \xrightarrow[\mathsf{isConst}]{} & \mathsf{Cof} \end{array}$$

我们将 ι-余纤维化

$$(\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I}$$

构造为如下的迭代拉回：

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} & \longrightarrow & (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} & \longrightarrow & \partial(\mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof}) & \longrightarrow & \partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}\mathrm{U}\,(\widetilde{\mathrm{U}}) \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{isConst}\times\mathbb{I}]{} & \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{Cof}\times\text{是}_{\mathbb{0}}]{} & \mathsf{Cof} \times \mathsf{Cof} & \xrightarrow[-\vee-]{} & \mathsf{Cof} \end{array}$$

$-$ ♦

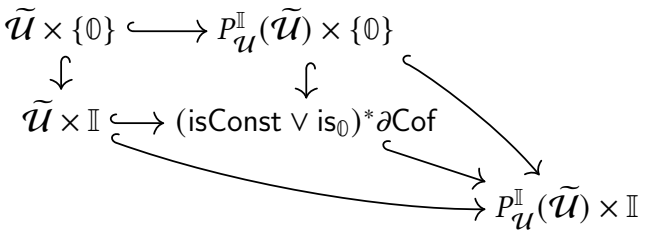
通过构造2.34，我们的目标现在是将其置于中间，并将候选const 放在refl 映射两侧的以下图表中，从而展示一个收缩

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathcal{U}} & \dashrightarrow & (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} & \dashrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle\mathsf{const}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{const}} \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \dashrightarrow & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} & \dashrightarrow & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \end{array} \qquad (\textsc{const-sr})$$

$\widetilde{\ }$在（const-sr）的右侧方块中，我们从$(\mathsf{isConst} \vee \text{是}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \to \mathcal{U}$映射出去。该对象通过或结构构造，并具有 ι-名称

$$P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} \xrightarrow{\mathsf{isConst}\vee\mathsf{is}_{\mathbb{0}}} \mathsf{Cof}$$

因此，在 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \times \mathbb{I}$ 上有以下交换方块：



$\widetilde{\ }$在（const-sr）的右侧方块中，顶行映射到 U，而整个复合映射映射到 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}})$，因此，若从 $(\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof}$ 映射到任一$\widetilde{\mathrm{U}}$ 或 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}})$ 的映射能够由其在 $\widetilde{\mathrm{U}} \times \mathbb{I}$ 和 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \times \{0\}$ 上的限制唯一确定，将会很方便。以下结果旨在对此作出说明。

$\widetilde{\ }$引理 2.35. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，在此结构下，$\sim_{\mathbb{I}}$ 具有不交余纤维端点结构。设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有路径类型结构，并令 $\mathsf{isConst} : P^{\mathbb{I}}\mathrm{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \to \mathsf{Cof}$ 是常值映射 $\mathsf{const} : \widetilde{\mathrm{U}} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathrm{U}(\widetilde{\mathrm{U}})$ 的一个 ι-名称，如构造 2.34 中所示。

那么，对于对象 $X \in \{\widetilde{\mathrm{U}}\ P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}})\}$，存在如下左图所示的 Hom 集拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}((\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof}, X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I}, X) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{C}(P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{0}\}, X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{0}\}, X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{0}\} & \hookrightarrow & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{0}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} & \hookrightarrow & (\rho \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

换句话说，就像上方右侧交换方块所示，映射 $(\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \to X$ 与那些映射对之间存在由限制给出的双射对应 $(\widetilde{\mathrm{U}} \times \mathbb{I} \to X,\ P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \times \widetilde{\{0\}} \to X)$，这些映射对在 $\mathrm{U} \times \{0\}$ 上的限制相同。—— ♦

证明。 我们先任取一个映射 $E \to B$，使得相对于该映射，ι 的预或结构是或结构，并证明陈述中关于 X 的结论：$= E$。由引理 2.22，可得

$$(\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \in \mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}}$$

逼近推出积

$$(\mathsf{Cof} \times \{\mathbb{0}\} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathsf{Cof}} (\partial\mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I})$$

相对于切片范畴 Cof 上的 $E \times \mathsf{Cof} \to B \times \mathsf{Cof}$。

由于映射 $(\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \in \mathbb{C}/_{P^{\mathbb{I}}\mathrm{U}(\widetilde{\mathrm{U}})}$ 是映射 $(\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \in \mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}}$ 沿 $\mathsf{isConst} : P^{\mathbb{I}}\mathrm{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \to \mathsf{Cof}$ 的拉回，因此应用 [KL25b，引理 4.5] 可得

$$(\mathsf{const} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} \in \mathbb{C}/_{P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})}$$

近似推出积

$$\left(P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{0}\} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I}\right) \mathbin{\widehat{\times}}_{P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})} \left(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I}\right)$$

相对于 $E \times P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}}) \to B \times P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}})$ 在 Cof 上的切片范畴中。根据 [KL25b 的定义 44]，近似推出积的定义揭示了以下拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/_{P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})}((\mathsf{const} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof}, E \times P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) & \longrightarrow & \mathbb{C}/_{P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})}(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I}, E \times P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{C}/_{P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})}(P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{0}\}, E \times P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) & \longrightarrow & \mathbb{C}/_{P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})}(\widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{0}\}, E \times P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) \end{array}$$

根据遗忘基底的 ⌟积伴随，可观察到

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}((\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof}, E) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I}, E) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{C}(P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{0}\}, E) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{0}\}, E) \end{array}$$

现在必须将上述论证应用于 $E \to B$ 映射

$$\widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \qquad\qquad P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \to \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}$$

为此，相对于它们，ι 的预或结构必须是或结构。根据假设，$\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ 满足这一点，因此只需证明这一点对 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \to \widetilde{\mathrm{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{U}}$ 也成立。路径类型结构

$\widetilde{\ }$在 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 上给出一个 π-纤维化结构。因此，根据引理 2.8，只需证明 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$(或纤维) 对 $\mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}$成立。但这同样由引理 2.8得出，因为 $\mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 根据$\widetilde{\ }$构造是一个 π-纤维化，并且 (或纤维) 对 $\mathcal{U}$成立。— ■

现在我们已经准备好了将映射定义到 $(\mathsf{isConst} \vee \text{是}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof}$中的构造要素，这有助于构造 (CONST-SR) 收缩部分的顶行。现在我们开始构造 (CONST-SR) 收缩部分的底行。为此，首先定义一个路径限制运算 $P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \to P_B^{\mathbb{I}}(E)$在$B$ 上，对每个 $E \to B$均成立。此运算接受一条路径和区间中的一个点，并根据该区间点限制路径所能到达的最远位置。

构造 2.36. 假设 $\mathbb{I}$具有一个最小结构。给定一个映射 $E \to B$，回顾 $P_B^{\mathbb{I}}(E) \dashv [B \times \mathbb{I}, E]_B$ 是局部指数对象，我们将映射定义为

$$P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \xrightarrow{\mathsf{pathres}_B(E)} P_B^{\mathbb{I}}(E)$$

作为该映射的指数转置

$$\left((P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I}) \times_B (B \times \mathbb{I}) \cong P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \xrightarrow{P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathsf{min}} P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \cong P_B^{\mathbb{I}}(E) \times_B (B \times \mathbb{I}) \xrightarrow{\mathsf{ev}} E \right)^{\dagger} \in \mathbb{C}/_B$$

— ♦

我们先来考察路径限制运算的一些有用性质。首先，将一条常值路径限制后，得到的仍是该常值路径。

引理 2.37. 假设 $\mathbb{I}$ 具有一个最小结构。那么，对于每个 $E \to B \in \mathbb{C}$，以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\mathsf{proj}} & E \\ {\scriptstyle \mathsf{const} \times \mathbb{I}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{const}} \\ P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{pathres}]{} & P_B^{\mathbb{I}}(E) \end{array}$$

— ♦

证明。我们证明这两个映射的转置相同。

对命题图表中右上方路径取指数转置，等价于先取 $E \times \mathbb{I} \to E \in \mathbb{C}/_B$ 与 $B \times \mathbb{I}$ 的乘积（在 B 上），再与 $\mathsf{const} : E \to P_B^{\mathbb{I}}(E)$ 的转置复合。$\mathsf{const} : E \to P_B^{\mathbb{I}}(E)$ 的转置正是投影映射$E \times \mathbb{I} \to E$，因此得到如下右上方路径。类似地，对命题图表中左下方路径取转置，并利用 $\mathsf{pathres}$ 的构造使其转置为 $\mathsf{ev} \cdot (P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \text{最小值})$，即可得到如下左下方路径。

$$\begin{array}{ccccc} E \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} & & \xrightarrow{\quad\quad\mathsf{proj}\quad\quad} & & E \times \mathbb{I} \\ {\scriptstyle \mathsf{const} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}}\downarrow & \searrow^{E \times \mathsf{min}} & & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{proj}} \\ & & E \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\mathsf{proj}} & \\ & & {\scriptstyle \mathsf{const} \times \mathbb{I}}\downarrow & & \downarrow \\ P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} & \xrightarrow[P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathsf{min}]{} & P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\mathsf{ev}} & E \end{array}$$

于是可以验证，这两个转置都是对角线 $\mathsf{proj} \cdot (E \times \text{最小值})$。—— ■

接下来，将路径限制在 0 处，得到在 0 处的常值路径。

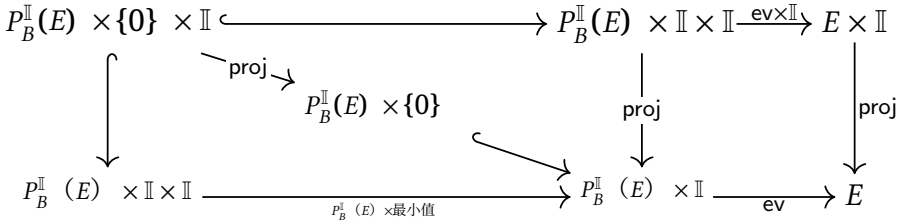
引理 2.38. 假设 $\mathbb{I}$ 具有最小结构。那么，对于每个 $E \to B \in \mathbb{C}$，以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \{\mathbb{0}\} & \xrightarrow{\mathsf{ev}_{\mathbb{0}}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \mathsf{const} \\ P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{pathres}]{} & P_B^{\mathbb{I}}(E) \end{array}$$

— ⧫

证明。再次，我们对两个映射作转置，并利用 min 在任一参数为 0 时取值为 0 这一事实。

对于命题中图表的右上方路径，其转置的计算方式是：先取上方映射 $\mathsf{ev}_{\mathbb{0}}\colon P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \{0\} \to E \in \mathbb{C}/_B$ 在 $B \times \mathbb{I}$ 下经纤维积函子得到的像，然后与 const 的转置 proj: $E \times \mathbb{I} \to E$ 复合。但根据定义，命题图表中的上方映射 $\mathsf{ev}_{\mathbb{0}}$ 是 $P_B^{\mathbb{I}} \times \{0\} \hookrightarrow P_B^{\mathbb{I}} \times \mathbb{I} \xrightarrow{\mathsf{ev}} E \times \mathbb{I}$，因此可得到下图中的右上方路径。



计算图表陈述中左下路径的转置，并使用构造 2.36，即可得到上方图表的左下路径。

那么，上方图表中的右侧方块由余单位的自然性成立，而左侧交换方块中的对角线则是因为 min 在任一参数为 0 时取值为 0。— ■

最后，将路径限制为最远到达 1，并不会改变这条路径。

引理 2.39。假设 $\mathbb{I}$ 具有最小值结构。那么，对每个 $E \to B$，都有以下截面-收缩对。

$$P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \{\mathbb{1}\} \hookrightarrow P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \xrightarrow{\mathsf{pathres}} P_B^{\mathbb{I}}(E)$$

— ⧫

证明。最小结构表明，$\{1\} \times \mathbb{I} \hookrightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{I} \xrightarrow{\text{最小值}} \mathbb{I}$ 是一个截面-收缩对。因此，计算转置后，我们看到

$$\begin{array}{ccc} P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \{\mathbb{1}\} \times \mathbb{I} & & \\ \downarrow & \overset{\cong}{\searrow} & \\ P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} & \xrightarrow[P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathsf{min}]{} & P_B^{\mathbb{I}}(E) \times \mathbb{I} \xrightarrow[\mathsf{ev}]{} E \end{array}$$

— ■

现在我们可以证明，如果常值路径是余纤维化，那么常值路径也是填充运算中左类的一个拉回的收缩。

命题 2.40。假设

(1) $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构

(2) $\mathbb{I}$ 具有不相交 ι-余纤维化端点结构

(3) $\mathbb{I}$ 具有一个 $\min : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 结构

(4) $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有路径类型结构

(5) 映射 $\mathrm{U}_{\mathsf{const}} \longrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\mathrm{U})$ 是沿 isConst 对 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 作拉回得到的。

那么，$\mathsf{const}: \mathcal{U} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\mathcal{U})$ 是 $(\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\mathcal{U}) \times \mathbb{I}$ 中的一个收缩，CONST-SR所示，回忆一下，该结构如下图表所示。

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathcal{U}} & \dashrightarrow & (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathrm{Cof} & \dashrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle\mathsf{const}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{const}} \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \dashrightarrow & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} & \dashrightarrow & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \end{array} \qquad (\text{CONST-SR})$$

$-\blacklozenge$

证明。 我们首先通过为 (CONST-SR) 右侧交换方块顶行构造一个映射，来定义截面-收缩对中的截面部分，如下所示。

$$(\mathsf{proj}, \mathsf{ev}_{\mathbb{0}}) : (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathrm{Cof} \to \widetilde{\mathcal{U}}$$

然后，必须检查 CONST-SR 的方块右侧的以下交换方块是交换的。

$$\begin{array}{ccc} (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathrm{Cof} & \xrightarrow{(\mathsf{proj},\mathsf{ev}_{\mathbb{0}})} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{const}} \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{pathres}]{} & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \end{array} \qquad (\text{const-retract})$$

根据引理 2.35，这样的映射 $(\mathsf{proj}, \mathsf{ev}_{\mathbb{0}}) : (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathrm{Cof} \to \mathrm{U}$ 由两个映射 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\mathrm{U}) \times \{\mathbb{0}\} \to \mathrm{U}$ 和 $\mathrm{U} \times \mathbb{I} \to \mathrm{U}$ 唯一确定，它们在 $\mathrm{U} \times \{\mathbb{0}\}$ 上的限制相同。换言之，可以通过以下交换方块得到这样的映射，其中映射$P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\mathrm{U}) \times \{\mathbb{0}\} \to \mathrm{U}$ 和 $\mathrm{U} \times \mathbb{I} \to \mathrm{U}$ over U 分别是 $\mathsf{ev}_{\mathbb{0}}$ 和 proj。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{0}\} & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} \\ {\scriptstyle\mathsf{const}\times\{\mathbb{0}\}}\downarrow & \overset{\cong}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle\mathsf{proj}} \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{0}\} & \xrightarrow[\mathsf{ev}_{\mathbb{0}}]{} & \widetilde{\mathcal{U}} \end{array}$$

现在来检查（const-收缩）是否可交换。再次根据引理 2.35，只需分别检查限制到分量 $\mathrm{U} \times \mathbb{I}$ 和 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\mathrm{U}) \times \{\mathbb{0}\}$ 时的可交换性。换言之，需要检查下列交换方块是否可交换。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\mathsf{proj}} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{const}\times\mathbb{I}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{const}} \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{pathres}]{} & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{0}\} & \xrightarrow{\mathsf{ev}_{\mathbb{0}}} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{const}} \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{pathres}]{} & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \end{array}$$

这确实成立，这是由引理 2.37 和 2.38。

现在，我们通过将顶端映射取为CONST-SR的截面部分，构造 $(\mathcal{U} \to (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof}$的复合映射

$$\widetilde{\mathcal{U}} \cong \widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{1}\} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} \xrightarrow{\mathsf{inj}_1} (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof}$$

以及底端映射

$$P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \cong P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{1}\} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I}$$

为包含映射。由于复合映射 $\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} \hookrightarrow (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I}$恰好是包含映射 $\widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I}$，(CONST-SR) 的左侧部分方块交换，具体如下所示。

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{1}\} & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\mathsf{inj}_1} & (\rho \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof} \\ {\scriptstyle \mathsf{const}\times\{\mathbb{1}\}}\downarrow & & & \searrow^{\mathsf{const}\times\mathbb{I}} & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{1}\} & & \hookrightarrow & & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} \end{array}$$

于是，(CONST-SR) 变成如下两个交换方块

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{\mathcal{U}} \times \{\mathbb{1}\} & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\mathsf{inj}_1} & (\rho \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof} & \xrightarrow{(\mathsf{proj},\mathsf{ev}_{\mathbb{0}})} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ {\scriptstyle \mathsf{const}\times\{\mathbb{1}\}}\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{const}} \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \{\mathbb{1}\} & & \hookrightarrow & & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\mathsf{pathres}]{} & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \end{array}$$

整个顶行的复合映射是恒等映射，因为根据 $(\mathsf{proj},\mathsf{ev}_{\mathbb{0}})$ 在 (CONST-RETRACT) 中的定义，其在 $\mathcal{U} \times \mathbb{I}$ 上的限制就是投影映射 $\mathcal{U} \times \mathbb{I} \to \mathcal{U}$。整个底行的复合映射是恒等映射，这是引理 2.39的结论。因此，这表明 const 是拉回 $(\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I}$的收缩。 — ■

鉴于命题 2.40，要实际证明 $\widetilde{\mathsf{U}} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathsf{U}})$ 是 $(\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^* \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I}$ 的拉回的一个收缩，我们需要证明 $\widetilde{\mathsf{U}} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathsf{U}})$ 是一个 ι-余纤维化。以下结果保证了这一点。

引理 2.41. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathsf{U} \to \mathsf{U}$ 具有真值结构，且 $\mathbb{I}$ 具有不相交 ι-余纤维化端点结构。此外，假设 $\mathsf{U} \to \mathsf{U}$ 配备了一个 Σ 和路径类型结构，并且 π-纤维化截面配备了一个余纤维结构。

那么，可以找到一个映射 $\mathsf{isConst} : P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathsf{U}}) \to \mathsf{Cof}$，使其满足

$$\mathsf{const} : \widetilde{\mathcal{U}} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})$$

一个 ι-名称。

— ♦

证明。我们首先注意到，const : $\widetilde{\mathcal{U}} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}})$ 是复合映射的一个截面

$$P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\mathsf{ev}_\partial} \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathsf{proj}_1} \widetilde{\mathcal{U}}$$

根据定义，$\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}\,\mathsf{proj} \xrightarrow{1} \widetilde{\mathcal{U}}$ 是一个 π-纤维化；在存在路径类型结构的情况下，$P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}})\,\mathsf{ev} \xrightarrow{\partial} \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}$ 也同样是一个 π-纤维化。因此，当存在 Σ-类型结构时，根据 [KL25a，命题 1.14],，复合映射 $P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}})\,\mathsf{ev} \xrightarrow{\partial} \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}\,\mathsf{proj} \xrightarrow{1} \widetilde{\mathcal{U}}$ 也是一个 π-纤维化。由此，我们证明了 const : $\widetilde{\mathcal{U}} \hookrightarrow P^{\mathbb{I}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}})$ 是一个 π-纤维化的截面。结论由推论 2.17 得出。— ■

因此，结合命题2.40 和引理 2.41，我们可以得到如下构造。

构造 2.42. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 具有真值结构，且在$\widetilde{\ }$之下 $\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构和最小结构。此外，假设 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 配备了 Σ-结构和路径类型结构，并且 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 的截面配备了余纤维结构。

那么，存在一个映射

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{O}})^*\partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

定义为以下复合映射

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{O}})^*\partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{[KL25b, Con. 3.2]}]{\text{Lemma 2.41}} \begin{pmatrix} (\mathsf{isConst} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{O}})^*\partial\mathsf{Cof} & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{I} & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

$$\text{[KL25b, Con. 2.6]} \downarrow \text{Proposition 2.40}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & \mathcal{U} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \mathcal{U} \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{[KL25b, Con. 3.4]}} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

— ♦

综合上述内容，我们可以从路径类型结构归纳出恒等类型结构。定理 2.43. 假设

$\widetilde{\ }$(1) $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 具有真值结构 (2) $\mathbb{I}$ 相对于 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有不交余纤维端点结构 (3) $\mathbb{I}$ 具有最小值：$\mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 结构$\widetilde{\ }$(4) $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 配备了路径结构和 Σ-类型结构

(5) 到 π-纤维化的截面配备有 ι-余纤维化结构。

于是，这些数据上的一个 0-偏置填充结构会按照预期的选择将路径类型结构变为恒等类型结构，即 (refl,Id) := (via · const, Path)，从而

$$\mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) = P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \qquad\qquad \widetilde{\mathcal{U}} \xrightarrow{\text{refl=const}} \mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})$$

— ♦

~ ~证明。只需证明，在 U ×U →U ×U 上方的切片中，存在一个 const 相对于 U 的一致提升结构。这是因为有如下映射

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\mathbb{0}})^*\partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Construction 2.42}} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}} & \mathcal{U}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \mathcal{U}\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

并且 $\mathrm{Fill}_{\mathbb{0}}$ 是定义域中的一个元素，因此其余域（即我们所寻求的提升结构集合）非空。— ■

3 填充的计算规则

在 [CCHM15], 提出的立方类型论表述中，复合运算配有多种计算规则。我们将这些计算规则移植到采用填充运算的框架中。

3.1 Σ-类型填充的计算规则 Σ

在这一部分中，我们将推导适用于 Σ-类型的 δ偏置填充运算的计算规则。 Σ-类型的计算规则表明，为 δ偏置填充运算选定的提升结构在映射的垂直复合下保持不变。

现在我们将明确这些概念，首先从以下构造开始。

~构造 3.1。假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ has 相对于 U →U 的真值结构，在该结构下$\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。

~进一步假设 U →U 具有 Σ-类型结构。于是，可以定义一个映射

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\delta})^*\partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_{\delta})^*\partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & \mathsf{Cof}\times\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U}) \xrightarrow[\Sigma]{} \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

作为以下复合映射，它利用了 Σ-类型结构，以及来自 [KL25b，构造 2.1、2.2 和 2。3]中的映射限制与复合。

$$\mathsf{Fill}_\delta \in \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \square & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & _{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \text{[KL25b, Constructions 2.1 and 2.2]}$$

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \square & \mathsf{Cof}\times\mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\widetilde{\mathcal{U}}) \\ \downarrow & _{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & & \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \square & \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \\ \downarrow & _{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & & \mathsf{Cof}\times\pi_*(\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \text{[KL25b, Construction 2.3]}$$

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \square & \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \\ \downarrow & _{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & & \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \\ & & \downarrow \\ & & \mathsf{Cof}\times\pi_*(\mathcal{U}\times\mathcal{U}) \end{pmatrix}$$

$$\cong\downarrow \text{[KL25b, Construction 2.2]}$$

$$\mathsf{pair}(\mathsf{Fill}_\delta) \in \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \square & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & _{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & \mathsf{Cof}\times\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U}) \xrightarrow[\mathsf{Cof}\times\Sigma]{} & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

当 $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 还具有一个 δ 偏置的填充结构 Fill_δ 时，将 Fill_δ 在上述映射下的像记为 $\mathsf{pair}(\mathsf{Fill}_\delta)$。

我们也将 $\mathsf{Fill}_\delta(\mathsf{pair})$ 通过以下限制映射得到的 Fill_δ 像直接记作[KL25b，构造 2。1]。

$$\mathsf{Fill}_\delta \in \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \square & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & _{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \text{[KL25b, Construction 2.1]}$$

$$\mathsf{Fill}_\delta(\mathsf{pair}) \in \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & \square & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & _{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & \mathsf{Cof}\times\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U}) \xrightarrow[\mathsf{Cof}\times\Sigma]{} & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

— ♦

借助上述构造，我们现在可以定义填充 Σ-类型的计算规则的定义性版本和命题性版本。

定义 3.2. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 具有真值结构，在该结构下 $\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。进一步假设 $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 具有 Σ-类型结构，且 $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 具有 δ-偏置填充结构 Fill_δ。

如果 δ-偏置填充结构 Fill_δ 按定义计算出此 Σ-类型结构，我们就称之为

$$\mathsf{Fill}_\delta(\mathsf{pair}) = \mathsf{pair}(\mathsf{Fill}_\delta)$$

与构造3.1中完全相等。

并且，相对于恒等类型结构 $\mathrm{Id} : \mathrm{U}\times_{\mathcal{U}}\mathrm{U} \to \mathrm{U}$，对于这个偏置 δ-填充结构 Fill_δ，相对于这个 Σ-结构的一个稳定命题计算结构 是一个见证 H，证明

$$\mathsf{Fill}_\delta(\mathsf{pair}), \mathsf{pair}(\mathsf{Fill}_\delta) \in \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \boxslash_{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & \mathsf{Cof}\times\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U}) & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix}$$

在结构上相关，其含义见 [KL25b，定义 6。3], 由 $\mathsf{Cof}\times\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \to \mathsf{Cof}\times(\mathcal{U}\times_{\mathcal{U}}\mathcal{U})$。——♦

3.2 Π-类型填充的计算规则

在这一部分，我们将推导 Π-类型的偏置填充运算的计算规则。然而，与 Σ-类型的情形不同，在那里我们针对右侧的同一个映射构造了两个不同的提升结构；这里我们要求一个提升被映射到另一个提升，其含义见 [KL25b，定义 6。3] 借助应用映射 (app、app)，如同从 (Π-DEF) 所得。

和之前一样，我们先给出一个构造，以便对此进行精确定义。

构造 3.3. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的真值结构，在该结构下，$\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。

那么，根据（Π-定义），可以定义一个映射

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \boxslash_{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{[KL25b, Constructions 2.1 and 2.2]}} \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} & & \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\widetilde{\mathcal{U}}) \\ \downarrow & \boxslash_{\mathsf{Cof}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\mathbb{I} & & \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U}) \end{pmatrix}$$

进一步地，若 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有一个 δ-偏置的填充结构 Fill_δ，则用 $\Pi(\mathsf{Fill}_\delta)$ 表示 Fill_δ 在上述映射下的像。— ♦

借助上述构造，我们现在可以定义填充 Π-类型的计算规则的定义性版本和命题性版本。

定义 3.4. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的真值结构，在该结构下，$\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。进一步假设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有一个 Π-类型结构，且 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有一个 δ-偏置的填充结构 Fill_δ。

如果应用映射这一对映射满足 δ-偏置填充结构 Fill_δ 按定义计算，则称其适用于该 Π-类型结构

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\widetilde{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathsf{app}}} & \mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Cof}\times\pi^*\pi_*(\widetilde{\mathcal{U}}\times\mathcal{U}) & \xrightarrow[\mathsf{Cof}\times\mathsf{app}]{} & \mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \end{array}$$

从（Π-DEF）精确地将 Π（Fill_δ）映回Fill_δ，其含义见 [KL25b，定义 6。3]。

相对于恒等类型结构 $\mathrm{Id}\colon \mathbb{U} \times_{\mathcal{U}} \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 的此 Π-结构，一个关于偏置 δ-填充结构 Fill_δ 的稳定命题计算结构，是一个结构化的 $(\mathrm{Cof} \times \widetilde{\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathbb{U})} \to \mathrm{Cof} \times (\mathbb{U} \times_{\mathcal{U}} \mathbb{U}))$-见证 H，通过应用映射对 $(\mathrm{Cof} \times \widetilde{\mathrm{app}}, \mathrm{Cof} \times \mathrm{app})$，将其从 $\Pi(\mathrm{Fill}_\delta)$ 映回 Fill_δ，其含义见 [KL25b，定义 6。3]。— ♦

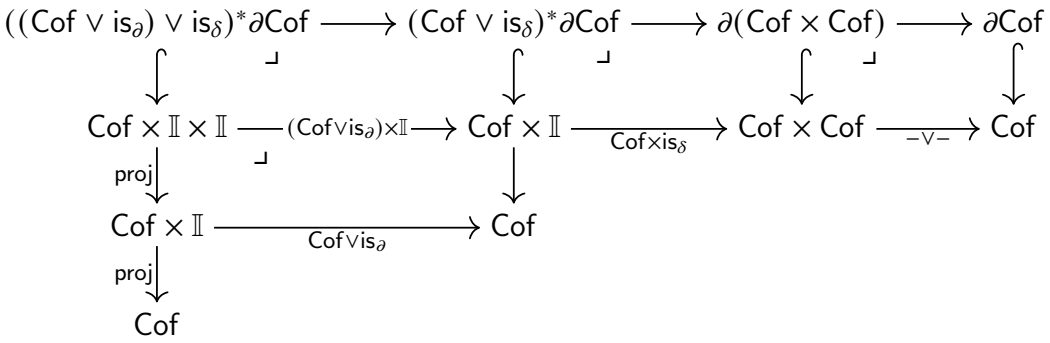
3.3 路径类型填充的计算规则

现在，我们定义路径类型的偏置填充运算的计算规则。简言之，这表示填充运算与莱布尼茨转置相容。

为精确说明这一点，我们需要先作一个观察。

~引理 3.5. 假设 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 具有相对于 $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$ 的真值结构，并且在该结构下 $\mathbb{I}$具有不交余纤维端点结构。

那么，对于 $\delta = \mathbb{0}, \mathbb{1}$，映射 $((\mathrm{Cof} \vee \text{是}_\partial) \vee \text{是}_\delta)^*\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}$，其构造方式如下：将左上方的竖直映射作迭代拉回，



在结构上近似于推出积

$$(\mathrm{Cof} \times \partial\mathbb{I} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathrm{Cof}} ((\mathrm{Cof} \vee \mathrm{is}_\delta)^*\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I})$$

~相对于 $\mathbb{U} \times \mathrm{Cof} \to \mathbb{U} \times \mathrm{Cof}$，在 Cof 上的切片中。 — ♦

证明。 我们已在推论 2.23 中证明 $(\mathrm{Cof} \vee \text{是}_\delta)^*\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I}$ 由陈述中的图表第二列顶行的垂直映射给出，它近似于推出积

$$(\mathrm{Cof} \times \{\delta\} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathrm{Cof}} (\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof})$$

~相对于 $\mathrm{Cof} \times \mathbb{U} \to \mathrm{Cof} \times \mathbb{U}$，在 $\mathbb{C}/_{\mathrm{Cof}}$ 中。因此，再沿着 $\mathrm{Cof} \vee \text{是}_\partial\colon \mathrm{Cof} \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cof}$ 拉回；这正是陈述中的图表第三行的水平映射。由 [KL25b，引理 4.5]，我们观察到 $(\mathrm{Cof} \vee \text{是}_\partial)^*(\mathrm{Cof} \vee \text{是}_\delta)^*\partial\mathrm{Cof} \cong ((\mathrm{Cof} \vee \text{是}_\partial) \vee \text{是}_\delta)^*\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}$，也就是我们关注的陈述中的图表左上方垂直映射，在结构上近似于推出积

$$(\mathrm{Cof} \times \{\delta\} \times \mathbb{I} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathrm{Cof} \times \mathbb{I}} ((\mathrm{Cof} \vee \mathrm{is}_\partial)^*\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I})$$

~相对于 $\mathrm{Cof} \times \mathbb{U} \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cof} \times \mathbb{U} \times \mathbb{I}$ 在 $\mathbb{C}/_{\mathrm{Cof} \times \mathbb{I}}$。

~现在，$\mathrm{Cof} \times \{\delta\} \times \mathbb{I} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 和 $\mathrm{Cof} \times \mathbb{U} \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cof} \times \mathbb{U} \times \mathbb{I}$ 分别是 Cof ~$\mathrm{Cof} \times \{\delta\} \hookrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathbb{I}$ 以及 $\mathrm{Cof} \times \mathbb{U} \to \mathrm{Cof} \times \mathbb{U}$ 在 $\mathrm{proj} : \mathrm{Cof} \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cof}$ 下的拉回。因此，根据 [KL25b，

引理 4.6], 映射 $((\mathsf{Cof} \vee \text{是}_\partial) \vee \text{是}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 作为一个位于 Cof 之上的映射，在结构上近似于推出积

$$(\mathsf{Cof} \times \{\delta\} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I}) \mathbin{\widehat{\times}}_{\mathsf{Cof}} ((\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I})$$

~相对于 $\times \mathrm{U} \to \mathsf{Cof} \times \mathrm{U}$（在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}}$ 中）。但随后 $(\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial)^*\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I}$ 在结构上近似于推出积

$$(\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}) \mathbin{\widehat{\times}} (\mathsf{Cof} \times \partial\mathbb{I} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I})$$

~相对于 $\mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \to \mathsf{Cof} \times \mathcal{U}$ 在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{Cof}}$ 根据推论 2.23。因此，根据 [KL25b 中推出积近似的结合律，定理 4。7], 结论便得证。—— ■

上述结果为以下定义提供了便利。

~构造 3.6。设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有一个相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的真值结构，~且它具有一个不交余纤维端点结构。进一步假设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有路径类型结构。

我们定义一个映射

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times (\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow[\mathsf{Cof} \times \mathsf{Path}]{} \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

作为复合映射，使用 [KL25b 中以下编号的构造].

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \xrightarrow{[\text{KL25b, Con. 3.2}]} \begin{pmatrix} ((\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial) \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof} \times \mathbb{I}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \times \mathbb{I} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \times \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow [\text{KL25b, Con. 3.4}]$$

$$\begin{pmatrix} ((\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial) \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \xleftarrow{[\text{KL25b, Con. 2.4}]} \begin{pmatrix} ((\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial) \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

$$\cong \uparrow \downarrow [\text{KL25b, Cor. 5.11}] \text{ Lemma 3.5}$$

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times (\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \end{pmatrix} \underset{[\text{KL25b, Con. 2.3}]}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times (\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow[\mathsf{Cof} \times \mathsf{Path}]{} \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

根据 [KL25b，构造 2。1], 我们还有一个直接映射

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix} \xrightarrow{[\text{KL25b, Con. 2.1}]} \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^*\partial\mathsf{Cof} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \end{pmatrix} \underset{\mathsf{Cof}}{\square} \begin{pmatrix} \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times (\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow[\mathsf{Cof} \times \mathsf{Path}]{} \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

~当 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 还具有一个 δ-偏置填充结构 Fill_δ 时，我们将 Fill_δ 在上述两个映射下的像分别记为 $\mathrm{Path}(\mathrm{Fill}_\delta)$ 和 $\mathrm{Fill}_\delta(\mathrm{Path})$。— ♦

借助上述构造，我们现在可以定义填充路径类型的计算规则的定义性版本和命题性版本。

~定义 3.7. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathsf{U} \to \mathsf{U}$ 的真值结构，在该结构下 $\mathbb{I}$~具有不交余纤维端点结构。此外，假设 $\mathsf{U} \to \mathsf{U}$ 具有路径类型结构和 δ-偏置的填充结构 Fill_δ。

我们称 δ偏置填充结构 Fill_δ 在定义上计算为对于这个路径类型结构，当且仅当$\mathsf{Fill}_\delta(\mathsf{Path}) = \mathsf{Fill}_\delta$ 与构造3.6中的定义完全相等。

并且，对于这个偏置 δ填充结构 Fill_δ，相对于此路径类型结构且相对于恒等类型结构 $\mathsf{Id} : \mathsf{U} \times_{\mathcal{U}} \mathsf{U} \to \mathsf{U}$，稳定命题计算结构是一个见证 H，表明

$$\mathsf{Fill}_\delta(\mathsf{Path}), \mathsf{Path}(\mathsf{Fill}_\delta) \in \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\delta)^* \partial\mathsf{Cof} & & \mathsf{Cof} \times \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \overset{\square}{\underset{\mathsf{Cof}}{}} & \downarrow \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & & \mathsf{Cof} \times (\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}}) \xrightarrow[\mathsf{Cof}\times\mathsf{Path}]{} \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

~ ~在结构上相关，含义是 [KL25b，定义 63], 由$\mathsf{Cof} \times \mathsf{Id}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \to \mathsf{Cof} \times (\mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}})$。 — ♦

4 同伦同构延拓运算

现在我们公理化同伦同构延拓运算的各种形式，它们对应于 [CCHM15], 的粘合运算，从而可以导出单值性。

首先，我们回顾 [KL25a，构造 27]中的同伦同构泛对象。

~构造4.1 ([KL25A，构造 2。7])。假设 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 具有一个 Id-类型结构~ ~$\mathsf{Id}\colon \mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U} \to \mathcal{U}$。那么，构造如下对象和并行映射，使其

$$\mathsf{src}, \mathsf{tgt} \colon \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \rightrightarrows \mathcal{U}$$

表示该预层和自然变换

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma \to \mathcal{U} \\ B\colon \Gamma \to \mathcal{U}}} \coprod_{f,r \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.A, \Gamma.B)} \left\{ \begin{pmatrix} H_s \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.A, \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \\ H_r \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.B, \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ccc} \Gamma.A & \xrightarrow{H_s} & \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.A) \\ {\scriptstyle (fs,\mathsf{id})}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \mathsf{ev}_\partial} \\ & \Gamma.A \times_\Gamma \Gamma.A & \end{array} \text{ and } \begin{array}{ccc} \Gamma.B & \xrightarrow{H_r} & \mathsf{Id}_\Gamma(\Gamma.B) \\ {\scriptstyle (rf,\mathsf{id})}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \mathsf{ev}_\partial} \\ & \Gamma.B \times_\Gamma \Gamma.B & \end{array} \right\} \right)_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

$$\downarrow{\scriptstyle (A,B,f,s,r,H_s,H_r)\mapsto A} \quad \downarrow{\scriptstyle (A,B,f,s,r,H_s,H_r)\mapsto B}$$

$$(\mathbb{C}(\Gamma, \mathcal{U}))_{\Gamma \in \mathbb{C}}$$

它们也共享一个共同的截面

$$\mathsf{trv} \colon \mathcal{U} \hookrightarrow \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})$$

通过选择底层映射为恒等映射并配备自反同伦的同伦同构，可表示地定义。— ♦

我们还回顾了 [KL25a] 给出的单值性的公理化表述。

定义 4.2 ([KL25A，定义 3.1])。映射 $K \to L$ 相对于映射 $E \to B$在给定提升下的下半提升，是一个只使底部三角形交换的填充。

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ L \arrow[r, dashed] \arrow[ur, dotted, "?"] & B \end{tikzcd}$$

— ♦

~ ~定义 4.3 ([KL25A，定义 3.2]）。设 $\pi_0\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 和 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是两个通用~ ~映射，且 π_0 具有前Id类型结构 $\mathrm{Id}_0\colon \mathcal{U}_0 \times_{\mathcal{U}_0} \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$。

（宇宙，前 Id 类型）对 (π_0, Id_0) 上的一个带基点（分别为*book*）π-单值性结构，是映射 (src，tgt) 上的一个 π-纤维化结构，并且选择 trv 在左侧、π 在右侧时的提升（分别为下半部的提升）。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook, "\mathsf{trv}"'] & \widetilde{\mathcal{U}} \arrow[d, two heads] \\ \mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \arrow[r, dashed] \arrow[ur, dotted, "(?)"] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

其中 (src，tgt) 而 trv 来自构造 4.1 中的对角分解，该构造经由 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_0}\,\mathrm{U}_0(\ \widetilde{}\mathrm{U}_0\ )$

$$\mathcal{U}_0 \xhookrightarrow{\mathsf{trv}} \mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \xrightarrow{(\mathsf{src},\mathsf{tgt})} \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_0$$

当（宇宙，前 Id 类型）对 (π_0, Id_0) 具有带基点（分别为 book）的 π-单值性结构时，它是带基点（分别为*book*）π-单值的。— ♦

注 4.4。显然，带基点单价性蕴含定义 4.3中的 book 单价性。[KL25a，定理 315] 还证明了，在 Π-和 Σ-类型结构下，上述 book 单价性的表述蕴含 HoTT 书 [Uni13]中的通常类型论表述。— ♦

4.1 强同伦同构延拓运算

现在我们可以定义同伦同构延拓运算的强版本。

~ ~定义 4.5。假设 U $\to$ U 具有一个恒等类型结构 Id: U $\times_{\mathcal{U}}$ U $\to$ U。

~一个（强）恒等-同伦同构延拓结构定义在$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 上，按 [KL25b定义 1.4 和 31] 的意义，它是切片 $\mathbb{C}/\mathsf{Cof}$

$$\mathsf{HIsoExt} \in \begin{pmatrix} \partial\mathsf{Cof} & & \mathsf{Cof} \times \mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \\ \downarrow & \boxslash_{\mathsf{Cof}} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}} \\ \mathsf{Cof} & & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U} \end{pmatrix}$$

其中对象 $\mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\ \widetilde{}\mathcal{U})$ 和映射 $\mathsf{tgt}\colon \mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\ \widetilde{}\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ 分别来自构造 4.1。

— ♦

利用 [KL25a], 中的同伦收缩论证，我们现在可以证明，强同伦同构延拓结构可导出带基点单价性。为此，我们希望使用 [KL25a，定理 3。12], 该定理要求构造一个提升结构，使余纤维化相对于同伦等价泛对象的路径空间具有提升性质。

~构造 4.6。设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 关于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有真值结构，且在~其下 $\mathbb{I}$ 具有不交余纤维端点结构。进一步假设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 具有路径-~类型结构，以及一个配备恒等类型结构 ~ ~Id_0: $\mathrm{U}_0 \times_{\mathcal{U}_0} \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$的内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$。

构造纤维化路径对象

$$P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}_0}(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \longrightarrow \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \times_{\mathcal{U}_0} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)$$

并借助 tgt: $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}_0}\mathcal{U}_0(\ \widetilde{}\ \mathrm{U}_0) \to \mathrm{U}_0$ 映射，进而构造映射

$$\begin{pmatrix} \partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}} \\ \mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U}_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}_0}(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Cof}\times\mathsf{ev}_\partial} \\ \mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times (\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \times_{\mathcal{U}_0} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \end{pmatrix}$$

作为如下复合映射

$$\begin{pmatrix} \partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}} \\ \mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U}_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{[KL25b, Con. 3.2]}} \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial)^*\partial\mathsf{Cof} & (\mathsf{Cof} \times \mathbb{I}) \times \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle (\mathsf{Cof}\times\mathbb{I})\times\mathsf{tgt}} \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & (\mathsf{Cof} \times \mathbb{I}) \times \mathcal{U}_0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \text{[KL25b, Con. 3.4]}$$

$$\begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial)^*\partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}} \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U}_0 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{[KL25b, Con. 2.4]}} \begin{pmatrix} (\mathsf{Cof} \vee \mathsf{is}_\partial)^*\partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}} \\ \mathsf{Cof} \times \mathbb{I} & \mathsf{Cof} \times \mathcal{U}_0 \end{pmatrix}$$

$$\cong \uparrow \downarrow \text{[KL25b, Cor. 5.11]}$$

$$\begin{pmatrix} \partial\mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}_0}(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \\ \downarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Cof}\times\mathsf{ev}_\partial} \\ \mathsf{Cof} & \mathsf{Cof} \times (\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \times_{\mathcal{U}_0} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \end{pmatrix}$$

— ♦

我们现在是一个 们现在能够从同伦同构延拓运算证明单值性 .

~定理 4.7. 假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的真值结构，在该结构下 $\mathbb{I}$具有不交余纤维端点结构。进一步假设

(1) $\mathbb{I}$ 配备了一个 min: $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 结构。

(2) 到 π-纤维化的截面配备了一个 ι-余纤维化结构。

(3) 上述数据上存在一个 0-偏置填充结构。~(4) 环境宇宙 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 配备了 Path-、 Σ-、 Π-类型结构。~(5) 内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 配备了 Id-、 Σ-、 Π-类型结构，并具有 Id-类型

.....

pe

~ ~记作 Id_0: $\mathrm{U}_0 \times_{\mathcal{U}_0} \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 的结构。

~(6) 内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 配备了 Id_0-同伦同构扩张结构。

那么，（内部宇宙，恒等类型）对 (π_0, Id_0) 是带基点 π-单值的。 – ♦

~证明。 根据定理 2.43，环境宇宙上的 路径类型结构 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 也是一种恒等类型结构。因此，根据 [KL25a，定理3.12(2)], 只需证明

$$\mathsf{trv} : \mathcal{U}_0 \hookrightarrow \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)$$

左侧针对.....具有提升性质

$$P^{\mathbb{I}}_{\mathcal{U}_0}(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)) \xrightarrow{\mathsf{ev}_\partial} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0) \times_{\mathcal{U}_0} \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}_0}_{\mathcal{U}_0}(\widetilde{\mathcal{U}}_0)$$

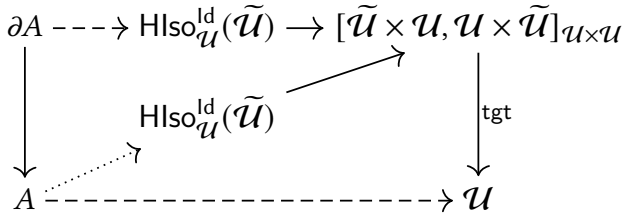
这由构造4.6 以及内部宇宙上的同伦同构延拓运算得出。—— ■

4.2 弱同伦同构延拓运算

定义 4.5中的强同伦同构延拓运算可以延拓全部同伦数据（即不仅延拓同伦同构本身，还延拓其两个逆映射以及到恒等映射的同伦）；定理4.7 证明了它能推出定义 4.3中的带基点单价性，这比 book 单价性更强。若只要求延拓同伦同构的底层映射，而非全部同伦数据，则仍可通过 [KL25a，定理 3.12(1)]，沿用 [CCHM15第 7 节中的相同论证2]。

~ ~ ~定义 4.8. 假设 U → U 具有预 Id-类型结构 Id: U ×$_{\mathcal{U}}$ U → U。

~U → U 上的弱恒等类型同伦同构延拓结构，是对每个 ι-余纤维化 $\partial A \hookrightarrow A$，如左下方所示，以及针对内部余域映射 tgt: $[\mathrm{U} \times \mathrm{U}, \mathrm{U} \times \mathrm{U}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \to \mathrm{U}$ 的提升问题，指定一个经由映射 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \to [\widetilde{\mathrm{U}} \times \mathrm{U}, \mathrm{U} \times \widetilde{\mathrm{U}}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ 分解的提升；该映射忘却同伦同构的同伦数据，如下方虚线映射所示。此提升问题经由映射 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}) \to [\widetilde{\mathrm{U}} \times \mathrm{U}, \mathrm{U} \times \widetilde{\mathrm{U}}]_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$分解，如下方虚线映射所示。



这种提升的选择还必须在余纤维化的拉回下保持稳定。 – ♦

通过将弱Id同伦同构扩展结构的前结构取为路径类型，可以重现 [CCHM15 第 7 节中使用的单值性证明。2]。

~定理 4.9。假设 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 具有一个相对于 U → U 的真值结构，在该结构下 $\mathbb{I}$具有不交余纤维端点结构。此外，假设

(1) $\mathbb{I}$ 配备了一个最小结构。

(2) 上述数据配备了一个 0-偏置填充结构。

(3) 环境宇宙 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 分别配备了 Path-、Σ、-Π-类型结构，分别记作 Path Σ, Π。

(4) 内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 分别对 Path-、Σ、-Path-类型结构封闭，记作 Path_0、Σ_0、Π_0。 (5) 内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 配备了弱 Path-同伦同构扩张结构。

于是，（内部宇宙、前 Id 类型）对 (π_0, Path_0) 具有 book π-单值性。 – ♦

证明。 弱 Path-同伦同构扩张结构假设提供了 [CCHM15，定理 9]。因此，可以重复 [CCHM15，推论 10] 中关于 tgt： $\mathsf{Hlso}^{\mathrm{Path}_0}\, u_0\, (\widetilde{\ }\mathcal{U}_0) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_0$ 具有可缩性的证明。利用传输，可缩性随后通过使用 [CCHM15，推论 11] 或 [KL25a，命题 3.11(1)]得到 book 单值性。—— ■

4.3 粘合运算

在 [CCHM15], 中，弱路径-同伦同构扩张结构（定义4.8）导出了单值性，正如 [CCHM15，推论 11], 所示。这是作为*Glue*-解胶运算的推论得到的；我们现在在宇宙范畴的框架中回顾该运算。简言之，它是接下来构造4.10的类型论对应物；该构造也用于 [KL21，定理 3.4。1] 单值性的单纯形模型。

构造 4.10。设有一个单态射 $i\colon \partial B \hookrightarrow B$，以及一个对象 $E \to B \in \mathbb{C}/_B$，其在 i 下的拉回为 $\partial E \to \partial B$。推前 $i_*\colon \mathbb{C}/_{\partial B} \to \mathbb{C}/_B$ 的函子性限制为一个映射$i_*\colon \mathbb{C}/_{\partial E} \to \mathbb{C}/_{i_*(\partial E)}$。记作

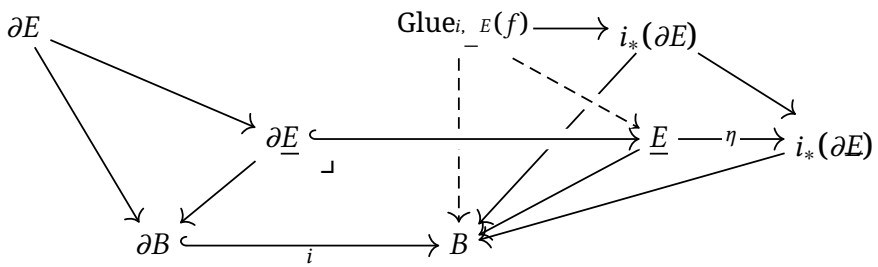
$$\mathsf{unglue}_{i,E}\colon \mathbb{C}/_{\partial E} \to \mathbb{C}/_E$$

复合映射

$$\mathbb{C}/_{\partial E} \xrightarrow{i_*} \mathbb{C}/_{i_*(\partial E)} \xrightarrow{\eta^*} \mathbb{C}/_E$$

其中 $i_*\colon \mathbb{C}/_{\partial E} \to \mathbb{C}/_{i_*(\partial E)}$ 是受限推前，$\eta\colon E \to i_*(\partial E) \cong i_* i^* E$是伴随的单位 $i^* \dashv i_*$。我们也将 $\mathrm{Glue}_{i,E}$ 记作 $\mathsf{unglue}_{i,E}$的定义域。

换句话说，给定 $f\colon \partial E \to \partial E$，映射 $\mathsf{unglue}_{i,E}(f) : \mathrm{Glue}_{i,E}(f) \to E$由下图构造。



– ♦

接下来，我们回顾上述解粘构造的一些标准性质。

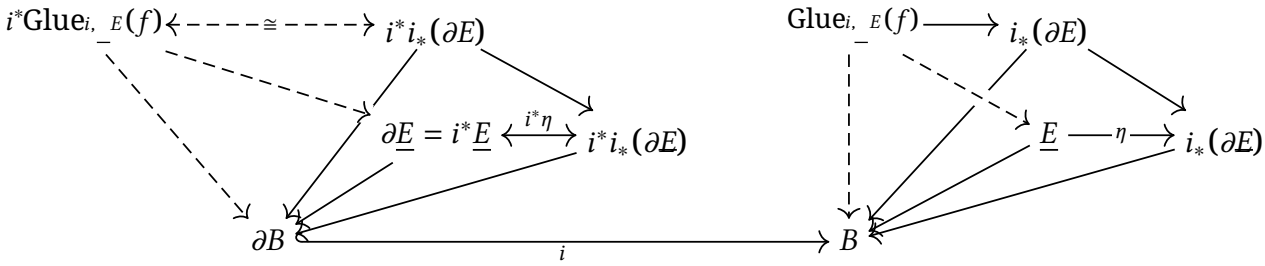
引理 4.11. 取 $\mathbb{C}$ 为任意范畴。设 $i\colon \partial B \to B \in \mathbb{C}$ 是一个单态射，且沿它存在拉回-推前伴随 $i^* \dashv i_*$。那么，余单位 $\mathrm{ev}\colon i^* i_* \to \mathrm{id}_{\mathbb{C}/\partial B}$ 是一个同构，而单位 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbb{C}/B} \to i_* i^*$ 沿 i 的拉回也是一个同构。— ♦

证明。只需证明余单位 $\mathrm{ev}\colon i^* i_* \to \mathrm{id}_{\mathbb{C}/\partial B}$ 是同构，因为由三角恒等式可知，这意味着单位 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbb{C}/B} \to i_* i^*$ 的拉回是同构。要证明 $\mathrm{ev}\colon i^* i_* \to \mathrm{id}_{\mathbb{C}/\partial B}$ 是同构，只需证明右伴随 i_* 完全忠实。

为此，我们首先注意到，由于 i 是单态射，后合成左伴随 $i_!$ 到 i^* 完全忠实，因此这等价于说单位 $i^* i_! \to \mathrm{id}_{\mathbb{C}/\partial B}$ 是同构。因此，对于每个 $\partial Y \to \partial B \in \mathbb{C}/_{\partial B}$，通过依次应用转置 $i_! \dashv i^* \dashv i_*$，可得到以下一系列关于 $\partial X \to \partial B \in \mathbb{C}/_{\partial B}$ 自然的同构：$\mathbb{C}/_{\partial B}(\partial X, \partial Y) \cong \mathbb{C}/_{\partial B}(i^* i_!(\partial X)\ \partial Y) \cong \mathbb{C}/_{\partial B}(\partial X, i^* i_*(\partial Y))$。由可表性可知，这表明 $\partial Y \cong i^* i_*(\partial Y)$。因此，$i_*$ 完全忠实，因为对于任意 ∂Y，$\partial Z \rightrightarrows \partial B \in \mathbb{C}/_{\partial A}$，都有 $\mathbb{C}/_{\partial B}(\partial Y, \partial Z) \cong \mathbb{C}/_{\partial A}(i^* i_*(\partial Y)\ \partial Z) \cong \mathbb{C}/_{A}(i_*(\partial Y)\ i_*(\partial Z))$。— ■

引理 4.12. 当 $i\colon \partial B \hookrightarrow B$ 是单态射，且如构造 4.10 中那样有 $E \to B \in \mathbb{C}/_B$ 以及 $\partial E \to \partial B \in \mathbb{C}/_B$ 时，函子 $\mathrm{unglue}_{i,E}\colon \mathbb{C}/_{\partial E} \to \mathbb{C}/_E$ 是限制在 $i^*\colon \mathbb{C}/_E \to \mathbb{C}/_{\partial E}$ 上的拉回函子 $\mathbb{C}/_B \to \mathbb{C}/_{\partial B}$ 的截面。也就是说，对于 $f\colon \partial E \to \partial E \in \mathbb{C}/_{\partial E}$，有 $i^* \mathrm{unglue}_{i,E}(f) \cong f \in \mathbb{C}/_{\partial E}$。— ♦

证明。固定一个对象 $f\colon \partial E \to \partial E$。那么，根据引理 4.11，沿着 i 拉回交换方块 B（其底边是伴随 $i^* \dashv i_*$ 的单位 η）得到一个关于 ∂B 的交换方块，其底边是一个同构，如下所示。



因此，i^* 解粘 $_{i,E}(f) \cong i^* i_* f$ 以及 $i^* i_*(\partial E) \cong \partial E$ 再次由引理 4.11 得到。— ■

在 [CCHM15], 中，粘合运算仅对满足以下条件的 $f\colon \partial E \to \partial E$ 即为 路径-同伦同构的对象定义。因此，为了在宇宙范畴的框架中公理化粘合运算，我们必须构造构造 4.10 中的泛扩张问题，其中映射 $f\colon \partial E \to \partial E$ 还额外是一个 路径-同伦同构。

我们分几个步骤完成这一点：首先在一个切片中构造两个纤维对象之间的泛恒等同伦同构。

构造4.13。 设 $\mathsf{Id}\colon \mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是一个定义在泛映射上的 pre-Id-类型结构 $\sim\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$。那么，根据构造4.1，可以得到如下映射

$$\mathrm{src}, \mathrm{tgt}\colon \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \rightrightarrows \mathcal{U}$$

~ ~ ~沿 src，tgt 对 U →U 作拉回，便得到 π-纤维化对象 src*U，tgt*U ⇉HIso^{Id}U (~U)。构造如下水平映射 GenHIso^{Id}U (~U)

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{src}^*\widetilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\mathsf{GenHIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})} & \mathsf{tgt}^*\widetilde{\mathcal{U}} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \end{array}$$

作为唯一的映射，其在 Yoneda 嵌入下的像给出如下预层映射：将映射 $f\colon \Gamma.A \to \Gamma.B$ 与截面 $a\colon \Gamma \to \Gamma.A$ 作后复合

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma\to\mathcal{U} \\ B\colon \Gamma\to\mathcal{U}}} \coprod_{a\in\mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma,\Gamma.A)} \coprod_{\substack{f\in\mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A,\Gamma.B) \\ s,r\in\mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B,\Gamma.A)}} \left\{ \begin{pmatrix} H_s \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \\ H_r \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \,\middle|\, H_s\colon fs \simeq \mathsf{id} \text{ and } H_r\colon rf \simeq \mathsf{id} \right\} \right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

$$\downarrow (A,B,a,f,s,r,H_s,H_r)\mapsto(A,B,fa,f,s,r,H_s,H_r)$$

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma\to\mathcal{U} \\ B\colon \Gamma\to\mathcal{U}}} \coprod_{b\in\mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma,\Gamma.B)} \coprod_{\substack{f\in\mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A,\Gamma.B) \\ s,r\in\mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B,\Gamma.A)}} \left\{ \begin{pmatrix} H_s \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.A, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \\ H_r \in \mathbb{C}/_\Gamma(\Gamma.B, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \,\middle|\, H_s\colon fs \simeq \mathsf{id} \text{ and } H_r\colon rf \simeq \mathsf{id} \right\} \right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

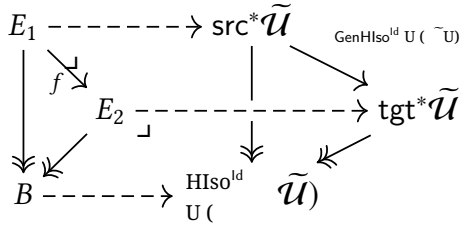
— ♦

可以看出，构造 4.13具有以下泛性质。

~ ~ ~引理 4.14. 设 Id: $\mathcal{U}$ ×$_{\mathcal{U}}$ $\mathcal{U}$ →$\mathcal{U}$ 是泛映射 $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$上的预 4.13-Id-型结构。在构造

(1) 映射 GenHIso^{Id}$\mathcal{U}$(~U) : src* ~U →tgt* ~U 是一个恒等同伦同构

(2) 任意其他在对象 B上、位于一对 π-纤维化对象$E_1, E_2 \rightrightarrows B$之间的恒等同伦同构 $f\colon E_1 \to E_2 \in \mathbb{C}/_B$，都是沿映射 $B \to$ HIso^{Id} $\mathcal{U}$(~U) 对 GenHIso^{Id}$\mathcal{U}$(~U) : src* ~U →tgt* ~U 作拉回所得。



— ♦

证明。两部分都可由标准的可表示性论证得出。我们以第一部分为例进行说明。

同伦收缩 tgt* ~U ⇉src* ~U 和 GenHIso^{Id}$\mathcal{U}$(~U) : src* ~U →tgt* ~U 的截面定义为唯一的映射，其在 Yoneda 嵌入下的像分别是以下自然变换

它们分别对截面 $b\colon \Gamma \to \Gamma.B$ with $s,r\colon \Gamma.B \rightrightarrows \Gamma.A$ 进行前复合

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma\to\mathcal{U}\\ B\colon \Gamma\to\mathcal{U}}} \coprod_{a\in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma,\Gamma.A)} \coprod_{\substack{f\in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.A,\Gamma.B)\\ s,r\in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.B,\Gamma.A)}} \left\{ \begin{pmatrix} H_s \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.A, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \\ H_r \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.B, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \,\middle|\, H_s\colon fs \simeq \mathrm{id} \text{ and } H_r\colon rf \simeq \mathrm{id} \right\}\right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

$$(A,B,b,f,s,r,H_s,H_r)\mapsto(A,B,sb,f,s,r,H_s,H_r) \uparrow\uparrow (A,B,b,f,s,r,H_s,H_r)\mapsto(A,B,rb,f,s,r,H_s,H_r)$$

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma\to\mathcal{U}\\ B\colon \Gamma\to\mathcal{U}}} \coprod_{b\in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma,\Gamma.B)} \coprod_{\substack{f\in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.A,\Gamma.B)\\ s,r\in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.B,\Gamma.A)}} \left\{ \begin{pmatrix} H_s \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.A, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \\ H_r \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma.B, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.B)) \end{pmatrix} \,\middle|\, H_s\colon fs \simeq \mathrm{id} \text{ and } H_r\colon rf \simeq \mathrm{id} \right\}\right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

恒等类型的恒等同伦截面和截面所需的恒等同伦可用类似的方法构造。以截面情形的恒等同伦为例。由恒等类型在$\widetilde{\ }$拉回下的稳定性可知，$\mathrm{Id}_{\mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})}(\mathrm{src}^*\mathrm{U})$ 可由以下迭代拉回给出。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Id}_{\mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})}(\mathrm{src}^*\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}} \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\mathrm{src}^*\widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})} \mathrm{src}^*\widetilde{\mathcal{U}} & \to & \widetilde{\mathcal{U}} \times_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathcal{U}} & \underset{\mathrm{Id}}{\rightrightarrows} & \mathcal{U} \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow & & \\
\mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \underset{\mathrm{src}}{\longrightarrow} & \mathcal{U} & &
\end{array}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$由上方左侧的两个竖直交换方块可知，这意味着 $\mathrm{Id}_{\mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})}(\mathrm{src}^*\mathrm{U}) \cong \mathrm{src}^*\mathrm{Id}_{\mathcal{U}}(\mathrm{U})$，因此它表示预层

$$\left(\coprod_{\substack{A\colon \Gamma\to\mathcal{U}\\ B\colon \Gamma\to\mathcal{U}}} \coprod_{(f,s,r,H_s,H_r)\colon \Gamma.A\simeq\Gamma.B} \coprod_{a_0,a_1\in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma,\Gamma.A)} \{H \in \mathbb{C}/\Gamma(\Gamma, \mathrm{Id}_\Gamma(\Gamma.A)) \mid \mathrm{ev}_\partial \cdot H = (a_0,a_1)\}\right)_{\Gamma\in\mathbb{C}}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$因此，可得到一个映射 $\mathrm{src}^*\mathrm{U} \to \mathrm{Id}_{\mathsf{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})}(\mathrm{src}^*\mathrm{U})$，它作为恒等同伦截面，其定义如下，由可表性给出

$$(A,B,a,(f,s,r,H_s,H_r)) \mapsto (A,B,(f,s,r,H_s,H_r), fsa, a, H_s a)$$

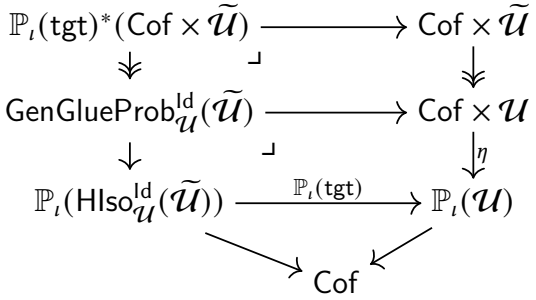
— ■

构造一般 Id-同伦同构后，接下来要定义一般同伦同构扩张问题，作为构造 4.10的输入，而这需要定义表示此类粘合问题的对象。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$构造 4.15。设 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{U}\times_{\mathcal{U}}\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是泛映射$\sim\pi\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的预 Id-类型结构。记 $\mathbb{P}_\iota\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathsf{Cof}$ 为与 $\iota\colon \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相关联的多项式函子。也就是说，$\mathbb{P}_\iota(X) = \iota_*(\partial\mathsf{Cof} \times X) \to \mathsf{Cof}$。

那么，对象 $\mathrm{GenGlueProb}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 定义为单位 $\eta\colon \mathsf{Cof} \times \mathrm{U} \to \mathbb{P}_\iota(\mathrm{U})$ 的拉回，其中 $\iota^* \dashv \iota_*$ 沿映射 $\mathbb{P}_\iota(\mathrm{tgt})\colon \mathbb{P}_\iota(\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U})) \to \mathbb{P}_\iota(\mathrm{U})$ 拉回。还定义了映射

$\mathbb{P}_\iota(\mathrm{tgt})^*(\mathrm{Cof} \times \widetilde{\mathrm{U}}) \twoheadrightarrow \mathrm{GenGlueProb}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}})$，它定义为 $\mathrm{Cof} \times \widetilde{\mathrm{U}} \twoheadrightarrow \mathrm{Cof} \times \mathrm{U}$ 沿 $\mathbb{P}_\iota(\mathrm{tgt})$ 的拉回。这一构造可由下列在 Cof 上的迭代拉回概括。



— ♦

引理 4.16。设 I 型结构。$\widetilde{\mathrm{d}} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是泛映射 $\pi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的预 Id-类

那么，在构造4.15的语境中，

(1) 对象 $\mathrm{GenGlueProb}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{U}})$ 表示如下预层：它将每个 B 映射为由以下各项组成的元组：一个 ι-余纤维化 $\partial B \hookrightarrow B$、一对 π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$ 和 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B$，以及一个恒等-同伦同构 $f : \partial E \to \partial E$ 在 ∂B之上，其中 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B$ 是沿着 $E \twoheadrightarrow B$的拉回 $\partial B \hookrightarrow B$，与构造4.10中的情形相同。

(2) $\mathbb{P}_\iota(\mathrm{tgt})^*(\mathrm{Cof} \times \widetilde{\mathrm{U}}) \twoheadrightarrow \mathrm{GenGlueProb}^{\mathrm{Id}}\mathrm{U}(\widetilde{\mathrm{U}})$ 沿 $\iota : \partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 的拉回是映射 $\partial\mathrm{Cof} \times \mathrm{tgt}^* \widetilde{\mathrm{U}} \twoheadrightarrow \partial\mathrm{Cof} \times \mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathrm{U}(\widetilde{\mathrm{U}})$，由构造 4.13 得到。

— ♦

证明。第一部分同样由可表性得到，具体如下。

对象 $\mathbb{P}_\iota(\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}}))$ 表示这样的预层：它将每个 B 映射到一个 ι-余纤维化 $\partial B \hookrightarrow B$，并附带两个 π-纤维化对象在 ∂B 上的恒等同伦同构 $\partial E \to \partial E$。映射 $\mathbb{P}_\iota(\mathrm{tgt}) : \mathbb{P}_\iota(\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{U}})) \to \mathbb{P}_\iota(\mathrm{U})$ 将每个这样的元组映射为 ι-余纤维化$\partial B \hookrightarrow B$，以及恒等同伦同构余域中的 π-纤维化 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B$。

对象 $\mathrm{Cof} \times \mathrm{U}$ 表示这样的预层：它将每个 B 映射到一个 ι-余纤维化 $\partial B \hookrightarrow B$ 和一个在 B 上的 π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$。单位 $\eta : \mathrm{Cof} \times \mathrm{U} \to \mathbb{P}_\iota(\mathrm{U})$ 将每个这样的（ι-余纤维化，π-纤维化）对映射为沿着 ι-余纤维化对 π-纤维化进行的拉回。

因此，第一部分的结论由此得出。

对于第二部分，我们注意到，根据引理 4.11 中关于余单位的部分，$\iota^* \dashv \iota_*$ 的余单位自然性方块总是一个同构。因此，将构造 4.15 中位于 Cof 上的迭代拉回沿着 $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 拉回，使其位于 $\partial\mathrm{Cof}$ 上，然后与

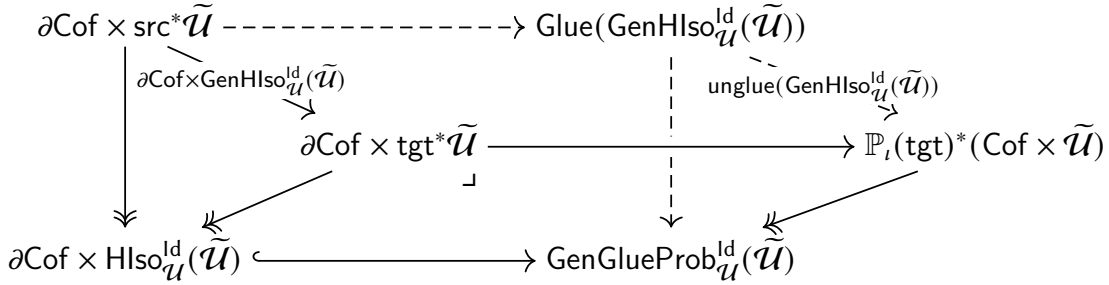
的自然性拉回复合，$\iota^* \dashv \iota_*$ 余单位给出如下迭代拉回。

$$\begin{array}{ccc}
\iota^*\mathbb{P}_\iota(\mathsf{tgt})^*(\mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \partial\mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}} \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
\iota^*\mathsf{GenGlueProb}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \longrightarrow & \partial\mathsf{Cof}\times\mathcal{U} \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \iota^*\eta} \\
\iota^*\mathbb{P}_\iota(\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) & \xrightarrow[\iota^*\mathbb{P}_\iota(\mathsf{tgt})]{} & \iota^*\mathbb{P}_\iota(\mathcal{U}) \\
{\scriptstyle \mathsf{ev}}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{ev}} \\
\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \xrightarrow[\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}]{} & \partial\mathsf{Cof}\times\mathcal{U}
\end{array}$$

由于根据三角恒等式，$\mathsf{ev}\cdot\iota^*\eta = \mathrm{id}$，因此可得 $\iota^*\mathsf{GenGluProb}^{\mathsf{Id}}\,\mathrm{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U}) \cong \partial\mathsf{Cof}\times \mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}\,\mathrm{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$，并且 $\iota^*\mathbb{P}_\iota(\mathsf{tgt})^*(\mathsf{Cof}\times\widetilde{\ }\mathrm{U}) \to \iota^*\mathsf{GenGluProb}^{\mathsf{Id}}\,\mathrm{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 是由构造 4.13 得到的映射 $\partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}^*\widetilde{\ }\mathrm{U} \twoheadrightarrow \partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}\,\mathrm{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$。— ■

现在可以将构造Glue-型构造（构造4.10 ）应用于如下构造的一般同伦同构扩张问题。

~ ~ ~构造4.17。设$\mathsf{Id}\colon \mathcal{U}\times_{\mathcal{U}}\mathcal{U}\to\mathcal{U}$是 U 上的一个预 Id-型结构$\mathcal{U}\to\mathcal{U}$。根据引理4.16的第二部分，以下图表中实线箭头使得前面成为一个拉回



因此，根据构造 4.10中的 Glue-解胶，可得到虚线对象

$$\mathsf{Glue}(\mathsf{GenHIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) \to \mathsf{GenGluProb}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \in \mathbb{C}/_{\mathsf{GenGluProb}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})}$$

以及虚线映射

$$\mathsf{unglue}(\mathsf{GenHIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}))\colon \mathsf{Glue}(\mathsf{GenHIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) \to \mathbb{P}_\iota(\mathsf{tgt})^*(\mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}})$$

如上图右侧三角形所示。 — ♦

上述 Glue 构造具有以下泛性质。

~ ~ ~命题 4.18。设 Id: U ×$_{\mathcal{U}}$ U → U 是 U → U 上的预 Id-类型结构。

取一个对象 B 以及一个 ι-余纤维化 $\partial B \hookrightarrow B$、一对 π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$ 和 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B$，以及一个 Id-同伦同构 $f\colon \partial E \to \partial E$ 在 ∂B上，其中 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B$ 是$E \twoheadrightarrow B$ 沿 $\partial B \hookrightarrow B$的拉回，正如构造4.10中那样。

然后，存在一个映射 $B \to \mathsf{GenGluProb}^{\mathsf{Id}}\,\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})$ 使得相应的拉回函子$\mathbb{C}/_{\mathsf{GenGluProb}^{\mathsf{Id}}\,\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})} \to \mathbb{C}/_B$将下面左侧来自构造 4.17的图表（视为

在 $\mathbb{C}/_{\mathsf{GenGlueProb}^{\mathsf{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})}$中的图表）映射到下面右侧来自构造 4.10的图表（视为在 $\mathbb{C}/_B$中的图表）。

$$\left(\begin{array}{ccc} \partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{src}^*\widetilde{\mathcal{U}} & & \\ & \searrow & \\ & & \partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{tgt}^*\widetilde{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathbb{P}_\iota(\mathsf{tgt})^*(\mathsf{Cof}\times\widetilde{\mathcal{U}}) \\ & & \downarrow\!\downarrow \quad \lrcorner \quad \downarrow\!\downarrow \\ & & \partial\mathsf{Cof}\times\mathsf{HIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \hookrightarrow \mathsf{GenGlueProb}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \partial E & & \\ & \searrow & \\ & & \partial\underline{E} \hookrightarrow \underline{E} \\ & & \downarrow\!\downarrow \quad \lrcorner \quad \downarrow\!\downarrow \\ & & \partial B \hookrightarrow B \end{array}\right)$$

— ♦

证明。 所需的映射 $B \to \mathsf{GenGlueProb}^{\mathsf{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})$ 由 $\mathsf{GenGlueProb}^{\mathsf{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathcal{U})$的可表性给出，这来自引理 4.16的第一部分。验证构造 4.17的图表经映射后成为构造 4.10 中的图表也很直接，这由引理 4.16 的第二部分以及引理 4.14的第二部分得出。 — ■

因此，采用如下定义的 Glue-类型结构后，构造 $\mathsf{Glue}_{i,\ E}(f) \to B$中的映射 4.10 是一个 π-纤维化，只要 f是一个 Id-同伦同构。

定义 4.19。设 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的一个预 Id-类型结构。

这个前 Glue-类型结构 在 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$上的 Id-类型结构 $\mathrm{Id}: \mathcal{U} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是由一对虚线映射 (Glue,glue) 组成，它们构成如下的一个拉回，其中左侧映射来自构造 4.17。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Glue}(\mathsf{GenHIso}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}})) & \overset{\mathsf{glue}}{\dashrightarrow} & \widetilde{\mathcal{U}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathsf{GenGlueProb}^{\mathsf{Id}}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \overset{}{\underset{\overline{\mathsf{Glue}}}{\dashrightarrow}} & \mathcal{U} \end{array}$$

— ♦

由此立即得到以下结论。

推论 4.20。设 $\mathrm{Id} : \mathrm{U} \times_{\mathcal{U}} \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 是 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 上的预 Id-类型结构。假设 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 配备了相对于该预 Id-类型结构的 Glue 型结构。

取一个对象 B以及一个 ι-余纤维化 $i\colon \partial B \hookrightarrow B$、一对 π-纤维化 $E \twoheadrightarrow B$和$\partial E \twoheadrightarrow \partial B$，以及一个 Id-同伦同构 $f\colon \partial E \to \partial E$，其定义在 ∂B上，其中 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B$ 是沿着 $E \twoheadrightarrow B$ 对 $\partial B \hookrightarrow B$作拉回所得的对象，与构造 4.10中的情形相同。

那么，对象

$$\mathsf{Glue}_{i,\underline{E}}(f) \to B \in \mathbb{C}/_B$$

是 π-纤维化的。

— ♦

证明。 由命题 4.18 和贝克-切瓦利条件立即可得。 — ■

在存在Glue-类型结构以处理Path-同伦等价时，便可以重复 [CCHM15第 7 节中所示的单值性证明。2]。

定理 4.21。假设 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 具有相对于 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的真值结构，并且在此结构下 $\mathbb{I}$具有不交余纤维端点结构。进一步假设

(1) $\mathbb{I}$ 配备了最小结构。

(2) 上述数据配备了一个 0-偏置填充结构。

(3) 环境宇宙 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 配备了 Path-,Σ,-Π-型结构 Path Σ, Π。

(4) 内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 对 Path-,Σ,-路径类型结构分别封闭，记作 $\mathrm{Path}_0, \Sigma_0, \Pi_0$。

(5) 内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 配备了针对路径类型结构的 Glue 型结构。

那么，(内部宇宙，前 Id 类型)对 (π_0, Path_0) 是 book π-单值的。 — ♦

证明。根据引理 4.14 的第一部分，构造 4.17 中的映射 $\partial\mathsf{Cof} \times \mathrm{GenHIso}^{\mathsf{Path}}\ \mathrm{U}\ (\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 是一个 Path-同伦同构，因此其中的映射 $\mathrm{unglue}(\mathrm{GenHIso}^{\mathsf{Id}}\ \mathrm{U}\ (\widetilde{\ }\mathrm{U}))$ 根据 [CCHM15，定理 9] 也是一个 Path-同伦同构。这意味着 Glue 型结构诱导出定义 4.8 中的弱 Path-同伦等价延拓结构。现在可以由定理 4.9 得出结论。— ■

5 朴素立方类型论

汇集上一节中的各种定义和性质后，我们现在可以精确地表述一种立方类型论。对这种立方类型论的表述方式，使我们能够在优雅的 Reedy 预层模型范畴中为其建立一个模型；单纯集合配备经典模型结构的情形就是其中一个特例。

定义 5.1. 局部笛卡尔闭范畴$\mathbb{C}$ 上的朴素立方类型论 （NCTT）结构由三个泛映射组成

$$\pi : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \qquad \iota : \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof} \qquad \mathbb{I} \to 1$$

其中 ι 是一个单态射，此外还有

(nctt-tru $\widetilde{\ }$真）相对于 $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 相对于 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$（定义 2.12 ）.

(nctt-cof- sec) 一个 ι-环境宇宙上的余纤维结构 π-截面（定义 2.16 ）.

(NCTT-INT) 一个不相交的 ι-余纤维化端点结构，其定义在 $\mathbb{I}$ 上，端点为 $\mathbb{0}$、$\mathbb{1}$ （定义 2.19）。

(NCTT-MIN) 关于 最小值-结构 $\mathbb{I}$ （定义2.25）。$\widetilde{\ }$(NCTT-FIB) 单位 Σ， Π-和异质的 路径-类型结构 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$（定义1.15至 1.17 和2.30）。$\widetilde{\ }$(NCTT-FILL) 关于 $\mathbb{0}$-偏置填充结构，适用于环境外部宇宙 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$（定义 2.32）。

(NCTT-UNIV) 一个内部宇宙 $\mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 的 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 在 单位 Σ, Π-和异质的 路径-类型结构下封闭（定义1.22和 2.30）。

(NCTT-HEXT) 内部宇宙上的强同伦等价延拓结构 $\mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ （定义4.5）。

这样的 NCTT 结构上的弱计算填充结构由以下内容组成：

(NCTT-FILL-WKCOMP) 针对所选 $\mathbb{0}$-填充结构 (NCTT-FILL) 以及所选的 Σ、 Π、路径-类型结构 (NCTT-FIB) （定义 3.2 、 3.4 和 3.7 ）的稳定命题计算结构。

并且，当一个 NCTT 结构满足以下条件时，称其具有定义性计算填充：

(NCTT-FILL-DEFCOMP) 所选 $\mathbb{0}$-填充结构 (NCTT-FILL) 相对于所选的 Σ、 Π、路径-类型结构 (NCTT-FIB) （定义 3.2、3.4和 3.7）按定义进行计算。

— ♦

由于我们的表述会造成许多严重困难，因此需要作出一些解释，以证明以下两点的一致性 (NCTT-HEXT)和 (NCTT-FILL-WKCOMP)，它们都依赖于 Id-类型。

定理 5.2. 设 $\mathbb{C}$ 配备了一个 NCTT 结构，其外部环境宇宙为 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$，内部宇宙为 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$。

于是，该 NCTT 结构自然地在 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 和 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 上导出恒等类型结构。— ♦

证明。 由引理2.14可知， $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 上相对于环境宇宙 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 的真值结构（来自 (NCTT-TRUTH) ）也是相对于内部宇宙 $\mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$的真值结构。类似地，由引理 2.18可知，指向内部宇宙 π_0的纤维化的截面配备了典范的ι余纤维化结构。

将命题 2.31 应用于 单位类型和异质的路径类型结构（定义在 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$和 $\mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 上），这些结构由 (NCTT-FIB) 和 (NCTT-UNIV)给出，便可在这些宇宙映射上分别得到 路径类型结构。

因此，我们观察到

(1) $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 相对于内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$具有真值结构 (2) 内部宇宙 $\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$ 配备了路径类型结构 (3) 到内部宇宙 π_0-纤维化的截面配备了一个 ι-余纤维化结构

因此，结合 (NCTT-INT)、(NCTT-MIN) 和(NCTT-UNIV)，应用定理2.43可知，所诱导的路径类型结构会使内部宇宙$\mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ 进一步在其上诱导出一个恒等类型结构。

类似地，所诱导的环境外部宇宙 $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 的路径类型结构会进一步在其上诱导出一个恒等类型结构。—— ■

注 5.3. 在 (NCTT-HEXT)中，我们要求内部宇宙上具有同伦等价延拓结构，正如定义4.5所述。然而，定义4.5 要求在Id-类型上具有结构

内部宇宙，以便能够谈论 Id-类型同伦延拓运算。具体而言，我们将 Id-类型视为由异质的 Path-类型结构所给出的结构，如定理5.2所述。— ♦

注5.4。 类似地，在 (NCTT-FILL-WKCOMP) 定义 3.2、3.4 和 3.7 中表述的填充命题计算结构，都相对于某个特定的Id类型~环境宇宙上的结构$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$。我们默认采用由异质的 Id类型结构给出的 Path类型结构，如定理 5.2中所述。— ♦

现在也 可以看出，NCTT 的内部宇宙是有基点的单值的 t.

~定理 5.5. 设 $\mathbb{C}$ 带有一个 NCTT 结构，其环境宇宙为 π: U → U~，内部宇宙为 π_0: U_0 → U_0。

那么，由定理 Id类型结构 Id_0 从内部宇宙上的异质 Path类型结构诱导而来 π_0，根据定理 5.2 可导出一个有基点的 π单值性结构，定义在(π_0、Id_0)上，按定义 4.3的意义。— ♦

证明。 由定理 4.7、注5.3和定义 5.1可立即得出。 — ■

5.1 立方类型论中的相关公理化

5.1.1 重述为 CwR。 尽管我们在定义 5.1中以局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$中的泛映射来表述这些公理，但我们认为，尽管可能需要付出相当大的努力，仍有可能在 Uemura [Uem23] 提出的带可表映射的范畴（CwR）框架下，重新表述这一公理化体系，方法是将泛映射视为（生成）可表映射。

描述定义 5.1中各项公理的 CwR，可以通过自由生成分别构造，再利用 Jelínek [Jel 24], 在 [KL25a],中给出的结果，通过取余极限的过程将它们组装起来，例如。然后，配备了朴素立方类型论结构的范畴，等价于从该 CwR 到局部笛卡尔闭范畴的一个 CwR 映射（即函子语义中 NCTT 的 CwR 模型）。完成此步骤后，我们可以将这个泛 CwR 本身定义为朴素立方类型论（而不是如定义 *5.1*中形式化定义的、某个范畴上的此类结构）。本文不将这一说法形式化，并将其留作未来工作。

5.1.2 与 CCHM 立方类型理论的关系。朴素立方类型论与 CCHM 立方类型论在若干方面有所不同，概述如下：

(1) 在(NCTT-FILL) 定义5.1中，我们将填充结构视为原始概念，而在 [CCHM15; ABCHHL21] 中，填充结构是从复合结构导出的。原因有二：

(1) 正如注2.33所指出的，填充运算公理化地表达了这样一个事实：余纤维化与区间端点包含的推出积是平凡余纤维化。从范畴论的角度看，这比复合运算自然得多。
(2) 填充运算似乎更实用，例如，定理2.43中从Id类型导出Path类型便体现了这一点。

(2) 填充的计算规则(NCTT-FILL-WKCOMP) 和(NCTT-FILL-DEFCOMP) 是朴素立方类型论结构中的可选扩展。相比之下，定义版本

(NCTT-FILL-DEFCOMP) 是 [CCHM15；ABCHHL21] 的立方类型论表述所要求的。事实上，[CHS22] 证明了，[CCHM15] 将定义性复合替换为非计算性填充的立方类型论，仍具有同伦典范性。

(3) 公理 (NCTT-COF-SEC) 断言纤维化的截面是余纤维化对象；这是朴素立方类型论的一条公理，在 [CCHM15 的表述中并不存在；ABCHHL21], 这相当于说项是余纤维的。有了这一点，我们便能像定理 Id 类型那样，从 Path 类型导出 2.43 中那样导出 Path 类型。尽管我们预计这会使类型检查变得不可判定，但如果希望将 Id 类型视为 Path 类型，这种不可判定性似乎无法避免，正如 [Swa18] 所分析的那样。

(4) 在 (NCTT-HEXT) 中，受 Voevodsky 最初关于单纯形单价性的证明 [KL21] 启发，我们要求具备强同伦等价延拓结构（定义 4.5）。相比之下，[CCHM15] 要求 Glue 类型结构（定义 4.19），以构造 Path 类型结构。尽管 Glue 类型结构能够给出书本单价性，正如定理 4.21 所述，但我们无法由此获得带基点单价性（定义 4.3）。我们选择作此修改，原因如下：

(1) 正如 [KL25a], 所论证的，带基点单价性是 book 单价性的强化，它为命题等价提供了一种归纳原理，类似于J-消去规则所对应的 Id-类型。(2) 一大类 Quillen 模型范畴支持这种强同伦等价延拓结构，并由此导出底层的 Glue-类型结构，正如定理 6.14 中所述。

6 等价延拓性质

为了支持立方类型理论中的单值性，我们需要证明某些模型范畴中的同伦等价延拓性质。全文中，我们在一个局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 中开展工作，该范畴配备了模型结构，并在不同位置对其施加各种假设。

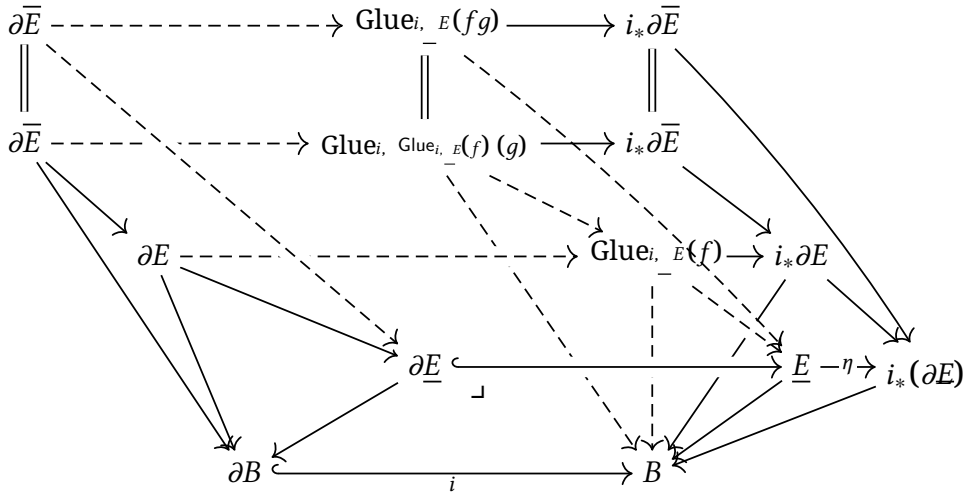
6.1 弱等价延拓性质

在本节中，我们将证明，在某些条件下，纤维化之间的弱等价可以借助构造 4.10 中的 Glue-解胶操作沿余纤维化延拓。本节所确立的结果早已为人熟知，见 [Sat17，命题 5，1] 以及 [KL21，定理 3.4，1], 此外还有许多相关文献。为求完整并便于查阅，我们在此于一般的笛卡尔闭模型范畴中重述这些结果。

我们首先指出，Glue 具有以下复合性质。

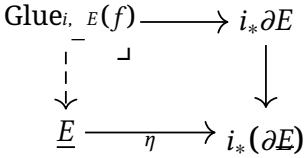
引理 6.1. 设有一个单态射 $i\colon \partial B \hookrightarrow B$，以及一个对象 $E \to B \in \mathbb{C}/_B$，其在 i 下的拉回为 $\partial E \to \partial B$，如构造 4.10所示。

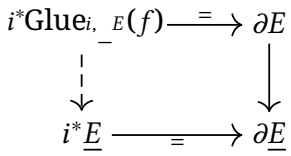
固定可复合映射 $\partial E \xrightarrow{g} \partial E \xrightarrow{f} \partial E$。那么，$\mathrm{Glue}_{i,\ E}(fg) \to E$分解为 $\mathrm{Glue}_{i,\ \mathrm{Glue}_{i,\ E}(f)}(g) \to \mathrm{Glue}_{i,\ E}(f) \to E$ 如下所示。



— ♦

证明。只需注意，左侧拉回的顶行





与伴随的单位同构 $i^* \dashv i_*$ 在 $\mathrm{Glue}_{i,\ \partial E}(f)$。确实如此，因为根据引理4.12，转置这个交换方块便得到右侧的交换方块，其中顶行是恒等映射。— ■

为了得到 Glue-型结构（定义 4.19），接下来我们考察使Glue 取值于纤维化的若干条件。

引理 6.2. 设有一个单态射 $i\colon \partial B \hookrightarrow B$ 以及一个对象 $E \to B \in \mathbb{C}/_B$，其在 i 下的拉回为 $\partial E \to \partial B$，如构造 4.10所示。假设 $\mathbb{C}$ 配备了一个模型结构，在该结构下 $E \twoheadrightarrow B$ 是一个纤维化。那么，

(1) 若 $\partial E \twoheadrightarrow \partial E$ 是一个平凡纤维化，且拉回函子 $i^*\colon \mathbb{C}/_B \to \mathbb{C}/_{\partial B}$ 保余纤维化，则 $\mathrm{Glue}_{i,\ E}(\partial E) \to E$ 是一个平凡纤维化。

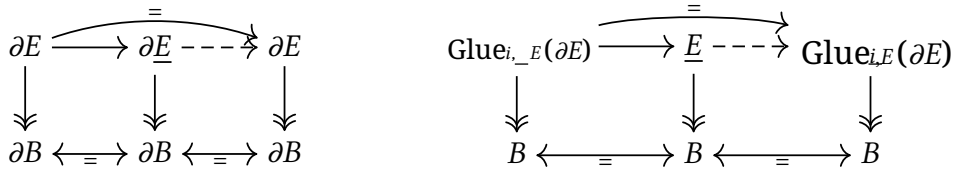
(2) 如果 $\partial E \to \partial E$ 在 ∂B 上存在一个收缩，那么复合映射 $\mathrm{Glue}_{i,\ E}(\partial E) \to E \twoheadrightarrow B$ 是一个纤维化。

(3) 特别地，如果单态射恰好就是余纤维化，并且 $\partial E \to \partial E$ 在 ∂B 上是一个弱等价，那么 $\mathrm{Glue}_{i,\ E}(\partial E) \to B$ 是一个纤维化。

— ♦

证明。在(1) 中，由于 $\partial E \twoheadrightarrow \partial E$ 是平凡纤维化，且拉回 i^* 保留余纤维化，因此其右伴随 i_* 保留平凡纤维化，所以 $i_*(\partial E) \twoheadrightarrow i_*(\partial E)$是平凡纤维化，其拉回 $\mathrm{Glue}_{i,\ E}(\partial E) \twoheadrightarrow E$ 也因此是平凡纤维化。

在 (2) 中，$\partial E \to \partial \underline{E}$ 在 ∂B 上具有一个收缩，如左图所示。Glue 的函子性保证 $\mathrm{Glue}_{i,\,E}(\partial E) \to \mathrm{Glue}_{i,\,E}(\partial E) = E$ 在 B 上具有一个收缩，如右图所示。



Be因为假设 $E \twoheadrightarrow B$ 是纤维化，$\mathrm{Glue}_{i,\,E}(\partial E) \twoheadrightarrow B$ 是纤维化，因为我们 ll.

最后，对于 (3)，我们假设单态射恰好是余纤维化，并且 $\partial E \to \partial E$ isa 弱等价。将 $\partial E \to \partial E$ 分解为一个平凡余纤维化后接一个平凡纤维化

$$\partial E \xhookrightarrow{\sim} \partial E' \xtwoheadrightarrow{\sim} \partial \underline{E}$$

它们各自都在 ∂B 之上。我们注意到，由于单态射在拉回下稳定，$\mathrm{Glue}_{i,\,E}(\partial E') \to B$ 根据 (1) 是纤维化。又由于 $\partial E \xhookrightarrow{\sim} \partial E'$ 可对 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B$ 提升，它在 ∂B 之上有一个收缩，因此根据 (2)，可知 $\mathrm{Glue}_{i,\,\mathrm{Glue}_{i,\,E}(\partial E')}(\partial E) \to B$ 是纤维化。根据引理 6.1，$\mathrm{Glue}_{i,\,\mathrm{Glue}_{i,\,E}(\partial E')}(\partial E) \cong \mathrm{Glue}_{i,\,E}(\partial E)$，因此结论成立。— ■

接下来，我们注意到 Glue 具有一种较弱形式的同伦截面延拓性质。

引理 6.3。设 $i\colon \partial B \hookrightarrow B$ 是一个单态射，且 $E \to B \in \mathbb{C}/B$ 是切片范畴中的一个对象，其在 i 下的拉回为 $\partial E \to \partial B$，如构造 4.10所示。假设 $\mathbb{C}$ 配备了一个模型结构，其中

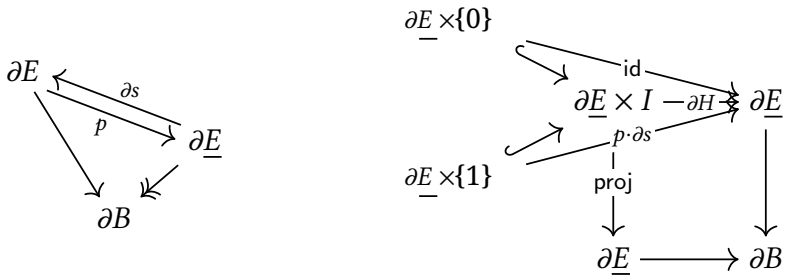
(1) 余纤维化是单态射。

(2) 余纤维化与平凡余纤维化对的推出积是平凡余纤维化。

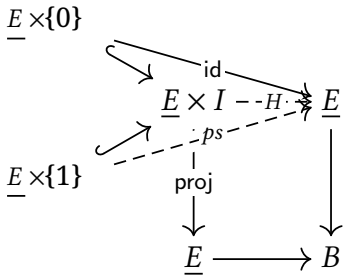
(3) $\underline{E} \twoheadrightarrow B$ 是一个纤维化。

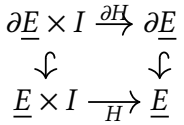
(4) I 是终对象的一个良好但不一定非常良好的柱对象，其两个端点包含为 $\{0\}, \{1\} \rightrightarrows I$。

固定一个映射 $p\colon \partial \underline{E} \to \partial E$ 在 ∂B 上，并假设它有一个如下左图所示的同伦截面 $\partial s\colon \partial E \twoheadrightarrow \partial E$，它通过一个同伦 $\partial H\colon \partial E \times I \to E$ 在 ∂B 上，如右图所示。



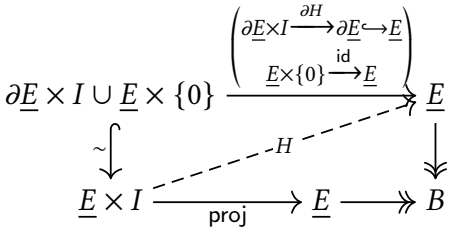
那么，$\mathrm{unglue}_{i,E}(p) : \mathrm{Glue}_{i,E}(\partial E) \to \underline{E}$ 也存在一个同伦截面 $s\colon E \to \mathrm{Glue}_{i,E}(\partial E)$，如左下图所示，但它不一定延拓 ∂s；同时还存在一个复合映射的同伦 $H\colon \mathrm{id}_E \simeq ps$，它确实延拓 ∂H，如右下图所示。





— ♦

证明。我们先构造同伦延拓 $H\colon E\times I \to E$，然后通过证明 $H|_{\{1\}}\colon E \to \underline{E}$ 经由 $\mathrm{unglue}_{i,E}(p) : \mathrm{Glue}_{i,E}(\partial E) \to E$ 分解，来说明同伦截面 s 的存在。所需的同伦延拓 H 由下述提升问题的解给出。

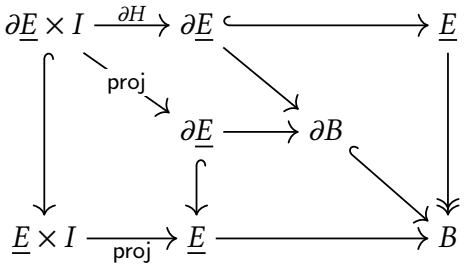


我们必须检查顶行中的映射是否确实存在，以及这是否构成一个有效的提升问题。验证这一点后，解 H 便存在，因为 $E \twoheadrightarrow B$ 被假设为纤维化，并且根据假设，$(\partial E \hookrightarrow E,\ \{0\} \hookrightarrow I)$ 这一对（余纤维化，平凡余纤维化）的推出积仍是平凡余纤维化。

首先，我们注意到顶行中的映射确实存在，因为 $\partial E \times I \xrightarrow{\partial H} \partial E \hookrightarrow E$ 当限制到 $\partial E \times \{0\}$ 时，等于映射 $\partial E \to \partial E \hookrightarrow E$，因为 $\partial H\colon \mathrm{id}_{\partial E} \simeq p \cdot \partial s$。

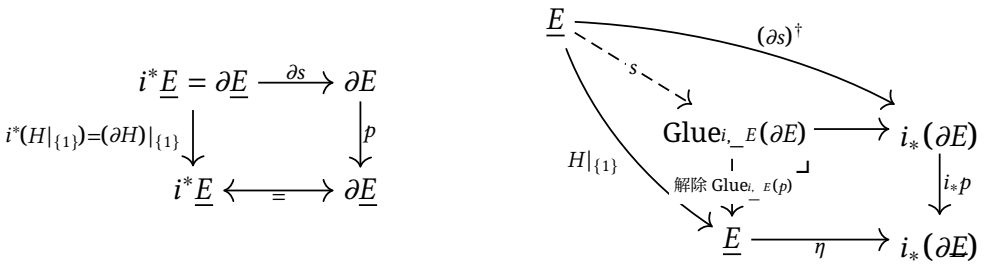
要检查这是否构成一个有效的提升问题，只需分别检查限制到 $\partial E \times I$ 和 $E \times \{0\}$ 时的交换性。$E \times \{0\}$ 分量中的交换性成立，因为包含映射 $E \times \{0\} \hookrightarrow E \times I$ 是投影 $E \times I \to E$ 的一个截面。

现在，通过以下图表，我们可以观察到 $\partial E \times I$ 分量中的交换性；该图表之所以交换，是因为同伦 ∂H 以 ∂B 为纤维。



根据构造，$H\colon \mathrm{id}_E = H|_{\{0\}} \simeq H|_{\{1\}}$，并且将 H 与 $E \twoheadrightarrow B$ 复合后可经由 $\mathrm{proj} : E \times I \to E$ 分解，因此 H 是一个纤维在 B 之上的同伦 $H\colon \mathrm{id}_E \simeq H|_{\{1\}}$。此外，当沿着 $\partial E \times I \hookrightarrow E \times I$ 限制时，H 的构造还保证它与 $\partial E \times I \xrightarrow{\partial H} \partial E \hookrightarrow E$ 一致，因此 H 实际上扩展了 ∂H。

最后，我们检验 $H|_{\{1\}} = (E\times\{1\} \hookrightarrow E\times I \xrightarrow{H} E)$ 可经由 $\mathrm{unglue}_{i,E}(p) : \mathrm{Glue}_{i,E}(\partial E) \to E$分解。为此，注意到 H扩展了 ∂H，因此特别有 $i^*(H|_{\{1\}}) = (\partial H)|_{\{1\}}$，这意味着在 ∂B之上，我们得到如左图所示的图表。随后对 $i^* \dashv i_*$ 取转置，便得到右侧的外边，而该外边必然可经由拉回 $\eta^* i_* p \cong \mathrm{unglue}_{i,E}(p)$分解。



我们将此分解 $s\colon\ E \to \mathrm{Ext}_E(\partial E)$ 取为到 $\mathrm{Ext}_E(p)$ 的同伦截面。 — ■

作为推论，我们得到以下等价延拓性质，即沿单态射延拓弱等价。

命题 6.4 ([KL21，定理 3.4。1]) 。设有一个单态射 $i\colon\ \partial B \hookrightarrow B$ 以及一个对象$E \to B \in \mathbb{C}/_B$，其沿 i 的拉回为 $\partial E \to \partial B$ 构造 4.10中的形式。假设 $\mathbb{C}$ 赋有一个模型结构，并满足：

（1）单态射与余纤维化重合。

（2）推出积 一个（余纤维化，平凡余纤维化）对是平凡余纤维化。

(3) $E \twoheadrightarrow B$ 是一个纤维化。

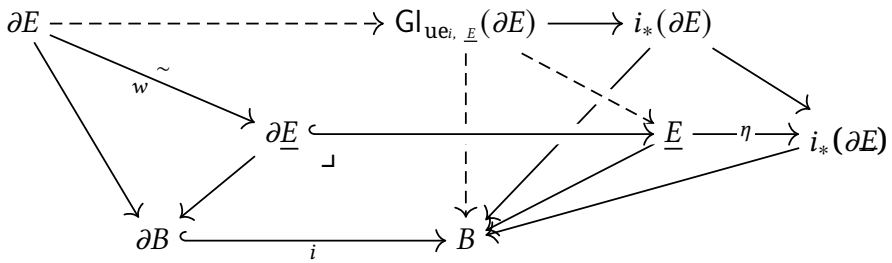
那么对于切片模型结构中的任意纤维对象 $\partial E \twoheadrightarrow \partial B \in \mathbb{C}/_{\partial B}$，如果

$$w\colon \partial E \xrightarrow{\sim} \partial E$$

是一个弱等价，则扩张

$$\mathrm{Glue}_{i,E}(\partial E) \xrightarrow{\mathrm{unglue}_{i,E}(w)} E$$

我们回顾一下，它的构造方式是先沿着 i 推前，然后沿着η拉回



是切片模型结构 $\mathbb{C}/_B$中纤维对象之间的弱等价。 — ♦

证明。根据引理 6.2，$\mathrm{Glue}_{i,E}(\partial E) \twoheadrightarrow B$是一个纤维化，因为 $E \twoheadrightarrow B$是一个纤维化，并且 $w\colon\ \partial E \to \partial E$是弱等价。

还需验证 w 是弱等价。根据引理6.1，将 w 分解为一个平凡余纤维化后接一个平凡纤维化，只需分别证明 w 是弱等价

假设 w 是平凡余纤维化或平凡纤维化。如果 w 是平凡纤维化，那么由引理6.2 (1)，可知 $\mathrm{unglue}_{i,\,E}(w)$ 也是平凡纤维化，因此是弱等价。

剩下的情况是 w 为平凡余纤维化。由于单态射与余纤维化重合，$w\colon \partial E \to \partial E$ 是在 ∂B 上的变形收缩，其收缩为 $r\colon \partial E \to \partial E$，后者也是在 ∂B 上的同伦截面。目标是证明 $\mathrm{unglue}_{i,\,E}(w) : \mathrm{Ext}_E(\partial E) \to E$ 是一个同伦等价；由于单态射就是余纤维化，它因此成为切片 $\mathbb{C}/_B$ 中两个余纤维且纤维对象之间的同伦等价，从而是一个弱等价。Ext 的函子性意味着

$$\mathrm{Glue}_{i,\underline{E}}(\partial \underline{E}) = \underline{E} \xrightarrow{\mathrm{unglue}_{i,\underline{E}}(r)} \mathrm{Ext}_{\underline{E}}(\partial E)$$

也是$\mathrm{unglue}_{i,\,E}(w)$的一个精确收缩。因此，剩下要验证的是$\mathrm{unglue}_{i,\,E}(w)$在 上存在一个同伦截面。但是 $r\colon \partial E \to \partial E$ 也是 $w\colon \partial E \to \partial E$ 在 $\partial \underline{B}$上的一个同伦截面，因此由引理6.3即可得出结果。— ■

6.2 同伦等价扩张性质

现在我们证明一个与命题6.4类似的结果，但针对同伦等价。本节中，我们都采用以下假设。

假设 6.5. 假设局部笛卡尔闭范畴 $\mathbb{C}$ 配备了一个模型结构，满足：

(1) 余纤维化恰好是单态射。

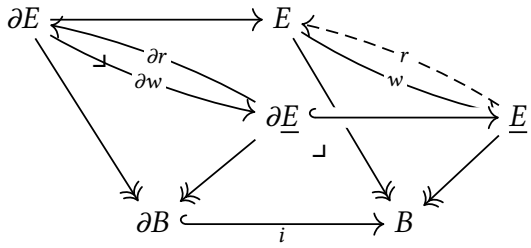
(2) 余纤维化与平凡余纤维化构成的对的推出积仍是平凡余纤维化。

(3) I 是终对象的一个良好但不一定非常良好的柱对象，其两个端点包含映射 $\{0\}$、$\{1\} \rightrightarrows I$ 彼此不相交。

— ♦

6.2.1 延拓同伦收缩。我们首先确立同伦收缩的延拓性质，它相当于 [KL21，引理 3.3。5]。

问题设定固定了以下实心映射



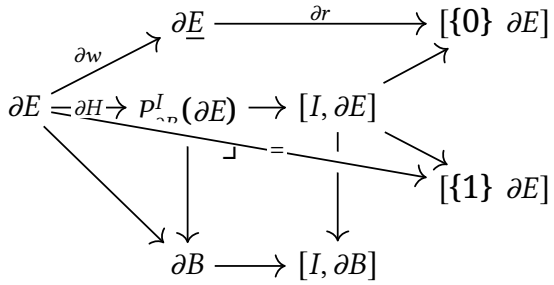
(HREP)

其中

(1) i 是余纤维化。(2) E，E 在 B 上是纤维化的。(3) w：$E \to E$ 是在 B 上的弱等价。(4) ∂E，∂E，∂w是 E，E，w 的拉回。

(5) ∂r 是 ∂w 在 ∂B 上的同伦收缩。

(6) ∂H：如图所示，$\partial r \cdot \partial w \simeq \mathrm{id}_{\partial E}$ 是经由纤维化路径对象 $P^I_{\partial B}(\partial E)$、关于 ∂B 的右同伦。



与引理 6.3中一样，目标是将 ∂H 延拓为一个同伦 H：$rw \simeq \mathrm{id}_E$ 关于 B，其中 r 是 w的某个同伦收缩。但这次的区别在于，所选的同伦收缩 r 还必须延拓 ∂r。

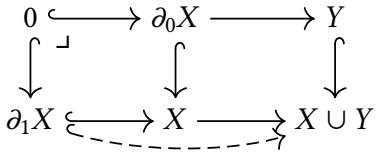
解决方案是建立一个适当的提升问题。为此，我们需要验证候选左映射确实属于左类，这需要用到粘着范畴的以下事实；该事实在等价延拓性质中的作用已由 [Sat17]观察到。

定义 6.6. 若范畴满足以下所有条件，则称其为粘合范畴：

(1) 沿单态射的推出存在；(2) 此类推出交换方块也是拉回方块；(3) 拉回保持推出。

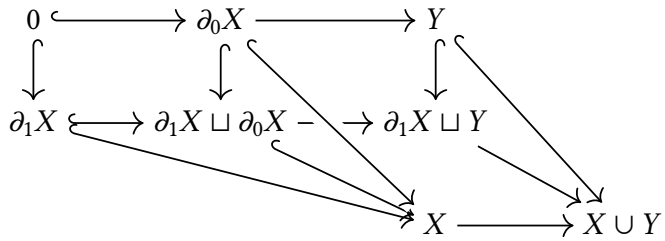
– ♦

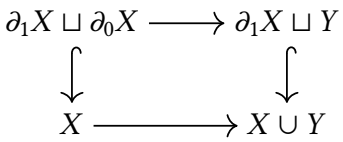
引理 6.7. 设 $\mathbb{C}$ 是一个粘合范畴。若有对象和映射如 $\mathbb{C}$ 所示（即 $\partial_1 X \cap \partial_0 X = 0$ 是 X 的子对象），则底行整体的复合是一个单态射。



– ♦

证明. 根据推出引理，在下面的左侧图示中，后侧面的右侧交换方块是一个推出（即 $(\partial_1 X \sqcup \partial_0 X) \cup_{\partial_0 X} Y \cong \partial_1 X \sqcup Y$）。



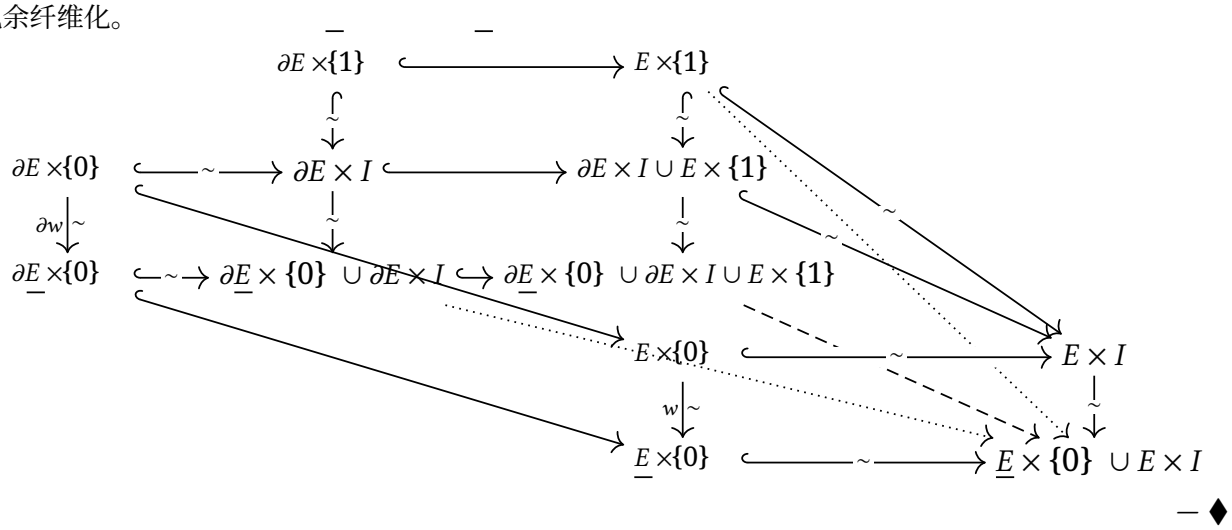


因此，再次根据推出引理，底面的交换方块是一个推出（因为根据假设，斜面是一个推出）。由粘合性可知，映射 $\partial_1 X \sqcup \partial_0 X \hookrightarrow X$ 是单态射。再次由粘合性可知，推出保持单态射，因此上方右侧图表中的右行 $\partial_1 X \sqcup Y \hookrightarrow X \cup Y$是

单态射。由于根据粘合性，$\partial_1 X \hookrightarrow \partial_1 X \sqcup Y$是单态射，且映射 $\partial_1 X \hookrightarrow X \to X \cup Y$可分解为 $\partial_1 X \hookrightarrow \partial_1 X \sqcup Y \hookrightarrow X \cup Y$ 结论得证。—— ■

现在我们可以验证这个候选左映射确实属于左类了 .

引理 6.8。下方的虚线映射 $\partial E \times \{0\} \cup (\partial E \times I \cup E \times \{1\}) \to E \times \{0\} \cup E \times I$，可视为将后侧面第二行的迭代推出沿分量包含 $\partial E \times \{0\} \hookrightarrow E \times \{0\}$ 和 $\partial E \times I \cup E \times \{1\} \hookrightarrow E \times I$所诱导的前侧面中的推出得到，是一个平凡余纤维化。



— ♦

证明。由于 ∂w 和 w 都是弱等价，且根据假设所有对象都是余纤维的，$\mathbb{C}$ 是左适当的，因此由后侧面的第二行最右侧映射和前侧面的最右侧映射给出的推出 $\partial E \times I \cup E \times \{1\} \to \partial E \times \{0\} \cup (\partial E \times I \cup E \times \{1\})$ 和$E \times I \to E \times \{0\} \cup E \times I$也都是弱等价。又由于 $\partial E \times I \cup E \times \{1\} \to E \times I$是（余纤维化，平凡余纤维化）对（$\partial E \hookrightarrow E$，$\{1\} \hookrightarrow I$）的推出积，因此它也是弱等价。因此，根据应用于右侧面的交换方块的三取二性质，我们所关心的虚线映射 $\partial E \times \{0\} \cup \partial E \times I \cup E \times \{1\} \to E \times \{0\} \cup E \times I$也是弱等价。

接下来只需检查上文虚线映射是单态射。为此，只需证明上文两个点线映射是单态射；此时，由于后侧面的右边两个交换方块是推出，且 $\mathbb{C}$ 是粘合的，虚线映射便是单态射。

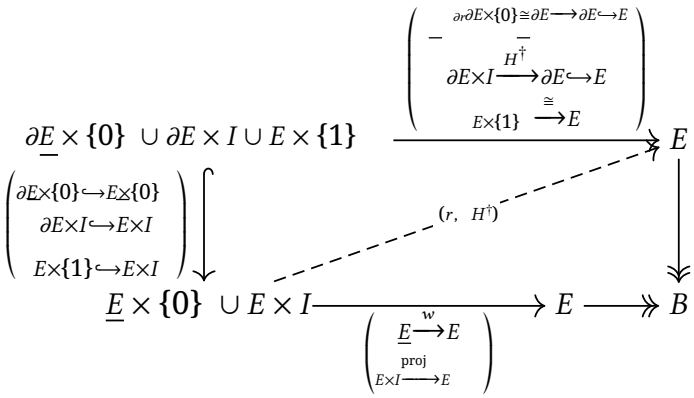
我们注意到底面上的点线映射是单态射，因为 $\mathbb{C}$的粘合性意味着，该点线映射恰好是拉回的连接映射 $(\partial E \times \{0\} \cup \partial E \times I) \cong i^*(E \times \{0\} \cup E \times I) \hookrightarrow E \times \{0\} \cup E \times I$。要说明右侧面上的点线映射是单态射，我们将引理 6.7 应用于前侧面上的推出，并注意到子对象 $E \times \{0\}$ $E \times \{1\} \rightrightarrows E \times I$彼此不相交。—— ■

现在我们可以复现 [KL21 中关于同伦收缩延拓性质的证明了，引理 3.3。5]。

命题 6.9（[KL21，引理 3.3.5]）。由（hrep）可知，给定一个同伦等价 $w\colon E \to E$在 B 上，其对 ∂B 上的限制为 $\partial w\colon \partial E \to \partial E$，并具有由同伦 $\partial H\colon \partial r \cdot \partial w \simeq \mathrm{id}_{\partial E}$见证的同伦收缩 $\partial r\colon \partial E \to \partial E$，则可以将此同伦数据扩展为一个同伦截面 $r\colon E \to E$ 在 B 上，并由同伦 $H\colon r \cdot w \simeq \mathrm{id}_E$见证。— ♦

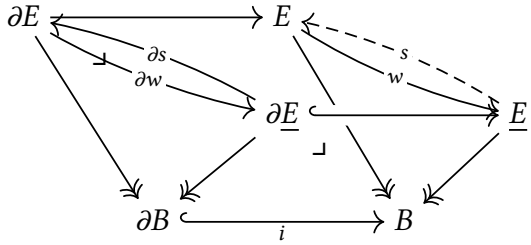
证明。我们将右同伦 $\partial H\colon \partial E \to P^I_{\partial B}(\partial E)$ 转置为 ∂B 上的左同伦 $(\partial H)^\dagger\colon \partial E \times I \to \partial E$。现在，我们希望将 ∂r 和 $\partial H^\dagger$ 延拓为同伦收缩 r，并配以左同伦

$H^\dagger$: $E \times I \to E$ 在 B，从而转置 $H^\dagger$ 可得一个右同伦 H: $E \to [I, E]$，它延拓了 ∂H。这可以实现，因为根据引理 6.8，如下所示的左侧映射是一个平凡余纤维化；根据假设，下方的右侧映射是一个纤维化。因此，延拓 ∂r 和 $\partial H^\dagger$ 即可完成。



— ■

6.2.2 延拓同伦截面。接下来，我们将建立一个与 [KL21 中引理 3.3 类似的同伦截面延拓性质。6]与之前类似，我们的问题设定固定了以下实映射

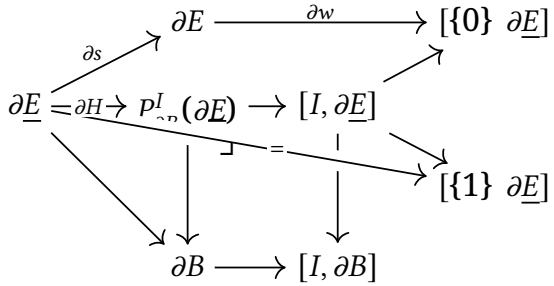


(HSEP)

其中

(1) i 是一个余纤维化。(2) E, E 在 B 上是纤维化的。(3) w: $E \to E$ 是在 B 上的弱等价。(4) ∂E, ∂E, ∂w 是 E, E, w 的拉回。(5) ∂s 是 ∂B 上 ∂w 的同伦截面。

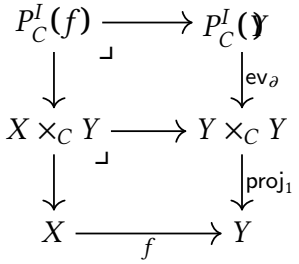
(6) ∂H: $\partial w \cdot \partial s \simeq \mathrm{id}_{\partial E}$，如下面的图表所示，是通过纤维化路径对象 $P^I_{\partial B}(\partial E)$ 在 ∂B 上的右同伦。



目标是将两者 ∂s 扩展为 w 的同伦截面 s，其同伦为 H: $ws \simeq \mathrm{id}_E$。

与之前一样，这通过解决一个合适的提升问题来完成，该问题使用纤维映射路径对象定义。

定义 6.10. 设 $f\colon X \to Y \in \mathbb{C}/C$ 是一个在 C上的映射。 f的纤维化映射路径对象由端点评价映射 $\mathrm{ev}_0\colon P_C^{\mathbb{I}}(Y) \to Y$沿着 $f\colon X \to Y$的拉回给出，如下所示。

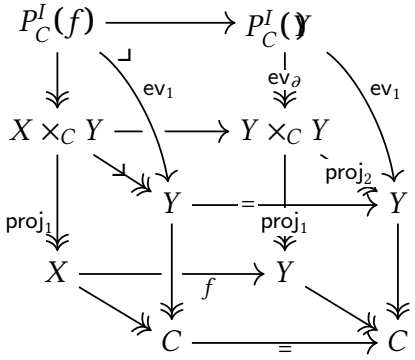


它配备了两个端点求值映射，分别记作 $\mathrm{ev}_0\colon P_C^I(f) \to X$和 $\mathrm{ev}_1\colon P_C^I(f) \to Y$。 — ♦

为了证明同伦截面延拓性质，我们针对纤维化映射路径对象的端点求值映射设置一个合适的提升问题，因此必须检查它属于正确的类。

引理 6.11. 假设 $f\colon X \to Y$ 是纤维对象在 C上的一个映射。那么，端点求值映射 $\mathrm{ev}_1\colon P_C^I(f) \to Y$是一个纤维化。此外，如果 f是一个弱等价，且 $\mathbb{C}$的模型结构是右 proper，则它还是一个平凡纤维化。 — ♦

证明。我们首先注意到 $\mathrm{ev}_1\colon P_C^I(f) \to Y$可按如下方式，经由弯曲的左映射分解为 $P_C^I(f) \to X \times_C Y \to Y$。由于 X是纤维化的，投影 $X \times_C Y \to Y$是纤维化的，而 $P_C^I(f) \to X \times_C Y$是纤维化 $\mathrm{ev}_\partial\colon P_C^I(Y) \to Y \times_C Y$的拉回，因此它也是纤维化的。因此，$\mathrm{ev}_1\colon P_C^I(f) \to X \times_C Y \to Y$是两个纤维化的复合，从而证明了纤维化性。

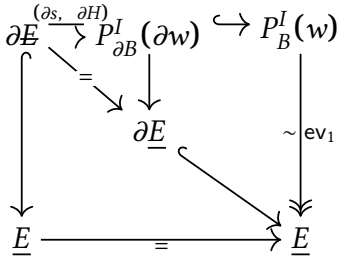


当 f是右 proper 模型范畴中的弱等价时，映射 $P_C^I(f) \to P_C^I(Y)$是弱等价，因为它是沿纤维化对 f作拉回所得的映射。但由于端点求值映射 $P_C^I(Y) \to Y$是弱等价，图表中弯曲的顶面表明，根据三取二性质，映射 $\mathrm{ev}_1\colon P_C^I(f) \to Y$也是弱等价。 — ■

注 6.12。 在引理 6.11中，我们分别证明了弱等价的纤维化映射路径对象的端点求值映射既是纤维化，也是弱等价。为了证明其为弱等价，我们要求右适当性。我们注意到，即使没有右适当性条件，仍然可以通过手动构造针对所有余纤维化的提升问题的解，证明 $\mathrm{ev}_1\colon P_C^I(f) \to Y$在 f是弱等价时是平凡纤维化。 — ♦

命题 6.13。由 (hsep) 可知，给定一个同伦等价 $w\colon E \to E$ 在 B 上，其在 ∂B 上的限制为 $\partial w\colon \partial E \to \partial E$，并带有由同伦 $\partial H\colon \partial w \cdot \partial s \simeq \mathrm{id}_{\partial E}$ 见证的同伦截面 $\partial r\colon \partial E \to \partial E$，若 $\mathbb{C}$ 右 proper，则可以将这些同伦数据扩展为 B 上的同伦截面 $s\colon E \to E$，并由同伦 $H\colon w \cdot s \simeq \mathrm{id}_E$ 见证。— ♦

证明。根据引理 6.11，映射 $\mathrm{ev}_1\colon P^I_B(w) \to E$ 是一个平凡纤维化。由于 $\partial H\colon \partial w \cdot \partial s \simeq \mathrm{id}$，我们得到如下交换方块，并由此产生映射 $(\partial s, \partial H)\colon \partial E \to P^I_{\partial B}(\partial w)$ 进入 ∂w 的纤维化映射路径对象；该对象是 w 的纤维化映射路径对象在 $\partial B \hookrightarrow B$ 下的重新基变换。又由于 $\mathrm{ev}_1 \cdot H = \mathrm{id}_{\partial E}$，可知我们有如下交换方块。



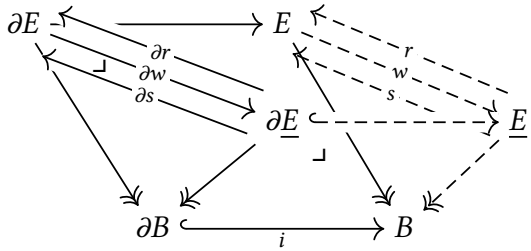
因此，这个当前问题有一个解 $(s,\ H) : E \to E \times_E P^I_B(\partial E)$，按照构造，它扩展了 $(\partial s,\ \partial H)$。— ■

6.2.3 延拓同伦等价。现在我们已准备好证明延拓同伦等价的结果。

定理 6.14。设 $\mathbb{C}$ 配备了一个模型结构，其中：

(1) 余纤维化恰好是单态射。(2) 余纤维化与平凡余纤维化构成的对的推出积仍是平凡余纤维化。(3) I 是终对象的良好但不一定非常良好的柱对象，且具有两个不相交的端点包含映射 $\{0\},\ \{1\} \rightrightarrows I$。(4) 右适当性成立

那么，若存在如下情形



其中

(1) i 是余纤维化。

(2) ∂E 和 ∂E 在 ∂B 上是纤维化的。

(3) ∂w 有一个同伦收缩 ∂r，并带有同伦 $\partial H_r\colon \partial r \cdot \partial w \simeq \mathrm{id}_{\partial E}$，通过 $P^I_{\partial B}(\partial E)$。

(4) ∂w 有一个同伦截面 ∂s，并带有同伦 $\partial H_s : \mathrm{id}_{\partial E} \simeq \partial w \cdot \partial s$，通过 $P^I_{\partial B}(\partial E)$。

然后，可以扩展

(1) ∂r 为 $\mathrm{unglue}_{i,E}(w)$ 的同伦收缩，以及 ∂H_r 为同伦 $H_r : r \cdot \mathrm{unglue}_{i,\partial E}(w) \simeq \mathrm{id}_E$，通过 $P^I_B(E)$。(2) ∂s 为 $\mathrm{unglue}_{i,\partial E}(w)$ 的同伦截面，以及 ∂H_s 为同伦 $H_s : \mathrm{id}_E \simeq \mathrm{unglue}_{i,E}(w) \cdot s$，通过 $P^I_B(E)$。

— ♦

证明。由于所有余纤维化都是单态射，在 ∂B 上的切片中，映射 w 是余纤维且纤维对象之间的同伦等价，因此是同伦弱等价。于是，命题 6.4 适用，并可得 $\mathrm{unglue}_{i,E}(w)$ 是弱等价。现在，扩展的逆和同伦由命题 6.9 和 6.13 得出。 — ■

6.3 相关工作

第6.1 节中的弱等价延拓性质已在其他多项工作中得到证明，例如 [Sat17，命题 5.1] 以及 [Awo23a，命题 116]。这些工作将弱等价沿余纤维化延拓。这正是第6.1节的内容。然而，它们没有处理同伦数据。也就是说，即使所有对象都是余纤维的，仅仅延拓弱等价也不足以证明，在模型范畴的情形下实例化后，构造4.1 中的映射 $\mathrm{tgt} : \mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ 是平凡纤维化。这是因为对象 $\mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U})$ 表示与同伦数据配对的同伦等价（即为同伦截面和收缩提供见证的同伦），因此，要证明 $\mathrm{tgt} : \mathrm{HIso}^{\mathrm{Id}}\mathcal{U}(\widetilde{\ }\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ 是平凡纤维化，还必须沿余纤维化延拓同伦数据。

第6.2 节展示了这一点。据我们所知，唯一其他证明了这一同伦等价延拓性质的工作，是 [KL21], 最初提出的单纯形模型，但仅限于单纯集合的情形。在第6.2节中，我们将同伦等价延拓性质推广到了更大的一类模型范畴（即满足假设6.5的模型范畴）。

7 预层模型范畴中的模型

在定义5.1 公理化了朴素立方类型论，并在定理6.14中证明了同伦同构延拓运算的合理性之后，我们现在可以构造朴素立方类型论的各种模型了。

7.1 纤维化与余纤维化的分类

我们希望证明，某些预层模型结构 $\mathbb{A}$ 是朴素立方类型论的宇宙模型，其中类型论纤维化与（小）模型论纤维化相一致。为此，我们必须找到一个泛小纤维化 $\widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$，并为其选择一个严格的

拉回族。这通过以下方式实现： [Awo23b，命题 10]构造用于分类小纤维化的 Hofmann–Streicher 宇宙。为此，我们必须构造一个用于分类纤维化结构的分类装置。

构造 7.1。对于每个 $E \to B \in \mathbb{A}$，令 $\mathrm{Fib}_B(E) \hookrightarrow B \in \mathbb{A}$ 为 B 的子预层，由其复形 b 组成，并且沿着这些复形的拉回 $E \to B$ 是一个纤维化。也就是说，对于每个 $a \in \mathbb{A}$

$$\mathrm{Fib}_B(E)_a \coloneqq \{a \xrightarrow{b} B \mid b^*E \twoheadrightarrow a \text{ is a fibration}\} \hookrightarrow B_a$$

其在映射 $a' \to a$ 上的作用由复合 $(a \xrightarrow{b} B) \mapsto (a' \to a \xrightarrow{b} B)$ 定义。由于纤维化在拉回下的稳定性，这确实定义了一个预层。— ♦

要使用 [Awo23b，命题 10]，，我们需要首先确保由 Fib 给出的纤维化数据的这一构造在拉回下是稳定的，具体如下。

引理 7.2。设有一个映射 $E \to B \in \mathbb{A}$ 以及一个映射 $f\colon X \to B$。那么，有如下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fib}_X(f^*E) & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_B(E) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

— ♦

证明。在每个 $a \in \mathbb{A}$ 处求值，只需证明满足 $x^*f^*E \to a$ 是纤维化的映射 $x\colon a \to X$ 与满足 $b^*E \to a$ 是纤维化、且经由 $f\colon X \to B$ 分解的映射 $b\colon a \to B$ 之间存在双射对应。这正是由拉回的函子性得到的。— ■

现在，我们如下得到霍夫曼–斯特雷彻宇宙。

引理 7.3。假设 $\mathbb{A}$ 赋有一个余纤维生成模型结构，其中生成平凡余纤维化的余域都是可表对象。令 κ 为一个不可达基数。

那么，存在一个 κ-小纤维化 $\mathrm{U}_\kappa \twoheadrightarrow \mathrm{U}_\kappa$，对 κ-小纤维化进行分类。也就是说，$\mathrm{U}_\kappa \twoheadrightarrow \mathrm{U}_\kappa$配备了拉回的严格函子性选择；此外，如果 $E \twoheadrightarrow B$ 是一个 κ-小纤维化，那么存在虚线映射，使得 $E \twoheadrightarrow B$ 成为 $\mathrm{U}_\kappa \twoheadrightarrow \mathrm{U}_\kappa$ 的一个拉回。

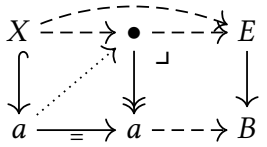
$$\begin{array}{ccc} E & \dashrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}}_\kappa \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \dashrightarrow & \mathcal{U}_\kappa \end{array}$$

— ♦

证明。 由引理 7.2 以及 [Awo23b，命题 10], 只需证明，对于任意映射 $E \to B$，包含映射 $\mathrm{Fib}_B(E) \hookrightarrow B$ 存在一个截面（即它是一个同构），当且仅当 $E \twoheadrightarrow B$ 是一个纤维化。

根据纤维化的拉回稳定性，如果 $E \twoheadrightarrow B$ 是纤维化，那么 $\mathrm{Fib}_B(E) \cong B$。反过来，假设 $\mathrm{Fib}_B(E) \cong B$，因此目标是证明 $E \to B$ 是纤维化。为此，任取一个生成平凡余纤维化，它必定具有形式 $X \to a$，其中 a 是可表对象。于是，对下方整个矩形所示的 $X \to a$ 与 $E \to B$ 之间的每个提升问题，都可以通过解决将 $_B$ 拉回到 E后得到的提升问题来解决

，因为根据假设，这个拉回是纤维化，即 $\mathrm{Fib}_B(E)_a = \mathbb{A}(a,\ B)$，正如下面左侧交换方块所示。



— ■

7.2 优雅 Reedy 预层模型

现在我们证明，各种预层模型范畴都是具有命题式计算填充的朴素立方类型论的模型。特别是，单纯集合上的经典模型结构以及各种立方集合上的若干模型结构，都是这样的例子。

命题 7.4。设 $\mathbb{A}$ 是范畴 $\mathbb{A}$ 的预层范畴，并赋有一个余纤维生成模型结构，使得

(mod-cof) 余纤维化恰好是单态射。

(mod-gtc) 生成平凡余纤维化的余域是可表对象 s.

(mod-pp) The （平凡余纤维化，余纤维化）对的推出积是平凡余纤维化 .

（mod-int） I 是终对象的一个良好但未必非常良好的柱对象，且带有最小结构。

（mod-rp）该模型结构是右 proper 的。

（mod-fe）若 α 是不可达基数，则 α-小纤维化可沿平凡余纤维化延拓。

那么，假设存在两个任意大的不可达基数 $\kappa < \lambda$，这个预层 模型范畴 $\mathbb{A}$ 具有（$\mathrm{U} \to \mathcal{U}$ $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ $\mathbb{I}$）朴素立方类型论的结构，带有弱计算填充结构（定义5.1），其中

（1）外部环境宇宙（$\mathrm{U} \to \mathrm{U}$）-纤维化即 λ-小纤维化，而内部宇宙（$\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0$）-纤维化即 κ-小纤维化。

(2) $\partial\mathrm{Cof} \hookrightarrow \mathrm{Cof}$ 是指向子对象分类器的真值映射。

(3) $\mathbb{I}$ 是上述带有最小结构的终对象的选定柱对象 I。

(4) 强同伦同构延拓运算（(NCTT-HEXT)）诱导出一种 Glue-型结构（定义 4.19）。

— ♦

证明。令 $\kappa < \lambda$ 为两个不可达基数。

根据引理 7.3，我们可以找到一个分类器 $\mathcal{U}_\lambda \to \mathcal{U}_\lambda$ 用于 λ-小纤维化，并将其取为 NCTT 结构的环境宇宙 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$。受 (MOD-COF) 的启发，我们取

余纤维化分类器作为子对象分类器 $\partial\Omega \hookrightarrow \Omega$，并受 (mod-int) 的启发，我们将给定的柱对象 I 取作区间 $\mathbb{I}$。我们验证定义 5.1中的每一点。

((nctt-truth)) 这由引理 2.13 得出。

((nctt-cof-sec)) 根据子对象分类器的泛性质，截面的余纤维性显而易见
分类器。

((nctt-int)) 同样，根据子对象分类器的泛性质，区间端点的余纤维性显而易见。

((nctt-min)) 根据(mod-int)，最小值-结构被假定存在，以供 $\mathbb{I}$ 使用。

((nctt-fib)) 我们分别展示每一种逻辑构造。

(单位类型) 纤维化包含所有同构，因此 $\widetilde{\mathrm{U}_\lambda} \to \mathrm{U}_\lambda$
具有单位类型结构。

(Σ-类型) 由于（ $\widetilde{\mathrm{U}_\lambda} \to \mathrm{U}_\lambda$)-纤维化是 λ-小的纤维化-
由构造可知， λ-小纤维化是闭合的
在复合下，泛性质 $\widetilde{\mathrm{U}_\lambda} \to \mathrm{U}_\lambda$ 给出
从而在其上得到一个 Σ-类型结构。

(Π-类型) 对于 Π-类型，结论由 [KL25a，引理
1.5], 并且由于 λ-小纤维化在闭
式性下，沿 λ-小纤维化的推前仍然是右
适当性 (mod-rp) 以及.....的不可达性 λ。

(异质路径类型) 对于异质的路径类型结构，我们注意到，根据 [KL25b，定理 5。9] 应用于(mod-pp)和(mod-int)，纤维化路径对象的端点求值映射

$$\widehat{P}^I_{(\pi_\lambda)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_\lambda \times \mathcal{U}_\lambda)} \left(\mathsf{ev}^*(\widetilde{\mathcal{U}}_\lambda \times \widetilde{\mathcal{U}}_\lambda) \to (\pi_\lambda)^*(\pi_\lambda)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_\lambda \times \mathcal{U}_\lambda) \right)$$

是一个纤维化，并且根据$\widetilde{\ }$对 λ的不可达性，它也是 λ-小的。因此，再次根据 $\mathrm{U}_\lambda \to \mathrm{U}_\lambda$ 的泛性质，一旦$\widetilde{\ }$成立，$\mathrm{U}_\lambda \to \mathrm{U}_\lambda$ 就具有异质路径类型结构。

((nctt-fill)) $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们必须证明 $\mathrm{U}_\lambda \to \mathrm{U}_\lambda$ 存在 δ-偏向的填充结构。为此，我们使用 [KL25b，定理 1.10]。特别地，由例 2.24 可知，定义 2.32 中的左映射（ $\Omega \vee \mathrm{is}_\delta$）$^*\partial\Omega \hookrightarrow \Omega \times \mathbb{I}$ 是推出积（$\partial\Omega \hookrightarrow \Omega$）$\widehat{\times}$（$\{\delta\} \hookrightarrow I$）。根据假设（mod-pp），这个推出积是平凡余纤维化，因此由 [KL25b，定理 1.10] 可得所需结果。

((nctt-fill-wkcomp)) 这可由 [KL25b 定理 6 得出。5] 应用于 (mod-pp)和 (mod-int)，并根据定理 Id-类型的定义，使用定理 Path-类型，如定理 5.2所述。

((NCTT-UNIV)) ~再次应用引理 7.3，我们可以找到一个分类器 $U_\kappa \to U_\kappa$，用于 κ-小纤维化，并将其取作内部宇宙。重复~用于验证 κ的 (nctt-fib) 的论证，我们看到 $U_\kappa \to U_\kappa$ 也具备这些逻辑结构。此外，我们注意到 $U_\kappa \to 1$ 是 λ-小的，并且还是纤维化的（mod-fe），因此 $U_\kappa \to 1$ 可表示为 $U_\lambda \to U_\lambda$的拉回。为确保内部宇宙的这些逻辑结构与外宇宙的逻辑结构相容，我们注意到 $U_\kappa \hookrightarrow U_\lambda$ 是一个子预层，因此可以根据 [Awo23b 命题 6]重新调整 U_λ 的逻辑结构。

((NCTT-HEXT)) 映射 tgt： $\mathsf{Hlso}^{\mathsf{Id}_0}_{\sim}\mathcal{U}_\kappa(\tilde{\mathcal{U}}_\kappa) \to \mathcal{U}_\kappa$定义 4.5 中的 4.1 和定理 6.14，根据构造可知是平凡纤维化，因此 [KL25b，定理 1 10]应用于 (MOD-COF)、 (MOD-PP) 和(MOD-INT)，产生所需的强同伦同构扩张结构，从而诱导出 Glue-类型结构，正如所述。

— ■

命题 7.4 的条件对于以下 Reedy 预层模型范畴很容易验证。

定理 7.5。 假设存在两个任意大的不可达基数 $\kappa < \lambda$，单纯集合 sSet 上的经典模型结构诱导出朴素立方类型论的结构~$(\mathcal{U} \to \mathcal{U}\ \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\ \mathbb{I})$，其具有弱计算填充结构（定义 5.1），其中

~(1) 外部环境宇宙 $(\mathcal{U} \to \mathcal{U})$-纤维化是 λ-小 Kan 纤维化，而~内部宇宙 $(U_0 \to U_0)$-纤维化是 κ-小 Kan 纤维化。

(2) $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 是到子对象分类器的真值映射。

(3) $\mathbb{I}$ 是标准 1-单形 Δ^1。

(4) 强同伦同构延拓运算 ((NCTT-HEXT)) 诱导一个 Glue-型结构（定义 4.19）。

— ♦

证明。 众所周知，命题 7.4 的所有假设均由 sSet 满足，唯一可能的非标准之处是 (MOD-FE)，这已在 [KL21，定理 2.2 中证明。1]以及 [Cis14，命题 2 中，21]利用极小纤维化理论，并在 [GSS22，推论 4.2 中以构造性方式证明。7]。 — ■

除了单纯形模型外，我们还可以应用命题 7.4来构造一些朴素立方类型论的立方模型。

定理 7.6。以下范畴：

(1) 仅含面和退化的立方集合

（2）具有面、退化和连接的立方集合

~来自 [Cis14，例 1.5 和例 1。6] 二者都带有模型结构，从而产生 $(\mathcal{U} \to \mathcal{U}\ \partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}\ \mathbb{I})$ 的模型，这些模型满足带弱计算填充的朴素立方类型论（定义 5.1），并且若 $\kappa < \lambda$ 是两个任意大的不可达基数，则

~(1) 外部环境宇宙 $(\mathrm{U} \to \mathrm{U})$-纤维化是 λ-小纤维化，而内部宇宙 $(\mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}_0)$-纤维化是 κ-小纤维化。

(2) $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 是到子对象分类器的真值映射。

(3) $\mathbb{I}$ 是标准 1-立方体 $\square^1$。

(4) 强同伦同构延拓运算 ((NCTT-HEXT)) 诱导出 Glue-类型结构（定义 4.19）。

– ♦

证明。 根据 [Cis14，例 1.5 和 1。6] , 这两个范畴都具有 Grothendieck 模型结构，并且该结构满足

((MOD-COF)) 余纤维化恰好是单态射 [Cis14，第 1 段。2]。

((MOD-GTC)) 生成余纤维化是标准 n-立方体的边界包含映射[Cis14，例 1.5 和 1。6]

$$\partial\square_n \hookrightarrow \square_n$$

((MOD-PP)) （平凡余纤维化，余纤维化）对的推出积是平凡余纤维化，这是因为 [Cis06，引理 8.4。36] 此外，生成平凡余纤维化是标准 n-立方体的角包含

$$\sqcap_n^{i,e} \hookrightarrow \square_n$$

((MOD-INT)) 标准 1-立方体 $\square_1$ 被认为是终对象的一个良好但不一定非常良好的柱对象，且其带有 最小值-结构。

((MOD-RP)) 该模型结构是适当的 [Cis14，第 1 段。2]。

((MOD-FE)) 小纤维化可沿平凡余纤维化延拓 [Cis14，命题 2。21]。

因此，结果由命题7.4得出。 – ■

7.3 笛卡尔立方模型

我们先前已在命题 7.4 中证明了，预层范畴上的模型结构若要具备朴素立方类型论的结构，必须满足哪些条件。这类例子见定理 7.5 和 7.6；恰好这些都是优雅的 Reedy 预层范畴。现在我们利用 [Awo23a] 的工作，说明笛卡尔立方体是一个非 Reedy 预层模型范畴的例子，它配备的模型结构同样具有朴素立方类型论的结构。

我们先回顾 [Awo23a]中构造的模型结构。

定义7.7 ([Awo23A，定义 2])。笛卡尔立方体范畴由以下形式的有限集对象组成

$$[n] \coloneqq \{\bot, 1, \ldots, n, \top\}$$

带有两个指定点 $\bot$，$\top$ 以及映射 $f\colon [m] \to [n] \in$ 函数 $f\colon \{\bot, 1, \ldots, n, \top\} \to \{1, \ldots, m\}$（即方向相反且保持端点）。笛卡尔立方集合 的范畴是预层范畴

$$\mathsf{cSet} \coloneqq \mathsf{Set}^{\square^{\mathrm{op}}}$$

我们用 $\square^{-}\colon \hookrightarrow \mathsf{Set}^{\square^{\mathrm{op}}}$ 表示Yoneda 嵌入。

我们用 I 表示 $I \coloneqq \square^1$，即标准 1-立方体。 — ♦

定义 7.8([Awo23A，定义 29，等式 (43)])。一个*cSet* 的生成无偏平凡余纤维化是cSet 中的一个推出积

$$(C \hookrightarrow Z) \mathbin{\widehat{\times}}_I (I \xrightarrow{\Delta} I \times I)\colon C \times I \cup Z \hookrightarrow Z \times I$$

在 I 上的切片中，将其视为 cSet 中的映射（遗忘余域 I），它由单态射 $C \hookrightarrow Z \in \mathsf{cSet}/I$与对角映射 $\Delta\colon I \to I \times I \in \mathsf{cSet}/I$给出。— ♦

定理 7.9 ([Awo23A，定理 124])。cSet 上存在一个余纤维生成模型结构，其中cSet的余纤维化恰为单态射，而生成平凡余纤维化恰为生成的无偏平凡余纤维化。— ■

为使 [Awo23a定理 124]，（下文简称笛卡尔立方体模型结构）组装成朴素立方类型论的模型所需的大部分实际工作，已经在 [Awo23a]中完成。

引理 7.10。在 cSet 上的笛卡尔立方体模型结构中，（余纤维化，平凡余纤维化）对的推出积仍是平凡余纤维化。 — ♦

证明。由余纤维生成，只需验证生成平凡余纤维化（即生成的无偏平凡余纤维化）与余纤维化（即单态射）的推出积仍属于生成平凡余纤维化。

设 $\partial V \hookrightarrow V$ 是 I 上的单态射，$\partial U \hookrightarrow U$ 是任意单态射。因此，$U \times V \to V \to I$ 也是 I 上的对象，这意味着推出积

$$(\partial U \hookrightarrow U) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial V \hookrightarrow V) = (\partial U \times V \cup U \times \partial V \hookrightarrow U \times V)$$

是 I 上的单态射。然后，利用推出的结合性和 3×3 论证，可以算得

$$(\partial U \hookrightarrow U) \mathbin{\widehat{\times}} ((\partial V \hookrightarrow V) \mathbin{\widehat{\times}}_I (I \xrightarrow{\Delta} I \times I)) \cong ((\partial U \hookrightarrow U) \mathbin{\widehat{\times}} (\partial V \hookrightarrow V)) \mathbin{\widehat{\times}}_I (I \xrightarrow{\Delta} I \times I)$$

— ■

定理 7.11. 假设存在两个任意大的不可达基数 $\kappa < \lambda$，则 cSet 上的笛卡尔立方体模型结构会诱导出一个具有弱计算填充结构的朴素立方类型论结构$\widetilde{(\mathbb{U} \to \mathbb{U}}\ \partial\mathbb{C}\mathrm{of} \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{of}\ \mathbb{I})$，其中

(1) $\widetilde{(\mathbb{U} \to \mathbb{U})}$-纤维化是 λ-小纤维化，

而$(\mathbb{U}_0 \to \mathbb{U}_0)$-纤维化是 κ-小纤维化。

(2) $\partial\mathsf{Cof} \hookrightarrow \mathsf{Cof}$ 是映入子对象分类器的真值映射。

(3) $\mathbb{I}$ 取为标准 1-立方体 $I = \square^1$。

(4) 强同伦同构延拓运算 ((NCTT-HEXT)) 诱导出一种 Glue-类型结构（定义 4.19）。

— ♦

证明。 设 $\kappa < \lambda$ 为两个不可达基数。于是，根据 [Awo23a，命题 91], 可得一个 $\widetilde{\ }$分类器 $\mathcal{U}_\lambda \to \mathcal{U}_\lambda$，用于 λ-小纤维化；我们将其取为 NCTT 结构的环境宇宙 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$。然后，与命题 7.4中的做法相同，我们将余纤维化宇宙取为子对象分类器的真值映射，并将区间取为标准 1-立方体 $\square^1$ 接下来验证定义5.1中的每一项即可。

((NCTT-TRUTH)) 这由引理 2.13得出。

((NCTT-COF-SEC)) 根据子对象分类器的泛性质，截面的余纤维性是显然的。

((NCTT-INT)) 同样，根据子对象分类器的泛性质，区间端点的余纤维性也是显然的。

((NCTT-MIN)) $\square^1$ 上的最小结构是显然的。

((NCTT-FIB)) 我们分别展示每一种逻辑构造。

（单位类型） 纤维化包含所有同构，因此 $\widetilde{\mathrm{U}}_\lambda \to \mathrm{U}_\lambda$ 具有 Unit 型结构。

（Σ-类型） 由于（$\widetilde{\mathrm{U}}_\lambda \to \mathrm{U}_\lambda$)-纤维化根据构造是 λ-小纤维化，而 λ-小纤维化在复合下封闭，$\widetilde{\mathrm{U}}_\lambda \to \mathrm{U}_\lambda$ 的泛性质由此赋予其一个 Σ-类型结构。

（Π-类型） 对于 Π类型，该结果由 [KL25a，引理 1.5], 以及这样一个事实： λ小纤维化在以下操作下封闭沿 λ小纤维化进行推前，这是由右适当性得证，依据是 [Awo23a，推论 123] 以及 λ的不可达性。

（异质路径型）对于异质路径类型结构，我们注意到根据 [KL25b，定理 5。9] 应用于 $\square^1$ 和引理 7.10，该纤维化路径对象的端点求值映射纤维化路径对象

$$\left(\mathrm{ev}^*(\widetilde{\mathrm{U}}_\lambda \times \mathrm{U}_\lambda) \to (\pi_\lambda)^*(\pi_\lambda)_*(\widetilde{\mathrm{U}}_\lambda \times \mathrm{U}_\lambda)\right)$$

$$\widehat{P}^{\square^1}_{(\pi_\lambda)_*(\widetilde{\mathcal{U}}_\lambda \times \mathcal{U}_\lambda)}$$

是一个纤维化，并且也是 λ-小的，因为不可达性 λ的性质。因此，根据 $\widetilde{\mathrm{U}}_\lambda \to \mathrm{U}_\lambda$一次

~此外，$U_\lambda \to U_\lambda$ 具有异质路径类型结构。

((NCTT-FILL)) ~ ~我们必须证明 $U_\lambda \to U_\lambda$ 存在 δ偏向的填充结构。为此，我们使用 [KL25b, 定理 1.10]。特别地，根据例 2.24，定义 2.32 中的左映射 $(\Omega \vee 是_\delta)^*\partial\Omega \hookrightarrow \Omega \times \mathbb{I}$ 即为推出积 $(\partial\Omega \hookrightarrow \Omega)\widehat{\times}(\{\delta\} \hookrightarrow \square^1)$。由引理 7.10 可知，该推出积是平凡余纤维化，因此根据 [KL25b, 定理 1.10] 即得结论。

((NCTT-FILL-WKCOMP)) 推理与 (NCTT-FILL) 相同，只是我们改用 [KL25b，定理 6。5]，而不是 [KL25b，定理 1。10]。这验证了填充的计算规则在命题意义下成立。

((NCTT-UNIV)) ~再次应用 [Awo23a 命题 91]，我们可以找到一个分类器 $U_\kappa \to U_\kappa$，用于 κ-小纤维化，并将其作为内部宇宙。重复用于验证 λ的 (nctt-fib) 的论证，我们看到~$U_\kappa \to U_\kappa$ 也具有这些逻辑结构。此外，我们注意到 $U_\kappa \to 1$ 是 λ-小的，而且是纤维化的，因为[Awo23a 推论 123] 表明，小纤维化可以沿平凡~余纤维化延拓，因此 $U_\kappa \to 1$ 是 $U_\lambda \to U_\lambda$的一个拉回。为确保内部宇宙的这些逻辑结构与外部宇宙的逻辑结构相容，我们注意到 $U_\kappa \hookrightarrow U_\lambda$ 是一个子预层，因此可以使用 [Awo23b 命题 6]重新对齐 U_λ 的逻辑结构。

((NCTT-HEXT)) 映射 $\mathrm{tgt} : \mathrm{Hlso}^{\mathrm{Id}_0}_{\sim}\mathcal{U}_\kappa(\ \widetilde{}\ \mathcal{U}_\kappa) \to \mathcal{U}_\kappa$定义 4.5 中的这一映射，根据构造 4.1 和定理 6.14是一个平凡纤维化，因此由 [KL25b定理 1。10]应用于引理 7.10 和定理 7.9，即可得出结果；它还给出了所需的 Glue-类型结构。

— ■

参考文献

[ABCHHL21] Carlo Angiuli、Guillaume Brunerie、Thierry Coquand、Robert Harper、Kuen-Bang Hou (Favonia) 和 Daniel R. Licata。“笛卡尔立方类型论的语法与模型”。载于：《计算机科学中的数学结构》31.4 (2021)，第 424–468 页。网址：https://doi.org/10.1017/S0960129521000347。

[ACHH18] Carlo Angiuli、Evan Cavallo、Kuen-Bang Hou (Favonia)、Robert Harper 和 Jonathan Sterling。“红色PRL 证明助手（特邀论文）”。载于：第*13*届逻辑框架与元语言：理论与实践国际研讨会论文集，*LFMTP@FSCD 2018*，牛津，英国，*2018*年*7*月*7*日。开放出版协会，2018年，第1–10页。网址：https://doi.org/10.4204/EPTCS.274.1。[AHH18] Carlo Angiuli、Kuen-Bang Hou (Favonia) 和 Robert Harper。“笛卡尔立方计算类型论：用路径与等式进行构造性推理”。载于：第*27*届*EACSL*计算机科学逻辑年会（*CSL 2018*）。第119卷。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）。达格施图尔城堡

— 莱布尼茨信息学中心，2018年，6:1–6:17。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2018.6.[AK18] Thorsten Altenkirch 和 Ambrus Kaposi。“迈向一种不含区间的立方类型论”。载于：第21届证明与程序类型国际会议（TYPES 2015）。第69卷。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2018年，3:1–3:27。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.TYPES.2015.3.[AKGB24] Frederik Lerbjerg Aagaard、Magnus Baunsgaard Kristensen、Daniel Gratzer 和 Lars Birkedal。“统一立方类型论与多模态类型论”。载于：《计算机科学逻辑方法》第20卷第4期，25（2024年12月）。网址：https://lmcs.episciences.org/9266.[Awo23a] Steve Awodey。笛卡尔立方模型范畴。2023年。arXiv：2305.00893 [math.CT]。网址：https://arxiv.org/abs/2305.00893.[Awo23b] Steve Awodey。关于 Hofmann-Streicher 宇宙。2023年。arXiv：2205.10917 [math.CT]。网址：https://arxiv.org/abs/2205.10917.[BBCGSV16] Lars Birkedal、Aleš Bizjak、Ranald Clouston、Hans Bugge Grathwohl、Bas Spitters 和 Andrea Vezzosi。“守卫立方类型论：守卫递归的路径相等”。载于：第25届EACSL计算机科学逻辑年会（CSL 2016）。第62卷。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2016年，23:1–23:17。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2016.23.[BR20] Julia E. Bergner 和 Charles Rezk。“(∞, n)-范畴模型的比较，II”。载于：《拓扑学杂志》13.4（2020年），第1554–1581页。网址：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/topo.12167.[CCHM15] Cyril Cohen、Thierry Coquand、Simon Huber 和 Anders Mörtberg。“立方类型论：单价公理的构造性解释”。载于：FLAP 4（2015年），第3127–3170页。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.TYPES.2015.5.[CH19] Evan Cavallo 和 Robert Harper。参数化立方类型论。2019年。arXiv：1901.00489 [cs.LO]。网址：https://arxiv.org/abs/1901.00489.[CH21] Evan Cavallo 和 Robert Harper。“立方类型论的内部参数性”。载于：《计算机科学逻辑方法》第17卷第4期，5（2021年）。网址：https://lmcs.episciences.org/6503.[CHS22] Thierry Coquand、Simon Huber 和 Christian Sattler。“立方类型论的典范性与同伦典范性”。载于：《计算机科学逻辑方法》第18卷第1期，28（2022年）。网址：https://lmcs.episciences.org/6309.[Cis06] Denis-Charles Cisinski。作为同伦类型模型的预层。《星丛》第308卷。法国数学会，2006年。网址：https://www.numdam.org/item/AST_2006__308__R1_0/.[Cis14] Denis-Charles Cisinski。优雅同伦类型模型的单值宇宙。2014年。arXiv：1406.0058 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/1406.0058.[CK23] Daniel Carranza 和 Krzysztof Kapulkin。“立方集合的同伦群”。载于：《数学展望》41.4（2023年）。网址：https://doi.org/10.1016/j.exmath.2023.125518.[DKLS24] Brandon Doherty、Krzysztof Kapulkin、Zachery Lindsey 和 Christian Sattler。“$(\infty, 1)$-范畴的立方模型”。载于：《美国数学会回忆录》297.1484（2024年），第v+110页。网址：https://doi.org/10.1090/memo/1484。

[GJ99] Paul G. Goerss 和 John F. Jardine。《单纯同伦论》。第174卷，《数学进展丛书》。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1999年，第 xvi+510 页。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8707-6。[GSS22] Nicola Gambino、Christian Sattler 和 Karol Szumiło。“构造性 Kan–Quillen 模型结构：两种新的证明”。载于：《数学季刊》73.4（2022年），第 1307–1373 页。网址：https://doi.org/10.1093/qmath/haab057。[Hov99] Mark Hovey。《模型范畴》。第63卷，《数学调查与专著丛书》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年。[Jel24] Vit Jelínek。《类型论及其语义》。硕士论文。布尔诺：马萨里克大学信息学院，2024年。网址：https://is.muni.cz/th/fl75q/。[Kan55] Daniel M. Kan。“抽象同伦”。载于：《美国国家科学院院刊》41.12（1955年），第 1092–1096 页。网址：https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/ pnas.41.12.1092。[Kan56] Daniel M. Kan。“抽象同伦 II”。载于：《美国国家科学院院刊》42.5（1956年），第 255–258 页。网址：https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas. 42.5.255。[KL18] Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。“类型论的同伦论”。载于：《数学进展》337（2018年），第 1–38 页。网址：https://www. sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870818303062。[KL21] Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。“单值基础的单纯形模型（根据 Voevodsky）”。载于：《欧洲数学学会杂志》23.6（2021年），第 2071–2126 页。网址：https://ems.press/journals/jems/articles/274693。[KL25a] Krzysztof Kapulkin 和 Yufeng Li。《类型论宇宙范畴模型中的（带基点）单值性》。2025年。arXiv：2512.16697 [math.CT]。网址：https://arxiv.org/abs/2512. 16697。[KL25b] Krzysztof Kapulkin 和 Yufeng Li。《结构化提升工具箱》。2025年。arXiv：2512.14988 [math.CT]。网址：https://arxiv.org/abs/2512.14988。[LOPS18] Daniel R. Licata、Ian Orton、Andrew M. Pitts 和 Bas Spitters。“同伦类型论模型中的内部宇宙”。载于：第3届形式化结构与计算演绎国际会议（FSCD 2018）。第108卷，信息学国际论文集（LIPIcs）。德国达格施图尔，2018年，第22:1–22:17页。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSCD.2018.22。[Mal09] Georges Maltsiniotis。“带联结的立方范畴是严格检验范畴”。载于：《同调、同伦及其应用》11.2（2009年），第 309–326 页。网址：https: //doi.org/10.4310/hha.2009.v11.n2.a15。[OP16] Ian Orton 和 Andrew M. Pitts。“托普斯中立方类型论建模的公理”。载于：第25届EACSL计算机科学逻辑年会（CSL 2016）。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2016年，第24:1–24:19页。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2016.24。[Qui67] Daniel G. Quillen。《同伦代数》。第43号卷，《数学讲义》。施普林格出版社，柏林—纽约，1967年。[Sat17] Christian Sattler。《等价延拓性质与模型结构》。2017年。arXiv：1704.06911 [math.CT]。网址：https://arxiv.org/abs/1704.06911。[Swa18] Andrew Swan。《单值类型论预层模型中的路径类型与恒等类型的区分》。2018年。arXiv：1808.00920 [math.LO]。网址：https://arxiv.org/abs/1808. 00920。

[Uem23] Taichi Uemura。“类型论语义的一般框架”。载于：《计算机科学中的数学结构》33.3（2023年），第 134–179 页。网址：https://doi. org/10.1017/S0960129523000208。[Uni13] 单值基础计划。《同伦类型论：数学的单值基础》。高等研究院：https://homotopytypetheory.org/ book，2013年。[VMA19] Andrea Vezzosi、Anders Mörtberg 和 Andreas Abel。“立方 Agda：一种具有单值性和高阶归纳类型的依赖类型编程语言”。载于：《ACM 编程语言》3.ICFP（2019年）。网址：https://doi.org/10.1145/3341691。[Voe15a] Vladimir Voevodsky。《宇宙范畴所定义的 C-系统中的 Martin-Löf 恒等类型》。2015年。arXiv：1505.06446 [math.CT]。网址：https://arxiv.org/abs/1505.06446。[Voe15b] Vladimir Voevodsky。“由宇宙范畴定义的 C-系统”。载于：《范畴论及其应用》30.37（2015年），第 1181–1214 页。网址：http://www.tac.mta.ca/ tac/volumes/30/37/30-37abs.html。[Voe17] Vladimir Voevodsky。“由宇宙范畴定义的 C-系统上的（Π, λ）-结构”。载于：《范畴论及其应用》32.4（2017年），第 113–121 页。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/32/4/32-04abs.html。